Piccolo a piacere

Riflessioni su un approccio maieutico al calcolo infinitesimale

Annalisa Malusa

Sapienza Università di Roma

Seminario PLS per gli insegnanti – 16 ottobre 2020

Liceo Matematico: non "di più", ma "meglio"

Il concetto di limite è in genere uno scoglio arduo da superare e il tempo che lo studente ha per assimilarlo è tipicamente inferiore a quello dedicato ad argomenti molto più semplici.

D'altra parte, una volta raggiunta una buona confidenza con il concetto di limite, il resto degli strumenti di analisi matematica che vengono proposti a scuola (derivate, studi di funzione e integrali) seguono con facilità.

Riflessioni su come:

- integrare con un'attività laboratoriale che arrivi alla definizione di limite a partire dalle applicazioni e non viceversa.
- stimolare i ragazzi con esempi e paradossi in modo che la definizione di limite sia la "naturale conclusione" di un percorso.
- integrare con un percorso storico/filosofico sul concetto di limite.

Schema delle attività

Prima di introdurre nelle lezioni curriculari la definizione ε/δ di limite e la continuità:

1. Introduzione a una serie di problemi che evidenzino la necessità del limite come strumento per descrivere la realtà (senza parlare di limiti).
2. Dibattito guidato in aula, per raccogliere osservazioni e proposte degli studenti sui vari esempi pratici proposti e convogliarle verso la definizione formale.

Dopo aver introdotto nelle lezioni curriculari la definizione ε/δ di limite e la continuità:

1. Applicazione agli esempi (ruolo delle disequazioni).
2. Approfondimento sui limiti notevoli e le equivalenze asintotiche.
3. Approfondimento storico/filosofico, che aiuti a capire quanto sia raffinato e astratto il concetto di limite.

Il paradosso della freccia di Zenone (450 a. C.)

Una freccia scoccata dall'arco appare in movimento, ma, in realtà è immobile.

Infatti, in ogni istante di tempo la freccia è ferma e il tempo è una collezione di istanti.
La sovrapposizione di istanti immobili non può generare movimento, per cui il moto è un'illusione.

> "Ogni cosa che occupa uno spazio uguale a se stessa (in uno e un sol posto) è in stato di quiete, ma questo è vero per la freccia in ogni istante del suo volo. Quindi la freccia non si muove."
> (Aristotele, Fisica VI)

Come si scioglie questo paradosso?

La retta tangente ad una curva

La nozione di retta tangente a una curva è fondamentale per diversi motivi:

1. in cinematica, la velocità è un vettore tangente alla traiettoria;
2. in analisi, l'equazione della tangente al grafico fornisce la migliore approssimazione locale lineare della funzione, con tutto ciò che ne consegue
   - Teorema di Lagrange: cruciale passaggio dall'incremento finito a quello infinitesimo e viceversa.
   - Studio di funzione attraverso il segno e gli zeri della derivata prima.

D'altra parte, l'unica nozione di tangente nota ai ragazzi (retta tangente ad una conica) è definita in modo fuorviante come la retta che tocca la conica in un solo punto.

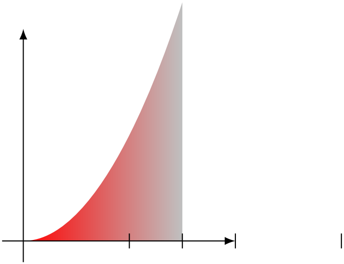
Questa definizione, che funziona per le coniche per **motivi di convessità** è totalmente sbagliata nel caso generale.

Sicuramente il solo richiedere il passaggio per il punto non può bastare a individuare la retta tangente, così come la richiesta aggiuntiva di toccare in un solo punto.

La nozione corretta è quella di migliore approssimazione lineare della curva vicino al punto. Come si formalizza questa proprietà?

Aree, problema delle quadrature

Un altro apparente paradosso è costituito dalle aree: com'è possibile che l'unione di insiemi con area nulla (i segmenti) costistuisca un insieme di area positiva?



Sempre Zenone...
"Un chicco di grano, cadendo, non fa alcun rumore, mentre una grande quantità di chicchi, cadendo, fa rumore"

Analisi del problema

Cosa hanno in comune i tre problemi descritti?

