

8. Duplicazione del quadrato e duplicazione del cubo

Due celebri problemi geometrici che risalgono all'antichità classica sono il «*problema della duplicazione del quadrato*» e il «*problema della duplicazione del cubo*».

Nel primo caso, dato un quadrato, si chiede di costruirne un altro, di area doppia; nel secondo caso, dato un cubo, si chiede di costruirne un altro, di volume doppio.

La soluzione del problema della *duplicazione del quadrato* non offre particolari difficoltà.

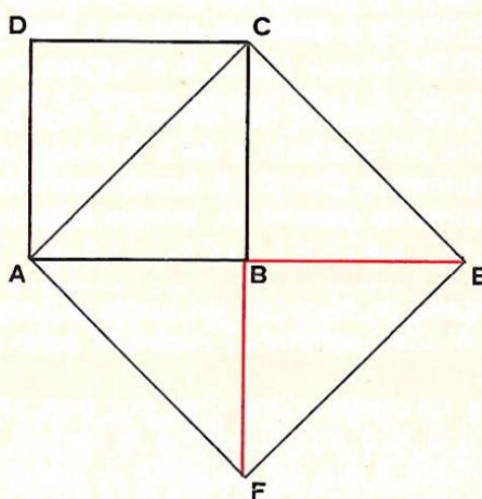


Fig. 1

A partire dal quadrato iniziale $ABCD$ basta costruire un nuovo quadrato $AFEC$ come illustrato in fig. 1.

Poiché i triangoli disegnati in figura sono tutti uguali tra loro, il secondo quadrato, formato da 4 triangoli, ha area esattamente doppia del primo, che è formato da 2 triangoli¹.

Il problema della *duplicazione del cubo* invece ha costituito un rompicapo matematico per oltre duemila anni, da quando cioè, secondo una leggenda, l'oracolo di Delfo, interpellato sul modo migliore per placare l'ira degli Dei a cui si attribuivano le innumerevoli calamità che flagellavano le popolazioni dell'Attica, rispose che era necessario costruire un altare di forma cubica e volume esattamente doppio dell'altare, pur esso di forma cubica, su cui già si offrivano i sacrifici alle divinità adirate.

¹ Questa soluzione del problema della duplicazione del quadrato è riportata nel «*Menone*» di Platone (filosofo greco del IV Sec. a. C.) sotto forma di dialogo tra Socrate e un servo di Menone. Con questo dialogo Socrate si propone di convincere Menone che anche un servo del tutto privo di istruzione può essere guidato alla scoperta di verità geometriche di per sé non evidenti.

Prima di parlare della risposta «moderna» che oggi noi siamo in grado di dare a questo problema, sarà bene precisare in che cosa doveva consistere la soluzione, secondo i pensatori greci. La mentalità di quell'epoca non contemplava il concetto, su cui noi invece abbiamo tanto insistito, di *approssimazione*; quando oggi parliamo di quadrati, cubi, cerchi, sfere, ecc., ci riferiamo a *modelli teorici con cui descriviamo situazioni reali*, situazioni che in modo più o meno *approssimato* si avvicinano a quei modelli; per gli scienziati greci, invece, quelle stesse parole (quadrati, cubi, ...) *esprimevano la verità che si nascondeva sotto le situazioni concrete*. Di conseguenza, per costruire l'altare richiesto, occorreva trovare un metodo geometrico (più o meno complicato, ma concettualmente dello stesso tipo di quello visto per la duplicazione del quadrato) che consentisse di determinare *con esattezza* il suo spigolo. Poco importava se poi, nella realizzazione pratica, le lunghezze degli spigoli reali fossero risultate diverse da quelle determinate teoricamente; per placare le divinità occorreva una costruzione *esatta in linea di principio* delle dimensioni «ideali» dell'altare, costruzione da realizzare con gli strumenti geometrici usati a quel tempo: *riga e compasso*.

Appena nel secolo scorso si è *dimostrato* che una tale costruzione era (e con quegli stessi strumenti è tuttora e sarà per sempre) impossibile. Gli Dei si erano dunque beffati degli uomini?

In definitiva, se vogliamo metterci nell'ordine di idee dei pensatori greci, i due problemi della duplicazione del quadrato e della duplicazione del cubo vanno considerati come fondamentalmente distinti: il primo ammette una soluzione esatta, con uso di strumenti puramente geometrici, mentre il secondo non ammette soluzioni di questo tipo.

Affrontiamo ora gli stessi problemi da un punto di vista diverso. Vedremo che in questo nuovo ordine di idee entrambi i problemi sono risolvibili, e le soluzioni sono del tutto analoghe.

