UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI FIRENZE

FACOLTÀ DI SCIENZE M.F.N
Corso di Laurea Magistrale in Matematica

Anno accademico 2013 - 2014

Il concetto matematico di limite: un percorso didattico a partire dall'analisi dei misconcetti tipici

The mathematical concept of limit: from an analysis of common misconceptions to a didactical experience

Candidata: Francesca Magnanini

Relatore: Prof. Gabriele Bianchi
Supervisore della sperimentazione didattica: Prof. Nedo Checcaglini

A Eljona

«Colui che in un libro guarda dei caratteri, ma non sa ciò che questi caratteri vogliono dire, loda con gli occhi, ma non comprende con lo spirito.
Un altro, al contrario, loda l'opera d'arte e ne comprende il senso, colui cioè che non soltanto è in grado di vedere, così come ognuno ne è capace, ma che sa anche leggere.
E ciò lo può soltanto colui che lo ha appreso»

(Sant' Agostino, *Discorsi*)

INDICE

INTRODUZIONE

Questo lavoro di tesi nasce innanzitutto da un'inclinazione all'insegnamento che si è sviluppata nel corso di tutta la mia carriera universitaria. Ho subito pensato di fare una tesi in didattica legata ad un progetto di tirocinio, in modo da poter toccare con mano cosa significa insegnare in una classe. La scelta dell'argomento è stata abbastanza fortuita: mentre stavo approfondendo una lezione del corso di Didattica della Matematica, mi sono imbattuta in alcuni articoli relativi ai misconcetti sui limiti. La mente è tornata subito al liceo, quando io e molti miei compagni di classe avevamo la sensazione di non afferrare totalmente il significato dei limiti.

Ho capito che mi sarebbe interessato molto approfondire l'argomento. I limiti rivestono un ruolo centrale nello sviluppo dell'analisi: oltre ad avere importanza di per sé, ad esempio nei problemi di determinazione della convergenza di una serie e di calcolo del valore di un limite, sono alla base della definizione di molti altri concetti matematici. Basti pensare alla derivabilità e integrabilità di una funzione, oppure alla continuità di una funzione in un punto. I limiti, però, presentano delle difficoltà per così dire "intrinseche" che portano alla nascita di concezioni incomplete o errate: molti studenti finiscono per averne una conoscenza solo intuitiva e pochi arrivano ad una piena comprensione della definizione rigorosa. Questo è favorito anche dal fatto che una comprensione parziale del concetto di limite, per molti, può essere sufficiente: generalmente, gli studenti imparano quello che permette loro di passare le prove di verifica, un insieme di abilità per superare gli esami; quando queste tecniche falliscono, ne creano di nuove, che possono anche essere incoerenti con le precedenti. La loro conoscenza matematica, quindi, non può svilupparsi.

D'altra parte, anche i libri di testo e gli insegnanti tendono a privilegiare i metodi usati per risolvere i problemi: gli esercizi, concentrandosi su disuguaglianze, valori assoluti e operazioni (limite di una somma, di un prodotto, regole per il calcolo dei limiti ecc.), sono più legati all'algebra che al concetto di limite.

L'intenzione era quindi quella di studiare le cause delle difficoltà che generalmente gli studenti trovano nella comprensione del concetto di limite, in modo da poter impostare poi delle lezioni nel tentativo di aiutare il più possibile i ragazzi a superarle. Mi sono così rivolta al Prof. Bianchi, nel quale ho trovato grande disponibilità e interesse a seguirmi.

Abbiamo quindi iniziato con uno studio della letteratura esistente sulle difficoltà connesse al concetto di limite, in base al quale abbiamo poi preparato 6 lezioni di un'ora ciascuna ed una verifica finale, svolte nelle classi 5A e 5B del Liceo Scientifico dell'Istituto Statale di

Istruzione Superiore "Giovanni da Castiglione" di Castiglion Fiorentino (AR), sotto la supervisione del Prof. Nedo Checcaglini. Alla luce dell'esperienza fatta, abbiamo inoltre elaborato alcune buone pratiche per la didattica dei limiti. In Appendice, inoltre, si trova il materiale impiegato in classe, presentato in maniera da poter essere utilizzato dagli insegnanti come punto di partenza o di confronto per la preparazione di lezioni sul concetto di limite.

STRUTTURA DELLA TESI

Capitolo 1: Analisi dei misconcetti sui limiti.

E' riportata un'analisi degli studi in didattica della matematica relativi agli ostacoli all'apprendimento. Alcuni concetti matematici presentano delle difficoltà per così dire "intrinseche", chiamate *ostacoli epistemologici* e considerate come inevitabili e necessarie per arrivare ad una piena comprensione dei concetti in gioco. Inoltre, vari fattori incidono sull'apprendimento di una nozione matematica, legati sia al funzionamento del cervello umano sia all'influenza di tutte le esperienze acquisite a scuola e in contesti extra-scolastici, spesso senza che lo studente ne sia cosciente. E' fondamentale quindi distinguere tra *concept definition*, ossia l'effettiva definizione di un concetto, e *concept image*, ossia l'insieme di tutte le idee che lo studente si forma rispetto ad esso, spesso in contrasto con la definizione o non pienamente descrittivo di tutti gli aspetti della nozione.
Tale quadro teorico generale viene calato nel contesto dei limiti, potendo quindi comprendere le cause dei principali misconcetti posseduti dagli studenti e quindi preparare delle lezioni nel tentativo di aiutare il più possibile i ragazzi a superarli.

Capitolo 2: Breve storia del concetto di limite

Dato che gli ostacoli epistemologici sono innati nel concetto, essi possono essere riscontrati nella sua evoluzione storica: i matematici che hanno contribuito allo sviluppo del concetto di limite possedevano molte idee errate o incomplete che ancor oggi riscontriamo negli studenti. Sono presentate quindi le tappe principali dell'evoluzione storica dei limiti, senza avere la pretesa di esaurirne ogni aspetto, in maniera da individuare ostacoli epistemologici e comprendere meglio le radici dei problemi incontrati dagli studenti nella completa e corretta comprensione dei limiti.

Capitolo 3: Il tirocinio e la sperimentazione didattica

Viene presentata l'intera sperimentazione effettuata in classe, compresa un'analisi della verifica finale.

Partendo da una breve storia del concetto di limite, presentata in modo da porre i ragazzi di fronte all'importanza e alla difficoltà di questa nozione, vengono mostrati alcuni esempi storici che hanno motivato la sua nascita, in modo che gli studenti intuiscano fin da subito la sua utilità pratica.

Prima di enunciare la definizione rigorosa, troppo complessa e astratta, il concetto di limite viene affrontato con un approccio intuitivo, in modo che gli studenti possano familiarizzare con esso, utilizzando principalmente un registro grafico.

Gli studenti sono stati guidati a costruire autonomamente la definizione rigorosa in termini di intorni, in modo da essere aiutati a comprenderla e farla propria. Per fare questo, ci siamo serviti del software di geometria dinamica *Geogebra*, per la possibilità di visualizzare gli intorni come strisce e di modificarli dinamicamente. Sono quindi riportate l'attività creata per la costruzione della definizione rigorosa e ulteriori attività assegnate per facilitare la comprensione dei quantificatori logici e dell'ordine di scelta degli intorni.

Vengono infine mostrati il passaggio alla classica definizione ε - δ e la prova assegnata al termine delle lezioni.

Queste lezioni sono state svolte con il supporto di vario materiale: presentazioni in Power Point; esercizi tratti dal libro di testo delle classi o da me pensati allo scopo di mettere gli studenti di fronte ad alcuni misconcetti tipici; animazioni da me realizzate con il software Geogebra, per aiutare ad avvicinare alcuni aspetti del concetto di limite sfruttando un registro grafico e dinamico.

Nella descrizione di ogni lezione sono riportati gli obiettivi e i contenuti, le domande e le reazioni degli studenti più significative e le osservazioni sull'efficacia della trattazione utilizzata.

Capitolo 4: Alcune "buone prassi" per la didattica dei limiti

Sono riportate alcune "buone prassi" per l'insegnamento dei limiti, tenendo presente l'esperienza fatta in classe e le mancanze riconosciute nella trattazione utilizzata.

Capitolo 5: Osservazioni sulla trattazione dei limiti in alcuni libri di testo

Viene riportata un'analisi di alcuni libri di testo, descrivendo il rapporto tra la trattazione dei limiti utilizzata e i misconcetti tipici: sono quindi evidenziati quegli aspetti che contribuiscono a combatterli o, al contrario, ad alimentarli, con attenzione anche agli esempi presentati e agli esercizi proposti.

Appendici: Lezioni, esercizi assegnati e verifica finale

Viene riportato il materiale utilizzato in classe o consegnato agli studenti, che può essere sfruttato dagli insegnanti come punto di partenza o di confronto per la preparazione di lezioni sul concetto di limite.

CAPITOLO 1
ANALISI DEI MISCONCETTI SUI LIMITI

Per poter capire pienamente le difficoltà riscontrate dagli studenti nella comprensione del concetto di limite e quindi le attenzioni che gli insegnanti devono porre nella preparazione delle lezioni, è interessante presentare una panoramica degli studi in didattica della matematica relativi agli ostacoli all'apprendimento. Non è possibile immaginare, infatti, che la trasmissione della conoscenza possa avvenire più o meno semplicemente se l'insegnante padroneggia i concetti e lo studente è sufficientemente attento alle lezioni e svolge con serietà ed impegno i compiti assegnati. Alcuni concetti matematici, specialmente quelli dell'analisi, presentano infatti delle difficoltà per così dire "intrinseche" (quelle che indicheremo con l'espressione *ostacoli epistemologici*), considerate dalla maggior parte degli autori come inevitabili e necessarie per arrivare ad una piena comprensione dei concetti in gioco. In aggiunta a questo, l'insegnante deve essere consapevole di quali sono i fattori che incidono sull'apprendimento di una nozione matematica, legati al funzionamento del cervello umano e all'influenza di tutte le esperienze acquisite a scuola e in contesti extra-scolastici, spesso senza che lo studente ne sia cosciente. Parleremo quindi di *concept definition* e *concept image*, indicando rispettivamente la definizione di un concetto e l'insieme di tutte le idee che lo studente si forma rispetto ad esso (spesso non pienamente descrittive di tutti gli aspetti della nozione o addirittura errate). Questa analisi ci permetterà di comprendere meglio l'origine di vari misconcetti[1] relativi al concetto di limite.

1.1 OSTACOLI ALL'APPRENDIMENTO

In relazione al concetto di limite è molto interessante considerare l'evoluzione semantica che la parola "errore" ha subito, passando da una valenza solamente negativa (come sbaglio, svista, lacuna, non comprensione) ad una valenza positiva (come condizione necessaria per la conoscenza).
Gaston Bachelard ([1, tr. it. pag.11]) utilizza per primo l'espressione *ostacolo epistemologico*:

[1] Il termine "misconcetto" sta ad indicare un fraintendimento od una concezione errata che ha però una sua logica interna. Spesso viene utilizzato anche per indicare le ragioni che stanno alla base degli errori commessi dal singolo individuo. In questa tesi ci riferiamo al primo significato.

«Quando cerchiamo le condizioni psicologiche per il progresso della scienza, si arriva ben presto alla convinzione che il problema della conoscenza scientifica debba essere posto in termini di ostacoli. E non si tratta di considerare ostacoli esterni, quali la complessità e fugacità dei fenomeni scientifici, né di incolpare la debolezza dei sensi e dello spirito umano. E' nell'atto stesso del conoscere che, per una sorta di necessità funzionale, appaiono lentezze nell'apprendimento e difficoltà cognitive. E' qui che possiamo trovare le cause di stagnazione e addirittura di regresso [della scienza], è qui che possiamo cogliere le cause dell'inerzia, che noi chiameremo ostacoli epistemologici».

Guy Brousseau in [8] definisce l'ostacolo epistemologico come una conoscenza che è efficace in un certo contesto, ma che si rivela fallimentare quando si tenta di applicarla in un contesto diverso. E' quindi necessario rimpiazzare o modificare la precedente conoscenza. La tendenza, però, è di conservare l'idea già acquisita, dato il successo della sua applicazione in certi ambiti: anche in seguito ad un fallimento, si cerca di salvarla. Questo crea una barriera (un ostacolo, appunto) per successivi apprendimenti. E' necessario quindi che lo studente prenda piena consapevolezza dei limiti della propria conoscenza e del fatto che una sua generalizzazione o modifica permette di operare con successo nel nuovo contesto.
E' importante ribadire che con il termine "ostacolo" non si intende una mancanza di conoscenza, quanto piuttosto una *conoscenza inadeguata al contesto* in cui lo studente sta operando. Inoltre, anche se l'ostacolo viene superato, è possibile che appaia nuovamente nel percorso cognitivo dell'allievo.

Brousseau distingue tre tipologie di ostacoli: ontogenetici, didattici ed epistemologici.

<u>Ostacoli ontogenetici</u>
Sono legati allo sviluppo dell'intelligenza e dei sistemi percettivi del singolo soggetto: ognuno sviluppa delle conoscenze appropriate alla propria età mentale, legate alla formazione di connessioni neuronali. Tali conoscenze possono essere insufficienti per la comprensione di certi concetti matematici.
Tra gli ostacoli ontogenetici rientrano anche quelli dovuti a patologie.

<u>Ostacoli didattici</u>
Derivano dal tipo di insegnamento e dall'insegnante stesso. Ogni docente sceglie un curriculum e un metodo didattico in base alle sue conoscenze e convinzioni, relative sia alla matematica sia alla didattica. Le scelte dell'insegnante, però, possono non essere

adatte per ogni studente.

Ostacoli epistemologici

Sono quelli derivanti dalla natura del concetto stesso. Dipendono dalla storia della nascita del concetto, dalla sua successiva evoluzione, dal linguaggio che richiede per essere espresso. Questo implica che ci siano degli argomenti in matematica che costituiscono un ostacolo non solo nell'apprendimento da parte degli studenti, ma anche nella loro formulazione all'interno della comunità scientifica. Andando ad analizzare l'evoluzione di un concetto è quindi possibile fare supposizioni riguardo alla presenza di ostacoli epistemologici: ad esempio, se si rilevano cambi radicali di concezione nella sua storia è lecito supporre che i matematici abbiano incontrato delle difficoltà nell'elaborazione, comprensione e accettazione del concetto.

Gli ostacoli epistemologici non sono evitabili. Come afferma Anka Sierpinska ([30, pag. 374]), per superarli occorre un conflitto. Un ostacolo è legato a convinzioni di qualche tipo, quindi superarlo non significa rimpiazzarlo con una convinzione opposta; piuttosto lo studente dovrà prenderne consapevolezza, analizzando i mezzi usati per risolvere i problemi, al fine di accettare nuove possibili ipotesi risolutive.

Il modo in cui la matematica viene insegnata può rendere più o meno agevole il superamento di questi ostacoli. Talvolta le spiegazioni degli insegnanti li rafforzano invece che ridurli: si può allora tornare a parlare di ostacoli didattici.

Molti studiosi sono favorevoli ad un approccio di tipo storico nell'insegnamento della matematica a scuola. Non solo si riscontrano dei vantaggi in termini di aumento di attenzione e partecipazione alle lezioni, ma si ritiene anche che mettere gli studenti di fronte alle discontinuità e fratture nelle concezioni dei matematici, sia un modo per aiutare a capire il senso che ha l'errore in questa disciplina. Troppo spesso infatti gli studenti hanno paura e vergogna dei propri errori. Invece, come afferma Rosetta Zan ([41, pag. 25]): «Il progresso dell'allievo, ogni suo apprendimento, è il superamento di idee o conoscenze precedenti, che può essere percepito quindi proprio attraverso il confronto con tali idee e conoscenze […]. L'errore commesso ieri e che oggi viene riconosciuto come tale […] sta a testimoniare concretamente un cambiamento, un progresso». Inoltre, la presa di coscienza da parte di insegnanti e studenti che la storia della matematica è piena di errori può aiutare i primi ad avere più tolleranza per gli errori propri e degli alunni, i secondi a percepire questa disciplina come più viva e più umana.

Giorgio T. Bagni in [6] sottolinea due parallelismi tra la storia e la didattica. In primo luogo, lo sviluppo storico di un concetto può essere suddiviso in almeno due fasi: una prima, in cui il concetto viene percepito intuitivamente e strumentalmente, e una seconda più matura. Dal punto di vista didattico si rivela una situazione analoga: in un primo momento gli studenti hanno una comprensione intuitiva di un concetto e solo in una seconda fase tale comprensione diventa più completa e matura. In secondo luogo, le reazioni degli studenti di fronte ai nuovi concetti sono spesso simili a quelle dei matematici della storia. La consapevolezza di questo può essere uno strumento utile, ma è necessario che l'insegnante abbia un'adeguata preparazione epistemologica.
Possiamo portare come esempio il fatto che il termine "limite" veniva utilizzato per indicare gli estremi di un intervallo, o la discussione riguardo alla possibilità di raggiungere il limite. Ad esempio, nel XVII secolo, Newton (1642-1727) e Leibniz (1646-1716), nella formulazione del calcolo infinitesimale, descrivevano il limite come una quantità a cui una variabile si avvicina *senza mai superarla o eguagliarla*[2]. Anche nel XVIII secolo, con D'Alembert (1717-1783), troviamo la stessa idea di limite. Nell'articolo "Limite" scritto per l'*Encyclopédie* afferma che una quantità è limite di un'altra quantità (variabile) quando la seconda si avvicina alla prima così tanto che la differenza sia inferiore a qualsiasi quantità data, senza effettivamente coincidere con essa o superarla.

1.1.1 OSTACOLI EPISTEMOLOGICI LEGATI AL CONCETTO DI LIMITE

Varie ricerche si sono concentrate nella individuazione di ostacoli epistemologici legati al concetto di limite, in modo da riuscire a prevedere eventuali errori degli studenti. A nostro parere i lavori più approfonditi si trovano in [10] e [29].

Bernard Cornu ([10, pagg. 159-162]) individua quattro ostacoli principali nella storia del concetto di limite:

1. Fallimento nella trasposizione aritmetica.
   Nella matematica greca era molto diffuso il cosiddetto "metodo di esaustione": data una figura S e un poligono P_n con n lati, l'area compresa tra S e P_n può essere resa piccola quanto si vuole scegliendo n sufficientemente grande. Si tratta di un metodo che sembra molto vicino al concetto di limite (l'area di S risulta essere il limite delle aree dei poligoni P_n al tendere di n all'infinito) e può essere

[2] Si veda §2.5.

interpretato in termini di infinitesimo attuale[3]. In realtà si tratta di un metodo geometrico, applicato a grandezze geometriche e non a numeri, che permette di ottenere risultati ignorando il problema dell'infinito e quindi il passaggio al limite. Visto il successo del metodo di esaustione nel risolvere problemi pertinenti, nella matematica greca non venne attuato il passaggio dalle figure geometriche ad un'interpretazione puramente numerica che permettesse l'introduzione esplicita del concetto di limite.

2. Quantità infinitamente grandi e infinitamente piccole.
   Molti matematici (tra cui Newton, Leibniz, Eulero, D'Alembert, Cauchy) si sono scontrati con la possibile esistenza di quantità infinitamente piccole, così piccole da poter essere considerate quasi nulle, ma con una propria "dimensione". L'idea di uno stato intermedio tra il nulla e ciò che è qualcosa è molto diffusa tra gli studenti. Spesso ε è considerato come un numero diverso da zero ma più piccolo di qualsiasi reale positivo. Questo può portare, ad esempio, a credere che $0.\overline{9}$ sia l'ultimo numero prima di 1, quindi non uguale a 1. Allo stesso modo, molti studenti credono che esista un numero più grande di tutti gli altri, diverso da infinito[4].

3. L'aspetto metafisico del concetto di limite.
   E' stato difficile introdurre la nozione di limite in matematica perché sembra avere a che fare più con la metafisica e la filosofia. Anche tra gli studenti si trova questa difficoltà ad abbracciare l'aspetto metafisico dei limiti. Un'affermazione tipica è "non è vera matematica", perché lo stadio iniziale del calcolo non si fonda più soltanto su semplice aritmetica e algebra: entra in gioco il concetto di infinito che, a detta degli alunni, "non esiste", "non è rigoroso ma funziona", "va bene se ci si accontenta di valori approssimati".

4. Il limite viene raggiunto?
   Vengono citati Robins (1697-1751) e D'Alembert i quali ritenevano che il limite non potesse essere raggiunto. La stessa idea si ritrova spesso tra gli studenti.

Rifacendosi a G. Bachelard, Cornu afferma che tali ostacoli (e molti altri) non devono essere bloccati sul nascere, ma sono parte fondamentale della conoscenza da acquisire:

[3] Si veda § 1.2.1.3.
[4] Nel secolo scorso Abraham Robinson ha creato un modello in cui gli infiniti e gli infinitesimi esistono come oggetti matematici e ha basato su di essi uno sviluppo alternativo del calcolo chiamato "Analisi non-standard".

compito degli insegnanti è quello di aiutare gli studenti a riflettere sulle proprie idee, immagini e intuizioni, riconoscendo il loro fallimento nei contesti in cui sono utilizzati.

A. Sierpinska ([29]) distingue quattro tipi di ostacolo:

1. "Horror infiniti".
   In questa categoria possiamo distinguere:
   1.1 Il rifiuto del passaggio al limite come operazione matematica (il limite, ad esempio, può essere considerato come la ricerca di qualcosa di cui conosciamo solo delle approssimazioni: basta considerare solo un numero finito di termini di una successione, quelli che costituiscono l'approssimazione, eliminando così il problema dell'infinito; il passaggio al limite viene considerato come un metodo di dimostrazione rigoroso che elimina il problema dell'infinito, come nel caso del metodo di esaustione).
   1.2 Ostacoli di tipo algebrico (metodi adatti alla manipolazione di grandezze finite vengono estesi a grandezze infinite).
   1.3 Ostacoli di tipo fisico (il limite viene associato ad un movimento fisico, un avvicinamento, mentre la nozione di limite nella teoria formale è di tipo statico. Conseguenza di questo ostacolo è l'idea che il limite non possa essere raggiunto).

2. Ostacoli legati alla nozione di funzione.
   2.1 Spesso le funzioni vengono considerate come monotone (anche storicamente, per molto tempo la nozione di limite è stata applicata solo a questo tipo di funzioni).
   2.2 Non viene fatta distinzione tra la nozione di limite e quella di estremo superiore e inferiore.

3. Ostacoli geometrici.
   3.1 Un'idea geometrica di differenza tra una grandezza variabile e una costante che è il suo limite (con il termine "differenza" non ci si riferisce alla sottrazione tra numeri, ma ad una concezione geometrica: ad esempio, parlando della retta tangente come limite delle secanti, non si pensa alla differenza numerica tra i coefficienti angolari delle rette, ma alla *posizione* della secante che differisce poco quanto si vuole da quella della tangente. Il termine "differenza" cambia quindi di significato al cambiare della

grandezza in questione: ad esempio, il cerchio viene visto come limite dei poligoni inscritti o circoscritti, ossia maggiore è il numero dei lati e minore è la differenza tra la *forma* dei poligoni e quella del cerchio. Si tratta della concezione di differenza che si trova anche nel metodo di esaustione: questo può essere uno dei motivi per cui ci sono stati così tanti problemi nel trasformare questo metodo in un teorema generale).

3.2 Limite visto come confine di un insieme.

4. Ostacoli logici.
   Spesso si sbaglia ordine e uso dei quantificatori logici.

1.2 CONCEPT IMAGE E CONCEPT DEFINITION

Generalmente la matematica è considerata una disciplina molto precisa, in cui è possibile dare definizioni accurate da cui deriva (più o meno facilmente) la comprensione dei concetti in gioco. Volendo farne una schematizzazione semplificata, essa viene vista come una teoria deduttiva: il punto di partenza è dato da assiomi e nozioni basilari, da cui poi si sviluppano, tramite precise regole di inferenza, tutti i teoremi. Basandosi su questa visione, molti insegnanti presentano agli studenti una serie di definizioni, teoremi e dimostrazioni, senza dare sufficiente spazio alla loro spiegazione, ma impiegando piuttosto la maggior parte delle ore di lezione nell'aiutare gli alunni ad acquisire abilità tramite la risoluzione di esercizi standard, credendo che la comprensione dei concetti avvenga automaticamente. Come sottolineano anche Robert Davis e Shlomo Vinner in è [11], questa visione è ottimistica: la maggior parte degli studenti non arriva a capire le motivazioni che stanno alla base delle procedure imparate a lezione e la matematica finisce per essere considerata come una serie di esercizi da risolvere sfruttando regole e formule senza significato.

Vinner in particolare si sofferma sul ruolo delle definizioni nell'apprendimento di una nozione matematica. In [39, pagg. 65-66] sono riportate le convinzioni più diffuse:

1. I concetti sono principalmente acquisiti tramite le loro definizioni.
2. Gli studenti devono usare le definizioni per risolvere problemi.
3. Le definizioni devono essere minimali (cioè non devono contenere parti che possono essere ricavate per inferenza da altre parti della definizione). Ad esempio,

è preferibile definire il rettangolo come quadrilatero che ha 3 angoli retti (e non 4), in quanto grazie alla geometria euclidea è possibile dimostrare che anche il quarto è retto.

4. Le definizioni devono essere eleganti.
   Ad esempio, molti matematici ritengono che definire il valore assoluto come $|x| = \sqrt{(x^2)}$ sia più elegante rispetto a $|x| = \begin{cases} x & se\ x \geq 0 \\ -x & se\ x < 0 \end{cases}$.