- per vedere il moto della freccia non posso fare una foto a istante fissato, ma la devo "filmarla" per un intervallo di tempo positivo;
- per individuare la retta tangente non posso limitarmi a guardare cosa succede nel singolo punto, ma devo tenere conto di come varia la curva in tutto un suo tratto vicino al punto;
- per ottenere l'area di una regione devo "impacchettare" i segmenti in rettangoli con base non nulla.

MA...

...se faccio solo questo commetto sempre un piccolo errore non nullo.

Un dibattito guidato con gli studenti dovrebbe evidenziare che per risolvere veramente il problema servirebbe qualcosa che si comporti simultaneamente come un numero non nullo e come zero.

Dal nullo al piccolo a piacere

Il dibattito dovrebbe aiutare gli studenti a

- uscire dalla logica delle regole matematiche;
- capire che le definizioni sono la risposta astratta a esigenze reali;
- capire che per essere operativi nel calcolo serve una formalizzazione quantitativa del concetto matematico. La vaghezza non permette di fare i conti!

In questo caso la definizione giusta è quella di

INFINITESIMO:

- qualcosa che si comporta come se fosse non nulla
- ma piccolo a piacere (evanescente)

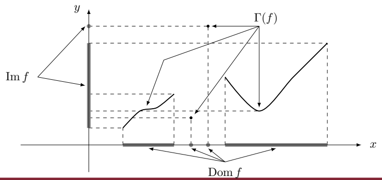
o, equivalentemente, la definizione di **LIMITE**.

Le funzioni

Obiettivo 1 del dibattito: è comodo descrivere tutti i precedenti problemi tramite **funzioni**. Gli oggetti più generali (curve e aree) si ottengono per "incollamento"

- spostamento della freccia $\rightsquigarrow s(t)$;
- curva $\rightsquigarrow$ grafico di una funzione $f(x)$;
- area $\rightsquigarrow$ integrale di una funzione $f(x)$.

Nota: gli studenti dovrebbero arrivare al calcolo infinitesimale avendo acquisito una buona dimestichezza con la visualizzazione grafica delle funzioni.



La tangente al grafico

A titolo di esempio, vediamo come potrebbe essere condotto il dibattito in modo tale da introdurre la nozione limite a partire dal problema della tangente al grafico di una funzione f in corrispondenza di un punto $(x_0, f(x_0))$.

Cerchiamo

- una retta (non verticale) passante per $(x_0, f(x_0))$:

$$y = f(x_0) + m(x - x_0)$$ N.B.: l'incognita è m!!!

- che fornisca la migliore approssimazione lineare.

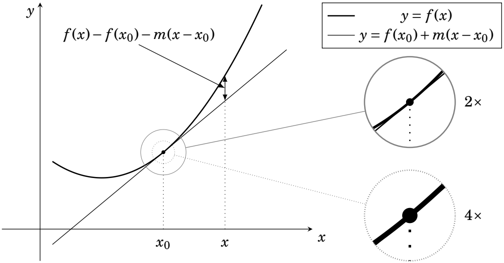
Obiettivo 2 del dibattito: necessità di formalizzare in maniera operativa la seconda richiesta.

Introduciamo una nuova funzione (l'errore di approssimazione)

$$\Delta_m(x) = f(x) - (f(x_0) + m(x - x_0))$$

Ovviamente $\Delta_m(x_0) = 0$ per ogni m (avevamo già osservato che guardare solo il punto non poteva bastare!).

Migliore approssimazione: m_0 tale da rendere $\Delta_m(x)$ il più piccolo possibile quando x è molto vicino ad x_0.



Obiettivo 3 del dibattito: tramite osservazioni geometriche, convincersi che la retta cercata viene ben approssimata con le rette secanti che passano per $(x_0, f(x_0))$ e $(x, f(x))$, con x vicino ad x_0.

Le rette per il punto si identificano tramite il loro coefficiente angolare e quindi si arriva a concludere che la richiesta che individua la pendenza ottimale m_0 deve soddisfare

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \approx m_0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{\Delta_{m_0}(x)}{x - x_0} \approx 0$$

A questo punto dovrebbe essere evidente che senza una definizione formale di "$\approx$" (circa uguale) non c'è modo di calcolare effettivamente il valore ottimale m_0.

Caratterizzazione di 0

Per prendere confidenza con il fantomatico ε che comparirà nella definizione di limite, si può proporre la seguente caratterizzazione del numero zero, che si dimostra facilmente per assurdo a partire dalla proprietà archimedea dei numeri naturali (interessante di per sé)

Proprietà archimedea: dati due numeri reali positivi a e b esiste sempre un numero n naturale tale che $na > b$.