Cominciamo col fare un'osservazione che, pur non alterando la sostanza dei due problemi, consente una loro riformulazione in termini notevolmente più semplici: si può sempre assumere il lato del quadrato — rispettivamente lo spigolo del cubo — da cui si parte, come *unità di misura* per le lunghezze (tanto per fissare le idee, noi supporremo che si tratti di 1 m.).

Allora il problema della duplicazione del quadrato diventa quello di determinare un numero d che esprima, in *metri*, la lunghezza del lato di un quadrato di area pari a 2 *metri quadrati*; poiché l'area di un quadrato di lato d *metri* è di d^2 *metri quadrati*, il problema della duplicazione del quadrato si traduce nella ricerca di un numero d per cui sia soddisfatta l'uguaglianza

$$d^2 = 2.$$

Analogamente, il problema della duplicazione del cubo diventa quello di determinare un numero s che esprima, sempre in *metri*, la lunghezza dello spigolo di un cubo di volume pari a 2 *metri cubi*; poiché il volume di un cubo di lato s *metri* è di s^3 *metri cubi*, il problema della duplicazione del cubo si traduce nella ricerca di un numero s per cui sia soddisfatta l'uguaglianza

$$s^3 = 2.$$

Insomma, per calcolare d ed s basta estrarre la «radice quadrata», rispettivamente la «radice cubica» di 2; in simboli:

$$d = \sqrt{2}, \quad s = \sqrt[3]{2}.$$

Queste operazioni si possono eseguire senza difficoltà, e senza bisogno di ricordare formule o regole complicate.

Esaminiamo ad es. il caso dell'uguaglianza

$$d^2 = 2.$$

Calcoliamo per *unità intere*:

valori di d	0	1	2	3	
valori di d^2	0	1	4	9	

Si constata che non esiste alcun valore *intero* di d per cui d^2 sia uguale al numero voluto, ossia a 2; nondimeno questa tabella ci fornisce una prima indicazione: per $d = 1$ si ha $d^2 = 1$, che è un numero *minore* di quello voluto; per $d = 2$ si ha $d^2 = 4$, che è un numero *maggiore* di quello voluto; poiché chiaramente al crescere (o decrescere) di d , anche d^2 cresce (o decresce), il valore richiesto di d deve essere compreso fra 1 e 2.

Calcoliamo per *decimi*:

valori di d	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	
valori di d^2	1,21	1,44	1,69	1,96	2,25	

Si constata ancora che non esiste alcun valore di d , espresso in decimi, per cui $d^2 = 2$. La nuova tabella ci fornisce però un'indicazione più precisa di quella precedente: il valore richiesto di d deve essere compreso fra 1,4 e 1,5.

Calcoliamo per *centesimi*:

valori di d	1,41	1,42	
valori di d^2	1,9881	2,0164	

Da questa ulteriore tabella si desume che il valore richiesto di d deve essere compreso fra 1,41 e 1,42.

Possiamo proseguire col medesimo procedimento quanto ci pare. Ad. es., calcolando per millesimi, troveremo che il valore richiesto di d deve essere compreso fra 1,414 e 1,415; calcolando per decimillesimi, troveremo che il valore di d deve essere compreso fra 1,4142 e 1,4143,

In conclusione, potremo dire che il numero cercato $d = \sqrt{2}$ *esiste*, in quanto conosciamo un procedimento di calcolo che ci consente di determinare le sue successive approssimazioni decimali, con la precisione che desideriamo.

Il caso dell'uguaglianza:

$$s^3 = 2$$

si affronta in modo del tutto analogo.

Calcolando per unità intere, si trova la tabella:

valori di s	0	1	2	3	
valori di s^3	0	1	8	27	

da cui risulta che il valore richiesto di s deve essere compreso fra 1 e 2.

Calcolando successivamente per decimi, centesimi, millesimi, decimillesimi, si trova che il valore richiesto di s deve essere compreso:

tra	1,2	e	1,3 ,
tra	1,25	e	1,26 ,
tra	1,259	e	1,260 ,
tra	1,2599	e	1,2600 ,
.....			

Anche in questo caso diremo che il numero cercato $s = \sqrt[3]{2}$ *esiste*, in quanto conosciamo un procedimento di calcolo che ci consente di determinare le sue successive approssimazioni decimali, con la precisione che desideriamo.