Se gli insegnanti rimangono rigidamente attaccati anche ad una sola di queste convinzioni la loro didattica può risentirne negativamente, non tenendo conto di come avviene realmente l'apprendimento da parte degli studenti. Alcuni aspetti cognitivi legati a molti concetti non possono infatti essere sviluppati semplicemente a partire dalle definizioni: entra in gioco il complesso funzionamento del cervello umano (che spesso non segue la linearità logica della matematica) nella produzione di intuizioni e ragionamenti. Per questo è fondamentale distinguere tra l'effettiva definizione di un concetto e l'immagine del concetto che il nostro cervello crea (tramite qualunque esperienza precedente, sia essa scolastica o non), spesso in contrasto con la definizione o non pienamente descrittiva di tutti gli aspetti della nozione.

Fu proprio Vinner il primo ad esplicitare questa distinzione. In [37] viene definita la nozione di *concept image*, ampliata poi in [38]: si tratta dell'insieme di tutte le immagini che vengono associate al concetto da parte del singolo individuo, includendo ogni rappresentazione visiva, compresi i simboli (ad esempio, nella *concept image* del concetto di funzione possono essere inclusi grafici di funzioni specifiche e il simbolo $y = f(x)$), e varie proprietà associate al concetto (come ad esempio il fatto che una funzione debba sempre essere definita da un'espressione algebrica).
Con l'espressione *concept definition* viene indicata invece la definizione verbale che esprime il concetto.

Tali nozioni vengono esemplificate ([38, pag. 294]) mostrando il fatto che immagine e definizione di un concetto possono collaborare alla formazione di un significato completo, ma anche rimanere totalmente indipendenti. Uno studente può avere una *concept image* della nozione di sistema di assi coordinati in cui i due assi sono perpendicolari. Se in un secondo momento l'insegnante definisce gli assi coordinati come rette che si intersecano secondo un angolo qualsiasi, possono succedere tre cose:

1. La *concept image* si adatta includendo anche sistemi con assi non perpendicolari.
2. La *concept image* rimane inalterata; la definizione viene imparata a memoria e ripetuta per un certo tempo, ma presto verrà dimenticata o distorta e lo studente definirà un sistema di assi coordinati come avente assi perpendicolari.
3. Se allo studente viene chiesto di dare una definizione userà la propria o quella dell'insegnante, ma in tutti gli altri contesti penserà ad assi ortogonali.

La formazione delle *concept images* dipende strettamente dal singolo individuo, dalle sue esperienze, percezioni e sensibilità. Riportiamo alcuni esempi che evidenziano il fatto che alcune immagini concettuali possono nascere dall'interazione con la realtà e da come il concetto matematico viene introdotto a lezione.

- Dall'esperienza di tutti i giorni gli studenti possono erroneamente concludere, come Aristotele, che se spingono un oggetto questo si muove e che esso cessa di muoversi quando smettono di spingerlo, non a causa dell'attrito con la superficie, ma perché non c'è più una forza applicata. Lo studente può imparare le nuove idee di Newton, ma posto di fronte ad un problema può ancora richiamare le vecchie idee di Aristotele ([11, pag. 283]).
- La definizione di tangente è generalmente introdotta mostrando graficamente la retta tangente ad una circonferenza. L'immagine concettuale costruita porta all'idea che la tangente possa incontrare la curva soltanto in un punto e che non possa tagliare la curva in quel punto. Anche se agli studenti viene poi data una definizione formale della tangente al grafico di una funzione differenziabile, l'immagine concettuale può prevalere ([39, pag. 75]).
- Il linguaggio utilizzato nell'introduzione di un concetto può contribuire alla formazione di immagini concettuali, come vedremo in dettaglio nel caso dei limiti[5]. L'insegnante usa parole tecniche che gli studenti possono interpretare con un significato colloquiale diverso, oppure può utilizzare parole ed espressioni tratte dal linguaggio quotidiano allo scopo di facilitare gli alunni, offuscando in realtà il significato tecnico.
- Un concetto può essere presentato in una sequenza non adeguata allo sviluppo cognitivo. L'ordine degli argomenti trattati a scuola viene generalmente scelto in base all'assunto che sia più utile per gli studenti partire dalle idee più semplici per arrivare poi a quelle più complesse. Nell'insegnamento del calcolo, ad esempio, questo si traduce nel trattare inizialmente funzioni semplici (polinomiali e

[5] Si veda § 1.2.1.1

trigonometriche) e in seguito più complesse (come funzioni continue non differenziabili in alcun punto). Questo però può portare a concezioni non corrette o insufficienti, come il fatto che una funzione debba essere data da un'unica formula o che ogni funzione sia differenziabile ([32, pagg. 56-57]).

Già da questi esempi è evidente che per sostituire una *concept image* posseduta dallo studente con un'altra corretta o più completa non basta fornire la *concept definition*: l'individuo tende a conservare la propria idea, pertanto è necessario creare un conflitto cognitivo che possa incoraggiare a modificare la propria visione, al fine di arrivare ad una conoscenza più formale. Talvolta, però, immagini concettuali fortemente radicate sono difficili da rimuovere anche quando sono in conflitto con la definizione formale. Un esempio è fornito da Steven R. Williams ([40, pag. 224]). Per aiutare i ragazzi a rimuovere il misconcetto che il limite non possa essere raggiunto, l'autore colloca il problema in un contesto fisico di un treno che raggiunge la stazione:

> Define a function $f(x)$ by letting $f(x)$ be the distance from a certain train to the station at time x, where x is measured in hours after 12:00 noon on March 1, 1989. At exactly 2:00 p.m. on that day, the train arrives and comes to a complete stop at the station. Discuss the limit of $f(x)$ as $x \to 2$.

Una ragazza è stata in grado di riconoscere che il limite richiesto nel quesito è 0, ma non si è convinta del fatto che il limite possa essere raggiunto. E' arrivata perfino a negare la sua esperienza fisica pur di giustificare la sua idea di irraggiungibilità del limite, affermando: "il treno si ferma realmente? Ci si può chiedere se esista qualcosa che non ha movimento".

In [39] Vinner, rifacendosi a Fodor et al. (1980), sottolinea il differente ruolo delle definizioni nella vita quotidiana e nei contesti tecnici. Per molti concetti, infatti, possediamo sia una *concept image* che una *concept definition*, per altri abbiamo soltanto la prima: questo non costituisce un problema nel contesto della vita quotidiana (non abbiamo bisogno di ricorrere alle definizioni per capire una frase del tipo "tra tutte le macchine parcheggiate la mia macchina verde è la più bella"), mentre nei contesti tecnici, come quello matematico, è necessario consultare le definizioni per evitare di incorrere in errori. Ad esempio la frase "tra tutti i rettangoli con lo stesso perimetro il quadrato è quello di area massima" non può essere compresa senza capire che il quadrato è un particolare tipo di rettangolo (da notare che nella vita di tutti i giorni la maggior parte delle persone non considera un quadrato come un rettangolo). Tenendo conto dell'enorme impatto che la vita quotidiana ha su ogni situazione, è ragionevole supporre che molti siano portati ad ignorare le definizioni anche nei contesti tecnici.

Secondo Vinner formare una *concept image* è necessario per la comprensione di un concetto: sapere a memoria la sua definizione non basta. Certe definizioni possono però aiutare a creare una c*oncept image* (ad esempio, la parola "foresta" può essere introdotta ad un bambino come "molti alberi insieme"). Tuttavia, nei contesti informali per maneggiare i concetti utilizziamo le immagini mentali e la definizione può anche essere dimenticata o rimanere inattiva nel cervello. Nei contesti tecnici le definizioni hanno invece un ruolo fondamentale. Non solo aiutano a formare un'immagine concettuale, ma salvano anche da possibili trappole indotte dalle nostre c*oncept images*. Ad esempio, se viene chiesto di trovare il massimo di una funzione in un intervallo chiuso, può essere richiamata un'immagine che porta a cercare gli zeri della derivata della funzione: la definizione di massimo di una funzione in un intervallo chiuso può aiutare a cercare altre possibilità oltre ai massimi locali.

Un'altra convinzione diffusa tra gli insegnanti ([38, pag. 295]) è il fatto che gli studenti, quando sono posti di fronte ad un problema, consultino sempre la *concept definition*, sfruttando eventualmente anche una *concept image*. In realtà, la maggior parte delle volte avviene il contrario. Inoltre, dato che gran parte delle immagini concettuali *si forma a partire da esempi visti a lezione*, le *concept images* degli studenti, seppur errate o incomplete, risultano spesso sufficienti a risolvere correttamente gli esercizi standard proposti. Questo fa sì che tali *concept images* vengano fortificate; soltanto quando queste si rivelano insufficienti, potrà essere consultata la *concept definition*.

La distinzione tra *concept image* e *concept definition* viene ripresa da David Tall in [31] e successivamente approfondita da Tall e Vinner in [34]. La prima viene considerata come l'intera struttura cognitiva (consapevole o inconsapevole) associata ad un concetto matematico, che include tutte le immagini mentali e le proprietà e i processi ad esso associati. Ad esempio ([31, pag. 172]), la sottrazione è generalmente incontrata all'inizio come un processo che coinvolge numeri interi positivi. A questo stadio i bambini possono dedurre che il risultato di una sottrazione sia sempre un numero più piccolo del sottraendo. Questa osservazione diventa parte della loro *concept image* e può provocare problemi quando vengono incontrate sottrazioni tra numeri negativi.
Differente è la *concept definition*, definita come l'insieme di parole usato per descrivere il concetto. Può essere formale (ossia accettata dalla comunità matematica come parte di

una teoria) oppure personale (una ricostruzione della definizione da parte dello studente, cioè l'insieme di parole che lo studente usa per spiegare la propria *concept image*).
E' possibile che, in contesti diversi, diverse parti della *concept image* vengano evocate (gli autori parlano di *evoked concept image*). Queste possono essere immagini conflittuali tra loro o con la definizione (si parla di *potential conflict factor*), ma soltanto quando vengono evocate contemporaneamente l'individuo può rendersi conto del conflitto (si parla di *cognitive conflict factor*).
Viene riportato come esempio ([34, pagg. 153-154]) la definizione di un numero complesso $x+iy$ come coppia ordinata di numeri reali (x, y). L'identificazione di $x+i0 = (x,0)$ con il numero reale x è un *potential conflict factor* con la nozione insiemistica secondo la quale l'elemento x è distinto dalla coppia ordinata $(x, 0)$.
Dai risultati di un questionario riportati in D. Tall (1977) è emerso che molti studenti considerano $\sqrt{2}$ come numero reale non complesso (anche se definiscono i reali come "numeri complessi con parte immaginaria zero") e $\sqrt{2}+i0$ come complesso. Gli studenti possono non vedere alcun conflitto, specialmente se le identificazioni vengono fatte in contesti diversi: semplicemente usano la convenzione più adatta al contesto in cui si trovano. Si crea conflitto cognitivo solo quando le immagini vengono evocate contemporaneamente.

Anche quando la *concept image* è in contrasto con la *concept definition*, il conflitto cognitivo si genera solo quando la definizione sviluppa un'immagine concettuale in contrasto con quella dello studente, altrimenti questo rimarrà sicuro della sua interpretazione del concetto e considererà la teoria formale come superflua e inutile ai fini pratici. Ad esempio ([34, pag. 153]), una funzione può essere definita come "una relazione tra due insiemi A e B in cui ogni elemento di A è in relazione con uno ed un solo elemento di B". Successivamente vengono forniti esempi in cui le funzioni sono date da formule e regole. Può quindi succedere che la *concept image* si riduca ad una nozione più ristretta del concetto di funzione che include soltanto le formule. Allo studente può bastare questa nozione ristretta nei contesti in cui opera, ma se incontrerà funzioni in contesti più ampi non sarà in grado di maneggiarle.

A livello didattico è quindi fondamentale che l'insegnante sia consapevole delle *concept images* possedute dagli studenti, in modo da individuare la strategia didattica più adeguata per rimuovere le immagini errate e completare quelle parziali. Sicuramente è utile conoscere le immagini concettuali più frequenti; tuttavia, data la soggettività e l'origine talvolta imprevedibile delle *concept images*, non è possibile farne un elenco completo. L'insegnante dovrà quindi trovare il modo di farle emergere, ad esempio somministrando esercizi non standard: frequentemente infatti, come abbiamo già accennato sopra, le immagini di un concetto si formano a partire dagli esempi visti a lezione e si adattano agli esercizi proposti dall'insegnante e dal libro di testo, troppo spesso simili tra loro e ridotti all'applicazione di procedure algebriche.

In [39] S. Vinner esprime un'opinione molto forte riguardo alla possibilità di comprensione della matematica da parte degli studenti: egli non crede nella matematica per tutti, ma in un certo tipo di matematica per ogni tipo di studente. L'autore ritiene che cambiare le abitudini di pensiero passando dal contesto quotidiano a quello tecnico abbia senso solo con gli studenti candidati per la matematica avanzata: essi devono essere abituati ad usare le definizioni come ultimo criterio in molti problemi matematici, sottolineando i conflitti tra la *concept image* e la *concept definition*. Altrimenti è meglio evitare di creare conflitti cognitivi: soltanto alcuni studenti possono arrivare a comprendere fino in fondo ogni concetto matematico.

1.2.1 IL CASO DEI LIMITI

Passiamo adesso a descrivere i principali misconcetti legati ai limiti.

1.2.1.1 MISCONCETTI DERIVANTI DAL LINGUAGGIO

Molti studi hanno evidenziato quanto il linguaggio utilizzato nella trattazione del concetto di limite influenzi la creazione di immagini concettuali incomplete e tra loro incoerenti. Come sottolineano David Tall e Rolph Schwarzenberger in [28] molte nozioni matematiche complesse vengono insegnate in una forma considerata più adatta alla comprensione degli studenti. Questo però può portare ad una perdita di precisione e ad una maggiore difficoltà nella comprensione adeguata del concetto. Ad esempio, la definizione di una successione s_n che tende ad s viene tradotta informalmente come "possiamo rendere s_n vicino a s quanto vogliamo per n sufficientemente grande". E' evidente la perdita di precisione rispetto alla definizione formale:
"Una successione s_n si dice convergente a l se, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un numero naturale N tale che $|s_n - l| < \varepsilon$ per ogni $n \geq N$".

Non viene infatti specificata alcuna relazione tra ε ed N, né viene indicato quanto grande deve essere n o quanto s_n debba essere vicino a s.

Inoltre, l'espressione "vicino a" (così come le simili "avvicinarsi", "tendere a") non veicola in maniera appropriata il significato del concetto di limite, in quanto il suo uso nel linguaggio quotidiano è abbastanza differente da quello matematico. Essa, infatti, esclude l'uguaglianza. In [9], [25] e [34] viene evidenziato quanto sia diffuso tra gli studenti il misconcetto che *il limite non possa essere raggiunto*.

Bernard Cornu riporta brevemente i risultati di test effettuati per analizzare i significati che vengono attribuiti ai termini "limite" e "tende a" ([9, pagg. 324-325]). I test sono stati somministrati sia a studenti che non hanno ancora incontrato la nozione di limite sia a studenti che hanno trattato questo argomento, per analizzare l'evoluzione della nozione del concetto con il progresso negli studi. E' stato osservato che molti alunni di qualunque grado di istruzione presentano le stesse idee (chiamate dall'autore *modelli propri*).

Per quanto riguarda l'espressione "tende a", è stato osservato che in generale essa non è parte del vocabolario comune degli studenti che non abbiano ancora incontrato il concetto di limite a scuola. Spesso tale espressione sostituisce "si avvicina a": è possibile che tale interpretazione non contenga l'idea dell'effettivo cambiamento (viene portato come esempio "questo blu tende al viola"), oppure, al contrario, rifletta un'evoluzione ("il sistema politico tende verso il socialismo").

L'autore riporta una classificazione dei modelli propri degli studenti relativi all'espressione "tende a":

Modello A: si avvicina a (possibilmente standone lontani). Per esempio, se una grandezza aumenta da 1 a 3, si può dire che essa tende a 10.

Modello B: si avvicina a…fino a raggiungerlo. Ad esempio, se x aumenta da 1 a 3, allora $1+x$ tende a 4.

Modello C: si avvicina a…senza mai raggiungerlo. Ad esempio, $\frac{1}{x}$ tende a 0 per x che tende all'infinito.

Modello D: tende ad assomigliare, è vicino a. Ad esempio, 2.8 tende a 3.

I primi tre modelli contengono la nozione di variazione: nel momento in cui una grandezza tende ad un numero, essa deve variare. *Una funzione costante f non ha quindi limite*, in quanto le *f(x)* assumono sempre lo stesso valore e quindi non è possibile vedere un loro movimento.

La parola "limite" è invece maggiormente utilizzata dagli studenti nella vita di tutti i giorni. Il limite viene inteso come qualcosa di statico, come un confine geografico o un limite da non oltrepassare (limite morale o di legge). Di conseguenza è facile che gli studenti abbiano l'idea che *il limite non possa essere raggiunto* o, se può esserlo, l'idea che sia *invalicabile*.
A volte il limite è ciò che separa due cose (come un campo di grano e uno di mais; lo 0 è il confine tra i numeri positivi e i negativi), ma più spesso indica la fine: dopo il limite non c'è niente. Spesso, quindi, i ragazzi possiedono il modello che *il limite coincida con la nozione di estremo superiore ed estremo inferiore*.

Cornu osserva quanto l'idea del limite come confine insuperabile sia dominante e che per molti studenti il concetto di limite non contiene alcuna idea di variazione, di movimento.

L'autore, infine, ha rilevato che i termini "limite" e "tende a" vengono usati in contesti diversi: il primo indica qualcosa di preciso, mentre il secondo qualcosa di più vago. Ad esempio, la successione 0.99, 0.999, 0.9999... ha come limite 1, ma tende a 0.999999... ; la successione $1-\frac{1}{n}$ ha come limite 1, ma n^2 tende all'infinito. Alcuni studenti utilizzano la parola "limite" per le successioni il cui limite è raggiunto, e il termine "tende a" per le successioni il cui limite non è raggiunto.

Kyeong Hah Roh ([25, pag. 4]) ha osservato che l'espressione "tende a" può presentare un'ulteriore sfumatura rispetto a quelle descritte da Cornu, ossia il fatto che i termini di una successione devono avvicinarsi al limite solo da sopra oppure solo da sotto. Ad esempio, molti studenti ritengono che la successione a segno alterno $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ non converga a zero, perché i termini pari si avvicinano allo zero da sopra, mentre i termini dispari si avvicinano da sotto. A causa di questo misconcetto, le successioni a segno alterno vengono classificate come divergenti.

D. Tall e S. Vinner in [34] sottolineano che alla formazione dell'idea che il limite non possa essere raggiunto contribuiscono non solo il linguaggio utilizzato nell'introduzione del concetto, ma anche il fatto che a lezione vengono dati esempi di successioni che non eguagliano il limite. Conseguenza di tale misconcetto è anche il fatto che alcuni studenti non riconoscono successioni miste come tali. Ad esempio ([34, pag. 159]), di fronte alla successione

$$s_n = \begin{cases} 0 & \textit{se } n \textit{ è dispari} \\ \frac{1}{2n} & \textit{se } n \textit{ è pari} \end{cases}$$

alcuni studenti insistono nell'affermare che si tratti non di una ma di due successioni, in quanto i termini pari tendono a 0 mentre i dispari sono uguali a 0.

Un ulteriore problema derivante dal linguaggio utilizzato, è che il limite viene considerato come un processo e non come un oggetto matematico: Eddie Gray e D. Tall ([16]) parlano ad esempio di *procept*. Si tratta di una commistione tra processo e concetto, legata alla simbologia utilizzata: ad esempio 5+4 evoca sia il processo di conteggio sia il risultato di tale processo (cioè 9, come numero, oggetto matematico); la notazione $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ rappresenta sia il processo di avvicinamento delle *f(x)* al limite, sia il valore effettivo del limite.

Spesso gli insegnanti (e quindi gli studenti) si focalizzano eccessivamente sul comportamento della funzione vicino a x_0 e quindi sul processo di avvicinamento di *f(x)* a *L*. Questo è rimarcato anche da parole che descrivono il processo (*f(x)* si *avvicina sempre più* a *L* mano a mano che *x* si avvicina a x_0). Invece, considerare il limite come un oggetto matematico significa pensarlo come entità statica, concentrando l'attenzione non sul processo ma sul risultato del processo (il limite *è L*). Come afferma Beste Gucler [17], eliminare la visione dinamica è coerente con la definizione formale, che esprime il movimento come distanza statica tra numeri reali. Gli studenti che usano solo la visione dinamica hanno molte difficoltà a comprendere la definizione formale. Quando viene chiesto loro di parlare di un limite dato affermano "il limite *si avvicina a L*", mostrando di confondere il processo di determinazione del limite e il risultato di tale processo. Conseguenza di questo è anche il fatto che alcuni ritengono che il limite non possa essere raggiunto o sia pari ad ∞, essendo infinito il processo di avvicinamento.

1.2.1.2 MISCONCETTI DERIVANTI DAL REGISTRO VISIVO

Dato che la maggior parte degli oggetti matematici, in particolare quelli dell'analisi, non è direttamente accessibile ai sensi, le loro diverse rappresentazioni semiotiche[6] rivestono un ruolo centrale nell'apprendimento. In particolare, per costruire un concetto matematico è necessario utilizzare diversi registri rappresentativi, non potendo uno solo dare una descrizione globale del concetto. Da qui discende il paradosso cognitivo descritto da Raymond Duval [13, tr. it.]: «Da una parte, l'apprendimento degli oggetti matematici non può che essere un apprendimento concettuale e, d'altra parte, è solamente per mezzo di rappresentazioni semiotiche che è possibile un'attività sugli oggetti matematici. Questo paradosso può costituire un vero circolo vizioso per l'apprendimento. Come dei soggetti in fase di apprendimento potrebbero non confondere gli oggetti matematici con le loro rappresentazioni semiotiche se essi non possono che avere relazione con le sole rappresentazioni semiotiche? L'impossibilità di un accesso diretto agli oggetti matematici, al di fuori di ogni rappresentazione semiotica, rende la confusione quasi inevitabile. E, al contrario, come possono essi acquisire la padronanza degli argomenti matematici, necessariamente legati alle rappresentazioni semiotiche, se non hanno già un apprendimento concettuale degli oggetti rappresentati?». In particolare «è l'oggetto rappresentato che importa, e non le sue diverse rappresentazioni semiotiche possibili» e «la distinzione tra un oggetto e la sua rappresentazione è dunque un punto strategico per la comprensione della matematica». E' importante quindi assicurarsi che gli studenti siano in grado di passare da un registro all'altro e siano consapevoli di trattare lo stesso concetto pur operando in registri diversi. Sembra infatti che gli alunni che si costruiscono un'immagine più completa di una nozione matematica siano quelli che riescono ad usare in maniera flessibile una varietà di approcci ai problemi posti. Per una comprensione più profonda del calcolo, sarebbe quindi necessario non solo concentrarsi sulla rappresentazione algebrica (quella generalmente preferita dagli studenti), ma anche considerare le rappresentazioni geometriche e intuitive così come le interazioni tra di esse. Molte ricerche mostrano che queste attività sono tutt'altro che naturali per la maggior parte degli allievi. Ogni rappresentazione, inoltre, può portare con sé informazioni diverse dello stesso concetto, nonché condurre a misconcetti.

La visualizzazione è una delle possibili rappresentazioni di un oggetto matematico, da

[6] Con l'espressione "rappresentazioni semiotiche" si intendono tutte le rappresentazioni di un concetto tramite segni: si può trattare di registro linguistico, registro gestuale o registro della scrittura (grafici, formule, calcoli…).

alcuni considerata come la più efficace e la più intuitiva. E' però importante che l'insegnante controlli l'utilizzo di questo registro semiotico in quanto un suo uso errato può portare alla formazione di idee sbagliate o incomplete.
In [5] G.T. Bagni riporta una ricerca sui possibili problemi legati ad un'introduzione dinamica del concetto di limite, basata principalmente sul registro grafico e sull'utilizzo di termini come "tende a", "approssima" che, come abbiamo già visto, può portare alla nascita di misconcetti. Per analizzare il rapporto tra la nozione di limite degli studenti e la visualizzazione della situazione geometrica alla quale il limite può riferirsi, è stato proposto un test ad una classe di V Liceo Scientifico, allo scopo di evidenziare in particolare la presenza di misconcetti relativi al limite di una funzione costante per x che tende ad a e al valore assunto dalla funzione nel punto $x = a$. E' importante sottolineare che tali aspetti non sono stati introdotti agli allievi in modo esplicito, cioè ricorrendo ad un registro linguistico (con l'impiego di una terminologia matematica), bensì sono stati proposti, implicitamente, in un registro visuale.

E' stato rilevato che, in base ad una nozione dinamica del limite collegata ad una visione potenziale dell'infinitesimo[7], molti studenti ritengono che *il limite di una funzione costante non abbia senso*, in quanto non è possibile individuare il progressivo avvicinamento della funzione al limite.
Alcuni studenti, inoltre, *interpretano come limite il valore assunto dalla funzione f in $x = a$*, indipendentemente dalla continuità della funzione (a volte questo valore è considerato insieme all'effettivo valore del limite, come se i limiti fossero due).