Un numero $\alpha \in \mathbb{R}$ è zero se e solo se

$$-\varepsilon < \alpha < \varepsilon \quad \text{per ogni } \varepsilon > 0 \qquad (*)$$

Dim: Ovviamente $\alpha = 0$ soddisfa la stima $(*)$.
Viceversa, se $|\alpha| > 0$, per la proprietà archimedea dei numeri reali, esiste n tale che $n|\alpha| > 1$, quindi $(*)$ non varrebbe per $\varepsilon = \dfrac{1}{n}$.

Tornando al problema delle tangenti:

- se f è lineare (almeno vicino al punto) e la retta grafico ha pendenza m_0, allora per $m = m_0$ non c'è errore di approssimazione, ossia per ogni $x \neq x_0$

$$\left| \frac{\Delta_{m_0}(x)}{x - x_0} \right| = 0 \quad \text{o, equivalentemente} \quad -\varepsilon < \frac{\Delta_{m_0}(x)}{x - x_0} < \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0.$$

- se f non è lineare, in generale $\left| \frac{\Delta_m(x)}{x - x_0} \right| \neq 0$. In questo caso, per individuare m_0 ottimale:
  - quantifichiamo con ε la soglia di errore ammissibile:

$$-\varepsilon < \frac{\Delta_m(x)}{x - x_0} < \varepsilon$$

  - richiediamo che per tutti valori $x \neq x_0$ in un opportuno intervallo $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ l'errore deve rimanere sotto soglia.
    Questa richiesta determina univocamente m_0.

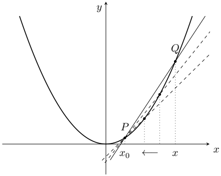
Nota: nella definizione di m_0 si deve prescindere da quello che succede esattamente in x_0, dove la funzione considerata non è definita.

Un esempio: $f(x) = 2x^2$

$\Delta_m(x) = 2x^2 - 2x_0^2 - m(x - x_0) = 2(x - x_0)(x + x_0) - m(x - x_0),$

$$\frac{\Delta_m(x)}{x - x_0} = 2(x + x_0) - m$$

Candidato (che annulla l'errore): $m_0 = 4x_0$, $\frac{\Delta_{m_0}(x)}{x - x_0} = 2(x - x_0)$



Verifica: per ogni soglia di errore ε e risolvo la disequazione

$$-\varepsilon < 2(x - x_0) < \varepsilon \iff -\frac{\varepsilon}{2} < x - x_0 < \frac{\varepsilon}{2}$$

Nell'intervallo $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$, $\delta = \varepsilon/2$, l'errore è sempre sotto la soglia ε.

La freccia di Zenone

Il problema è del tutto analogo al precedente.

Per vedere il moto della freccia in un instante t_0 è necessario "filmarlo" in un intervallo temporale più ampio, ma evanescente.

Indicando con $s(t)$ la posizione al tempo t, la velocità istantanea v_0 al tempo t_0 è approssimata dalla velocità media

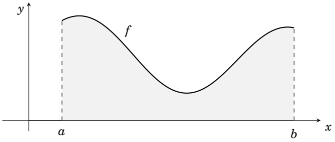
$$\Delta v(t) = \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}$$

nel senso che fissata una soglia di errore $\varepsilon > 0$ esiste un opportuno intervallo temporale centrato in t_0, ossia del tipo $]t_0 - \delta, t_0 + \delta[$, in cui la soglia di errore sicuramente non viene oltrepassata:

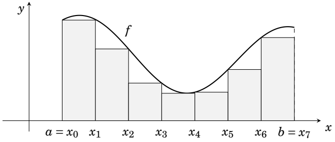
$$-\varepsilon < \Delta v(t) - v_0 < \varepsilon, \qquad \forall t \neq t_0,\ t \in]t_0 - \delta, t_0 + \delta[$$

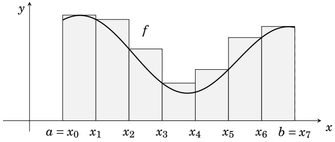
Nota: anche in questo caso si deve prescindere da quello che succede esattamente in t_0, dove la funzione $\Delta v(t)$ non è definita.

