Testo e problemi tratti dal libro
E. Castelnuovo, C. Gori Giorgi, D. Valenti
‘Matematica nella realtà’

Dalla retta di regressione ad alcune leggi sperimentali

A) La retta di regressione e la legge lineare

Nello studio dei circuiti elettrici è importante conoscere le caratteristiche dei generatori di corrente; le due caratteristiche principali di una pila, che è un semplice generatore di corrente continua, sono le seguenti:

– la forza elettromotrice, che è la tensione massima che la pila può erogare;
– la resistenza interna che la pila offre al passaggio della corrente.

Vediamo ora come si possono determinare queste caratteristiche di una pila. Si realizza un circuito come quello mostrato nelle figg. 18 e 19.

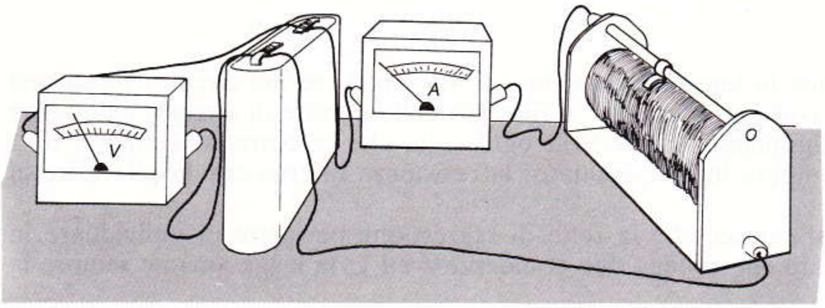

Fig. 18

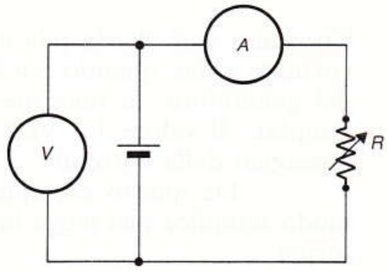

Fig. 19

Il voltmetro V misura la tensione y erogata dalla pila, mentre l'amperometro A indica l'intensità x della corrente, che attraversa il circuito al variare della resistenza R inserita. Durante un esperimento si sono ottenute le misure indicate nella tabella seguente:

x (in Ampère)	y (in Volt)
0	4,8
0,2	4,5
0,4	4,2
0,6	4
0,8	3,7
1	3,4

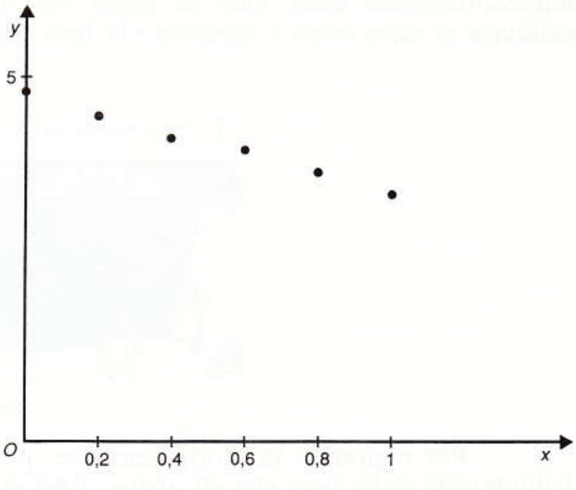

Fig. 20

I dati sono rappresentati nella fig. 20: si ottiene una nuvola di punti che sembra “addensarsi” intorno ad una retta r, non passante per O.

Il procedimento esposto alla fine del paragrafo precedente permette di determinare rapidamente la retta r di regressione, che ha equazione

$$y=mx+p.$$

Si procede così.

1) Si calcola la media M_x dei dati x e la media M_y dei dati y; si ottiene:

$$M_x=\frac{\sum_1^6{}_k\, x_k}{6}=0{,}5 \qquad \text{e} \qquad M_y=\frac{\sum_1^6{}_k\, y_k}{6}=4{,}1$$

2) La pendenza $\overline{m}$ della retta è allora data da:

$$\overline{m}=\frac{\sum_{1}^{6}{}_k\,(x_k-M_x)(y_k-M_y)}{\sum_{1}^{6}{}_k\,(x_k-M_x)^2}=-1{,}4.$$