Per aiutare gli studenti a superare i misconcetti rilevati, il limite è stato re-introdotto come concetto topologico (quindi in termini di infinitesimo attuale), evitando di utilizzare espressioni come "tende a", "si avvicina" (che possono suggerire una concezione dinamica del limite) e distinguendo esplicitamente il ruolo del limite dalla valutazione della funzione in un punto.
E' stato poi riproposto agli studenti il test precedente (del quale non avevano ricevuto le risposte corrette). Molti alunni hanno mostrato di superare i misconcetti rilevati. Per quanto non sia possibile essere certi, come afferma l'autore, che il sostanziale miglioramento della situazione sia totalmente da attribuire a questo intervento, l'introduzione del limite come concetto topologico sembra avere un ruolo positivo nella sua corretta e completa comprensione.

[7] Si veda § 1.2.1.3

Bagni si dimostra particolarmente favorevole ad una presentazione dei limiti in termini di infinitesimo attuale, preceduta da un'accurata introduzione delle nozioni fondamentali della topologia, per poter evitare la nascita dei misconcetti sopra esposti, legati ad una visione dinamica dei limiti. L'autore, infatti, ha pubblicato anche un libro, come vedremo nel capitolo 5 di questa tesi, nel quale introduce i limiti seguendo questo approccio.

1.2.1.3. INFINITESIMO POTENZIALE E INFINITESIMO ATTUALE

La distinzione tra infinito potenziale e attuale è molto antica e risale ad Aristotele: con l'espressione "infinito potenziale" egli indicava la possibilità di aggiungere sempre qualcosa a una quantità data, senza che ci fosse mai un elemento ultimo; l'infinito attuale era inteso come collezione infinita di elementi, compiutamente data[8]. Secondo Aristotele, esiste solo il primo: possiamo pensare all'infinito solo come a qualcosa che continuamente diviene, ma che mai raggiunge il suo essere infinito.

Possiamo instaurare un parallelismo tra queste due concezioni di infinito (ed equivalentemente di infinitesimo) e due visioni del concetto di limite, dinamica e statica. L'infinito (o infinitesimo) potenziale riguarda la possibilità di una quantità variabile di *diventare* sempre più grande (o più piccola) di una qualunque grandezza data ed esprime quindi *l'idea dinamica del divenire*; l'infinito (o infinitesimo) attuale riguarda l'*essere* di una grandezza sempre più grande (o più piccola) di un'altra grandezza assegnata ed esprime quindi *l'idea statica di cosa compiuta*, che effettivamente *è*.

Tradizionalmente, il concetto di limite viene presentato secondo una visione dinamica e quindi con una concezione potenziale dell'infinitesimo: tanto più x si avvicina a x_0, tanto più $f(x)$ si avvicina a L. Da questo punto di vista, viene dato un ruolo predominante alla variabile x che, nel suo variare, determina la variazione di $f(x)$.
La definizione rigorosa ε - δ dovuta a Weierstrass, invece, sfrutta una visione statica,

---

[8] Riportiamo anche la definizione di infinito potenziale e attuale citata da Bagni ([4, pag. 110]):

«Si dice che una grandezza variabile costituisce un "infinito potenziale" quando, pur assumendo sempre valori finiti, essa può crescere al di là di ogni limite; se per esempio immaginiamo di suddividere un segmento con successivi dimezzamenti [...] il numero delle parti a cui perveniamo, pur essendo in ogni caso finito, può crescere ad arbitrio. Si parla invece di "infinito attuale" quando ci si riferisce ad un ben determinato insieme, effettivamente costituito da un numero illimitato di elementi; se per esempio immaginiamo di aver scomposto un segmento in tutti i suoi punti, ci troveremo di fronte a un infinito attuale, perché non esiste alcun numero finito che riesca a misurare la totalità di questi punti» (Geymonat L. (1970), I, pag. 58).

mettendo l'accento sulla variabile dipendente: è il grado di approssimazione ε fissato che stabilisce quanto la variabile x debba essere vicina ad un dato valore x_0. In questa definizione, si è totalmente persa l'idea del limite come qualcosa di dinamico e potenziale, in quanto le quantità ε e δ non si muovono per diventare sempre più piccole, ma sono ben definite.

Come abbiamo avuto modo di sottolineare nei paragrafi precedenti, le concezioni dinamica (potenziale) e statica (attuale) dell'infinitesimo possono influire notevolmente sulla corretta comprensione del concetto di limite. In particolare, la maggior parte degli studi si concentra sulle conseguenze derivanti dalla prima concezione, probabilmente per il fatto che l'introduzione del limite a scuola si basa tradizionalmente su di essa.
E' lecito quindi chiedersi quale approccio sia più conveniente utilizzare, affinché gli studenti siano facilitati nella piena comprensione del concetto di limite.

Bagni ha effettuato uno studio delle concezioni dell'infinitesimo tra studenti frequentanti il Liceo Scientifico, prima e dopo lo studio dell'analisi. E' stato presentato agli allievi ([4, pag. 113]) il grafico di funzioni esponenziali con base compresa tra 0 e 1, realizzati con l'impiego di una calcolatrice grafica. In una classe III, dopo aver osservato che il grafico si trova molto vicino al semiasse positivo delle ascisse, è stato chiesto agli studenti di formulare domande riguardo alla "vicinanza" della curva all'asse delle x. Le domande formulate sono state le seguenti:

1. Che cosa accade quando il grafico della funzione esponenziale diventa vicinissimo all'asse delle x? Si ferma? Ritorna a salire?
2. Se il grafico della funzione esponenziale non tocca mai l'asse delle x, pur avvicinandosi sempre di più ad esso, diventerà prima o poi parallelo all'asse delle x (dato che sappiamo che due rette che non si toccano sono parallele)?

E' stato poi chiesto a tutti gli studenti di rispondere alle due domande.

Dalla formulazione delle domande e dalle successive risposte, emerge che le tipiche intuizioni degli studenti riguardo al comportamento della curva sono:

- la curva si ferma (in corrispondenza di un non meglio precisato x);
- la curva prosegue indefinitamente.

Se essa prosegue indefinitamente:

- raggiungerà (prima o poi) l'asse delle x;
- diventerà parallela all'asse delle x;
- tornerà a salire.

Altri aspetti osservati sono il riferimento implicito ad una concezione potenziale di infinitesimo e la necessità di immaginare un termine del procedimento di progressiva diminuzione della distanza tra la curva e l'asintoto.

Grazie a successive interviste personali, è stato osservato che la maggior parte degli studenti ritiene che la curva prosegua (non potendosi fermare perché il dominio è $\mathbb{R}$ e non potendo risalire perché altrimenti non si tratterebbe di una funzione esponenziale), ma solo pochi allievi hanno mostrato di intuire il concetto di infinitesimo: è emersa la difficoltà di accettare che una curva possa avvicinarsi indefinitamente ad una retta senza avere con essa punti in comune. Ciò dipende, almeno in parte, da una non chiara concezione di nozioni legate ai numeri reali: alcuni allievi ritengono che un'indefinita riduzione di una quantità finita porti necessariamente all'annullamento di tale quantità.

L'autore ha ritenuto utile, per analizzare l'evoluzione delle concezioni degli studenti riguardo all'infinitesimo, assegnare le stesse domande anche ad una classe di V Liceo Scientifico. Al momento del test erano già stati trattati i limiti; la definizione di limite era stata data nella forma tradizionale per la scuola secondaria superiore (non preceduta da uno studio della topologia elementare).
Il concetto di infinitesimo appare abbastanza chiaro ad alcuni allievi di V Liceo. E' stato inoltre osservato che l'infinitesimo viene ancora concepito come potenziale: molti studenti fanno ancora riferimento ad espressioni come "avvicinarci quanto vogliamo ad un punto" o "una distanza che può essere resa più piccola ripetutamente tutte le volte che si vuole" ([4, pag. 120]). Questo comunque non sorprende, perché tradizionalmente il concetto di limite viene introdotto facendo riferimento ad una concezione potenziale dell'infinitesimo.

Bagni conclude affermando che si può ricorrere a situazioni geometriche come l'asintoto di una curva per aiutare gli studenti nella formazione del concetto di infinitesimo potenziale: lo studente può essere portato a considerare una grandezza indefinitamente riducibile, fino a diventare minore di una qualsiasi grandezza assegnata.

L'autore afferma che *la concezione potenziale dell'infinitesimo ha un'innegabile valenza intuitiva* (a differenza di quella attuale, matematicamente più impegnativa), ma deve essere attentamente controllata dall'insegnante: come abbiamo visto, essa può portare alla nascita di misconcetti nell'allievo.

1.2.1.4 DIFFICOLTA' LEGATE ALLA DEFINIZIONE ε - δ

Oltre ai misconcetti descritti nei paragrafi precedenti, vi sono alcune difficoltà legate alla definizione formale di limite introdotta da Weierstrass. L'impatto degli studenti con questa definizione può essere molto duro a causa di una sensazione di *disallineamento tra il concetto intuitivo di limite e la sua definizione formale* ([36], pag. 118), dovuto principalmente ai seguenti aspetti:

1. Il passaggio da una visione dinamica dei limiti (intuitiva) ad una visione statica.
2. La scelta controintuitiva dell'ordine degli intorni (prima si fissa l'intorno del limite e poi l'intorno del punto di accumulazione, mentre di solito, trattando di funzioni, si parte dal dominio per arrivare all'immagine).
3. La presenza di tre quantificatori logici strettamente correlati tra loro.
4. La presenza di disequazioni e valori assoluti, notoriamente ostici per molti studenti.
5. Il concetto intuitivo di limite è per così dire costruttivo, ossia possiamo determinare il limite di una funzione studiandone il comportamento in prossimità di un punto: possiamo quindi arrivare ad un risultato. La definizione di Weierstrass è invece una condizione di verifica di un limite assegnato e non dà alcun aiuto nella sua determinazione.

Sviluppiamo in particolare i primi tre punti.

1. <u>Il passaggio da una visione dinamica dei limiti (intuitiva) ad una visione statica</u>

Come abbiamo mostrato nel paragrafo precedente, la definizione di Weierstrass abbandona ogni riferimento alla dinamicità, sfruttando una concezione attuale dell'infinitesimo.

Citando Ioannis Dimarakis e Athanasios Gagatsis ([12, pagg. 135-136]):

«Fino all'era di Weierstrass, il concetto di limite era stato introdotto mediante connotazioni di movimento continuo: $\lim_{x \to a} f(x) = L$ significa che *f(x)* si avvicina a *L* quando *x* si avvicina ad *a*. Weierstrass contestò questa visione dinamica del limite e la sostituì con una statica, che coinvolge soltanto dei numeri reali. Questa definizione non si basa sulla nozione di movimento o su significati geometrici; è la cosiddetta definizione "epsilon-delta": $\lim_{x \to a} f(x) = L$ significa che, comunque dato $\varepsilon > 0$, esiste un numero $\delta > 0$ tale che $|f(x) - L| < \varepsilon$ se $|x - a| < \delta$».

Questa visione statica dei limiti risolse sicuramente alcune ambiguità legate alle definizioni dei secoli XVII (da parte di Leibniz e Newton) e XVIII (da parte di Cauchy[9]), che facevano invece riferimento all'infinitesimo potenziale. Ad esempio, come abbiamo già visto, un ostacolo epistemologico diffuso ancor oggi tra gli studenti e legato ad una visione dinamica dei limiti, è l'idea che le funzioni costanti non abbiano limite, in quanto non è possibile vedere il progressivo avvicinamento di *f(x)* a *L*; in base alla definizione formale, invece, la differenza tra *f(x)* e la costante stessa è sempre 0, quindi minore di qualsiasi ε positivo. Di conseguenza, ogni funzione costante ha come limite la costante stessa.
E' anche vero, però, che tale definizione risulta artificiosa e poco intuitiva per gli studenti: la concezione di infinitesimo più diffusa tra i ragazzi, come già osservato, risulta essere quella potenziale. Dimarakis e Gagatsis ([12, pag. 145]) suggeriscono addirittura di non insegnare a studenti pre-universitari la definizione esatta del concetto di limite.

2. La scelta controintuitiva dell'ordine degli intorni

Mentre una funzione *f* "va" da *x* a *f(x)*, la scelta degli intorni "va" nel verso opposto: prima si fissa l'intorno della variabile dipendente e poi si sceglie quello della variabile indipendente.

---

[9] Cauchy nel 1821 pubblicò *Cours d'analyse* in cui è presente la seguente definizione di limite:

«*Allorché i valori successivamente assunti da una stessa variabile si avvicinano indefinitamente a un valore fissato, sì da differirne alle fine tanto poco quanto si vorrà, quest'ultima quantità è chiamata il limite di tutte le altre*».

Viene definita anche la nozione di infinitesimo come una *"variabile che ha zero come limite"*, e di infinito, come una variabile i cui successivi valori numerici *"crescono sempre più, in modo da superare ogni numero dato"*.

Riportiamo in breve il lavoro di K. Roh in [25] a proposito dell'ordine degli intorni. Egli parla di *reverse thinking process* per indicare i processi cognitivi implicati nella definizione ε - N di una successione a_n convergente a l. L'ordine nella determinazione di ε ed N è infatti opposto rispetto a quello suggerito dalla lettura del simbolo di limite: nel leggere $\lim_{n \to \infty} a_n = l$ non si trova alcuna indicazione su quanto a_n sia vicino ad l, né sulla relazione tra l'indice n e il corrispondente termine a_n. E' naturale considerare prima n per verificare l'affermazione "n va all'infinito" e poi il corrispondente termine a_n per vedere se questo si avvicina a l. Prevale quindi un'idea dinamica del limite: ci muoviamo lungo la linea dei naturali 1, 2, 3,..., n, ... e poi osserviamo il comportamento di a_n. La "definizione" usata generalmente dagli studenti è quindi:

(1) Per ogni $N > 0$ esiste un $\varepsilon > 0$ tale che se $n \geq N$, allora $|a_n - l| < \varepsilon$.

Al contrario, la scelta dell'indice N è dipendente dall'errore ε: in particolare, più piccolo è ε maggiore è N. L'indice è scelto in seguito all'errore, dopo la determinazione della differenza tra ogni termine della successione e il limite, cioè:

(2) Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un numero naturale N tale che se $n \geq N$, allora $|a_n - l| < \varepsilon$.

Per mostrare quanto sia importante applicare correttamente il *reverse thinking process* per non incorrere in errori, Roh riporta il seguente esempio ([25, pag. 21]):

$$a_n = \frac{1+(-1)^n}{2} = \begin{cases} 0 & se\ n\ è\ dispari \\ 1 & se\ n\ è\ pari \end{cases}$$

Tale successione non è convergente, ma in base alla (1) sembra esserlo. Possiamo affermare che il limite è ad esempio $\frac{1}{2}$: qualunque sia N possiamo scegliere un $\varepsilon > \frac{1}{2}$ tale che se $n \geq N$, allora $\left| a_n - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2} < \varepsilon$.

Secondo l'autore, affinché gli studenti comprendano realmente la definizione formale del concetto di limite, è necessario che concettualizzino tre idee: la dipendenza di N da ε, la scelta arbitraria di ε, la caratteristica dinamica di ε di decrescere verso 0.

Roh ([25, pagg. 64-67]), per facilitare gli studenti, propone di effettuare delle attività tramite l'utilizzo delle cosiddette ε-strip. Si tratta di strisce di larghezza costante pari a 2ε, fatte di carta traslucida in modo che gli studenti possano osservare il grafico di una successione attraverso di essa. Al centro della striscia viene disegnata una linea rossa, ad indicare il possibile punto di limite. Queste strisce sono state pensate per rappresentare visivamente la definizione formale: lo studente deve porre la striscia sul grafico in modo da coprire il limite con la linea rossa e osservare i punti interni ed esterni alla striscia: in caso di successioni convergenti (es. $a_n = \frac{1}{n}$) la striscia copre tutti i punti tranne un numero finito, nel caso di successioni divergenti (es. $a_n = (-1)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)$) ne copre un numero infinito ma allo stesso tempo non riesce a coprirne un numero infinito. Riducendo la larghezza della striscia, gli studenti possono inoltre vedere la variazione di N in base ad ε.

Come descritto nel Capitolo 3 di questa tesi, abbiamo svolto un'attività simile a quella di Roh sfruttando il programma di geometria dinamica *Geogebra*, in cui è possibile modificare l'ampiezza della ε-strip e far variare il valore di N in funzione di ε.

3. <u>La presenza di tre quantificatori logici strettamente correlati tra loro</u>

Nella definizione rigorosa di limite, compaiono tre quantificatori logici (uno esistenziale e due universali): una funzione f ammette limite (finito) L per x che tende a x_0 se **per ogni** $\varepsilon > 0$ **esiste** $\delta > 0$ tale che, **per ogni** x per cui $|x - x_0| < \delta$, risulta $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Molti studenti fanno un uso scorretto dei connettivi logici e dei quantificatori e le difficoltà aumentano di fronte alla negazione di proposizioni contenenti quantificatori. Acquisire l'abilità di comprendere la falsità o verità di una proposizione, negarla o riscriverla in modi equivalenti, non è cosa spontanea. Riportiamo alcuni esempi: "se A allora B" è spesso considerato equivalente a "se B allora A"; "nessun matematico indossa gli occhiali" è la negazione di "tutti i matematici indossano gli occhiali"; l'affermazione "ogni numero primo è dispari" non viene considerata falsa, ma piuttosto "vera tranne che per il numero 2".
Una ragione per cui gli studenti hanno problemi a comprendere ed usare correttamente i quantificatori in matematica è che alcune affermazioni nella lingua italiana sono spesso interpretate con accezioni diverse da quelle della matematica. Ad esempio, "alcuni matematici portano il cappello" sottintende nella lingua parlata che "alcuni matematici *non* portano il cappello", mentre nella logica classica non è possibile fare una deduzione del genere.

Comprendere appieno il significato dei tre quantificatori nella definizione di limite, e quindi sotto quali condizioni un limite è verificato, è perciò cosa non semplice. Ancor più complesso, probabilmente, è capire cosa significa che un limite non è soddisfatto, dovendo negare una proposizione con tre quantificatori.
Possiamo riportare come esempio ([23, pag. 76]) il fatto che molti studenti ritengono che, per affermare che un limite dato è corretto, basti trovare un unico intorno di L che soddisfi la definizione. La causa di questo misconcetto può trovarsi anche nel metodo di insegnamento: le illustrazioni grafiche (anche nei libri di testo) evidenziano un unico intorno. Anche nel caso in cui vengano fornite ulteriori spiegazioni è possibile che si formi un'immagine mentale: ad esempio, la frase "per ogni intorno" può essere inconsciamente intesa come "per un intorno arbitrariamente scelto".

1.2.1.5 I MISCONCETTI SUI LIMITI

Elenchiamo di seguito i misconcetti legati ai limiti descritti nei paragrafi precedenti, e ne aggiungiamo altri con i relativi riferimenti:

- Il limite non può essere raggiunto.
- Il limite non può essere superato.
- Le funzioni (successioni) costanti non hanno limite.
- Il limite di una funzione f in x_0 coincide con $f(x_0)$, indipendentemente dalla continuità della funzione.
- La funzione deve essere necessariamente definita nel punto in cui si calcola il limite ([7]).
- La funzione deve essere necessariamente continua nel punto in cui si calcola il limite ([7], [40]).
- La funzione deve essere necessariamente discontinua nel punto in cui si calcola il limite ([40]).
- Limite visto non come numero, ma come processo di avvicinamento.
- Una funzione (successione) deve essere monotona crescente o decrescente.
- Coincidenza tra la nozione di limite e quella di estremo superiore e inferiore.

Esistono poi misconcetti legati alla definizione rigorosa di limite:

- Inversione dell'ordine di scelta di ε e δ.

- E’ sufficiente verificare la definizione per un unico valori di ε.

CAPITOLO 2
BREVE STORIA DEL CONCETTO DI LIMITE

Nella stesura di questo capitolo ci siamo limitati alla consultazione dei testi [14] e [15]. Il nostro obiettivo non è infatti quello di fornire un'analisi dettagliata della storia del concetto di limite, quanto di percorrere le tappe principali del suo sviluppo: questo può essere utile per individuare ostacoli epistemologici, facendo attenzione ai periodi di lento sviluppo del concetto e alle difficoltà riscontrate da vari matematici. Potremo quindi comprendere meglio le radici dei problemi incontrati dagli studenti nella completa e corretta comprensione dei limiti.

2.1 L'ANTICA GRECIA

Anassagora

Il concetto di limite ha cominciato a vedere la luce nell'antica Grecia, tra il V e il IV secolo a.C. Possiamo ad esempio citare Anassagora (500-428 a.C.) tra i primi pensatori che hanno trattato di *quantità infinitesime* (quantità che non sono zero ma sono più piccole di qualunque numero reale positivo):

«*Rispetto al piccolo non vi è un ultimo grado di piccolezza, ma vi è sempre un più piccolo, essendo impossibile che ciò che è cessi di esistere per divisione. Così vi è sempre qualcosa di più grande di ciò che è grande*».

Se cerchiamo di interpretare questo frammento, possiamo scorgere un'idea di limite: Anassagora descrive infatti una grandezza che può essere diminuita indefinitamente pur senza annullarsi, e un apparente limite infinito.

I Pitagorici

I Greci utilizzavano la parola "numero" per indicare i numeri interi: una frazione $\frac{a}{b}$, ad esempio, non era considerata come un numero, come un singolo elemento, ma come una *ragione* (o rapporto) tra i numeri interi a e b. I Pitagorici svilupparono una teoria delle proporzioni per le ragioni, applicabile a lunghezze e aree di semplici figure, a partire dalla

convinzione che ogni coppia di grandezze fosse *commensurabile* (cioè le due grandezze sono multipli interi dello stesso numero).
Sfruttando tale teoria, Ippocrate di Chio (470-410 a.C.) dedusse che il rapporto tra le aree di due cerchi è uguale al rapporto tra i quadrati dei raggi, inscrivendo nei due cerchi poligoni regolari simili e aumentando indefinitamente il numero dei lati. Dato che, ad ogni passo, il rapporto tra le aree dei due poligoni iscritti è uguale al rapporto tra i quadrati dei raggi, si può dedurre che valga un risultato analogo anche per le aree dei due cerchi.

Eudosso

Verso la fine del V sec a.C. vennero individuate grandezze *incommensurabili* (come ad esempio il lato e la diagonale di un quadrato). La scoperta degli incommensurabili rese inutile la teoria pitagorica delle proporzioni per la comparazione dei rapporti di grandezze geometriche. Eudosso (408-355 a.C.) risolse questo problema introducendo il cosiddetto *metodo di esaustione*[1] e una doppia riduzione all'assurdo: il punto centrale delle sue argomentazioni consiste nel dimostrare che due grandezze devono essere uguali perché è assurdo che la loro differenza sia diversa da zero. Il metodo di esaustione richiama da vicino il concetto di limite, ma è applicato a grandezze geometriche e non a numeri e sfrutta la dimostrazione per assurdo, cosa che permette di ottenere risultati ***ignorando il problema dell'infinito*** e quindi il passaggio al limite.

Archimede

Con i lavori di Archimede (287-212 a.C.) ebbero termine le applicazioni greche del concetto di limite. Egli estese il metodo di esaustione a quello che viene chiamato *metodo di compressione*[2]: invece di considerare solo i poligoni inscritti, utilizzò anche quelli circoscritti. Risolse vari problemi (misura dell'area e del perimetro del cerchio, quadratura della parabola, misura della superficie e del volume di una sfera…) che hanno segnato l'inizio dello sviluppo del calcolo: le soluzioni di Archimede possono essere infatti interpretate come calcoli di integrali definiti.

2.1.1 LA MENTALITA' GRECA

Quando Roma divenne una potenza nel Mediterraneo durante il II sec a.C., la cultura Ellenistica e in particolare la matematica greca subirono un declino che impedì nuovi

[1] Si rimanda a § 1.1.1 per la descrizione del metodo di esaustione.
[2] Si rimanda a § 3.2.2.1 per la descrizione del metodo di compressione.

contributi paragonabili a quelli di Archimede. Oltre ai cambiamenti politico-sociali, alcuni dei motivi di questo declino sono legati ad aspetti matematici. La matematica Greca era infatti caratterizzata da una separazione rigida tra la geometria e l'algebra e da una predilezione per la prima. Venivano utilizzate esclusivamente grandezze geometriche (lunghezze, aree, volumi) piuttosto che numeriche, e tali grandezze venivano manipolate verbalmente e non con l'utilizzo di simboli. Di conseguenza, i matematici non furono in grado di vedere le analogie tra soluzioni di problemi simili e di codificare algoritmi generali applicabili ad intere classi di problemi affini. Archimede, ad esempio, determinò le soluzioni dei suoi problemi realizzando costruzioni basate sulle specifiche caratteristiche geometriche di ciascun problema, senza sfruttare i risultati precedentemente ottenuti in problemi simili.

Inoltre, i Greci si imponevano il massimo rigore logico: concetti non formulati precisamente e in maniera completa non potevano quindi essere utilizzati. Rifiutarono perciò gli irrazionali come numeri ed esclusero dalla loro matematica ogni traccia dell'infinito, compreso quindi un concetto di limite esplicito. Anche Archimede condivideva l'***horror infiniti*** tipico dei Greci: egli infatti utilizzò l'argomentazione per assurdo che permetteva di evitare il problema dell'infinito.