La quadratura delle aree



Nel problema della quadratura delle aree invece, l'approssimazione è fatta con unioni di rettangoli e la quantità evanescente è la lunghezza della base dei rettangoli approssimanti.





$$A(\sigma) = \sigma \sum_{k=1}^{N(\sigma)} h_k(\sigma)$$

Attenzione! Riducendo la base aumenta il numero di rettangoli

Finalmente la definizione

In tutti i casi precedenti:

- abbiamo una funzione $g\colon \mathrm{Dom}(g) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$;
- abbiamo un valore x_0 assegnato
- g non è necessariamente definita in x_0
- g è definita per $x \neq x_0$
- vogliamo descrivere, possibilmente con un numero fissato ℓ, il comportamento delle immagini $g(x)$, per $x \neq x_0$, ma arbitrariamente vicino ad x_0.
- dichiariamo che ℓ è una "descrizione appropriata" se

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \text{ tale che } |g(x) - \ell| < \varepsilon \ \forall x \neq x_0,\ |x - x_0| < \delta.$$

Quando questo è possibile, ℓ è il limite della funzione g in x_0.

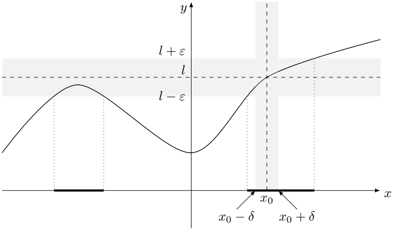
Quando $\ell = 0$, la funzione g è un infinitesimo in x_0.

La complicata definizione di limite

$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tale che $|g(x) - \ell| < \varepsilon\ \forall x \neq x_0,\ |x - x_0| < \delta.$

si sintetizza in maniera simbolica con

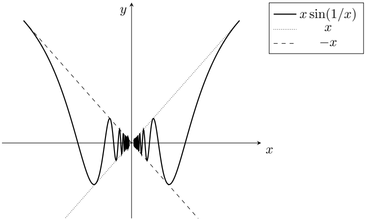
$$\lim_{x \to x_0} g(x) = \ell$$

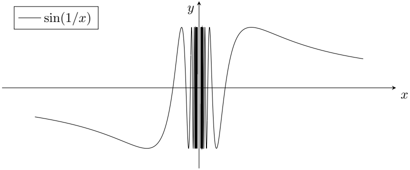


Nota: la richiesta minimale su x_0 per dare senso alla definizione è che per ogni $\delta > 0$ esista almeno un $x_\delta \neq x_0$ tale che $x_\delta \in \mathrm{Dom}(g) \cap]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ (x_0 punto di accumulazione di $\mathrm{Dom}(g)$). D'ora in poi assumeremo che questa richiesta sia sempre soddisfatta.

Il limite come "dichiarazione di intenti" della funzione

Ribadiamo che il limite di una funzione prescinde totalmente dal valore puntuale della funzione (che potrebbe anche non essere definita nel punto).
Quello che viene codificato nel valore limite è il comportamento della funzione in un intorno evanescente del punto, quindi, in un certo senso, di quanto sono coerenti le "intenzioni puntuali" della funzione.





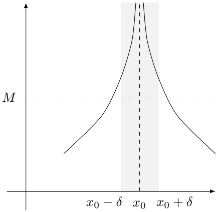
Se la funzione ha delle intenzioni coerenti, allora il limite esiste, se la funzione è molto indecisa, il limite non esiste.

Quando la funzione dichiara di voler esplodere

In questo senso, è ragionevole anche tenere conto di eventuali "intenzioni esplosive" delle funzioni, definendo i limiti infiniti:

- $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ se

  $$\forall M > 0 \; \exists \delta = \delta(M) > 0 \text{ tale che } f(x) > M \; \forall x \neq x_0, \; |x - x_0| < \delta.$$



- $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$ se

  $$\forall M > 0 \; \exists \delta = \delta(M) > 0 \text{ tale che } f(x) < -M \; \forall x \neq x_0, \; |x - x_0| < \delta.$$

Nota: L'insieme giusto dove considerare i limiti sarebbe la retta reale **estesa**.

La continuità, una questione di coerenza

Se la funzione g è definita in x_0, possiamo confrontare le sue eventuali intenzioni, codificate nel $\lim_{x \to x_0} g(x) = \ell$ con la sua azione $g(x_0)$.

Se l'azione è coerente con le intenzioni, ossia se $\ell = g(x_0)$, allora diremo che la funzione è continua.