3) Il termine noto $\overline{p}$ è dato da

$$\overline{p}=M_y-\overline{m}M_x=4{,}8$$

La retta di regressione, che "raccorda" i punti sperimentali, basandosi sul metodo dei minimi quadrati (fig. 21), ha dunque l'equazione seguente:

$$y=-1{,}4x+4{,}8.$$

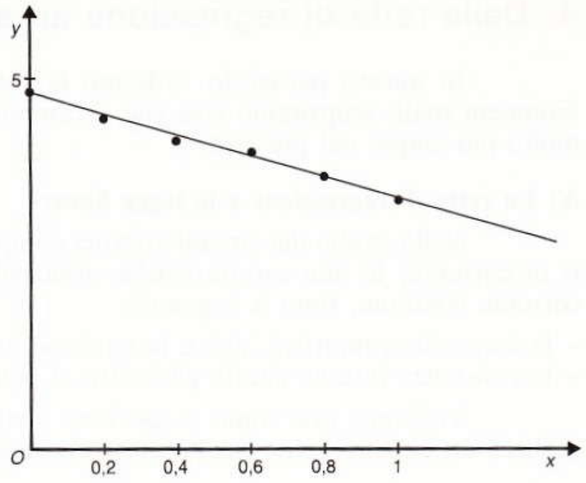

Fig. 21

Troviamo così che la pila eroga la tensione massima (di 4,8 Volt), se nel circuito passa una corrente nulla; quando poi la corrente aumenta, si rilevano delle perdite di energia all'interno del generatore: la tensione diminuisce di 1,4 Volt ogni volta che la corrente aumenta di 1 Ampère. Il valore 1,4 Volt/Ampère indica, appunto, la resistenza interna che la pila offre al passaggio della corrente.

Da questo esempio si capisce che la retta di regressione permette di individuare in modo semplice una legge lineare che collega due grandezze x ed y; la legge assume sempre la forma

$$y=mx+p.$$

B) La legge esponenziale e la scala semilogaritmica.

Si legge spesso che conviene captare la luce del Sole fuori dell'atmosfera e questo perché anche dei mezzi trasparenti come l'aria o l'acqua assorbono la luce. Del resto è noto che, a grandi profondità marine, ci si trova quasi al buio. È facile avere un'idea intuitiva dell'assorbimento della luce da parte dell'acqua: immaginiamo (fig. 22) l'acqua del mare suddivisa in tanti strati e seguiamo la luce che attraversa i vari strati d'acqua.

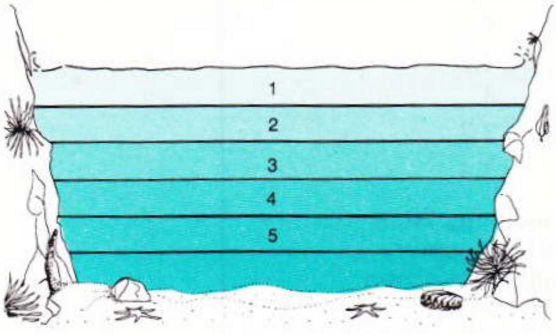

Fig. 22

Per ragionare in modo semplice, possiamo pensare che ogni strato assorba la metà dell'intensità della luce che gli arriva. Così si capisce che, dopo aver attraversato il 1° strato, l'intensità luminosa è dimezzata, dopo il 2° strato è diventata la metà della metà...; si intuisce che l'intensità della luce diminuisce con una legge esponenziale.

Per verificare e precisare quest'intuizione, si può organizzare l'esperimento mostrato in fig. 23. Si espone al Sole una vaschetta piena d'acqua; nella vaschetta è inserita una riga graduata lungo la quale può scorrere uno specchietto. In questo modo, la luce del Sole, dopo aver attraversato l'acqua, colpisce lo specchio e torna indietro. Un esposimetro, tenuto fuori dell'acqua nel punto in cui "riemerge" il raggio di luce, permette di misurare l'intensità della luce, dopo che ha attraversato l'acqua.

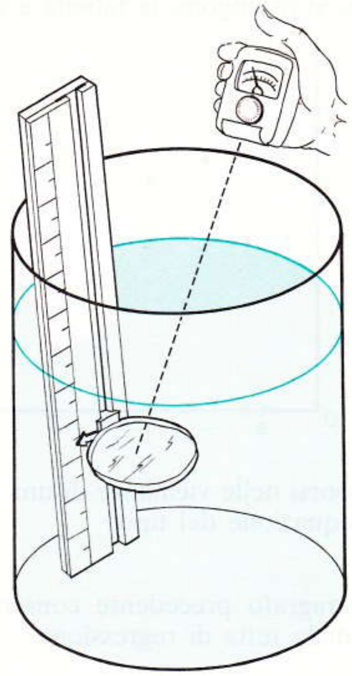

Fig. 23

Nella tabella seguente si trovano i dati che abbiamo ottenuto in un esperimento di questo tipo: abbiamo indicato con L l'intensità della luce espressa nelle unità dell'esposimetro usato e con x la misura in decimetri dello "spessore d'acqua attraversato dalla luce nel viaggio di andata e ritorno".