Un ultimo aspetto da considerare, è il fatto che le curve oggetto degli studi dei Greci erano poche: vista la prevalenza dell'algebra geometrica su quella numerica o simbolica, non era possibile l'introduzione di nuove curve per mezzo di equazioni (come nella geometria analitica). Inoltre, la geometria greca era essenzialmente statica e non dinamica: di conseguenza, le curve erano definibili solo in termini di luoghi geometrici (ad esempio, il cerchio è il luogo dei punti equidistanti dal centro) o come intersezioni di superfici (ad esempio, una sezione conica è l'intersezione di un piano e di un cono).

2.2 DAL MEDIOEVO AL RINASCIMENTO

Un cambiamento di mentalità importante si ebbe nel Medioevo con i filosofi scolastici, le cui speculazioni sull'infinito, sulla natura del continuo e sull'esistenza degli indivisibili, aiutarono la piena e libera accettazione dei processi infiniti.

All'inizio del XIV secolo, inoltre, iniziarono i primi studi sul movimento. Nella matematica dei Greci, infatti, non aveva avuto ruolo il concetto di variazione continua: le loro quantità erano numeriche e discrete oppure geometriche e statiche; la loro algebra impiegava costanti piuttosto che variabili e la loro geometria trattava figure geometriche fisse;

venivano studiati solo moti uniformi, lineari o circolari, per cui non erano presenti concetti come accelerazione e velocità istantanea.
Un ulteriore cambiamento di mentalità si ebbe durante il Rinascimento: i matematici abbandonarono la necessità di rigore nelle dimostrazioni a favore della rapida scoperta di nuovi risultati. L'insistenza greca sul rigore assoluto aveva ad esempio bandito le grandezze irrazionali, ma adesso queste venivano liberamente utilizzate anche se ancora non possedevano basi logiche come numeri.
Nel XVI secolo l'oggetto "numero reale" assunse un nuovo significato numerico, separato dal rapporto di grandezze geometriche e inserito nel più ampio e generico campo dell'algebra. Per la definitiva e corretta definizione di limite, la nozione di numero reale fu fondamentale.

2.3 IL METODO DEGLI INDIVISIBILI

Le ricerche di vari matematici nel XVII secolo, tra i quali spiccano Johannes Kepler (1571-1630) e Bonaventura Cavalieri (1598-1647), portarono alla nascita del *metodo degli indivisibili* che affonda le radici nell'antico metodo di esaustione. Secondo Cavalieri, ogni superficie piana è costituita dalla sovrapposizione di infinite corde (=indivisibili), intercettate entro la superficie da un fascio di rette parallele e viste come rettangoli aventi per base la corda e un'altezza piccolissima; allo stesso modo, ogni solido è costituito dalla sovrapposizione di infinite sezioni (=indivisibili) di spessore piccolissimo, intercettate da un fascio di piani paralleli e paragonabili a figure piane. Il termine *indivisibile* potrebbe quindi tradursi con l'espressione moderna *figura geometrica di spessore infinitesimo*. Cavalieri utilizza la teoria degli indivisibili per calcolare aree e volumi, basandosi fondamentalmente sul "Principio di Cavalieri"[3].
Nel metodo degli indivisibili, che pur si avvicina al calcolo integrale, manca ancora l'idea del passaggio al limite.

[3] Il Principio di Cavalieri dice: "Se due solidi possono essere disposti in modo tale che, sezionandoli con un fascio di piani paralleli, ciascun piano individui sui due solidi due sezioni con la stessa area, allora i due solidi hanno lo stesso volume. Se le sezioni corrispondenti hanno un rapporto costante, lo stesso rapporto esiste tra i volumi".

2.4 RENE' DESCARTES e PIERRE DE FERMAT

Cartesio (1596-1650) e Fermat (1601-1665) hanno inventato indipendentemente la *geometria analitica*, in base alla quale ogni curva può essere rappresentata da un'equazione e, viceversa, ogni equazione determina una curva. Cartesio, in particolare, tradusse problemi geometrici nel linguaggio di un'equazione algebrica usando pienamente la notazione simbolica attuale, cosa che facilitò lo sviluppo di tecniche algebriche formali. Il fatto che da questo momento una nuova curva potesse essere creata semplicemente scrivendo una nuova equazione, fornì ai matematici la possibilità di studiare innumerevoli nuove curve e diversi problemi di aree e volumi, per i quali non erano più sufficienti i metodi risolutivi greci.

Nell'opera *Methodus ad disquirendam maximam et minima*, Fermat espone le sue ricerche sulla determinazione, per via aritmetica e non più solamente geometrica, dei punti di massimo e di minimo di una curva.
Nel procedimento di determinazione dei massimi e dei minimi, una stessa quantità viene in un primo momento trattata come diversa da zero e poi eliminata come fosse zero. Fermat non motiva le ragioni di questa scelta, né parla di infinitesimi o di limiti. Inoltre, non sviluppa i suoi metodi in procedure generali per problemi simili. Generalmente in matematica, riconoscere l'importanza di un concetto comporta la sua traduzione in una nuova terminologia che facilita la sua applicazione in ulteriori ambiti. Fermat ottenne la quantità $\left.\frac{F(A)-F(A+E)}{E}\right|_{E=0}$ che noi oggi chiamiamo derivata e indichiamo con $F'(A)$, ma egli non la chiamò in nessun modo né introdusse alcuna notazione.

2.5 GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ e ISAAC NEWTON

Gli storici della matematica ritengono che Newton (1642-1727) e Leibniz (1646-1716) abbiano scoperto il calcolo infinitesimale. Con questo non si fa riferimento soltanto ai metodi effettivi per la soluzione di problemi che comprendono tangenti e aree, in quanto questi problemi sono stati studiati con successo fin dall'antichità. Newton e Leibniz condividono il merito di:

1. aver introdotto una generalità di metodo nel calcolo infinitesimale, tale da dare origine ad una scienza indipendente dalla geometria e capace di affrontare una gamma molto estesa di problemi;
2. aver ridotto i problemi di determinazione delle tangenti, dei massimi e dei minimi, di aree e di volumi alle sole differenziazione e antidifferenziazione;
3. aver introdotto una notazione che rende semplice, quasi automatico, utilizzare i concetti di derivata e integrale (ancor oggi usiamo i simboli $\dot{x}$ introdotto da Newton, $\frac{dy}{dx}$ e $\int y\,dx$ introdotti da Leibniz);
4. aver provato quello che oggi noi chiamiamo Teorema Fondamentale del Calcolo: la derivata e l'integrale sono l'una l'inversa dell'altra.

Leibniz interpretò quella che noi oggi chiamiamo derivata come rapporto tra le differenze infinitesime *dy* e *dx*; Newton, al contrario, più attento alle questioni di dinamica e in generale del moto, considerava le grandezze come generate da un moto continuo, ossia come variabili in funzione del tempo (*fluenti*) e utilizzava pertanto gli incrementi infinitamente piccoli di x e di y come mezzo per determinarne ad ogni istante la *flussione* (intesa come velocità, e quindi derivata): essa non era altro che il limite del rapporto degli incrementi quando questi diventavano sempre più piccoli.
Tuttavia c'erano ancora alcuni concetti non chiari. Per quanto riguarda Leibniz, in assenza di una rigorosa descrizione mediante l'idea di passaggio al limite, rimaneva incertezza riguardo al preciso significato degli infinitesimi. Questi, infatti, non obbediscono all'assioma di Archimede[4] che costituiva la base dell'aritmetica, dell'algebra e della geometria del XVII secolo: gli oggetti non archimedei erano quindi visti con qualche sospetto. Comunque, Leibniz si rese conto che l'utilizzo degli infinitesimi, effettuato in accordo con le regole per il calcolo e la manipolazione dei differenziali da lui descritte, porta a soluzioni corrette: sia che gli infinitesimi esistano sia che non esistano, funzionano come artifici utili per ottenere risultati.
Per quanto riguarda Newton, non era chiaro cosa fosse effettivamente la flussione. Anche se intuitivamente può essere intesa come una velocità, tutte le dimostrazioni di Newton coinvolgono una quantità ***o*** indefinitamente piccola. Essa è zero? Se sì, come possiamo dividere per essa? Se non è zero, non commettiamo un errore trascurandola? Per evitare

[4] L'assioma di Archimede dice: "Dati due numeri x e y reali positivi, con $x < y$, esiste un numero naturale n tale che $nx \geq y$".

tali problemi, Newton parla di ragioni di incrementi evanescenti e descrive i limiti come ragioni ultime (cioè come valore delle ragioni di incrementi evanescenti nel momento in cui stanno svanendo).
Scrive nell'opera *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*:

«*Queste ultime ragioni con cui le quantità si annullano non sono in realtà le ragioni di quantità ultime, bensì limiti verso cui le ragioni delle quantità, decrescendo oltre ogni limite, si avvicinano sempre, e ai quali si possono avvicinare più di ogni differenza data, senza mai oltrepassarle, né mai raggiungerle effettivamente prima che le quantità siano diminuite all'infinito».*

Osserviamo che l'espressione "senza mai oltrepassarle" indica che Newton possiede un'idea di ***limite come confine***, cosa che implica, ad esempio, che una variabile non possa oscillare attorno al suo limite. La frase "né mai raggiungerle effettivamente prima che le quantità siano diminuite all'infinito" non è chiara e porta a domandarsi se Newton ritenesse che ***il limite non può essere raggiunto***; Newton non aiutò a chiarire questo punto neppure quando enunciò come teorema che "le quantità e i rapporti di quantità, che in un intervallo di tempo finito qualsiasi convergono con continuità verso l'uguaglianza e che prima della fine di tale intervallo si avvicinano l'una all'altra più di qualunque differenza data, finiscono per diventare uguali". Che cosa significa infatti "finiscono per diventare uguali"?. Questa mancanza di chiarezza guadagnò al calcolo le critiche di George Berkeley, vescovo di Cloyne, per il quale una quantità o è zero o non lo è, non c'è niente in mezzo.

2.6 JEAN LE ROND D'ALEMBERT

D'Alembert (1717-1783) non descrisse il concetto di limite in sé, ma fu il primo a definire la derivata come limite di un rapporto di incrementi piuttosto che come rapporto di differenziali o flussioni.
Nell'*Encyclopédie* (1751) troviamo la prima dichiarazione dell'importanza del limite all'interno del calcolo differenziale, oltre che un primo tentativo di una sua definizione, anche se ancora vincolato ad un linguaggio verbale. Scrive D'Alembert:

«*La teoria dei limiti è la base della vera metafisica del calcolo differenziale. […] Diciamo che una grandezza è il limite di un'altra grandezza quando la seconda può avvicinarsi alla prima* *più di una grandezza data, tanto piccola quanto si possa supporre, senza però che la grandezza che si avvicina possa mai sorpassare la grandezza che è avvicinata. A dire il vero* ***il limite non coincide mai, o non diventa mai uguale, alla quantità di cui è limite****, ma questa vi si avvicina sempre di più e può differirne poco quanto si vuole. Il cerchio per esempio è il limite dei poligoni inscritti e circoscritti in quanto non si confonde mai rigorosamente con essi, benché questi possano avvicinarsi all'infinito*».

E' evidente l'imprecisione che caratterizza questa definizione, fondata ancora su un concetto dinamico e intuitivo di limite e su uno scarso rigore. D'Alembert evita di utilizzare gli infinitesimi, per la loro natura poco chiara[5], ma sono comunque presenti espressioni poco precise come "vi si avvicina sempre di più". Secondo il matematico, inoltre, ***il limite non può essere raggiunto***.

2.7 LA SVOLTA DEL XIX SECOLO

I matematici del XVIII secolo erano riusciti a costruire quasi tutti i concetti e le tecniche base dell'analisi matematica (successioni e serie infinite, funzioni continue, derivate, integrali, sviluppi in serie trigonometriche, risoluzione di equazioni differenziali…) usando numeri reali, concetti di limite e di convergenza senza che questi fossero stati costruiti o definiti rigorosamente. Agli inizi del XIX secolo crebbe la necessità di fondare la matematica su basi solide.

2.7.1 JOSEPH-LOUIS LAGRANGE e AUGUSTIN-LOUIS CAUCHY

L'opera di Lagrange (1736-1813) *Théorie des fonctions analytiques* del 1797 dà avvio a quella che viene chiamata *aritmetizzazione dell'analisi*, ossia quel processo che mira a dare un fondamento rigoroso al calcolo, allontanandolo dalle evidenze di tipo geometrico e fondandolo sull'aritmetica. Il calcolo di Newton e Leibniz era un calcolo di variabili geometriche e molta della loro analisi dipendeva da concetti geometrici intuitivi. Inoltre, secondo Lagrange, il concetto di limite di Newton non era abbastanza chiaro da poter

[5] Scrive D'Alembert riguardo agli infinitesimi: «*Una quantità o è qualcosa o è niente: se è qualcosa non si è ancora annullata; se è niente si è letteralmente annullata. Supporre che vi sia uno stadio intermedio fra qualcosa e il niente, è una pura chimera*».

essere usato come base per il calcolo ed era troppo restrittivo pensare che il limite non potesse essere raggiunto o superato.

Cauchy (1789-1857) non discute il fatto che il limite possa essere raggiunto o meno, ma ritiene, come Lagrange che il limite possa essere superato. Anche se utilizzò un registro verbale nelle sue definizioni, la sua comprensione del limite era algebrica: questo significa che Cauchy utilizzava la caratterizzazione dei limiti con le disuguaglianze nelle sue dimostrazioni. Ad esempio, il primo passaggio della dimostrazione del Teorema del Valore Intermedio dice:

«*Siano δ e ε due numeri molto piccoli; il primo è scelto in maniera tale che per ogni h minore in valore assoluto di δ e per ogni valore di x sull'intervallo dato, il rapporto* $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ *sarà sempre più grande di $f'(x)-\varepsilon$ e più piccolo di $f'(x)+\varepsilon$*»[6].

Riportiamo la definizione che Cauchy dà del limite:

«*Quando i valori successivamente assunti da una stessa variabile si avvicinano indefinitamente ad un valore fissato, in modo che ne differiscano poco quanto si vuole, quest'ultimo è chiamato il limite di tutti gli altri. Così per esempio, un numero irrazionale è il limite delle diverse frazioni che ne forniscono valori sempre più approssimati*».

Tale definizione risulta ancora imprecisa (non c'è nemmeno riferimento al punto in cui si calcola il limite) e lontana dalla simbologia che utilizziamo ancor oggi. Il concetto di limite, però, diventa per Cauchy il punto di partenza per definire molti altri concetti dell'analisi: la continuità delle funzioni, le derivate e gli integrali, la convergenza di una serie e la sua somma. Dopo Cauchy, infatti, il calcolo venne visto non più come un insieme di metodi risolutivi efficaci, ma come una materia rigorosa con buone definizioni su cui si basavano le dimostrazioni dei teoremi.

[6] Il nome e il simbolo di derivata furono introdotti da Lagrange.

2.7.2 KARL WEIERSTRASS

Il tentativo di aritmetizzazione dell'analisi portato avanti da Lagrange e Cauchy fu solo in parte vincente, perché prima della fine del XIX secolo i numeri reali erano compresi solo in una forma intuitiva. Dal XVII secolo i matematici avevano iniziato ad utilizzare i numeri irrazionali basandosi sul fatto che ognuno di essi può essere approssimato ad un numero razionale con qualsiasi precisione desiderata, ma senza domandarsi quale fosse precisamente la loro natura. Inoltre, era stato assunto che obbedissero alle stesse regole algebriche dei razionali, senza che questo fosse stato dimostrato rigorosamente. Questa assenza di una piena comprensione dei numeri reali portò anche a veri e propri errori, come la convinzione che ogni funzione continua sia differenziabile tranne al più in punti singolari isolati. Weierstrass (1815-1897) mostrò invece l'esistenza di funzioni continue non differenziabili in nessun punto. Questo è uno degli aspetti che rese chiara la necessità di riesaminare le basi dell'analisi e in particolare portò alla costruzione del sistema dei numeri reali.

L'ultimo ritocco all'analisi infinitesimale fu dato da Weierstrass nella sua formulazione puramente aritmetica del concetto di limite, che precedentemente era stata data con connotazioni di movimento continuo. Weierstrass sostituì questa descrizione dinamica dei limiti con una statica che coinvolge solo numeri reali, senza alcun appiglio al movimento, alla geometria ed agli infinitesimi. Egli presentò la sua definizione di continuità per la prima volta nel 1861 durante le sue lezioni:

«*Se è possibile determinare un intorno* δ *tale che, per tutti i valori di* h *minori in valore assoluto di* δ, $f(x+h) - f(x)$ *sia minore di una quantità* ε, *piccola quanto si vuole, allora si dirà che si è fatto corrispondere ad una variazione infinitamente piccola della variabile una variazione infinitamente piccola della funzione*».

Heine, nei suoi *Elemente* del 1872 che risentono dell'influenza delle lezioni di Weierstrass, definisce il limite nel modo seguente (quello ancor oggi utilizzato):

«*Il numero* L *è il limite della funzione* $f(x)$ *per* $x = x_0$ *se, dato un qualsiasi numero arbitrariamente piccolo* ε, *si può trovare un altro numero* δ *tale che, per tutti i valori di* $x \neq x_0$ *che differiscono da* x_0 *meno di* δ, *il valore di* $f(x)$ *differisca da quello di* L *meno di* ε».

2.8 IL XX SECOLO

Per completare la storia del concetto di limite, accenniamo al lavoro di Abraham Robinson (1918-1974) che introdusse l'Analisi non-standard. Essa fornisce un fondamento teorico per gli infiniti e gli infinitesimi, mostrando che essi esistono come oggetti matematici e possono servire come base per un rigoroso sviluppo del calcolo alternativo a quello tradizionale. Nel suo libro del 1966 ([24]) Robinson mostra come sviluppare gran parte dell'analisi moderna in termini di infinitesimi e nel 1976 H.J. Keisler pubblica un'introduzione al calcolo non-standard ([19]). L'analisi non-standard può quindi essere impiegata per rendere rigorose molte delle argomentazioni intuitive dei matematici dei secoli XVII e XVIII che facevano uso degli infinitesimi.

CAPITOLO 3
IL TIROCINIO E LA SPERIMENTAZIONE DIDATTICA

Lo studio della letteratura esistente sulle difficoltà legate al concetto di limite è stato il punto di partenza nella preparazione delle lezioni tenute durante il mio tirocinio a scuola. Ho cercato di guidare gli studenti alla piena comprensione dei limiti di funzioni avendo in mente le difficoltà generalmente riscontrate, presentando lezioni ed esercizi che potessero aiutarli a superarle.
Nel seguito mi riferirò sempre alla scrittura $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$.

Riassumo di seguito i misconcetti e gli errori registrati nella letteratura sui limiti sui quali mi sono concentrata:

- Il limite non può essere raggiunto.
- Il limite non può essere superato.
- Le funzioni costanti non hanno limite.
- Il limite di una funzione f in x_0 coincide con $f(x_0)$, indipendentemente dalla continuità della funzione.
- La funzione deve essere necessariamente definita in x_0.
- La funzione deve essere necessariamente continua in x_0.
- La funzione deve essere necessariamente discontinua in x_0.
- Limite visto non come numero, ma come processo di avvicinamento.
- Inversione dell'ordine di scelta di ε e δ.
- E' sufficiente verificare la definizione per un unico valori di ε.

Oltre a quelli elencati, ho riscontrato che i ragazzi hanno difficoltà a comprendere che x_0 deve essere punto di accumulazione per il dominio della funzione e non risulta semplice per tutti gestire asintoti verticali destri o sinistri.

3.1 IL TUTOR, GLI STUDENTI ED IO

Ho svolto il mio tirocinio, della durata di circa due mesi, nelle classi 5A e 5B del Liceo Scientifico dell'Istituto Statale di Istruzione Superiore "Giovanni da Castiglione" di Castiglion Fiorentino (AR). Il rapporto con il mio tutor, il Prof. Checcaglini, è stato da subito caratterizzato da stima reciproca e collaborazione, cosa che mi ha messo a mio agio aiutandomi a cogliere e valutare molti aspetti della sua didattica e del suo rapporto con gli studenti, e permettendomi di prendere coscienza dei "punti deboli" della mia didattica. Ritengo che il professore abbia un buon rapporto con entrambe le classi, fatto di stima e rispetto, che si esplicita, ad esempio, nel fatto che durante le interrogazioni il professore non mortifica gli studenti per eventuali errori e, al termine di esse, dedica qualche minuto a sottolineare loro gli aspetti che hanno mostrato di sapere e a chiedere spiegazioni rispetto a quelli non ben assimilati. Questo contribuisce a creare un clima in generale sereno, e porta molti studenti a fare domande e osservazioni durante le lezioni.

La classe 5A, composta da 24 studenti, ha un rendimento in matematica non molto buono, anche se sono presenti alcuni elementi con buone capacità. Si tratta però di una classe in generale molto attenta e partecipe alle lezioni, con grande curiosità e desiderio di comprendere gli argomenti trattati. Io stessa, infatti, sono stata accolta da quasi tutti gli studenti con grande entusiasmo e, nel corso di tutte le mie lezioni, essi hanno mantenuto un comportamento molto rispettoso e un interesse verso quello che spiegavo. Spesso molti alunni, al termine della giornata scolastica, si fermavano con me qualche minuto per chiedere chiarimenti. Mi sono sentita realmente presa sul serio e considerata la loro "insegnante", nonostante la mia posizione ibrida. Ho anche avuto modo di parlare con gli studenti del loro futuro universitario, facendomi raccontare i loro interessi e rispondendo alle loro domande, cosa che ha contribuito a costruire un clima di fiducia e di collaborazione.

La classe 5B, composta da 22 studenti, ha un rendimento in matematica alto e un carattere molto più forte rispetto alla 5A: la maggior parte degli studenti si sente sicura delle proprie conoscenze e questo genera in alcuni un senso di indipendenza. E' comunque caratterizzata anch'essa da curiosità e da maggior passione per la materia rispetto alla 5A. Il mio rapporto con questa classe è stato molto diverso rispetto al rapporto con la prima. Ho notato poco interesse verso le mie lezioni, dovuto probabilmente al fatto che i ragazzi non mi hanno considerata come una figura da seguire, ad eccezione di pochi. Molti, infatti, non hanno svolto gli esercizi che assegnavo loro per casa e, se avevano domande, le rivolgevano al professore.

E' stato molto interessante avere a che fare con due classi così diverse: la tentazione era infatti quella di dedicare maggior impegno in 5A, classe in cui mi trovavo meglio; ho cercato invece di comportarmi allo stesso modo, provando ad essere il più possibile chiara nelle spiegazioni e ad assicurarmi che gli studenti mi seguissero, superando quella difficoltà iniziale legata alla scarsa fiducia riposta in me da parte della 5B.

3.2 SVOLGIMENTO DELLA SPERIMENTAZIONE

Il ciclo di lezioni sul concetto di limite si è svolto nell'arco di tre settimane consecutive con l'aiuto del Prof. Checcaglini. Ogni lezione ha avuto durata di 1 ora in quanto, per l'intrinseca difficoltà degli argomenti trattati, abbiamo ritenuto più produttivo non sovraccaricare gli studenti di eccessive informazioni e dar loro il tempo di rielaborarle. Successivamente, è stato somministrato ai ragazzi un test finale, circa due mesi dopo il termine del ciclo di lezioni: abbiamo deciso di lasciar passare un po' di tempo per avere un'indicazione più precisa sulla comprensione acquisita del concetto di limite. Ho preparato delle lezioni frontali con il supporto di vario materiale: presentazioni in Power Point; esercizi tratti dal libro di testo o da me pensati allo scopo di mettere gli studenti di fronte ad alcuni misconcetti registrati nella letteratura sui limiti; animazioni da me realizzate con il software Geogebra, per aiutare ad avvicinare alcuni aspetti del concetto di limite sfruttando un registro visivo e dinamico; una lezione, inoltre, si è totalmente svolta nell'aula di informatica lavorando con tale programma. Ho cercato di rendere le lezioni il più possibile interattive, coinvolgendo gli studenti facendo domande e chiamandoli spesso alla lavagna: ritengo infatti che, se i ragazzi si mettono personalmente in gioco formulando ipotesi risolutive ai problemi e scontrandosi con i propri errori, le conoscenze acquisite siano più solide.

Nelle settimane precedenti le mie lezioni, il Prof. Checcaglini aveva spiegato tutti gli argomenti necessari alla successiva trattazione dei limiti: intorni, punti di accumulazione, studio di funzioni, funzioni definite a tratti, estremi superiore e inferiore. I ragazzi, inoltre, possedevano già un'idea intuitiva di asintoto e di funzione continua.

Il dubbio più grande che avevo nel preparare le lezioni, era se utilizzare il classico approccio dinamico oppure quello statico nell'introduzione del concetto di limite. Alla fine ho scelto il primo: ritengo che l'idea di movimento sia molto utile per formare una prima immagine intuitiva del concetto; inoltre, ho pensato che gli studenti avessero una concezione dinamica e non statica delle funzioni, anche solo per il fatto che per disegnare i grafici bisogna muovere la matita sul foglio. Fatta questa scelta, mi sono impegnata, tramite le spiegazioni in classe e gli esercizi proposti, ad aiutare i ragazzi a non incorrere o a superare i misconcetti derivanti dall'approccio dinamico descritti nel primo capitolo di questa tesi.

Dopo un iniziale approccio intuitivo, siamo arrivati alla definizione rigorosa di limite. In questo è stato importante il ruolo svolto dal software Geogebra: grazie alla grafica e alla possibilità di muovere gli oggetti sullo schermo, ritengo che questo programma possa essere molto utile per aiutare i ragazzi a comprendere appieno la definizione rigorosa. Il fatto che Geogebra sia un software dinamico è stato un ulteriore motivo per adottare un approccio dinamico nella spiegazione dei limiti.

