Le equazioni polinomiali nella scuola secondaria: che cosa rimane all'Università?

Daniela Valenti intervista Claudio Gori Giorgi, dicembre 2009*

Durante i suoi corsi alla Facoltà di Ingegneria, negli scritti degli studenti ha trovato degli errori ricorrenti che si possono collegare allo studio delle equazioni polinomiali nella scuola secondaria?

Una premessa indispensabile: non ho alcuna intenzione di entrare nel gioco 'dare la colpa agli insegnanti che ci hanno preceduto', con il quale andiamo indietro fino alla scuola dell'infanzia.

Molti sono i docenti di matematica competenti e impegnati, che insegnano spesso in condizioni oggettive di grande difficoltà e proprio a questi insegnanti interessa una riflessione su quello che resta nella formazione degli studenti, come dimostra la larga partecipazione alle iniziative di supporto al passaggio scuola – Università, attive da più di dieci anni, anche a livello nazionale: ad esempio, il **Piano Lauree Scientifiche**, **Test di ingresso anticipati**, **progetto AMBO**.

Ma gli esiti dei test d'ingresso all'Università 'fotografano' gli studenti del primo anno, quando non pochi giovani si iscrivono a una facoltà scientifica anche se hanno una preparazione di base incerta. Per questo vorrei rispondere non con dati già noti, ma con osservazioni sugli studenti degli ultimi anni di ingegneria: c'è già stata una forte selezione ed è rimasta una larga maggioranza di 'bravi in matematica' ... eppure ogni anno ritrovo negli scritti degli errori ricorrenti. Ecco un esempio.

$$(x^2-2)(x-1)^2=0 \qquad (x^2-2)(x^2-2x+1)=0$$

$$x^4-2x^3+\underbrace{x^2-2x^2+4x^2}_{3x^2}-2=0$$

$$P(1)=1-2+3-2=0 \qquad x=1 \text{ soluzione}$$

	1	−2	3	−2
1		1	−1	2
	1	−1	2	=

$$x^2-x+2=0$$

$$x=\frac{1\pm\sqrt{1-8}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{-7}}{2} \quad \text{impossibile}$$

unica soluzione $x=1$

Gli errori sono alla fine di procedimenti ben organizzati di calcolo matriciale, in cui il numero e la molteplicità delle soluzioni dell'equazione polinomiale hanno particolare importanza. La stanchezza può spiegare le 'sviste di calcolo' segnate in rosso, ma come si spiega la scelta del procedimento? Perché lo studente non ha scelto il più semplice e rapido procedimento scritto qui sotto?

$$(x-1)^2(x^2-2)=0 \begin{cases} (x-1)^2=0 \Rightarrow x_1=x_2=1 \\ x^2-2=0 \Rightarrow x^2=2 \begin{cases} x_3=\sqrt{2} \\ x_4=-\sqrt{2} \end{cases} \end{cases}$$

Ha discusso di questi errori ricorrenti con altri colleghi italiani o stranieri?
Sì. E le risposte ponevano altre domande. I colleghi italiani riconoscevano, con le stesse mie perplessità, il procedimento che funestava anche gli scritti dei loro studenti. Ma i colleghi stranieri non conoscevano quel tipo di errori e mi chiedevano 'Che cos'è quella tabellina?'. Poi alcuni dei più anziani ricordavano di aver sentito parlare di quell'antica regola che ormai non veniva più insegnata da tempo.

Ho cominciato ad appassionarmi alla didattica della matematica e a frequentare i convegni internazionali (ad esempio, quelli organizzati dall'**ICMI** o dalla **CIEAEM**): sono un'interessante occasione per discutere con matematici importanti e validi insegnanti di matematica di scuola secondaria. E anche lì solo gli insegnanti italiani riconoscevano nella 'tabellina' la regola di Ruffini e proprio uno di loro mi ha dato un'intrigante spiegazione degli errori: alla fine del lavoro lo studente avverte la stanchezza e si rifugia nei primi procedimenti che ha conosciuto; infatti non ha usato i numeri complessi, che aveva studiato all'università, ma non conosceva nel biennio della scuola secondaria. Lo studente regredisce dunque alla mentalità dei lunghi pomeriggi passati a risolvere equazioni polinomiali sempre con la regola di Ruffini, di cui ricorda lo schema visivo.