Osservazione. Per la costruzione in pietra dell'altare richiesto dall'oracolo di Delfo, non sarebbe stato certo realistico pretendere una precisione di lavorazione superiore ad 1 mm. Quindi, partendo sempre dal presupposto che la lunghezza dello spigolo dell'altare originario fosse di 1 m (esatto), all'atto pratico sarebbe stato sufficiente dare agli artigiani incaricati della realizzazione del nuovo altare un'indicazione del tipo:

$$1,259 \text{ m} < s < 1,260 \text{ m} .$$

Ma, lo ripetiamo ancora una volta, questo tipo di impostazione sarebbe stato inconcepibile a quell'epoca, non solo per le difficoltà di calcolo che avrebbe comportato, ma anche (e soprattutto) per la diversa mentalità del tempo, che avrebbe rifiutato un procedimento di calcolo di per sé corretto, di cui però — a livello teorico — non si sapeva se sarebbe terminato dopo un numero finito di passi.

Dal testo

Villani V.e Spotorno B. *Matematica. Idee e metodi*, La Nuova Italia 1979

Queste operazioni si possono eseguire senza difficoltà, e senza bisogno di ricordare formule o regole complicate.

Esaminiamo ad es. il caso dell'uguaglianza

$$d^2 = 2.$$

Calcoliamo per *unità intere*:

valori di d	0	1	2	3	
valori di d^2	0	1	4	9	

Si constata che non esiste alcun valore *intero* di d per cui d^2 sia uguale al numero voluto, ossia a 2; nondimeno questa tabella ci fornisce una prima indicazione: per $d = 1$ si ha $d^2 = 1$, che è un numero *minore* di quello voluto; per $d = 2$ si ha $d^2 = 4$, che è un numero *maggiore* di quello voluto; poiché chiaramente al crescere (o decrescere) di d , anche d^2 cresce (o decresce), il valore richiesto di d deve essere compreso fra 1 e 2.

Calcoliamo per *decimi*:

valori di d	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	
valori di d^2	1,21	1,44	1,69	1,96	2,25	

Si constata ancora che non esiste alcun valore di d , espresso in decimi, per cui $d^2 = 2$. La nuova tabella ci fornisce però un'indicazione più precisa di quella precedente: il valore richiesto di d deve essere compreso fra 1,4 e 1,5.

Calcoliamo per *centesimi*:

valori di d	1,41	1,42	
valori di d^2	1,9881	2,0164	

Da questa ulteriore tabella si desume che il valore richiesto di d deve essere compreso fra 1,41 e 1,42.

Possiamo proseguire col medesimo procedimento quanto ci pare. Ad. es., calcolando per millesimi, troveremo che il valore richiesto di d deve essere compreso fra 1,414 e 1,415; calcolando per decimillesimi, troveremo che il valore di d deve essere compreso fra 1,4142 e 1,4143,

In conclusione, potremo dire che il numero cercato $d = \sqrt{2}$ *esiste*, in quanto conosciamo un procedimento di calcolo che ci consente di determinare le sue successive approssimazioni decimali, con la precisione che desideriamo.

Il caso dell'uguaglianza:

$$s^3 = 2$$

si affronta in modo del tutto analogo.

Calcolando per unità intere, si trova la tabella:

valori di s	0	1	2	3	
valori di s^3	0	1	8	27	

da cui risulta che il valore richiesto di s deve essere compreso fra 1 e 2.

Calcolando successivamente per decimi, centesimi, millesimi, decimillesimi, si trova che il valore richiesto di s deve essere compreso:

tra	1,2	e	1,3 ,
tra	1,25	e	1,26 ,
tra	1,259	e	1,260 ,
tra	1,2599	e	1,2600 ,
.....			

Anche in questo caso diremo che il numero cercato $s = \sqrt[3]{2}$ *esiste*, in quanto conosciamo un procedimento di calcolo che ci consente di determinare le sue successive approssimazioni decimali, con la precisione che desideriamo.

Osservazione. Per la costruzione in pietra dell'altare richiesto dall'oracolo di Delfo, non sarebbe stato certo realistico pretendere una precisione di lavorazione superiore ad 1 mm. Quindi, partendo sempre dal presupposto che la lunghezza dello spigolo dell'altare originario fosse di 1 m (esatto), all'atto pratico sarebbe stato sufficiente dare agli artigiani incaricati della realizzazione del nuovo altare un'indicazione del tipo:

$$1,259 \text{ m} < s < 1,260 \text{ m} .$$

Ma, lo ripetiamo ancora una volta, questo tipo di impostazione sarebbe stato inconcepibile a quell'epoca, non solo per le difficoltà di calcolo che avrebbe comportato, ma anche (e soprattutto) per la diversa mentalità del tempo, che avrebbe rifiutato un procedimento di calcolo di per sé corretto, di cui però — a livello teorico — non si sapeva se sarebbe terminato dopo un numero finito di passi.