3.2.1 PROGRAMMA DIDATTICO

Di seguito riporto la descrizione schematica di ogni lezione e dei suoi obiettivi.

<u>Prima lezione</u>

- Breve storia del concetto di limite.
- Esempi storici di applicazioni del concetto di limite: paradosso della dicotomia di Zenone, approssimazione di π, determinazione della retta tangente ad una curva in un punto.
- Cosa descrive il limite di una funzione f in x_0 e confronto con $f(x_0)$.

Obiettivi: mostrare che la matematica non è una materia arida e astratta, ma descrive la realtà e richiede ingegno e creatività; stimolare l'interesse verso il concetto di limite presentando sue applicazioni storiche; porre gli studenti di fronte a due dei principali misconcetti: $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ e limite coincidente con il processo di avvicinamento di $f(x)$ a L quando x si avvicina a x_0.

<u>Seconda lezione</u>

- Determinazione grafica dei limiti.
- Definizione di limiti destro e sinistro, definizione di limiti per eccesso e per difetto.
- Condizione di esistenza del limite in un punto.
- Definizione intuitiva di limite.

Obiettivi: acquisire la capacità di determinare i limiti dal grafico di una funzione; comprendere che il limite esiste se e solo se limite destro e limite sinistro esistono e sono uguali; imparare a determinare il limite in x_0 quando la funzione è continua o discontinua in x_0; comprendere l'andamento del grafico di una funzione in relazione ai suoi asintoti orizzontali; porre i ragazzi di fronte al misconcetto di non esistenza del limite di funzioni costanti.

Terza lezione

- Correzione esercizi per casa.
- Definizione di asintoti verticali e orizzontali.

Obiettivi: acquisire la capacità di determinare i limiti dal grafico di una funzione; insistenza sulla comprensione dell'esistenza del limite se e solo se limite destro e limite sinistro esistono e sono uguali; comprendere la differenza tra $f(x_0)$ e limite in x_0; calcolo di limiti nel caso di asintoti verticali destri o sinistri; acquisire la capacità di disegnare una funzione arbitraria assegnati alcuni suoi limiti; far riflettere sul fatto che talvolta il grafico della funzione possa intersecare uno dei suoi asintoti.

Quarta lezione

- Costruzione della definizione rigorosa generale di limite tramite il software Geogebra.
- Esercizi per casa da risolvere con Geogebra.

Obiettivi: guidare gli studenti nella costruzione il più possibile autonoma della definizione rigorosa di limite; aiutare i ragazzi a capire l'importanza del quantificatore "per ogni", dell'ordine in cui devono essere fissati gli intorni e della dipendenza dell'intorno di x_0 dall'intorno di L; imparare a verificare graficamente un limite usando Geogebra; ancora sulla differenza tra $f(x_0)$ e limite di f in x_0.

Quinta lezione

- Definizione di $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ nel caso in cui sia x_0 che L siano finiti.
- Esempi di verifica di limite tramite la definizione.

Obiettivi: comprendere la definizione di limite nel caso in cui sia x_0 che L siano finiti e la sua simbologia, e applicarla per verificare un limite dato; far comprendere agli studenti l'importanza del quantificatore "per ogni" anche nella verifica tramite la definizione.

Sesta lezione

- Definizione di limite quando x_0 e/o L non sono finiti.
- Esempi di verifica di limite tramite la definizione.

Obiettivi: comprendere le definizioni di limite nel caso in cui x_0 e/o L non siano finiti e la relativa simbologia, e applicarle per verificare un limite dato.

Settima lezione

Compito finale.

Obiettivi: verificare la comprensione acquisita dagli alunni del concetto di limite, con particolare riferimento ai misconcetti più diffusi registrati in letteratura.

3.2.2 DIARIO DELLE LEZIONI

I paragrafi seguenti contengono una descrizione dettagliata delle lezioni, con commenti sull'esperienza fatta in relazione anche al mio desiderio di insegnare a scuola terminata l'università.

3.2.2.1 PRIMA LEZIONE: Introduzione storica e primo approccio al concetto di limite

5B - 02/10/2014 - 22 studenti presenti

5A - 03/10/2014 - 24 studenti presenti

Ero molto emozionata nel tenere la mia prima lezione in una classe. Mi hanno aiutata a tranquillizzarmi la presenza del Prof. Checcaglini (sempre pronto ad intervenire nel caso fosse necessario precisare qualcosa), il fatto che nelle due settimane precedenti avevo avuto modo di conoscere un po' i ragazzi (assistendo in classe alle lezioni del professore) e l'enorme desiderio di mettermi in gioco per verificare la mia inclinazione all'insegnamento (tenendo tra l'altro delle lezioni su un argomento che mi ha molto appassionata e incuriosita grazie allo studio della letteratura sui limiti).

INTRODUZIONE STORICA

Ho pensato di iniziare il ciclo di lezioni con una breve introduzione storica al concetto di limite: il mio obiettivo era quello di rendere i ragazzi consapevoli fin da subito dell'importanza e della difficoltà di questa nozione.
Per prima cosa, ho letto loro una frase che il matematico statunitense Kline Morris ha riportato nella sua "Storia del pensiero matematico" (1991) a proposito dei limiti:

«*I grandi progressi della matematica e della scienza hanno quasi sempre origine nell'opera di molti studiosi che portano ciascuno il proprio contributo, pezzo dopo pezzo, per centinaia d'anni; alla fine, un uomo d'ingegno abbastanza acuto per saper distinguere le idee valide nella gran massa dei suggerimenti e delle dichiarazioni dei suoi predecessori, dotato dell'immaginazione occorrente per incastonare le varie tessere in un nuovo mosaico e audace quanto basta per costruire un progetto generale, compie il passo culminante e definitivo*».

Volevo far capire ai ragazzi che la matematica non è una materia arida, fatta di regole e definizioni astratte, ma richiede collaborazione, ingegno e creatività: generalmente, vari studiosi collaborano all'introduzione di un nuovo concetto, sfruttando le loro intuizioni per risolvere problemi specifici e concreti, per arrivare soltanto in una fase finale ad una generalizzazione e formalizzazione rigorosa.

Per una descrizione più approfondita della storia del concetto di limite si rimanda al Capitolo 2 di questa tesi. Ai ragazzi ho voluto soltanto indicare schematicamente le tappe fondamentali di questa storia, per mostrare che arrivare alla definizione rigorosa di limite ha richiesto un arco di tempo molto vasto: questo è indice delle difficoltà intrinseche al concetto. Ho sottolineato questo aspetto agli studenti, non per spaventarli ma piuttosto per renderli consapevoli dell'impegno necessario per comprendere i limiti e per tranquillizzarli nel caso di difficoltà o errori: anche i grandi matematici della storia avevano idee sbagliate che con il tempo sono state modificate o corrette. Inoltre, grazie alla sua lunga gestazione, il concetto di limite si presta bene a mostrare la dinamicità e vitalità della matematica.

Possiamo porre la nascita dei limiti nella Magna Grecia tra il V e IV secolo a.C., in quanto molti risultati ricavati dai matematici greci erano, in sostanza, basati su un passaggio al

limite. Esempi sono dati dai paradossi di Zenone e dall'approssimazione di π da parte di Archimede.
Prima però di giungere a risultati che ponessero le basi di una teorizzazione e formalizzazione di tale concetto, dobbiamo compiere un salto di diversi secoli, fino alla prima metà del 1600. In questo periodo vari matematici, come Fermat e Cavalieri, diedero notevoli contributi.
Importantissime furono le idee di Leibniz e Newton, espresse tra la fine del '600 e l'inizio del '700, che tuttavia si limitarono ad utilizzare il concetto di limite a livello intuitivo. Il primo tentativo di darne una definizione precisa risale al 1765 da parte di D'Alembert, ma fu solo nell'Ottocento che si arrivò ad una definizione rigorosa, prima con Cauchy (1821) e poi con la miglior formalizzazione di Weierstrass intorno al 1872 (quella ancor oggi utilizzata).

In seguito a questa breve nota storica, ho mostrato agli studenti alcuni esempi che storicamente hanno motivato la nascita del concetto di limite. Questo perché i ragazzi intuissero fin da subito la sua utilità pratica: troppo spesso, infatti, è diffusa l'idea che la matematica sia una materia astratta fatta di problemi ed esercizi fini a se stessi.

Ho presentato i seguenti esempi:

- Il paradosso della dicotomia di Zenone
- L'approssimazione di π di Archimede
- La determinazione della retta tangente ad una curva in un punto

<u>Il paradosso della dicotomia di Zenone</u>

Supponiamo di dover percorrere una distanza pari a 2 unità. Dovremo prima percorrere metà di tale distanza (1 unità); poi dovremo percorrere metà della distanza rimasta ($\frac{1}{2}$ di unità); ancora, dovremo percorrere metà della distanza rimasta ($\frac{1}{4}$ di unità), e così via.

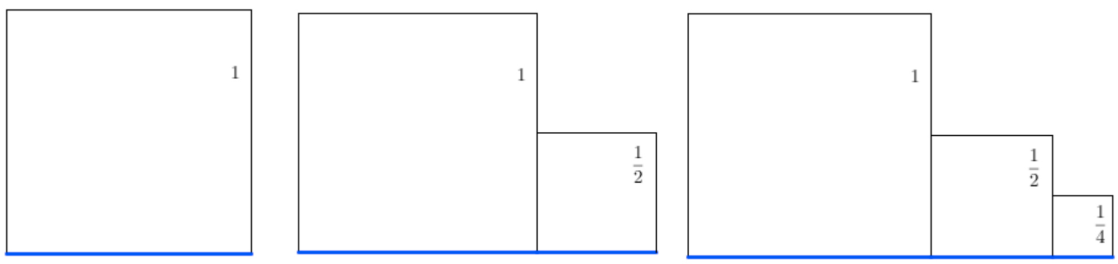
La distanza da percorrere sarà quindi data da una somma di infiniti termini che, a livello intuitivo, può risultare infinita:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots=\textit{somma di infiniti termini}\stackrel{?}{=}\infty$$

Da qui il paradosso: percorrere un numero infinito di suddivisioni in un tempo finito è impossibile, quindi il movimento non esiste.

Entrambe le classi conoscevano il paradosso di Achille e la tartaruga (simile a quello della dicotomia che abbiamo appena presentato), ma non tutti gli studenti ricordavano la soluzione di tale paradosso.

Ho deciso di non spiegare direttamente ai ragazzi in cosa consiste il paradosso e come possa essere risolto, ma ho preferito che facessero i conti con le loro intuizioni. Ho quindi presentato il paradosso tramite la seguente attività, che gli studenti hanno svolto in qualche minuto:



Osserva la sequenza di quadrati in figura. Ogni quadrato ha lato pari alla metà del lato del quadrato precedente.

1) Continua la sequenza finché riesci a farlo.
2) Quanto è lungo il segmento blu della figura "finale"?

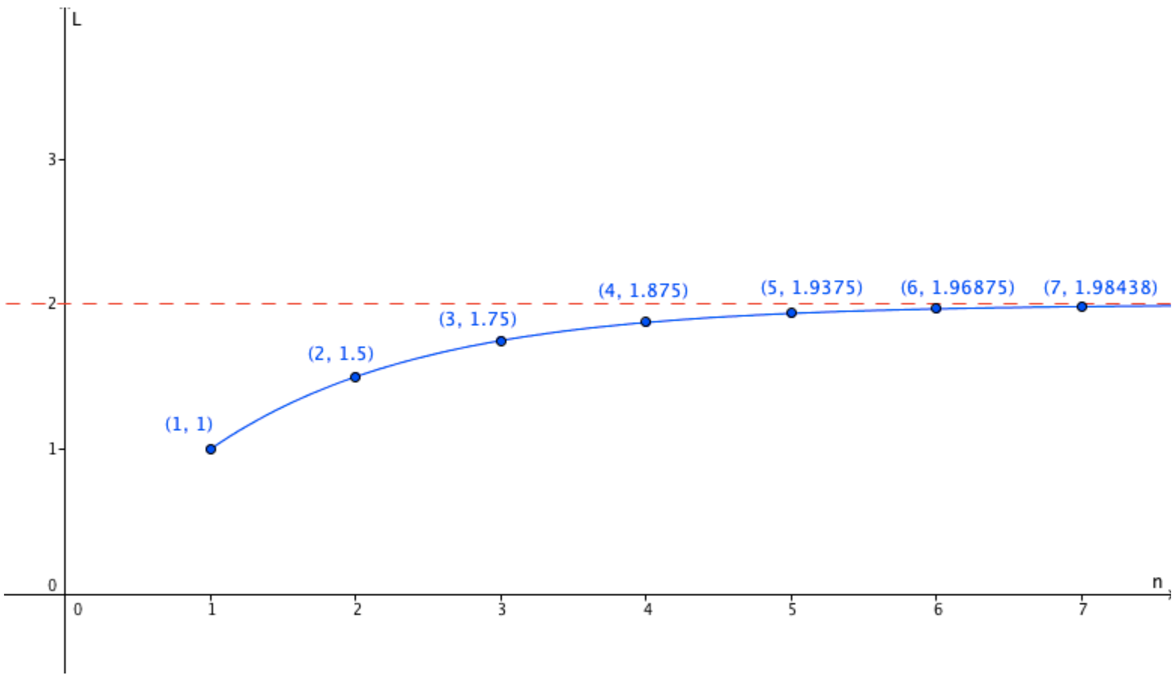
In entrambe le classi, tutti hanno risposto che la sequenza è infinita. Non hanno quasi mai fatto ricorso al disegno di quadrati successivi, ma si sono limitati a indicare la sequenza di numeri:

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{16}\ldots$$

Avevo già notato che questi studenti erano stati abituati all'idea di infinito e ne avevano una buona concezione: mi aspettavo quindi che la prima domanda non creasse particolari problemi.

Per quanto riguarda il secondo quesito, invece, mi aspettavo più difficoltà, legate alla presenza di un processo infinito e di un limite finito.
Le risposte sono state infatti diverse: molti hanno affermato che la lunghezza del segmento blu "finale" è infinita, essendo somma di infiniti termini.
Altri hanno riconosciuto la lunghezza come finita. In particolare, una ragazza di 5A ha affermato *"il segmento blu è finito perché il lato dei quadrati diventa sempre più piccolo fino a diventare un punto".* Un'altra ragazza ha addirittura detto che il segmento blu ha lunghezza 2, anche se non ha saputo (o voluto?) motivare la sua risposta.
Dopo aver sottolineato che in effetti la lunghezza è finita, ho chiesto agli studenti come avrebbero potuto verificare questa affermazione.

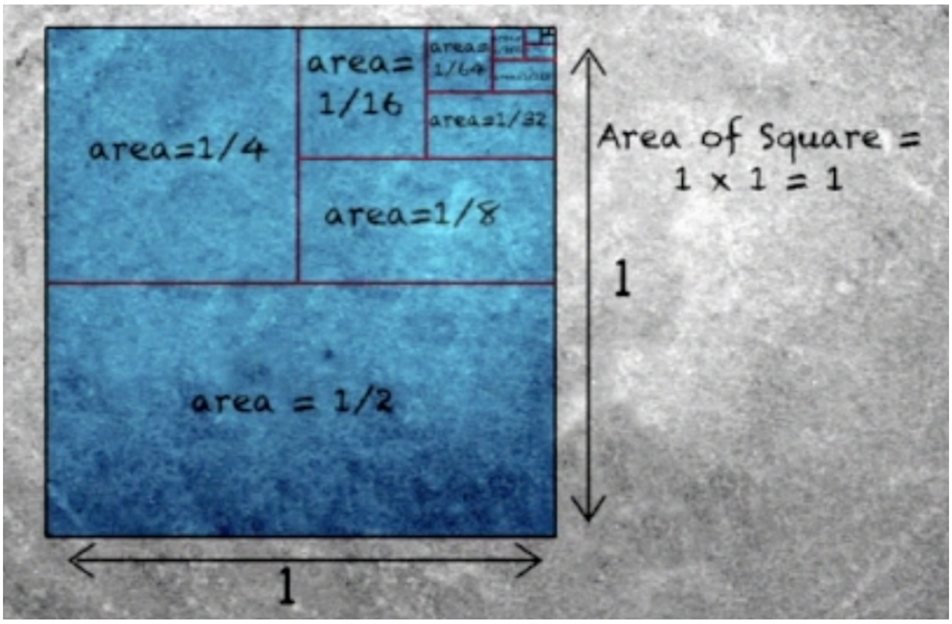
In generale, l'idea è stata quella di "fare la somma". Abbiamo quindi visto, con una calcolatrice, che aggiungendo ad ogni passo la misura del lato dell'ultimo quadrato, il risultato si avvicina sempre più a 2.
Una ragazza di 5B ha esclamato *"è come un asintoto!".* Perciò, ho riportato su Geogebra la lunghezza del segmento blu L in funzione del numero di quadrati n e abbiamo osservato che effettivamente L = 2 è asintoto orizzontale per tale funzione.



A questo punto, ho sottolineato che, introducendo i limiti, avremmo potuto dire che, quando il numero di quadrati va all'infinito, il limite della lunghezza del segmento blu è 2.

Abbiamo visto nello studio della letteratura sui limiti presentata nel Capitolo 1 che uno dei misconcetti più diffusi tra gli studenti è l'idea che il limite coincida con il movimento di $f(x)$ quando x si muove verso x_0. In questo esempio, come in quelli successivi, ho quindi cercato di evitare la nascita di questo misconcetto, sottolineando che abbiamo a che fare con un certo processo (in questo caso l'allungamento del segmento blu all'aumentare del numero di quadrati) e che il limite rappresenta il risultato di questo processo, non il processo in sé: quando n va all'infinito, il risultato del processo di allungamento è 2.

Mentre preparavo la prima lezione, navigando su internet mi ero imbattuta in un video esplicativo del paradosso della dicotomia[1]. L'ho mostrato ai ragazzi perché mi è sembrato che chiarisse bene in cosa consiste il paradosso e uno dei modi in cui può essere risolto: dividendo un quadrato di lato unitario in metà successive, otteniamo infiniti rettangoli. La somma delle loro aree è uguale all'area del quadrato, cioè 1: $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots=1$.

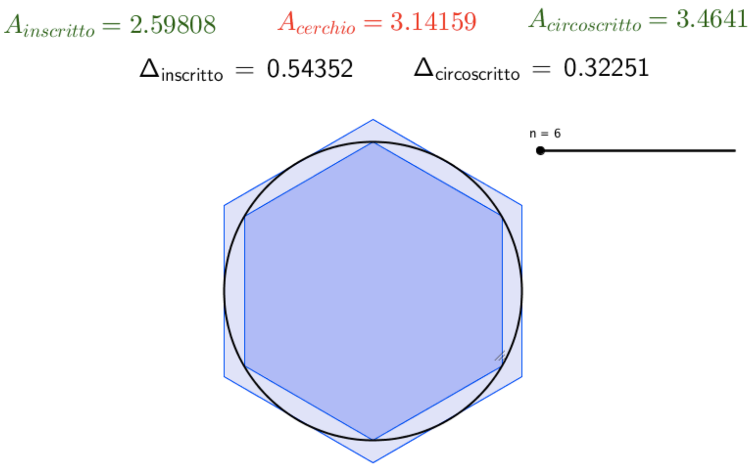


[1] http://ed.ted.com/lessons/what-is-zeno-s-dichotomy-paradox-colm-kelleher

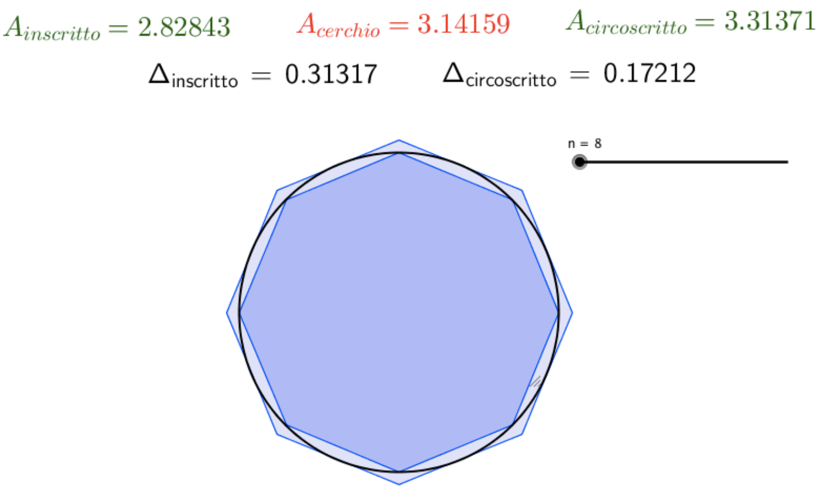
<u>L'approssimazione di π di Archimede</u>

Archimede (287-212 a.C.) mostrò che $3 \cdot \frac{10}{71} < \pi < 3 \cdot \frac{1}{7}$ utilizzando il cosiddetto "metodo di compressione": l'area di un cerchio è "compressa" tra le aree dei poligoni inscritti e le aree dei poligoni circoscritti. Per ottenere l'approssimazione di π, Archimede determinò la relazione tra la misura dei lati di un poligono e quella del poligono con il doppio dei lati; partì dagli esagoni inscritto e circoscritto ad un cerchio di raggio 1 e, raddoppiando di volta in volta il numero di lati, ottenne coppie di poligoni regolari inscritti e circoscritti con 12, 24, 48, 96 lati e calcolò il loro perimetro per trovare limitazioni superiori e inferiori di π.

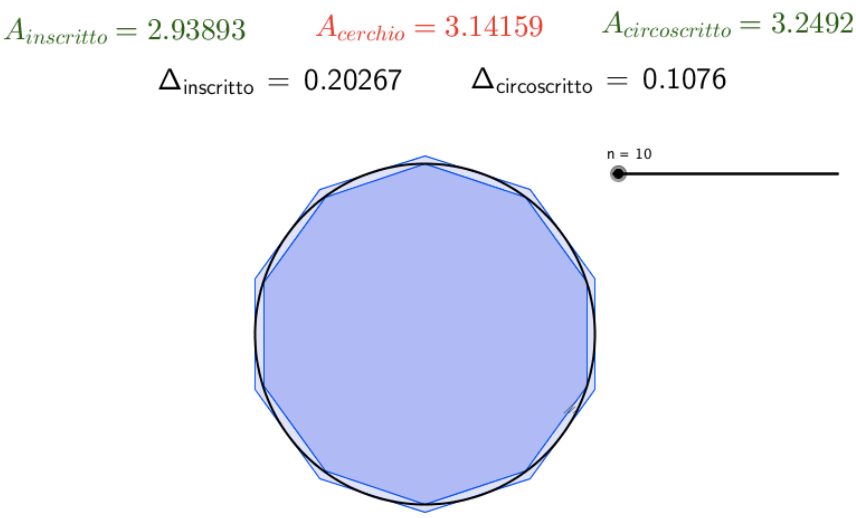
In classe ho ripreso l'idea di Archimede: ho realizzato con Geogebra un'animazione che mostrasse, all'aumentare del numero dei lati dei poligoni inscritti e circoscritti, la sempre miglior approssimazione di π (ossia dell'area di un cerchio di raggio 1). Nelle figure sottostanti è possibile vedere qualche screenshot dell'animazione.



Approssimazione di π nel caso in cui n = 6



Approssimazione di π nel caso in cui n = 8



Approssimazione di π nel caso in cui n = 10

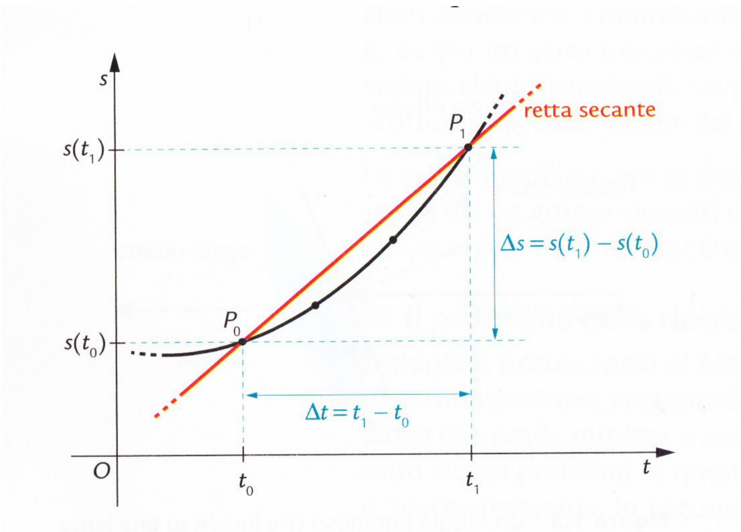
Osservando l'immagine e i valori delle aree dei poligoni, è possibile vedere che le aree dei poligoni si avvicinano sempre più (quelli circoscritti per eccesso e quelli inscritti per difetto) ad una stessa grandezza, che è l'area del cerchio: possiamo dire che il limite per *n* che tende all'infinito (con *n* numero dei lati) delle aree dei poligoni è l'area del cerchio.

Come nell'esempio precedente, abbiamo a che fare con un processo (variazione dell'area del poligono all'aumentare del numero di lati) il cui risultato è l'area del cerchio.