x	L
0	45
5	36
10	30
15	23
20	20
25	15
30	12
35	11
40	9

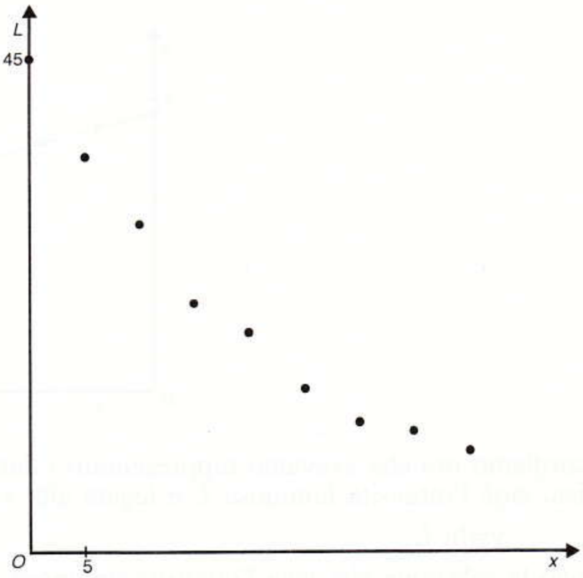

Fig. 24

Rappresentando i dati su un grafico cartesiano (fig. 24), si "intravede" una curva decrescente.

Ora, per verificare se si tratta effettivamente di una curva esponenziale, basta rappresentare i dati con una scala semilogaritmica, riportando sull'asse delle ascisse la profondità x e sull'asse delle ordinate la grandezza

$$y=\ln L.$$

Sappiamo infatti (cap. 3, Parte terza, paragrafo 6) che se i dati così rappresentati si dispongono lungo una retta, le due grandezze x ed L sono legate da una legge esponenziale.

Con i dati a disposizione, si ottengono la tabella e il grafico di fig. 25.

x	$y=\ln L$
0	3,81
5	3,58
10	3,40
15	3,14
20	2,99
25	2,71
30	2,48
35	2,40
40	2,20

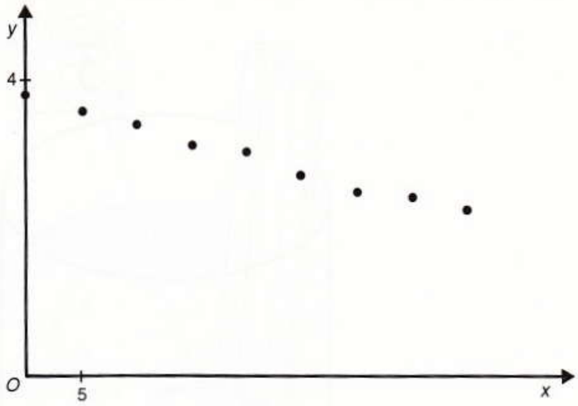

Fig. 25

Questa volta i punti sembrano disporsi nelle vicinanze di una retta che, certamente, non passa per l'origine O ed ha dunque un'equazione del tipo

$$y=mx+p.$$

I risultati esposti alla fine del paragrafo precedente consentono, anche in questo caso, di scrivere rapidamente l'equazione della retta di regressione.
Si ottiene:

1) $M_x=20$ e $M_y=2{,}98$,
2) $\overline{m}=-0{,}041$
3) $\overline{p}=3{,}8$

In definitiva, l'equazione della retta r che più si avvicina ai punti (fig. 26) è

$$y=-0{,}041x+3{,}8.$$

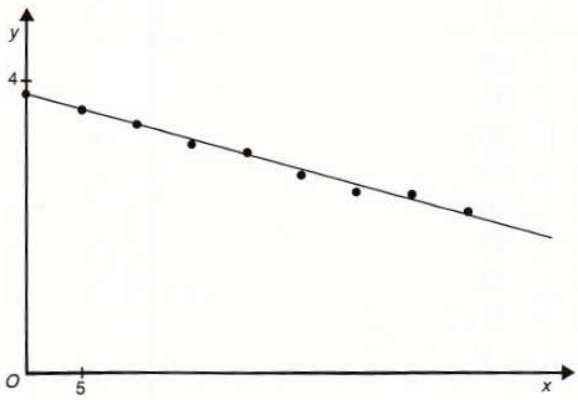

Fig. 26

Ricordiamo ora che avevamo rappresentato i dati in fig. 25, valendoci di una scala semilogaritmica, cioè l'intensità luminosa L è legata alla variabile y dalla relazione