Che tristezza per Paolo Ruffini, medico e matematico di valore, non essere ricordato per l'importante teorema di Abel – Ruffini, ma per questa regola mnemonica, del tutto inutile se si studia il più generale, e certo non più complicato, procedimento di divisione dei polinomi!

E questi sono i ricordi degli anni '70 – '90; non erano ancora diffusi i computer e i software di manipolazione simbolica, ma erano già chiari gli effetti nefasti di una formazione matematica 'impara la regola a memoria e fai tanti esercizi senza pensare'. Poi l'impegno universitario per fronteggiare le difficoltà degli studenti diventa più mirato: discuto durante la lezione vari esempi di problemi che concludono ad un'equazione analoga a quella della figura. Nel commentare la soluzione, spiego perché l'equazione è data in una forma che non richiede calcoli meccanici: per gli studi di ingegneria è importante saper riflettere sui procedimenti e scegliere quelli più rapidi ed efficienti; proprio l'opposto dell'esecuzione meccanica!

Quesiti analoghi cominciano a comparire regolarmente nei test di ingresso alle facoltà scientifiche e anche gli insegnanti dell'ultimo anno di scuola secondaria ne discutono con gli studenti. ... E quegli errori sono un po' diminuiti, ma non sono affatto scomparsi. Perché?

13. Le soluzioni reali dell'equazione $(x^3 - 4x)(x^2 + 1) = 0$ sono:

A $0\,,\,2\,,\,-2$

B $0\,,\,2$

C $0\,,\,1,\,2\,,\,-2$

D $0\,,\,1,\,-1\,,\,2\,,\,-2$

Dalla prova di ingresso alle Facoltà di Ingegneria, Scienze M.F.N., Scienze Statistiche dell'Università Sapienza di Roma, 11 settembre 2009

Ha avuto qualche altra occasione personale di confronto fra l'algebra in Italia e altrove?
Sì. Ricordo un collega canadese, che ha organizzato due volte il suo anno sabatico in Italia con la moglie e il figlio, coetaneo del mio. La prima volta il figlio passa un anno in seconda elementare e si trova molto bene: impara perfettamente l'italiano e stringe anche amicizie durature con i suoi coetanei. In Canada il ragazzo continua a studiare con successo, tanto da essere inserito in una classe di studenti dotati in matematica e gli insegnanti canadesi sottolineano i positivi effetti degli studi in Italia.
Quando il collega torna la seconda volta, inserisce il figlio nel primo anno di liceo scientifico; l'anno scolastico è cominciato da un paio di mesi, ma i genitori sono tranquilli: hanno visto i programmi e il ragazzo ha già studiato con successo calcolo letterale ed equazioni di primo grado.

Ma, dopo poche settimane, mi viene a trovare questo ragazzone, abitualmente tranquillo e sicuro di sé: è visibilmente scosso e chiede il mio aiuto per convincere il padre a mandarlo in una scuola americana. Le ore di matematica sono per lui insopportabili: 'Tanti compagni chiacchierano, fanno confusione e la prof si arrabbia, ma loro continuano; altri mi sembrano macchine velocissime e fanno calcoli che non capisco. Non c'è niente di quello che so. La prof dice che sono equazioni di primo grado, ma io non le riconosco. Sono proprio così stupido?'
Questa domanda mi ha subito ricordato una bella discussione con il matematico Hans Freudenthal; parlava di 'scacco in matematica' e alludeva proprio alle sensazioni negative che leggevo nel viso del ragazzo: frustrazione, senso di inadeguatezza di fronte a un compito troppo pesante e senza uno scopo comprensibile.
Il giovane canadese è passato a una scuola americana, ma quale formazione matematica hanno ricevuto i ragazzi italiani rimasti?

*Claudio Gori Giorgi, professore di *Teoria dei Sistemi* e *Modellistica* all'Università 'La Sapienza' di Roma, autore di libri di testo di matematica per la scuola secondaria.