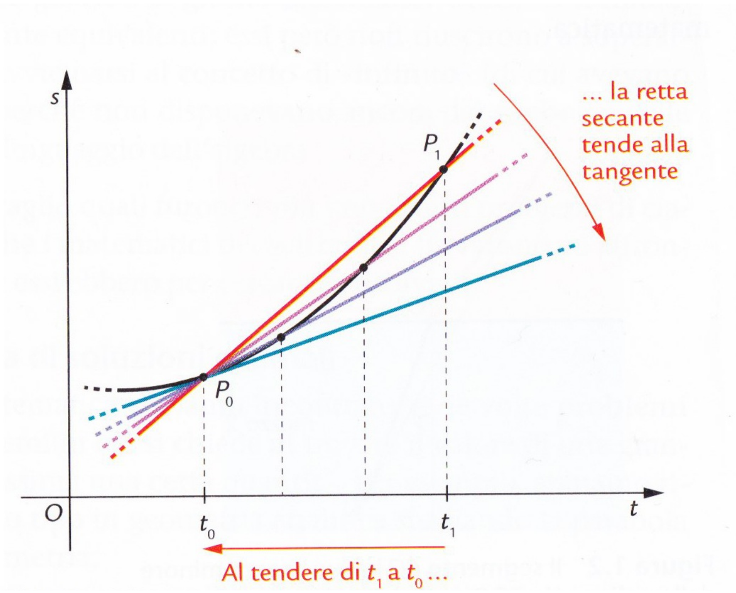
<u>La determinazione della retta tangente ad una curva in un punto</u>

Ho presentato agli studenti il problema di determinare la tangente alla curva in figura nel punto P_0. Dopo aver esplicitato che l'unica cosa che dobbiamo trovare è il suo coefficiente angolare, ho suggerito agli studenti di partire dalla retta secante alla curva passante per P_0 e P_1, sottolineando che il suo coefficiente angolare è pari a

$$m_s = \frac{s(t_1) - s(t_0)}{t_1 - t_0} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$



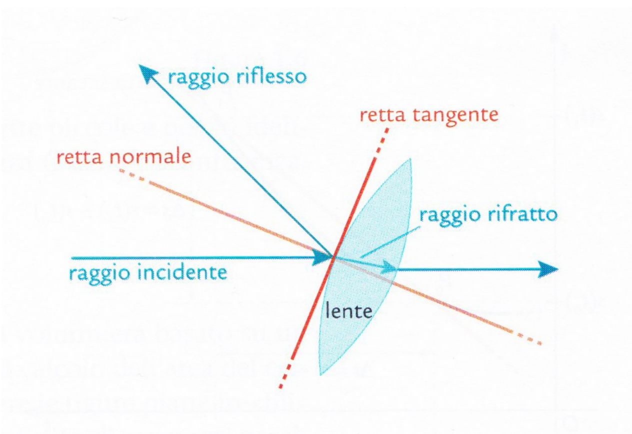
Come fare per trovare il coefficiente angolare della retta tangente alla curva in P_0? Ho mostrato, tramite un'animazione, che le rette secanti tendono alla retta tangente quando Δt diventa sempre più piccolo, ossia quando il punto P_1 si avvicina sempre più a P_0.



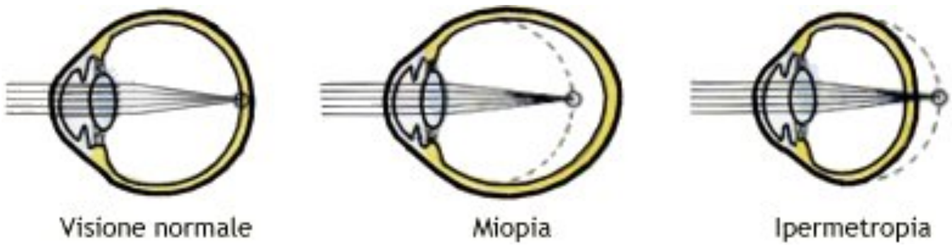
Possiamo quindi concludere che il limite per Δt che tende a 0 di $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ è il coefficiente angolare della retta tangente.

Ancora una volta, abbiamo a che fare con un processo (al tendere di Δt a 0 il punto P_1 si avvicina a P_0 o, equivalentemente, la retta secante ruota attorno a P_0) e il risultato di tale processo è il coefficiente angolare della retta tangente al grafico in P_0.

Per far sperimentare agli studenti la concretezza dei limiti, ho sottolineato che un ragionamento analogo a quello sopra riportato può essere fatto per definire la velocità istantanea di un corpo come limite delle velocità medie al tendere a 0 dell'ampiezza dell'intervallo. Inoltre, ho mostrato il seguente esempio tratto dall'ottica.



Per studiare il passaggio della luce attraverso una lente è necessario conoscere l'angolo di incidenza (ossia l'angolo con cui il raggio incidente colpisce la superficie della lente) per poter poi applicare le leggi di rifrazione per determinare l'angolo di rifrazione (ossia l'angolo che il raggio rifratto forma con la superficie della lente). L'angolo di incidenza è quello formato dal raggio incidente con la normale alla superficie. Dato che la normale ad una superficie curva in un punto è definita come la perpendicolare alla retta tangente alla superficie in quel punto, è necessario conoscere la retta tangente.



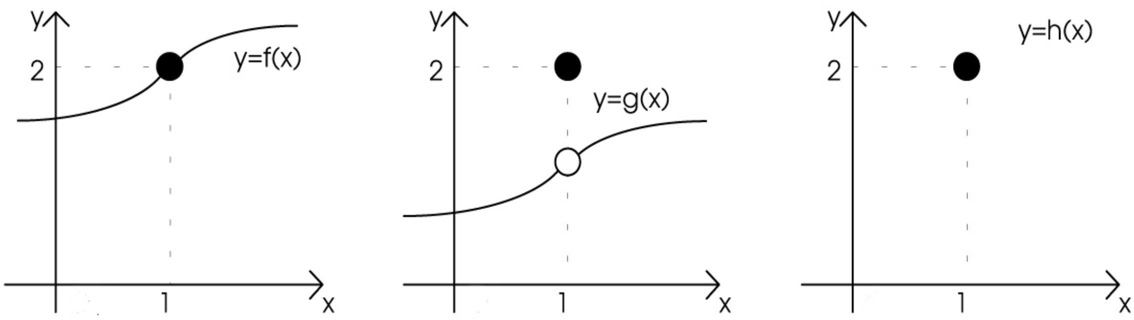
Un esempio particolare è dato dall'occhio: la cornea e il cristallino si comportano come delle lenti. La luce viene quindi rifratta e i raggi convergono in un punto nella retina se l'occhio è sano, davanti o dietro la retina se l'occhio è rispettivamente miope o ipermetrope.

DIFFERENZA TRA LIMITE DI UNA FUNZIONE IN $x = x_0$ E $f(x_0)$

Abbiamo deciso (rifacendoci anche a Bagni [5]) di anticipare la definizione del concetto di limite mostrando chiaramente la differenza tra il valore di una funzione in un punto $x = x_0$ e il limite della funzione nello stesso punto. Dallo studio della letteratura esistente, come abbiamo visto nel Capitolo 1, risulta infatti che uno dei misconcetti più diffusi tra gli studenti è il fatto che $f(x_0)$ coincida con il limite di $f(x)$ per x che tende a x_0, indipendentemente dalla continuità della funzione. Abbiamo quindi ritenuto di primaria importanza mostrare fin da subito la differenza tra i due approcci, l'uno che permette di conoscere il valore della funzione nel punto e l'altro che permette di conoscere il comportamento della funzione in prossimità del punto.

Consideriamo la funzione $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ espressa da $y = f(x)$ e il punto di ascissa x_0 appartenente al dominio della funzione. Nel punto $x = x_0$ la funzione assume il valore $f(x_0)$, ma nelle immediate vicinanze di tale punto l'andamento di f può essere molto diverso.

Ho mostrato ai ragazzi le tre funzioni in figura:

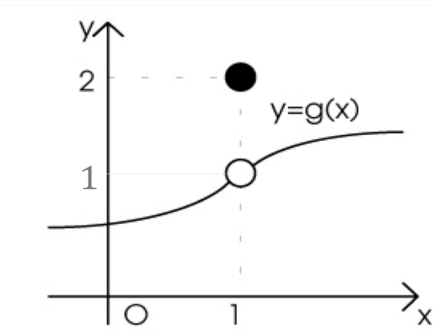


Queste funzioni assumono tutte lo stesso valore, pari a 2, nel punto di ascissa 1, cioè

$f(1) = g(1) = h(1) = 2$,

ma il comportamento delle tre funzioni nell'intorno del punto considerato è molto diverso. Infatti:

- la funzione f ha come dominio tutto $\mathbb{R}$ ed è ovunque continua;
- la funzione g ha come dominio tutto $\mathbb{R}$ ma presenta una discontinuità nel punto di ascissa *1;*
- la funzione h ha come dominio il solo punto {1} e quindi non è definita per $x \neq 1$.



Abbiamo poi visto più da vicino il secondo grafico: il comportamento di g in un intorno di $x = 1$ è diverso dal valore che g assume nel punto di ascissa *1*. Infatti, $g(1) = 2$ invece, quando la x si trova nelle vicinanze di 1, $g(x)$ si trova nelle vicinanze di 1.
Per chiarire questo aspetto, ho utilizzato la classica impostazione dinamica: se ci muoviamo lungo l'asse delle x, avvicinandoci a 1 da destra e da sinistra, vediamo che il grafico è vicino al "pallino vuoto", ossia le $g(x)$ si avvicinano a 1.

Ho evidenziato l'importanza di introdurre un nuovo concetto che ci permetta di descrivere il comportamento di una funzione nelle immediate vicinanze di un punto di ascissa x_0. Tale concetto è chiamato "limite". Ho sottolineato ai ragazzi che quando parliamo di limiti, cosa succede nel punto x_0 non ci interessa: la valutazione di una funzione in un punto x_0 e il limite di tale funzione per x che tende a x_0 sono due cose in generale diverse e indipendenti. Coincidono soltanto se la funzione è continua nel punto x_0, come vediamo nel primo grafico, cioè solo quando il valore della funzione in x_0 e il comportamento nelle sue immediate vicinanze è lo stesso.

Infine, abbiamo analizzato il terzo grafico: ho domandato agli studenti quale fosse secondo loro il limite per x che tende a 1. Prevedibilmente, molti hanno riposto 2; altri infinito. Ricordando che il limite descrive il comportamento della funzione in un intorno di $x = 1$ e che non ci interessa cosa succede esattamente in $x = 1$, molti hanno riconosciuto che il limite non è definito. Ho potuto quindi sottolineare che ha senso determinare il limite soltanto nei punti di accumulazione per il dominio della funzione.

3.2.2.2 SECONDA LEZIONE: Determinazione grafica dei limiti

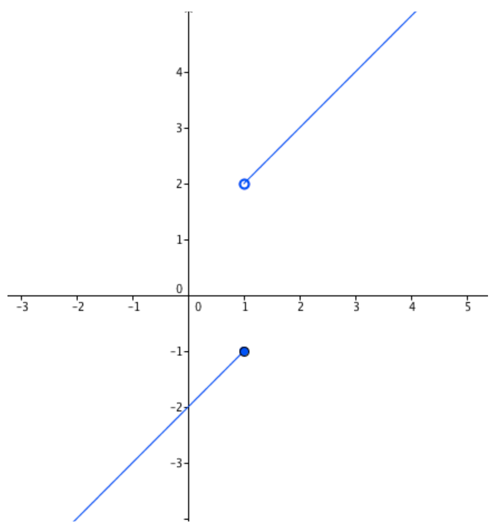
5A - 07/10/2014 – 24 studenti presenti
5B - 07/10/2014 – 22 studenti presenti

Dopo aver introdotto la notazione $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ usata per indicare il limite nel caso in cui x_0 e L sono finiti o infiniti e aver ricordato cosa sono intorno destro e sinistro di un punto e intorno di infinito, ho richiamato i concetti presentati nella lezione precedente. Abbiamo quindi visto insieme alcuni esempi.

<u>Esercizio 1</u>

Ho scelto questo primo esempio per introdurre agli studenti i limiti destro e sinistro e mostrare che il limite in un punto può non esistere.
Dopo aver disegnato il grafico della funzione seguente, ho chiesto ai ragazzi quale fosse secondo loro il limite per x che tende a 1 di *f(x)*.

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & se\ x > 1 \\ x-2 & se\ x \le 1 \end{cases}$$



Qualche timida risposta è stata 2 oppure -1, ma qualcuno ha affermato che "*ci sono due limiti: 2 e -1*". Ricordando che il limite descrive il comportamento della funzione nelle vicinanze di $x = 1$, ho sottolineato che in questo caso non è possibile dire quale sia il limite, dato che la funzione si comporta in maniera diversa nell'intorno destro e sinistro di $x = 1$. Possiamo soltanto determinare i cosiddetti "limite destro e sinistro": $\lim_{x \to 1^-} f(x) = -1, \lim_{x \to 1^+} f(x) = 2$.

Siamo quindi arrivati al primo importante risultato: **il limite esiste se e solo se limite destro e limite sinistro esistono e sono uguali.**

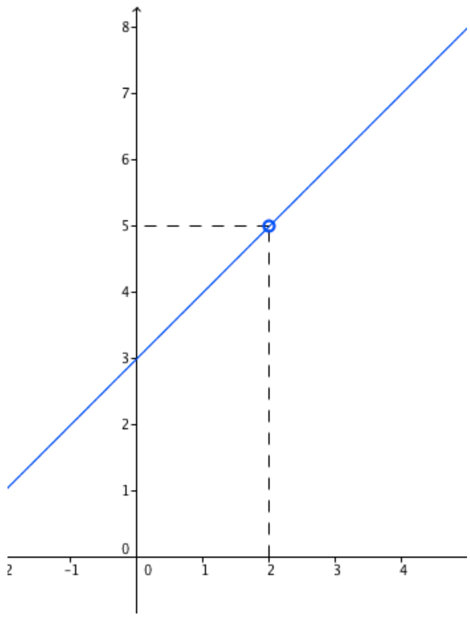
Ho esplicitato il fatto che con il simbolo 1^+ nel contesto dei limiti si indicano valori un po' più grandi di 1 (ad esempio 1.1), con il simbolo 1^- valori un po' più piccoli di 1 (ad esempio 0.9).

Inoltre, ho sottolineato che ha senso parlare di limite destro e sinistro solo se x_0 è finito: se x tende a $+\infty$, infatti, possiamo muoverci solo verso destra, se x tende a $-\infty$ possiamo muoverci solo verso sinistra.

Ho poi chiamato un paio di studenti alla lavagna a svolgere il seguente esercizio:

<u>Esercizio 2</u>

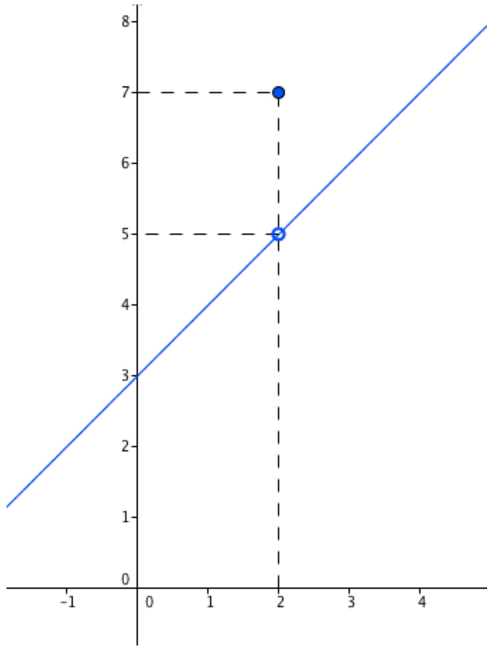
$$f(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x - 2}$$



I ragazzi hanno disegnato il grafico senza particolari difficoltà (avevano visto funzioni del genere già con il prof. Checcaglini) e, dopo aver esplicitato il fatto che nel punto $x = 2$ la funzione non è definita, ho chiesto loro quali fossero i limiti di *f(x)* per *x* che tende a 2 e a $\pm\infty$. Tali limiti sono risultati chiari per tutta la classe.

Ho quindi domandato cosa succede al limite per *x* che tende a 2 cambiando la definizione della funzione in modo che presentasse una discontinuità in *x* = 2 ma fosse lì definita:

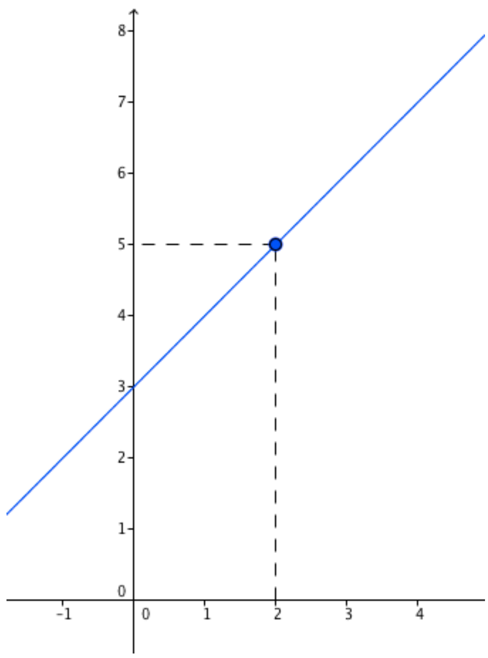
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + x - 6}{x - 2} & se\ x \neq 2 \\ 7 & se\ x = 2 \end{cases}$$



Alcuni hanno affermato che il limite è 7. Ho notato che molti hanno continuato ad avere difficoltà su questo punto (come dirò anche nel prossimo paragrafo) nonostante io abbia spesso insistito sulla differenza tra il limite e *f(2)*.

Infine, ho chiesto cosa succede al limite per *x* che tende a 2 cambiando la definizione della funzione nel modo seguente, ossia quando la funzione è continua in *x* = 2:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + x - 6}{x - 2} & se\ x \neq 2 \\ 5 & se\ x = 2 \end{cases}$$

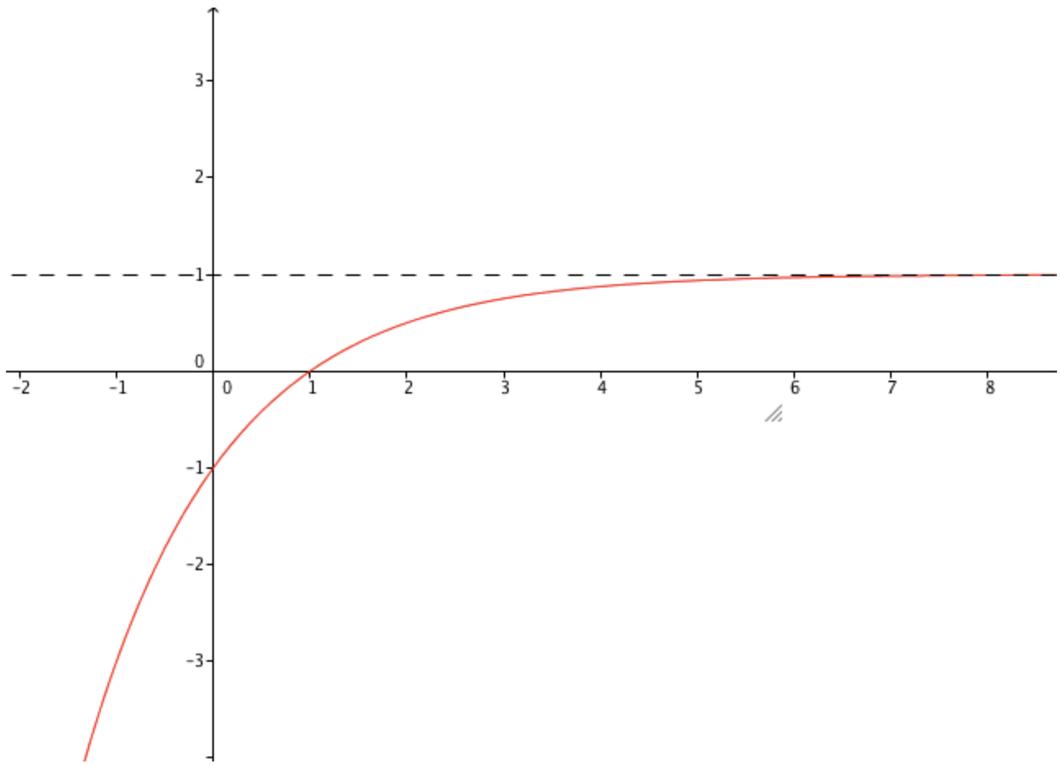


I ragazzi non hanno avuto difficoltà a riconoscere che il limite è 5.

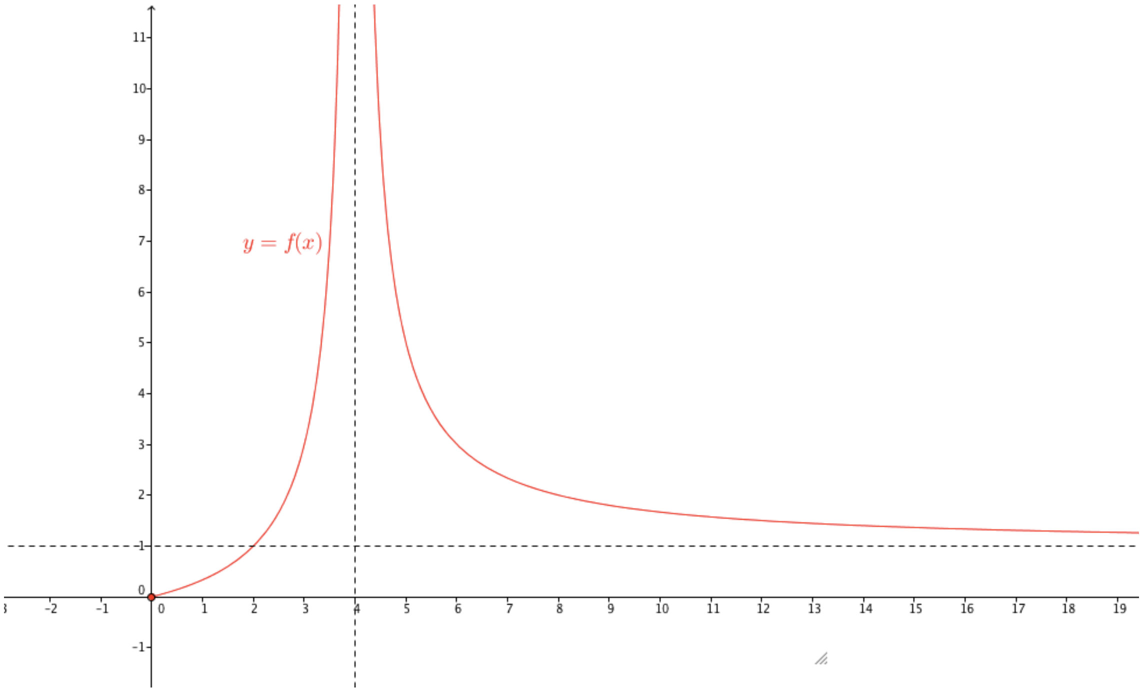
Ho chiesto ad altri due studenti di svolgere alla lavagna i seguenti due esercizi, scelti in particolare per combattere il misconcetto diffuso che il grafico di una funzione non possa attraversare i suoi asintoti orizzontali. Ho fatto anche riflettere i ragazzi su come il grafico di una funzione possa avvicinarsi all'asintoto. Sia nell'esercizio 3 che nell'esercizio 4, infatti, le funzioni presentano lo stesso asintoto y = 1, ma la prima si avvicina alla retta da sotto, la seconda da sopra (alcuni testi scolastici parlano rispettivamente di limite per difetto e limite per eccesso).

<u>Esercizio 3</u>

Di fronte al grafico seguente, i ragazzi non hanno avuto particolari problemi a riconoscere i limiti per x che tende a $\pm\infty$ e a 0, individuando anche l'asintoto orizzontale (il prof. Checcaglini, infatti, li aveva abituati molto bene a riconoscere gli asintoti di una funzione).



Esercizio 4



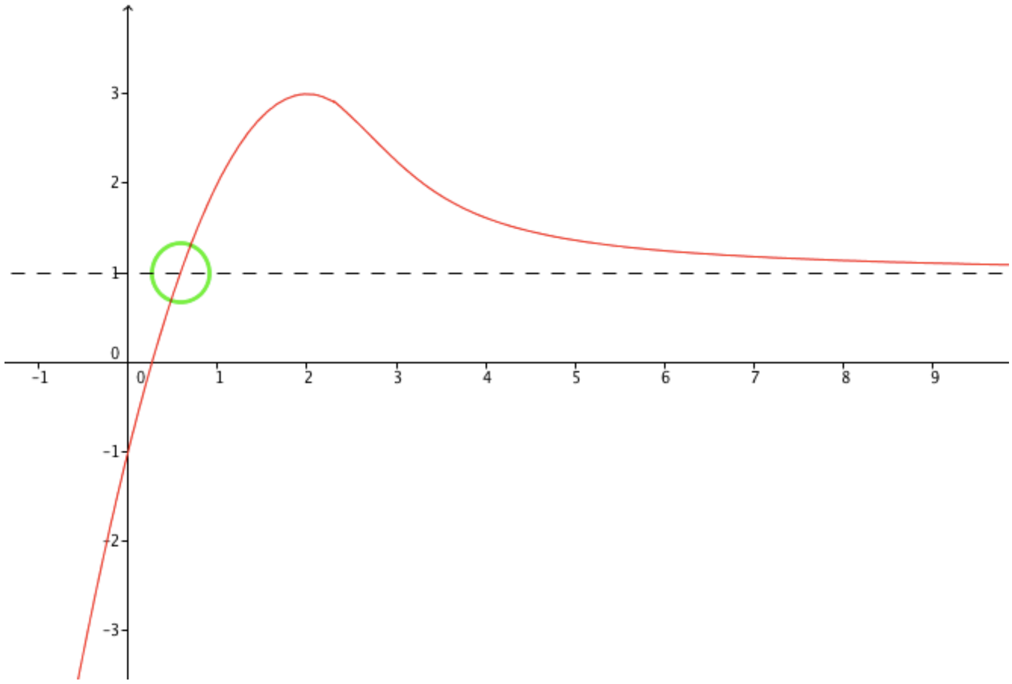
Com'è immaginabile, la difficoltà più grande è stata affermare che esiste solo il limite destro in $x = 0$. Ancora una volta, i ragazzi hanno riconosciuto gli asintoti, orizzontale e verticale.