$$y=\ln L.$$

Perciò la relazione che lega l'intensità luminosa L alla profondità x dell'acqua è la seguente:

$$\ln L=-0{,}041x+3{,}8,$$

da cui si ottiene

$$L=e(-0{,}041x+3{,}8),$$

ossia

$$L=e^{3,8}e^{-0,041}x$$

da cui si ricava:

$$L=45e^{-0{,}041x}. \qquad (1)$$

Si conclude così che l'assorbimento della luce da parte dell'acqua può essere descritto, con buona approssimazione, come un fenomeno di decrescita continua regolato da una legge esponenziale in base e (fig. 27).

Si può ancora osservare che risulta

$$e^{-0{,}041x}=(e^{-0{,}041})^x=0{,}96^x,$$

così la legge (1) si esprime nella forma seguente:

$$L=45\cdot 0{,}96^x$$

$$L=45(1-0{,}04)^x.$$

In questo modo si evidenziano meglio due caratteristiche della legge trovata:

1) 45 indica l'intensità della luce "fuori dall'acqua", dato che si ottiene

$$L=45 \text{ per } x=0;$$

2) 0,04=4% indica il tasso di diminuzione dell'intensità della luce per ogni decimetro d'acqua attraversato (vedi anche cap. 3, Parte seconda, paragrafo 5).

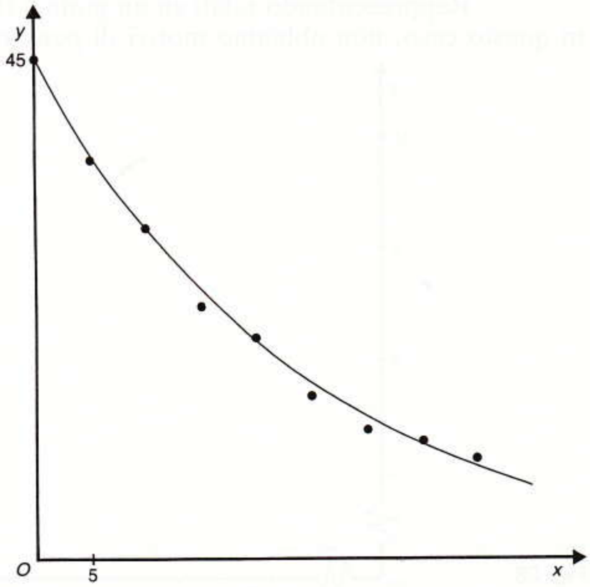

Fig. 27

L'esempio ora sviluppato conduce anche ad una conclusione di carattere più generale: la retta di regressione permette di individuare una legge esponenziale che collega due grandezze x ed y rappresentate in una scala semilogaritmica. Con questo tipo di scala si indicano infatti sull'asse delle ascisse le misure relative alla x, mentre sull'asse delle ordinate si rappresenta il logaritmo (per esempio in base e) dei dati relativi alla y. Così la retta di regressione conduce a legare le grandezze x ed y con un'equazione del tipo

$$\ln y=mx+p.$$

Da questa relazione si ricava

$$y=e^{(mx+p)}=e^p\cdot e^{mx};$$

indicando poi

$$A=e^p,$$

si arriva *a* trovare una legge esponenziale del tipo

$$y=Ae^{mx}.$$

C) Leggi del tipo $y=Ax^m$ e scala logaritmica

Esaminiamo infine un altro modo di rappresentare i dati, per cercare leggi sperimentali: *la scala logaritmica*, in cui viene rappresentato sia sull'asse delle ascisse che sull'asse delle ordinate il logaritmo (in base 10 o in base e) delle misure.