Nota: Non ha nessun senso parlare di continuità in punti che non appartengono al dominio della funzione.

Esempio: $g(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ in $x = 0$. Invece la funzione

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

è continua in $\mathbb{R}$ e coincide con g in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ (prolungamento continuo).

Gli strumenti di base per il calcolo dei limiti

Buona definizione

Il limite di g in x_0 se esiste è unico.

Operazioni sui limiti finiti

Siano $f, g \colon A \to \mathbb{R}$ e **supponiamo che esistano i limiti**

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \alpha \in \mathbb{R}, \quad \lim_{x \to x_0} g(x) = \beta \in \mathbb{R} \ .$$

Allora **esistono in x_0 anche i limiti** di $f + g$ ed $f \cdot g$ e si ha

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) + g(x)] = \alpha + \beta, \quad \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x) = \alpha \cdot \beta \ .$$

Se inoltre $\beta \neq 0$, allora esiste il limite $\lim_{x \to x_0} f(x)/g(x)$ e vale α/β.

Cambiamento di variabili nei limiti

Siano $f\colon A \to \mathbb{R}$ e $g\colon B \to \mathbb{R}$ due funzioni, con $f(A) \subset B$. Sia x_0 un punto di accumulazione per A. Supponiamo che esistano i limiti

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = y_0, \qquad \lim_{y\to y_0} g(y) = l$$

e che $f(x) \neq y_0$ per ogni $x \neq x_0$. Allora esiste $\lim_{x\to x_0} g(f(x))$ e vale l. In altri termini

$$\lim_{x\to x_0} g(f(x)) = \lim_{y\to y_0} g(y) \; .$$

Nota: per testare le intenzioni di una funzione composta, l'argomento interno (f nell'enunciato) deve essere variabile.

Aritmetizzazione parziale di ∞

$$\alpha + (+\infty) = +\infty, \quad \alpha + (-\infty) = -\infty,$$
$$\alpha - (+\infty) = -\infty, \quad \alpha - (-\infty) = +\infty,$$
$$(+\infty) + (+\infty) = +\infty, \quad (-\infty) + (-\infty) = -\infty,$$
$$\frac{\alpha}{+\infty} = 0, \qquad \frac{\alpha}{-\infty} = 0,$$

se $\alpha > 0$ **o** $\alpha = +\infty$**:** $\quad \alpha \cdot (+\infty) = +\infty, \quad \alpha \cdot (-\infty) = -\infty,$

se $\alpha < 0$ **o** $\alpha = -\infty$**:** $\quad \alpha \cdot (+\infty) = -\infty, \quad \alpha \cdot (-\infty) = +\infty\,.$

sono esclusi i seguenti casi (forme indeterminate):

$$(+\infty) + (-\infty), \quad (+\infty) - (+\infty), \quad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}\,, \quad \frac{0}{0}\,, \quad 0 \cdot (\pm\infty)\,.$$

(Manca anche il caso $\alpha/0$ con $\alpha \neq 0$, più delicato da trattare.)

Nota: sono teoremi scritti omettendo la scrittura del limite, questo può creare confusione negli studenti

Osservazioni preliminari al calcolo dei limiti

Volendo passare alla parte operativa di calcolo dei limiti, dobbiamo fare due premesse fondamentali.

- Il limite di g in x_0 esiste oppure non esiste.
  L'essere una forma indeterminata non è una terza condizione
  Sono semplicemente limiti la cui esistenza e il cui valore non si ottengono come immediata conseguenza dell'esistenza e del valore dei limiti dei singoli termini.
- La verifica diretta tramite la definizione prevede di conoscere a priori il valore del limite, quindi non è uno strumento efficace di calcolo.

Nota: questa è sicuramente una buona occasione per sottolineare quanto conoscere bene la teoria aiuti a fare gli esercizi.

La "cassetta degli attrezzi" per il calcolo dei limiti

- Continuità di tutte le funzioni di base nel loro dominio.
- Proprietà algebriche dei limiti.
- Teoremi del confronto.
- Limiti notevoli.

- La continuità ci dice quando possiamo banalmente calcolare un limite "sostituendo il valore".
- Le proprietà algebriche dei limiti estendono la continuità a tutte le funzioni elementari.
- I teoremi del confronto garantiscono l'esistenza del limite e determinano il suo valore senza doverlo prevedere in anticipo.
- I limiti notevoli forniscono un buon numero di termini di confronto.