Per introdurre i limiti per eccesso e per difetto, ho chiesto ai ragazzi se nei due grafici notassero qualche differenza nel $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

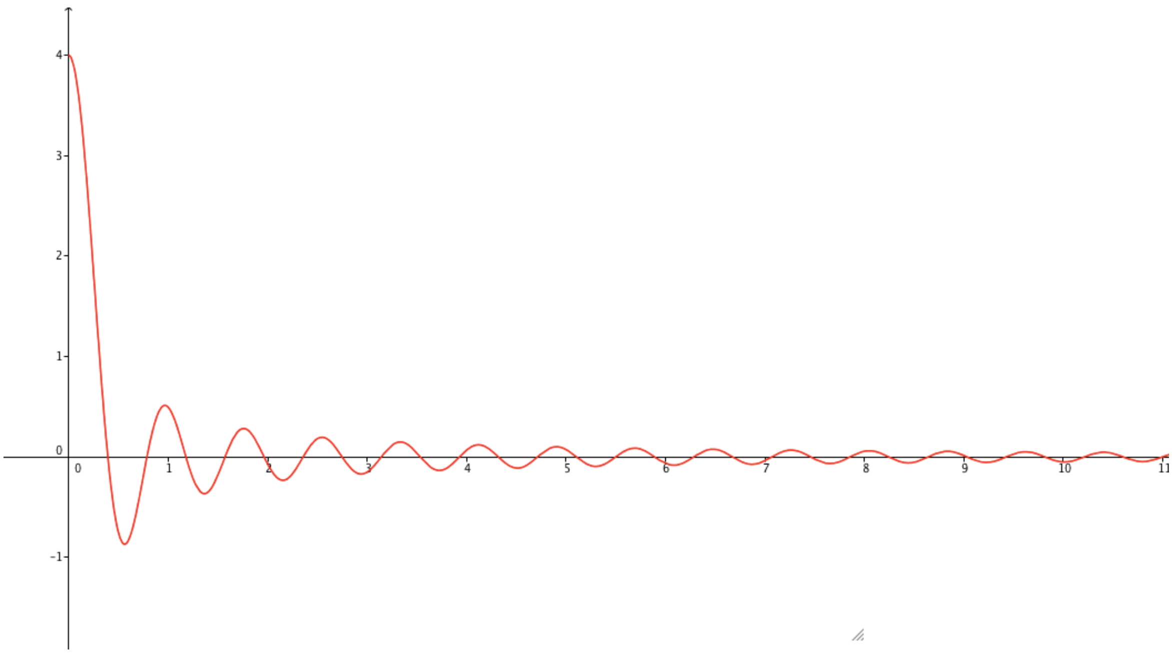
Molti hanno subito risposto che nel primo caso la funzione sta sotto l'asintoto e nel secondo sta sopra. Abbiamo quindi scritto che $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1^-$ *e* $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1^+$ rispettivamente, usando le notazioni presenti nel libro di testo dei ragazzi: 1^- indica che la funzione si avvicina alla retta dal basso, 1^+ dall'alto.

Sapevo che il professore aveva già sottolineato agli studenti che l'asintoto orizzontale può essere attraversato. Per rimarcare questo aspetto ed evitare quindi il misconcetto che il limite non possa mai essere raggiunto o superato, ho chiesto ai ragazzi se erano in grado di modificare il primo grafico affinché $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1^+$.

Con qualche difficoltà, siamo riusciti a disegnare il grafico seguente, in cui l'asintoto viene attraversato (nel punto cerchiato in verde).



Di fronte all'osservazione di una ragazza "*il grafico può attraversare l'asintoto orizzontale, l'importante è che all'infinito si avvicini si avvicini senza attraversarlo*", ho deciso di mostrare agli studenti il grafico seguente:



Ho domandato quale fosse il limite per x che tende a $+\infty$. I ragazzi non hanno avuto particolari problemi a riconoscerlo uguale a 0, notando che il grafico oscilla attorno all'asse della ascisse avvicinandosi sempre più ad esso. Su mia richiesta, hanno poi riconosciuto che $y = 0$ è asintoto orizzontale per la funzione.

Esercizio 5

L'ultimo esempio visto insieme è stato il caso della funzione costante *f(x)* = -1: volevo vedere se i ragazzi possedevano il misconcetto che il limite di funzioni costanti non esiste. Contro ogni aspettativa, hanno riconosciuto che il limite è -1, qualunque sia il punto di accumulazione considerato.

Ho concluso la lezione dando una definizione intuitiva, quella sfruttata nel determinare graficamente i limiti:

Data una funzione *f*, x_0 e *L* finiti o infiniti, diciamo che $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ se la funzione *f* assume valori vicini quanto si vuole a *L* tutte le volte che i valori di *x* sono sufficientemente vicini a x_0 (con eventuale esclusione del punto $x = x_0$).

Ho sottolineato, anche di fronte alle domande di alcuni studenti, che si tratta di una definizione approssimativa, intuitiva appunto, che richiede di essere perfezionata e resa rigorosa traducendo in termini matematici le espressioni "valori vicini quanto si vuole" e "sufficientemente vicini".

Alla fine della lezione ho lasciato agli studenti degli esercizi da svolgere a casa, alcuni presi dal loro libro di testo e altri preparati da me, scelti per insistere ancora sui misconcetti più diffusi. Gli esercizi sono descritti in dettaglio nel paragrafo successivo.

3.2.2.3 TERZA LEZIONE: Correzione degli esercizi sulla determinazione grafica dei limiti

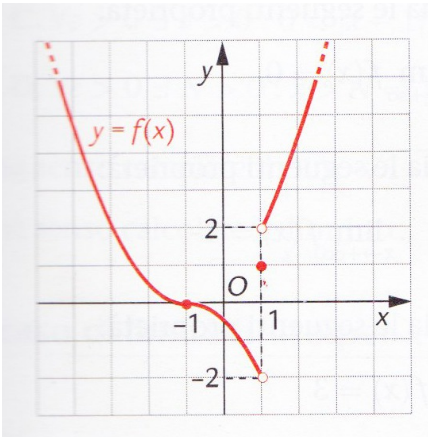
5B - 08/10/2014 – 22 studenti presenti
5A - 10/10/2014 – 22 studenti presenti

Ho chiamato alla lavagna gli studenti che avevano avuto problemi nel risolvere gli esercizi che avevo assegnato loro per casa. Ho poi raccolto gli svolgimenti dei ragazzi, così da poter analizzare con calma le difficoltà che avevano riscontrato. Un paio di giorni dopo, li ho riconsegnati corretti e commentati. Non tutti avevano svolto gli esercizi.

Riporto adesso il testo degli esercizi assegnati, spiegando perché li ho scelti e commentando le risoluzioni dei ragazzi.

Esercizio 6

Completa le seguenti uguaglianze, deducendo dal grafico il valore dei seguenti limiti, se esistono.



$$\lim_{x\to-\infty} f(x) =$$
$$\lim_{x\to-1} f(x) =$$
$$\lim_{x\to1^-} f(x) =$$
$$\lim_{x\to1^+} f(x) =$$
$$\lim_{x\to1} f(x) =$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) =$$

Tramite questo esercizio è stato possibile determinare se i ragazzi possedevano in particolare due misconcetti: la confusione tra il limite in x_0 e $f(x_0)$ e il fatto che il limite possa essere calcolato soltanto nei punti in cui la funzione non è definita o è discontinua.

Tutti hanno determinato correttamente i limiti a ±∞ e in $x = -1$, mentre quasi la metà degli studenti ha sbagliato quello in $x = 1$. La maggior parte ha scritto correttamente i limiti destro e sinistro e ha posto $\lim_{x\to1} f(x) = 1$; altri hanno considerato anche limite destro e sinistro uguali a 1 (come a voler applicare forzatamente il fatto che il limite esiste se e solo se limite destro e sinistro esistono e sono uguali).

Esercizio 7

Completa le seguenti uguaglianze, deducendo dal grafico il valore dei seguenti limiti, se esistono.

$\lim_{x \to -\infty} f(x) =$

$\lim_{x \to -1^-} f(x) =$

$\lim_{x \to -1^+} f(x) =$

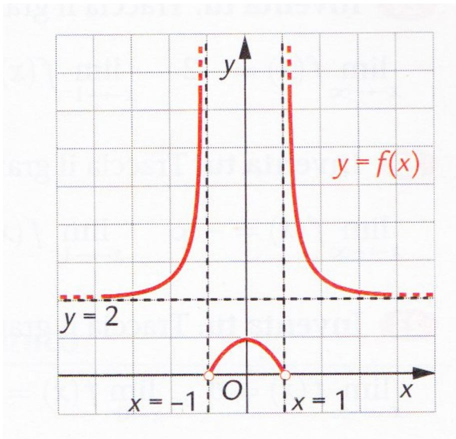
$\lim_{x \to -1} f(x) =$

$\lim_{x \to 1^-} f(x) =$

$\lim_{x \to 1^+} f(x) =$

$\lim_{x \to 1} f(x) =$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) =$

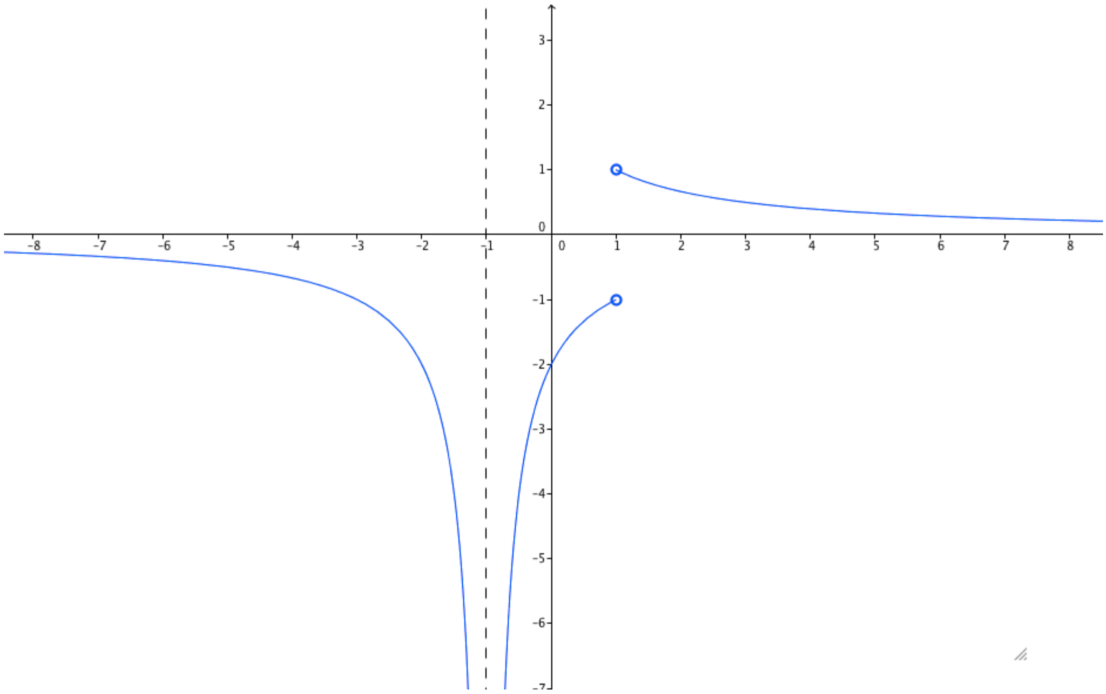


Soltanto i limiti in x = -1 e x = 1 hanno creato difficoltà e questo è successo per circa la metà dei ragazzi (non sempre gli stessi che avevano fatto errori nell'esercizio precedente). Qualcuno ha invertito limite destro e sinistro (quindi non tanto un errore di comprensione quanto piuttosto legato alla simbologia), molti hanno fatto difficoltà a riconoscere come finito $\lim_{x \to -1^+} f(x)$ (e analogamente $\lim_{x \to 1^-} f(x)$): non avevano mai visto asintoti verticali sinistri (o destri) e per estensione hanno considerato infiniti anche questi due limiti.

Esercizio 8

Disegna il grafico della funzione $f(x) = \dfrac{2x-2}{\left|x^2-1\right|}$ e utilizzalo per dedurre quanto valgono i seguenti limiti:

$\lim_{x \to -\infty} f(x),\ \lim_{x \to -1^-} f(x),\ \lim_{x \to -1^+} f(x),\ \lim_{x \to 1^-} f(x),\ \lim_{x \to 1^+} f(x),\ \lim_{x \to 1} f(x),\ \lim_{x \to +\infty} f(x)$



Pochi studenti hanno svolto questo esercizio (lo avevo dato come facoltativo), ma le risoluzioni sono state tutte corrette, anche quelle dei ragazzi che avevano sbagliato l'esercizio 6. Questo a riprova del fatto che sorgono problemi non tanto quando il limite in x_0 non esiste, quanto piuttosto quando il limite non esiste e la funzione è definita in x_0.

Ho approfittato di questo esercizio per esplicitare la definizione di asintoto verticale.

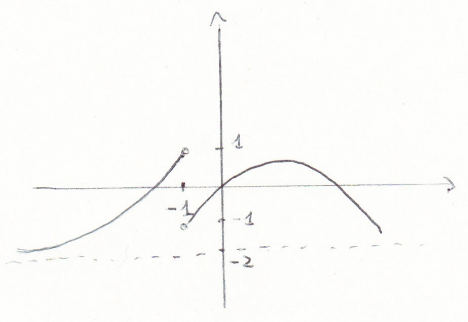
Esercizio 9

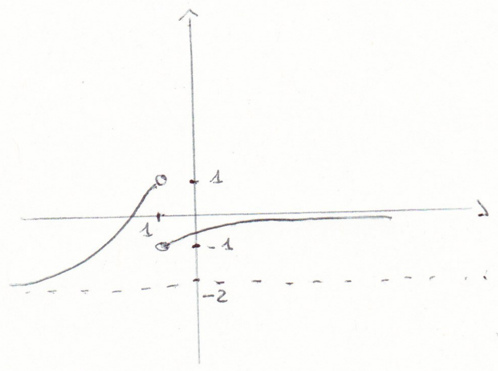
Traccia il grafico di una funzione che abbia le seguenti proprietà:

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -2^+, \ \lim_{x\to-1^-} f(x) = 1, \ \lim_{x\to-1^+} f(x) = -1, \ \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0^+$

Questo esercizio (così come quello successivo) mi interessava per tre aspetti: innanzitutto sono gli studenti a dover costruire un grafico a partire dai limiti (cosa più complessa rispetto alla determinazione dei limiti dato un grafico); è possibile vedere se riescono a maneggiare limiti per eccesso e per difetto e limiti destro e sinistro; inoltre, l'asintoto orizzontale y = 0 viene attraversato.

In generale, l'esercizio è stato svolto correttamente. Gli errori commessi sono quelli riportati in figura, a riprova del fatto che non risulta semplice gestire il comportamento asintotico ad una retta che viene attraversata. Molti ragazzi hanno sbagliato il limite per *x* che va a +∞, in particolare le tipologie di errore sono quelle riportate in figura:





Come nell'esercizio successivo, due ragazzi di 5B, non avendo compreso cosa veniva chiesto loro di fare, hanno disegnato 4 funzioni diverse ognuna delle quali rispettasse uno dei limiti dati.

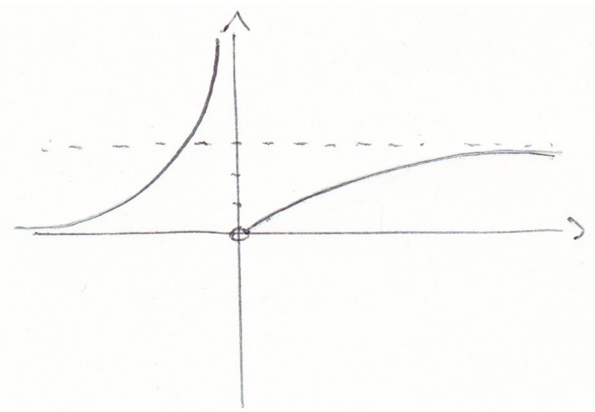
Ho approfittato di questo esercizio per esplicitare la definizione di asintoto orizzontale.

<u>Esercizio 10</u>

Traccia il grafico di una funzione che abbia le seguenti proprietà:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0^+,\ \lim_{x\to 0^-} f(x) = +\infty,\ \lim_{x\to 0^+} f(x) = 0^-,\ \lim_{x\to+\infty} f(x) = 3^-$$

Questo esercizio è risultato più difficile dell'altro. Molti studenti, compresi quelli che avevano svolto correttamente l'esercizio precedente, hanno disegnato un grafico del tipo riportato in figura, sbagliando il limite per *x* che va a 0^+:



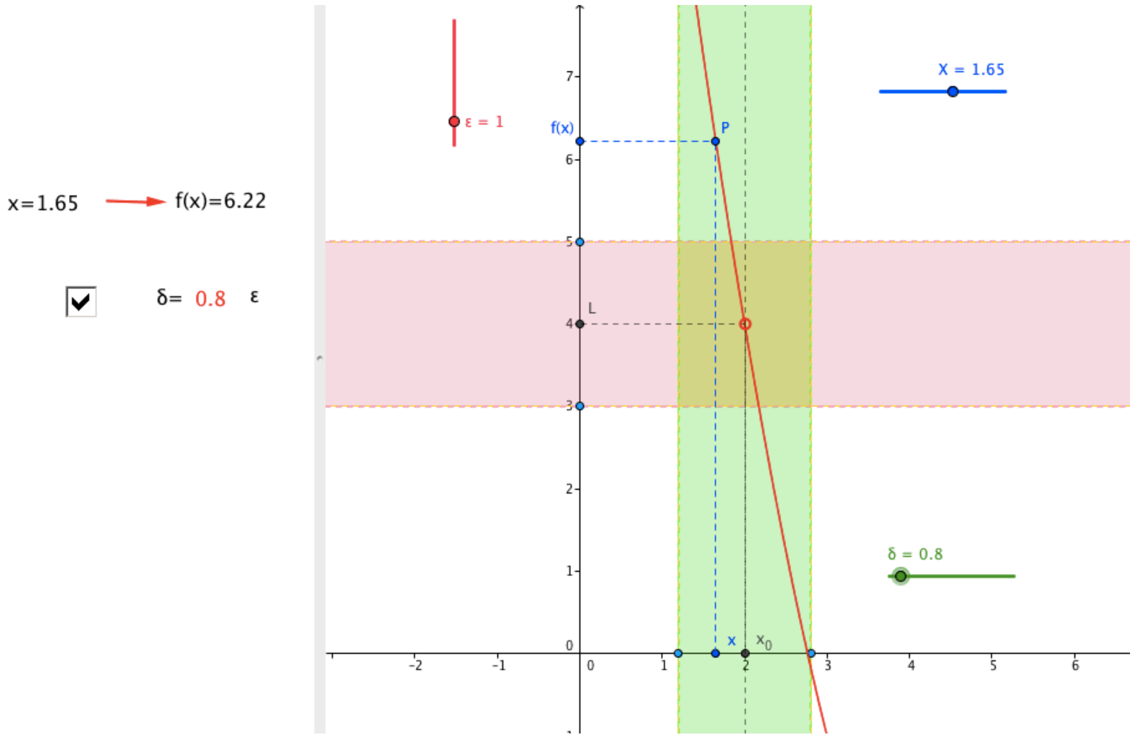
I ragazzi si trovano più a loro agio a trattare con limiti per eccesso e per difetto nel caso di x_0 infinito piuttosto che finito.

3.2.2.4 QUARTA LEZIONE: Definizione rigorosa di limite

5B - 13/10/2014 – 22 studenti presenti

5A - 13/10/2014 – 24 studenti presenti

Abbiamo pensato di guidare i ragazzi alla costruzione della definizione rigorosa di limite utilizzando il software Geogebra, ben noto agli studenti. Ho preparato un'attività apposita il cui testo si trova in Appendice; è possibile scaricare l'applet da [21, def_rigorosa]. Gli studenti hanno lavorato a gruppi di due o tre persone, per carenza di computer.
Di seguito si trova uno screenshot della schermata dell'applet utilizzata.



I ragazzi si sono trovati davanti una funzione non definita in $x = 2$ e si sono concentrati sul limite della funzione in quel punto.
I valori $x_0 = 2$ e $L = 4$ erano fissi; muovendo con il mouse i cursori corrispondenti, gli studenti potevano invece modificare le ampiezze degli intorni di L e x_0 (rappresentati rispettivamente dalla striscia orizzontale e dalla striscia verticale) e spostare il generico punto x (e di conseguenza il suo $f(x)$). Osserviamo che $\lim_{x\to 2} f(x) = 4$ può essere espresso in termini di strisce orizzontali e verticali nel seguente modo: si dice che $\lim_{x\to 2} f(x) = 4$ se, presa una qualunque striscia orizzontale, centrata in 4, è possibile trovare una striscia

verticale, centrata in 2, tale che qualunque *x* nella striscia verticale (con eventuale esclusione del punto *x* = 2) ha il corrispondente *f(x)* nella striscia orizzontale.

Com'è possibile vedere dal testo dell'attività, siamo partiti dalla definizione intuitiva:

"Diciamo che $\lim_{x \to 2} f(x) = 4$ se la funzione *f* assume valori vicini quanto si vuole a 4 tutte le volte che i valori di *x* sono sufficientemente vicini a 2 (con eventuale esclusione del punto *x* = 2)"

e siamo arrivati, in due tempi, alla definizione rigorosa generale in termini di intorni (o equivalentemente di strisce):

"Diciamo che $\lim_{x \to 2} f(x) = 4$ se per ogni intorno U di 4 (per ogni striscia orizzontale centrata in 4) esiste un intorno V di 2 (esiste una striscia verticale centrata in 2), dipendente da U, tale che per ogni *x* ∈ V, con *x* ≠ 2, risulta *f(x)* ∈ U".

Nel punto 1 dell'attività veniva chiesto quale fosse il limite della funzione in *x* = 2.
Nel punto 2 i ragazzi sono stati invitati a familiarizzare con la striscia orizzontale, in modo da comprendere che essa rappresenta un intorno centrato in *y* = 4: ho cercato di far capire loro la relazione tra ε e gli estremi superiore e inferiore della striscia, assegnando alcuni valori di ε e chiedendo di inserire in un'apposita tabella le ordinate dei punti. Ho poi guidato gli studenti a tradurre in termini rigorosi l'espressione "*f* assume **valori vicini quanto si vuole** a 4", assegnando vari valori di ε e facendo notare che qualunque sia l'ε considerato *f(x)* ricade sempre nella striscia orizzontale.
A questo punto sono intervenuta per assicurarmi che avessero compreso questo primo aspetto e ho sottolineato che la prima parte della definizione intuitiva ("**la funzione *f* assume valori vicini quanto si vuole a 4"**) può essere sostituita con "**se qualunque sia l'intorno U di 4** (qualunque sia la striscia orizzontale) ***f(x)* ∈ U** (*f(x)* sta dentro la striscia orizzontale)". Ho insistito molto sul fatto che possiamo prendere una striscia di *ampiezza qualunque*.

Nel punto 3 dell'attività, assegnati alcuni valori di ε, è stato chiesto agli studenti quali valori potesse assumere *x* affinché *f(x)* appartenesse alla striscia orizzontale, aiutandoli a comprendere la dipendenza di δ da ε. I ragazzi sono stati anche spinti a porre attenzione sul fatto che in *x* = 2 la funzione non è definita e che questo non influisce sul limite.

Sono nuovamente intervenuta per chiarire questi aspetti e ho sottolineato che la seconda parte della definizione intuitiva ("**tutte le volte che i valori di *x* sono sufficientemente vicini a 2, con eventuale esclusione del punto *x* = 2**") può essere sostituita con "**tutte le volte che *x* appartiene ad un intorno V di 2** (tutte le volte che *x* sta in una striscia verticale) **dipendente da U, con *x*≠ 2**". Ho insistito molto sul fatto che *ε viene fissato prima di δ* e che *il valore di δ dipende quindi da quello di ε*.

Riordinando le frasi e sostituendo le espressioni "qualunque sia l'intorno U" e "tutte le volte che *x* appartiene ad un intorno V" con le espressioni (in linguaggio più matematico) "per ogni intorno U" e "esiste un intorno V tale che per ogni $x \in V$", siamo arrivati alla definizione rigorosa di limite in termini di intorni.

L'ultimo punto dell'attività ha come scopo quello di far impratichire i ragazzi con questo gioco di strisce: dati alcuni valori di ε, determinare un δ che soddisfi la definizione di limite; oppure, assegnati ε e δ, stabilire se la definizione è soddisfatta.