Vediamo subito come si procede, considerando ancora una volta un problema di fisica: si è misurata l'accelerazione di gravità g alla stessa latitudine, ma a quote differenti e si è rilevata una diminuzione di g all'aumentare della distanza R dal centro della Terra. Ecco i dati ottenuti:

R (in metri)	g (in m/sec^2)
$6{,}370\cdot 10^6$	9,806
$6{,}378\cdot 10^6$	9,782
$6{,}386\cdot 10^6$	9,757
$6{,}402\cdot 10^6$	9,71
$6{,}470\cdot 10^6$	9,60
$6{,}870\cdot 10^6$	8,53
$7{,}370\cdot 10^6$	7,41

Il primo valore di R è quello del raggio della Terra e, dunque, la corrispondente accelerazione di gravità è misurata sulla superficie della Terra; l'ultimo dato, invece, si riferisce ad un'altezza di 10^6 metri, cioè di 1000 chilometri, raggiunta molto spesso dai satelliti artificiali.

Rappresentando i dati su un grafico (fig. 28) si "intravede" una curva decrescente ma, in questo caso, non abbiamo motivi di pensare ad una legge esponenziale.

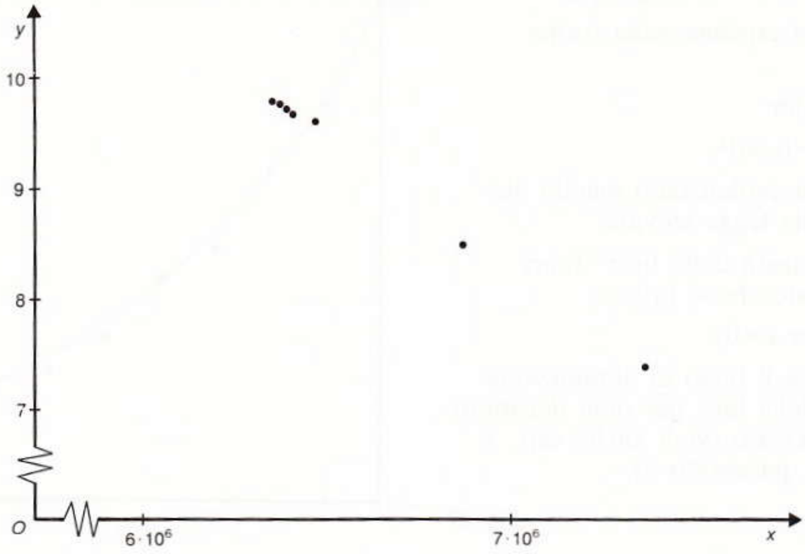

Fig. 28

Proviamo allora a calcolare il logaritmo dei dati, osservando che la presenza ripetuta di potenze di 10 suggerisce di valersi dei logaritmi decimali. Si ottiene:

$x=\log R$	$y=\log g$
6,841	0,992
6,8047	0,990
6,8052	0,989
6,8063	0,987
6,811	0,98
6,837	0,93
6,867	0,87

Rappresentiamo i nuovi dati su un piano cartesiano (fig. 29): i punti sembrano addensarsi intorno ad una retta che non passa per O e che ha, dunque, un'equazione del tipo

$$y=mx+p;$$

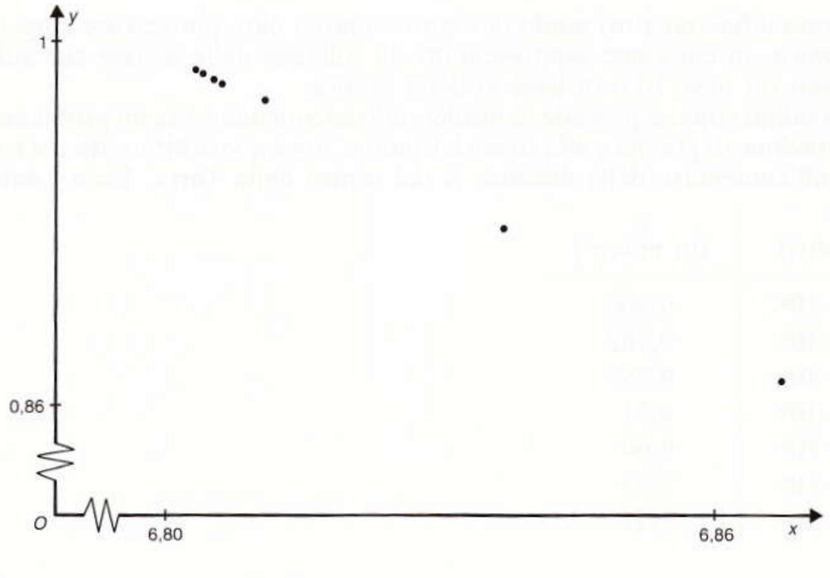

Fig. 29

possiamo ora determinare la pendenza m e il termine noto p, valendoci ancora una volta dei risultati esposti alla fine del paragrafo precedente.
Si procede così:

1) Si calcolano le medie dei dati; si ottiene:
$$M_x=6{,}819 \qquad \text{e} \qquad M_y=0{,}963.$$
2) Si determina la pendenza m, che vale
$$\overline{m}\cong-2;$$
3) Si determina il termine noto p, che è
$$\overline{p}=14.$$

Si ha dunque, per la retta di regressione, la seguente equazione:
$$y=-2x+14.$$
Ricordando poi che risulta
$$y=\log R \qquad \text{e} \qquad x=\log g,$$
si trova una prima relazione che collega le due variabili R e g; si ha:
$$\log g=-2 \log R+14,$$
ossia
$$\log g+2 \log R=14.$$
Valendosi ora delle proprietà dei logaritmi esposte nel cap. 3, Parte 1, paragrafo 8, si scrive
$$\log (g\cdot R^2)=14,$$
da cui
$$g\cdot R^2=10^{14}$$
e, infine
$$g=\frac{10^{14}}{R^2}.$$
Si ottiene dunque che l'accelerazione di gravità è legata alla distanza dal centro della Terra dalla "legge dell'inverso del quadrato", una delle leggi fisiche più importanti, che ricorre sia nello studio della gravitazione che in quello dell'elettromagnetismo.

Anche da questo esempio possiamo trarre delle conclusioni più generali. Per esaminare più misure di due grandezze x ed y ci si può valere della scala logaritmica, considerando i logaritmi (per esempio in base 10) delle misure. In tal caso la retta di regressione conduce a collegare le grandezze x ed y con un'equazione del tipo
$$\log y=m \log x+p,$$
ossia,
$$p= \log y-m \log x.$$
Valendosi poi delle proprietà dei logaritmi (Cap. 3, Parte 1, paragrafo 8), si ottiene:
$$p=\log y-\log x^m,$$
o, anche
$$p=\log \left(\frac{y}{x^m}\right),$$
da cui si ricava:
$$10^p=\frac{y}{x^m}.$$
Ponendo ora
$$A=10^p,$$

si arriva a collegare le due grandezze x ed y con una legge del tipo

$$y=Ax^m.$$

Confrontando i procedimenti svolti in questi ultimi due casi B e C, si traggono alcune conclusioni di carattere generale:

- la scala semilogaritmica è particolarmente indicata per esaminare fenomeni in cui si intuisce una legge esponenziale;
- conviene valersi della scala logaritmica per cercare leggi sperimentali in cui una variabile sia collegata ad una potenza dell'altra.

Problemi su leggi sperimentali scoperte con una scala semilogaritmica

42. I seguenti dati approssimativi si riferiscono alla popolazione p rilevata nei censimenti ed espressa in milioni:

anno	1861	1871	1881	1901	1911	1921	1931	1936	1951	1961	1971	1981
p	22,18	27,30	28,95	32,96	35,84	38,45	41,65	42,99	47,52	50,62	54,14	56,24

Rappresentare i dati in scala semilogaritmica, riportando sull'asse delle ascisse il tempo x e sull'asse delle ordinate $y=\ln p$. A partire dai dati così elaborati, trovare la retta di regressione con i minimi quadrati. Infine scrivere la legge che lega p ad x.
Qual è il tasso di aumento annuo della popolazione?
Quale popolazione si prevede per il 2000 in Italia?

43. Si studia il decadimento radioattivo dell'uranio (U^{229}), misurando in grammi la massa M di un campione di questa sostanza al variare del tempo t, misurato in minuti. Si ottiene la tabella seguente:

t	0	10	20	30	40	50	60
M	5	4,44	3,93	3,49	3,10	2,76	2,44

Rappresentare i dati in scala semilogaritmica, riportando sull'asse delle ascisse il tempo x e sull'asse delle ordinate $y=\ln M$.
A partire dai dati così elaborati, trovare la retta di regressione con i minimi quadrati. Scrivere infine la legge che lega M ad x.
Qual è il tasso di diminuzione della massa ogni minuto?
Dopo quanto tempo la massa dimezza?