Infinitesimi a confronto 1: caccia al colpevole

Se P e Q sono due polinomi tali che $P(x_0) = Q(x_0) = 0$, il

$$\lim_{x \to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)}$$

è una forma indeterminata del tipo $0/0$ (rapporto tra due infinitesimi). In generale, per "sciogliere" una forma indeterminata di questo tipo si possono "isolare i colpevoli dell'indeterminazione", ossia fattorizzare sia numeratore e denominatore come il prodotto di un termine infinitesimo (il "colpevole") per un termine non infinitesimo.
In questo caso l'operazione è particolarmente semplice: se x_0 è uno zero con molteplicità h per P e k per Q, allora

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{(x - x_0)^h P_1(x)}{(x - x_0)^k Q_1(x)} = (x - x_0)^{h-k} \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$$

con $P_1(x_0)$ e $Q_1(x_0)$ diversi da 0.

Quindi

$$\lim_{x\to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} \begin{cases} = 0 & \text{se } h > k \\ = \dfrac{P_1(x_0)}{Q_1(x_0)} & \text{se } h = k \\ \text{non immediato} & \text{se } h < k \end{cases}$$

- Se $h < k$ e $h - k$ è pari, allora $\lim_{x\to x_0}(x - x_0)^{h-k} = +\infty$ e, per i risultati di aritmetizzazione parziale di ∞

$$\lim_{x\to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \text{segno}\left(\frac{P_1(x_0)}{Q_1(x_0)}\right)\infty.$$

- Se $h < k$ e $h - k$ è dispari, $(x - x_0)^{h-k}$ cambia segno intorno ad x_0 e quindi il limite proposto non esiste.

Conclusione: sappiamo descrivere in tutti i casi il comportamento di una forma indeterminata del tipo $0/0$ data dal limite del rapporto tra due polinomi.

Infinitesimi a confronto 2: equivalenza asintotica

I limiti notevoli sciolgono altre forme indeterminate del tipo $0/0$:

Limiti notevoli che varrebbe la pena di discutere in dettaglio

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,\quad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2},\quad \lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x}=1,\quad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1,\quad \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\alpha$$

Osservazione importante: se $\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0} g(x)=0$, allora

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=1 \iff f(x)=g(x)+g(x)h(x),\quad \lim_{x\to x_0} h(x)=0,$$

ossia f e g differiscono per un infinitesimo (di ordine superiore a $g(x)$) per $x\to x_0$, quindi nel calcolo del limite in x_0 sono essenzialmente la stessa cosa.

Conseguenza: utilizzando i limiti notevoli si può ricondurre lo studio di forme indeterminate più complesse a quello del rapporto tra polinomi.

Esempio: $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1 + 4x - x^2}{3x + \log(1+x^2)}$

A meno di infinitesimi in 0: $e^x - 1 \approx x$, $\log(1+x^2) \approx x^2$, quindi

$$\frac{e^x - 1 + 4x - x^2}{3\sqrt[3]{x} + \log(1+x^2)} \approx \frac{x + 4x - x^2}{3x + x^2} = \frac{x}{x}\,\frac{5-x}{3+x} \to \frac{5}{3}.$$

Rigorosamente: manipolazioni algebriche e limiti notevoli:

$$\frac{e^x - 1 + 4x - x^2}{3x + \log(1+x^2)} = \left(\frac{e^x - 1}{x} + \frac{4x - x^2}{x}\right) \frac{1}{3 + \dfrac{x^2}{x}\,\dfrac{\log(1+x^2)}{x^2}}$$

Osservazioni sull'equivalenza asintotica

- è uno strumento molto raffinato, ma se introdotto bene può aiutare gli studenti con meno doti intuitive a capire se esiste il limite e quanto deve valere.
- apre la strada alla questione generale dell'approssimazione polinomiale delle funzioni. Ad esempio, sapere che $\sin x \approx x$ in $x_0 = 0$ non aiuta a studiare il limite

  $$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x}{x^3}.$$

  Gli studenti imparano a risolverlo con de L'Hopital, accorgendosi che devono iterare due volte per poter sciogliere l'indeterminazione:

  $$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{3x^2} = -\frac{1}{6}$$

  scoprendo lo sviluppo all'ordine 3: $\sin x \approx x - \frac{1}{6}x^3$ in $x_0 = 0$.