44. In un laboratorio si studia la crescita di cellule cancerogene, mantenute in una coltura sperimentale; si rileva ogni giorno il numero N di cellule presenti nella coltura ottenendo i seguenti dati (il numero N di cellule è dato in migliaia ed il tempo t è misurato in giorni):

t	0	10	20	30	40	50	60
N	3	3,11	3,21	3,33	3,45	3,58	3,71

Rappresentare i dati in scala semilogaritmica, riportando sull'asse delle ascisse il tempo x e sull'asse delle ordinate $y=\ln N$.
A partire dai dati così elaborati, trovare la retta di regressione con i minimi quadrati. Scrivere infine la legge che lega N ad x.
Qual è il tasso giornaliero di crescita dei batteri?
Dopo quanto tempo raddoppierà il numero di batteri?

45. Si studia la scarica di un condensatore, misurando la corrente i al passare del tempo t; si ottiene la seguente tabella, dove i è misurata in milliampère e t in millisecondi:

t	0	1	2	3	4	5
i	8	4,85	2,95	1,79	1,09	0,66

Rappresentare i dati in scala semilogaritmica, riportando sull'asse delle ascisse il tempo x e sull'asse delle ordinate $y=\ln i$.
A partire dai dati così elaborati, trovare la retta di regressione con i minimi quadrati. Scrivere infine la legge che lega i ad x.
Qual è il tasso di diminuzione della corrente ogni millisecondo?
L'amperometro non rileva correnti più piccole di 0,1 milliampère; dopo quanto tempo l'amperometro segna una corrente 0?

46. La sensibilità delle pellicole fotografiche è misurata sia in unità ASA (American Standard Association) che in unità DIN (Deutsche Industrie Normen). In un manuale di fotografia si trova la seguente tavola di corrispondenze:

ASA	1,0	1,2	1,6	2	2,5	3	4	5	6	8	10	12	16	20	25	32	40	50	64	80	100
DIN	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21

Rappresentare i dati in scala semilogaritmica, riportando sull'asse delle ascisse la sensibilità x in DIN e sull'asse delle ordinate il logaritmo y della sensibilità in ASA.
A partire dai dati così elaborati, trovare la retta di regressione con i minimi quadrati. Scrivere infine la legge che lega la misura della sensibilità in ASA a quella in DIN.
Verificare l'attendibilità della legge ottenuta, calcolando in ASA la sensibilità di una pellicola valutata 30 DIN (*i manuali riportano 800 ASA*).

47. Per studiare la memoria dell'uomo, lo psicologo Strong ha ripetuto più volte un esperimento di questo tipo: leggeva ad una persona una lista di 20 parole; lasciava passare del tempo, poi chiedeva alla persona di riconoscere le parole precedenti, che erano mescolate a 20 nuove parole. In ogni situazione Strong calcolava il numero N di parole riconosciute, il numero M di parole riconosciute in modo errato e calcolava il punteggio R, dato da

$$R=100\frac{M-N}{20}.$$

In un esperimento di questo tipo si sono ottenuti i seguenti dati (R è il punteggio e t è il tempo in minuti che trascorre fra la lettura e la prova di memoria):

t	1	5	15	30	60	120	240	480	720	1440	2880	5760
R	84	71	61	56	54	47	45	38	36	26	20	16

Rappresentare i dati in scala semilogaritmica, riportando sull'asse delle ascisse $x=\log t$ e sull'asse delle ordinate $y=R$.
A partire dai dati così elaborati, trovare la retta di regressione con i minimi quadrati. Scrivere infine la legge che lega R a t.

Problemi su leggi sperimentali scoperte con una scala logaritmica

48. Si studia il movimento di una pallina, misurando lo spostamento s al variare del tempo t; si ottengono i dati presentati nella tabella seguente (il tempo t è misurato in secondi e lo spostamento s in centimetri):

s	0,03	0,06	0,1	0,13	0,17	0,2	0,23	0,27	0,3	0,33
t	7,70	8,75	9,80	10,85	11,99	13,09	14,18	15,22	16,31	17,45

Rappresentare i dati in scala logaritmica, indicando sull'asse delle ascisse $x=\log t$ e sull'asse delle ordinate $y=\log s$.
A partire dai dati così elaborati, trovare la retta di regressione con i minimi quadrati. Scrivere infine la legge che lega s a t.
Quale spostamento si può prevedere dopo 1 secondo di movimento?

49. Studiando il movimento dei pianeti del sistema solare, si esamina la tabella seguente, dove R indica il raggio dell'orbita del pianeta (misurato in unità astronomiche, cioè assumendo il raggio dell'orbita della Terra come unità di lunghezza) e T il periodo (cioè il tempo impiegato a compiere una rotazione completa intorno al Sole), misurato in giorni:

Pianeta	R	T
Mercurio	0,387	88,0
Venere	0,723	224,70
Terra	1	365,26
Marte	1,524	686,96
Giove	5,203	4332,66
Saturno	9,555	10759,54
Urano	19,218	30689,24
Nettuno	30,11	60182,94
Plutone	38,518	90741,58

Rappresentare i dati in scala logaritmica, indicando sull'asse delle ascisse $x=\log T$ e sull'asse delle ordinate $y=\log R$.
A partire dai dati elaborati, trovare la retta di regressione con i minimi quadrati. Scrivere infine la legge che lega R a T: si troverà **la 3ª legge di Keplero**.

50. In un laboratorio si studia il comportamento di una lente convergente: si dispone una sorgente di luce S a distanza x da uno dei fuochi e se ne ricerca l'immagine reale S' con un piccolo schermo; si misura quindi la distanza x' di S' dall'altro fuoco F' della lente. In un esperimento di questo tipo si sono ottenuti i dati seguenti (x ed x' sono misurate in centimetri).

x	100	50	30	20	15	10	7,3	4,5	2,4
x'	2,4	4,5	7,3	11,5	15	21,5	32	48	95

Rappresentare i dati in scala logaritmica, indicando sull'asse delle ascisse $X=\log x$ e sull'asse delle ordinate $Y=\log x'$.
A partire dai dati così elaborati, trovare la retta di regressione con i minimi quadrati. Scrivere infine la legge che lega x ad x'.
Dove si prevede di trovare l'immagine S', se la sorgente S viene disposta ad una distanza $x=150$?

51. In un laboratorio si studiano le trasformazioni adiabatiche di un gas, cioè le trasformazioni che avvengono mentre il gas non può scambiare calore con l'esterno.
Per questo si racchiude il gas in un recipiente (tipo thermos) che limiti il più possibile le dipsersioni di calore; il recipiente è chiuso da un pistone a tenuta perfetta, ma con attrito trascurabile.
Il gas, inizialmente a temperatura ambiente, viene lentamente compresso; durante la compressione si misura in cm^3 il volume V occupato dal gas ed in gradi Kelvin la corrispondente temperatura T. Durante un esperimento di questo tipo il gas racchiuso nella provetta era l'aria e si sono ottenuti i seguenti dati:

temperatura T	294	312,7	336,3	367,8	412,6	485,3	640,3
volume V	70	60	50	40	30	20	10

Rappresentare i dati in scala logaritmica, indicando sull'asse delle ascisse $x=\log V$ e sull'asse delle ordinate $y=\log T$.
A partire dai dati così elaborati, trovare la retta di regressione con i minimi quadrati. Scrivere infine la legge che lega T a V.
Quale temperatura si prevede se risulta $V=5$?

52. Sempre studiando le trasformazioni adiabatiche di un gas come nell'esercizio precedente, si comprime lentamente un gas, misurandone in cm^3 il volume V ed in atmosfere la relativa pressione P. Durante un esperimento di questo tipo il gas racchiuso nella provetta era l'aria e si sono ottenuti i seguenti dati:

pressione P	1	1,24	1,60	2,19	3,27	5,78
volume V	70	60	50	40	30	20

Rappresentare i dati in scala logaritmica, indicando sull'asse delle ascisse $x=\log V$ e sull'asse delle ordinate $y=\log P$.
A partire dai dati così elaborati, trovare la retta di regressione con i minimi quadrati. Scrivere infine la legge che lega P a V.
Quale pressione si prevede se risulta $V=10$?

53. Agli inizi del nostro secolo, l'economista italiano V. Pareto osservò nei paesi ad economia capitalista una certa regolarità nella distribuzione dei redditi. Una delle serie di dati esaminati da Pareto è presentata nella tabella seguente: r indica il reddito (in dollari) ed N indica il numero di persone che hanno un reddito non inferiore a r (N è espresso in migliaia); i dati si riferiscono agli Stati Uniti nel 1919.

r	500	1000	1500	2000	3000	5000	10.000	25.000	50.000	100.000	200.000
N	35.541	23.010	10.512	5290	2225	841	254	62	21	7	2

Rappresentare i dati in scala logaritmica, indicando sull'asse delle ascisse $x=\log r$ e sull'asse delle ordinate $y=\log N$.
A partire dai dati così elaborati, trovare la retta di regressione con i minimi quadrati. Scrivere infine la legge che lega N ad r: si avrà l'equazione di una delle **curve di Pareto**.
Qual è il numero N che si può prevedere in corrispondenza ad $r=7000$?