Riporto alcuni commenti sullo svolgimento dell'attività da parte degli studenti.
Il punto 1 è stato svolto da tutti senza problemi. Per quanto riguarda il punto 2, la maggior parte dei ragazzi ha riconosciuto subito che la striscia orizzontale rappresenta l'intorno del limite *L*, senza dover ricorrere all'aiuto della tabella (forse aiutati anche dal fatto che nelle lezioni precedenti avevamo spesso parlato di intorni); alcuni hanno anche capito che ε è il raggio dell'intorno. In generale, non ci sono stati problemi a identificare la striscia con l'intorno di *L*. Il punto 2.d, in cui lo studente era invitato a capire che la vicinanza di *f* a *L* può essere espressa dal fatto che *f(x)* sta nella striscia orizzontale, ha invece creato qualche difficoltà. Innanzitutto, alcuni non capivano cosa volesse dire la frase "dove si trova *f(x)* quando dista da *L* meno di 1". Chiarito il significato, è stato abbastanza semplice dire che *f(x)* è vicina a *L* quando si trova dentro la striscia orizzontale. Molto più difficile è risultato capire l'espressione "quanto si vuole", quindi il professore ed io abbiamo aiutato alcuni gruppi.

Il punto 3 è risultato più facile rispetto al precedente. Nel punto 3.a, in cui veniva chiesto, fissato ε, di determinare quali valori può assumere *x* affinché *f(x)* appartenga alla striscia orizzontale, due gruppi hanno confuso le *x* con le *y*: invece di indicare intervalli sull'asse delle ascisse, hanno scritto quelli sulle ordinate. Hanno di conseguenza avuto difficoltà a rispondere alle domande successive. In generale, c'è stata un po' di esitazione nel riconoscere che la scelta della striscia verticale dipende da quella orizzontale.

Per mancanza di tempo, il punto 4 non è stato svolto autonomamente dai ragazzi, ma è stato da me risolto alla lavagna, coinvolgendo il più possibile gli studenti.

ESERCIZI PER CASA SULLA DEFINIZIONE RIGOROSA DI LIMITE DA SVOLGERE CON GEOGEBRA

Al termine dell'intero ciclo di lezioni (cioè dopo aver mostrato anche la definizione ε - δ), ho lasciato ai ragazzi tre esercizi per casa da risolvere con Geogebra. E' possibile scaricare le applets da [21, attività_1, attività_2, attività_3].

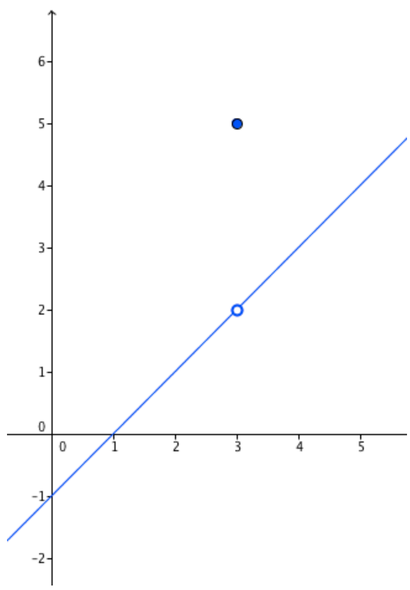
In Appendice si trova il testo delle attività, in cui sono stati aggiunti anche degli screenshot per mostrare i grafici su cui i ragazzi hanno lavorato. Non tutti gli studenti hanno svolto questi esercizi. In Appendice si trovano anche le risoluzioni, materiale da me fornito agli studenti non avendo avuto il tempo di correggere insieme le attività.

Il funzionamento delle applets fornite ai ragazzi era uguale a quello dell'applet utilizzata per la costruzione della definizione rigorosa di limite, con l'unica differenza che anche i punti L e x_0 potevano essere spostati con gli appositi cursori. In tutti gli esercizi è stato chiesto di sfruttare la definizione rigorosa in termini di intorni, o equivalentemente di strisce, per rispondere alle domande.

<u>Attività 1</u>

Ai ragazzi era richiesto di lavorare con la funzione

$$f(x)=\begin{cases} 5 & se\ x=3 \\ \dfrac{x^2-4x+3}{x-3} & se\ x\neq 3 \end{cases}$$



e di rispondere alle seguenti domande, dopo aver pensato al valore del limite in x =3:

1. Verifica, usando le strisce, se $\lim_{x\to 3} f(x) = 5$. Spiega come procedi.
2. Verifica, usando le strisce, se $\lim_{x\to 3} f(x) = 2$. Spiega come procedi.
3. Qual è il valore che la funzione assume in $x = 3$? Coincide con il valore del limite in $x = 3$?

Ho scelto di assegnare questa attività per aiutare gli studenti a vedere la differenza tra il valore che la funzione assume in un punto $x = x_0$ e il valore del limite per x che tende a x_0. Tale differenza infatti, come sottolineato anche in precedenza, è risultata molto difficile da interiorizzare.

Nonostante le indicazioni date nel testo dell'attività, 5 ragazzi non hanno utilizzato le strisce per rispondere alle domande: si sono limitati a sfruttare la verifica dei limiti tramite la definizione oppure ad usare la definizione intuitiva, osservando dove si trovano le *f(x)* quando le x si avvicinano a x_0. Una ragazza di 5B ad esempio ha scritto: "*Basta che osservo la funzione e il punto (3,5). Procedo guardando gli intorni della funzione, sia da destra che da sinistra. I limiti sono uguali e coincidono con il punto di ordinata 2, quindi 2 è il limite. Poi dirò che 5 è il valore della funzione e non il limite stesso".* Si nota una certa imprecisione, ma è chiaro quello che la ragazza vuole affermare (grazie anche ad un dialogo avuto in seguito con lei): si guardano gli intorni destro e sinistro del punto $x = 3$ e si osserva che limite destro e sinistro sono entrambi uguali a 2; il limite della funzione data per x che tende a 3 è quindi 2.

Alcuni ragazzi hanno invertito l'ordine di ε e δ; altri hanno considerato l'ordine corretto, ma hanno guardato dove si trovano le x quando le *f(x)* stanno nella striscia orizzontale. Ad esempio, un ragazzo di 5B ha scritto: *"prendo una striscia orizzontale con ε = 0.6 e quindi una striscia verticale con δ = 0.6. Le f(x) che stanno dentro la striscia orizzontale hanno le x dentro la verticale".* Si tratta di un errore che non avevo previsto. L'inversione ε - δ è probabilmente legata, come riscontrato nella letteratura, alla dipendenza di *f(x)* da x. L'insistenza sull'importanza di fissare prima ε e in dipendenza da esso δ, ha portato però in alcuni ragazzi la convinzione di dover verificare se tutte le *f(x)* nella striscia orizzontale hanno le proprie x nella striscia verticale.

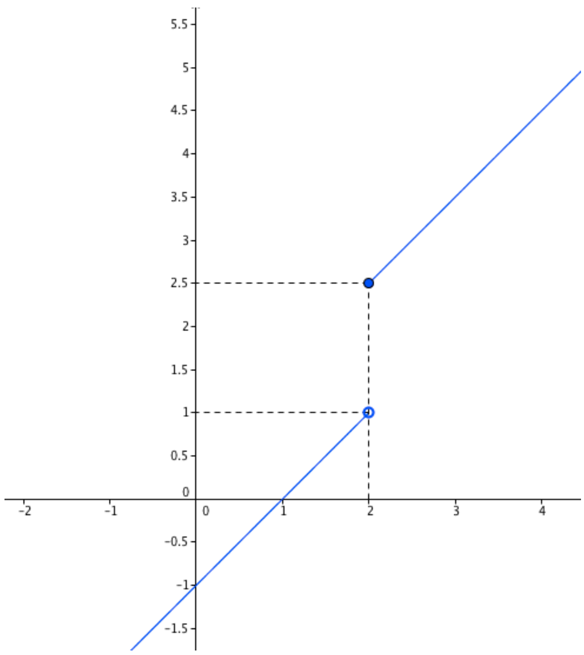
Una ragazza di 5A, infine, ha scritto: *"il limite non è 2 perché se ho x = 3, f(x) è fuori dalla striscia orizzontale perché è 5"*, mostrando di non aver compreso che, parlando di limiti, non interessa cosa succede esattamente nel punto x_0. Nonostante questo, quando in classe le ho chiesto quanto valesse il limite dato, senza pensare alle strisce, ha risposto correttamente.

In generale, la maggior parte degli studenti non ha specificato che il limite deve essere verificato qualunque sia la striscia orizzontale: spesso hanno fissato un solo valore per ε ed hanno individuato un valore di δ per cui la definizione è soddisfatta.

<u>Attività 2</u>

I ragazzi hanno lavorato sul limite in $x = 2$ della seguente funzione:

$$f(x) = \begin{cases} x + \dfrac{1}{2} & se\ x \geq 2 \\ x - 1 & se\ x < 2 \end{cases}$$



Ho creato questo esercizio per mostrare due aspetti fondamentali della definizione di limite: prima è necessario fissare ε e soltanto dopo δ; il limite deve essere verificato per ogni valore di ε.

Nel testo dell'esercizio viene fatta l'ipotesi che il limite in questione sia pari a 2.5, ossia coincidente con *f(2)*, e viene mostrato un procedimento di verifica errato. Esso consiste, infatti, nel fissare prima un arbitrario valore di δ e nel determinare in dipendenza da esso un ε che soddisfi la definizione: procedendo in questo modo, l'ipotesi di partenza risulta soddisfatta. Agli studenti viene chiesto se ritengono corretto questo procedimento di verifica. I ragazzi vengono poi guidati alla risposta facendo loro osservare che per alcuni valori di ε non esistono valori di δ che soddisfino la definizione.

Poco meno della metà dei ragazzi ha sbagliato questa attività. In effetti mi aspettavo che risultasse molto ostica per due motivi: gli studenti si trovano davanti ad un procedimento di verifica che sembra essere convincente; inoltre, il fatto stesso di ragionare su un limite che non esiste può creare difficoltà.

Molti studenti hanno pensato che la risoluzione proposta fosse corretta. In generale si è trattato di quelli che ritenevano che il limite fosse effettivamente 2.5. C'è stato però qualcuno che, pur affermando che il limite non esiste, ha ritenuto corretto lo svolgimento dato. Una ragazza di 5B ha scritto: *"Non sono d'accordo con l'ipotesi di partenza perché io so che un limite esiste se quello destro e quello sinistro hanno lo stesso valore e in questo caso non è così. La procedura di verifica potrebbe essere corretta se effettivamente l'ipotesi di partenza fosse stata corretta".*

Un'altra ragazza, nella risposta al punto 2 dell'attività, mostra di invertire l'ordine di ε e δ e di guardare dove si trovano le *x* quando le *f(x)* stanno nella striscia orizzontale. Infatti afferma: *"Il più grande valore di δ per cui la verifica di limite è soddisfatta è 2 perché le f(x) nella striscia orizzontale hanno le x nella striscia verticale. Il limite non è 2.5 perché la definizione di limite dice "per ogni δ" e se io prendo $\delta > 2$ la verifica non è soddisfatta".*

<u>Attività 3</u>

E' stato chiesto agli studenti di lavorare sul limite della funzione *sin(x)* per *x* che tende a $+\infty$. Ho voluto mostrar loro il caso di un limite non esistente e che di solito crea qualche difficoltà.

Supponendo che il limite sia 0, i ragazzi sono stati guidati a osservare che per certi valori di ε la definizione non è soddisfatta.

Questa attività è risultata semplice per la maggior parte dei ragazzi. Quasi tutti, infatti, hanno riconosciuto che il limite dato non esiste, anche se è stata ricorrente un'imprecisione: il limite non esiste perché oscilla tra -1 e 1.

Ci sono stati però anche degli errori, da parte dei ragazzi che negli esercizi precedenti avevano guardato prima le *f(x)* e poi le rispettive *x*. Un ragazzo di 5A, ad esempio, ha risposto alla prima domanda nel seguente modo: *"quando f(x) sta nella striscia orizzontale x può non stare nella verticale, quindi il limite non è soddisfatto".*

3.2.2.5 QUINTA LEZIONE: Definizione di limite per x_0 e L finiti e verifica tramite la definizione

5B - 16/10/2014 – 22 studenti presenti
5A - 17/10/2014 – 24 studenti presenti

Una volta arrivati alla definizione rigorosa di limite in termini di intorni, ho deciso di mostrare anche quella con ε e δ: questo perché si tratta della formulazione più comune (i ragazzi la incontreranno probabilmente nel corso della loro carriera universitaria) e sarebbe stata comunque trattata dal prof. Checcaglini; inoltre, si tratta di una definizione operativa, che permette di verificare algebricamente un limite dato.
Nella lezione successiva ho poi esteso la definizione al caso in cui x_0 e/o L sono infiniti.

Ho quindi sottolineato ai ragazzi che la definizione rigorosa generale in termini di intorni può essere adattata al caso in cui x_0 ed L sono finiti o infiniti, ottenendo quattro definizioni operative.

Nel caso in cui x_0 e L siano entrambi finiti, ho sottolineato che possiamo limitarci ad intorni simmetrici ed esprimerli in termini di ε e δ: $f(x)$ appartiene ad un intorno di L di raggio ε solo se $L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$, ossia in forma più compatta $|f(x) - L| < \varepsilon$. Analogamente, x appartiene ad un intorno di x_0 di raggio δ solo se $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$, ossia in forma più compatta $|x - x_0| < \delta$.
Andando ad esprimere gli intorni sfruttando le precedenti disequazioni, si ottiene quindi la definizione ε - δ.

Ho poi spiegato ai ragazzi in cosa consiste la procedura di verifica di un limite dato, sottolineando che, come su Geogebra avevamo visto l'importanza del "per ogni ε", così le soluzioni del sistema $|f(x) - L| < \varepsilon$ devono fornire un intorno di $x = x_0$ per ogni $\varepsilon > 0$.

Abbiamo poi visto insieme alcuni esempi di verifica di limiti tramite la definizione. Ho scelto esercizi che mettessero in evidenza che, per quanto la procedura di verifica possa essere “meccanica”, c’è comunque bisogno di fare attenzione e di aver compreso alcuni aspetti del concetto di limite.

Esercizio 11

$$\lim_{x \to -1}(3x+1) = -2$$

Siamo partiti da un esercizio molto semplice perché i ragazzi fossero aiutati a capire meglio il procedimento di verifica.

Esercizio 12

$$\lim_{x \to 4}(2x+1) = 7$$

La risoluzione del sistema di disequazioni $|f(x) - L| < \varepsilon$ porta ad un intorno di $x = 4$ solo per alcuni valori di ε, di conseguenza il limite non è corretto.
Ho chiesto inoltre ai ragazzi se fosse possibile modificare il limite dato per ottenerne uno corretto. In entrambe le classi, molti hanno riconosciuto senza difficoltà che le soluzioni del sistema individuano un intorno di $x = 3$ per ogni $\varepsilon > 0$, e quindi che $\lim_{x \to 3}(2x+1) = 7$.

Gli esercizi seguenti sono stati svolti da ragazzi chiamati alla lavagna.

Esercizio 13

$$\lim_{x \to 2}\frac{x}{x-1} = 2$$

Ho scelto questo esercizio per far osservare ai ragazzi che la condizione $\varepsilon < 1$ non è restrittiva, dal momento che ε può essere scelto “piccolo a piacere”.

Esercizio 14

$$\lim_{x \to 2} x^2 = 4$$

Ho scelto questo esercizio perché la risoluzione del sistema $|f(x) - L| < \varepsilon$ fornisce un intorno di $x = 2$ e uno di $x = -2$: volevo far osservare ai ragazzi che vale anche $\lim_{x \to -2} x^2 = 4$.

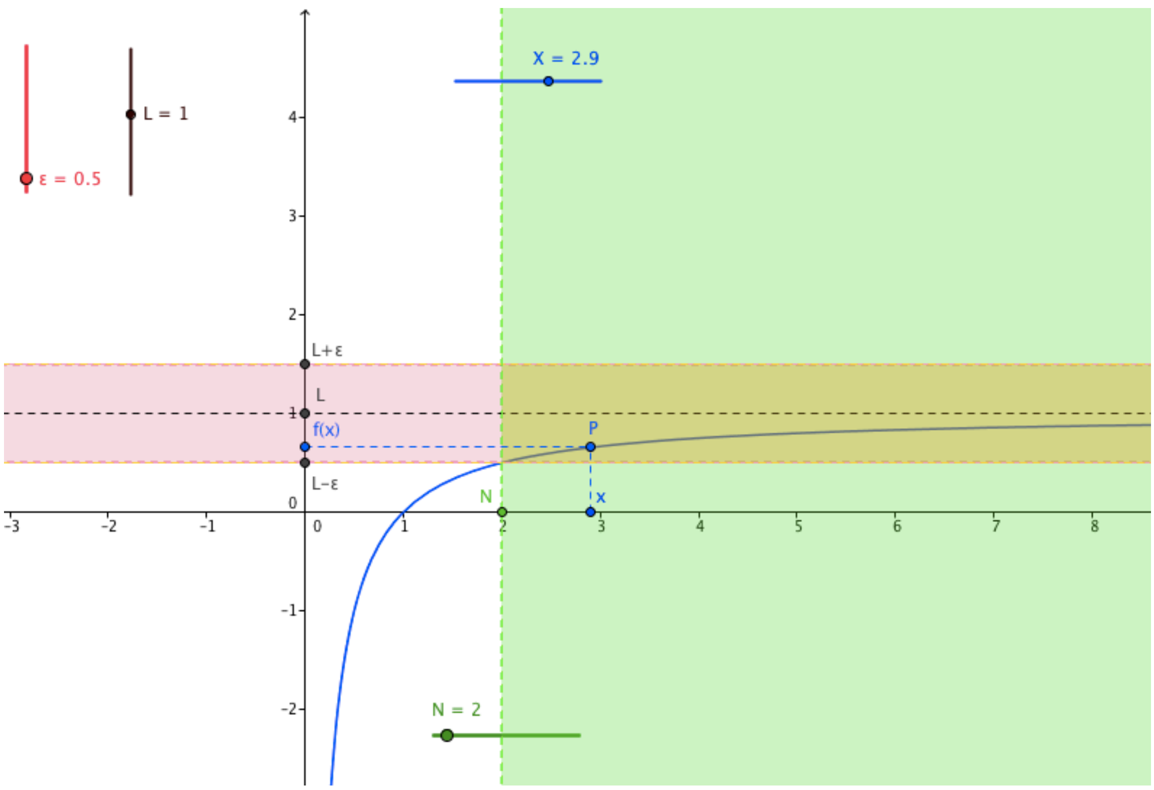
3.2.2.6 SESTA LEZIONE: Definizione di limite per x_0 e/o L infiniti

5B - 22/10/2014 – 22 studenti presenti

5A - 24/10/2014 – 24 studenti presenti

Abbiamo scritto la definizione di limite nel caso in cui x_0 è infinito ed L è finito, osservando che x appartiene ad un intorno di $+\infty$ solo se soddisfa la disequazione $x > N$ con $N > 0$, e che appartiene ad un intorno di $-\infty$ solo se soddisfa la disequazione $x < -N$ con $N > 0$.

Ho visualizzato su Geogebra l'esempio in figura, in cui $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$, mostrando che via via che ε diminuisce, deve essere preso un valore di N maggiore affinché la definizione sia soddisfatta.



Abbiamo poi visto insieme la verifica del seguente limite:

Esercizio 15

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x-1}{x} = 1$$

Il risultato del sistema $|f(x) - L| < \varepsilon$ permette di vedere che vale anche $\lim_{x \to -\infty} \frac{x-1}{x} = 1$

Ho poi mostrato il caso in cui x_0 è finito ed L è infinito e quello in cui x_0 ed L sono entrambi infiniti, osservando che $f(x)$ appartiene ad un intorno di $+\infty$ solo se soddisfa la disequazione $f(x) > M$ con $M > 0$, e che appartiene ad un intorno di $-\infty$ solo se soddisfa la disequazione $f(x) < -M$ con $M > 0$. Ho presentato applets analoghe a quelle precedenti, mettendo sempre in evidenza le relazioni tra gli intorni.

Abbiamo poi visto insieme la verifica dei seguenti limiti:

Esercizio 16

$$\lim_{x \to 1} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty$$

Esercizio 17

$$\lim_{x \to +\infty} \log_{\frac{1}{2}} x = -\infty$$

3.2.3 VERIFICA FINALE

5A - 19/12/2014 – 24 studenti presenti
5B - 19/12/2014 – 20 studenti presenti

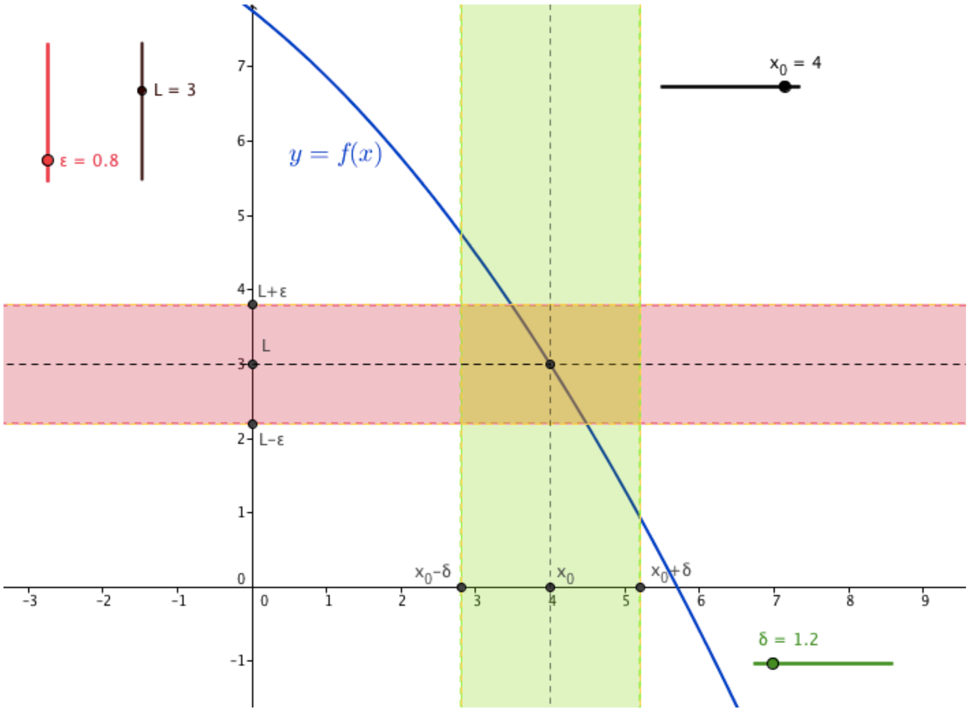
Il testo del compito finale si trova nell'Appendice di questa tesi. E' stato svolto circa due mesi dopo il termine del ciclo di lezioni, sia perché volevamo far passare un po' di tempo per avere un'indicazione più precisa sulla comprensione del concetto di limite acquisita dai ragazzi, sia perché essi avevano compiti e interrogazioni di varie materie in programma. C'è da sottolineare che, proprio per il carico di lavoro a cui sono stati soggetti fino al giorno prima del compito, solo pochissimi alunni avevano riguardato le lezioni sui limiti. Questo da un lato contribuisce a mostrare quello che hanno trattenuto e fatto proprio, dall'altro i risultati del compito (in generale abbastanza buoni) avrebbero potuto essere migliori con un ripasso dei concetti in gioco.

Di seguito presenterò ogni esercizio della prova, spiegando i motivi per cui è stato scelto, presentando un'analisi a priori delle difficoltà riscontrabili dagli studenti e infine un'analisi a posteriori in base all'effettivo svolgimento del compito.
Il testo degli esercizi è riportato in corsivo.

Esercizio 1

a) Descrivi utilizzando gli intorni o le strisce che abbiamo visto su Geogebra che cosa significa $\lim_{x\to 4} f(x) = 3$*. Ricordati di sottolineare l'ordine con cui vanno presi gli intorni e le loro caratteristiche.*

b) Sia data la funzione y = f(x) il cui grafico è disegnato su Geogebra. Sappiamo che $\lim_{x\to 4} f(x) = 3$*, quindi è stato posto* $x_0 = 4$ *e L = 3.*
Osserva la figura sottostante: i valori scelti ε = 0.8 e δ = 1.2 soddisfano la definizione di limite? Perché?



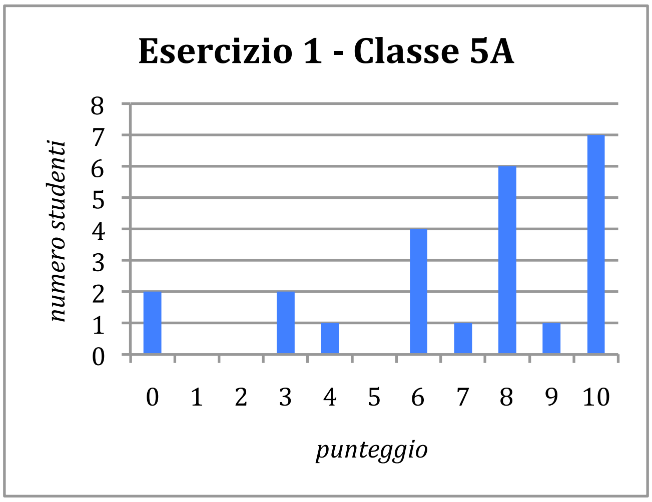
Scopo di questo esercizio era quello di verificare la comprensione della definizione rigorosa di limite in termini di intorni.

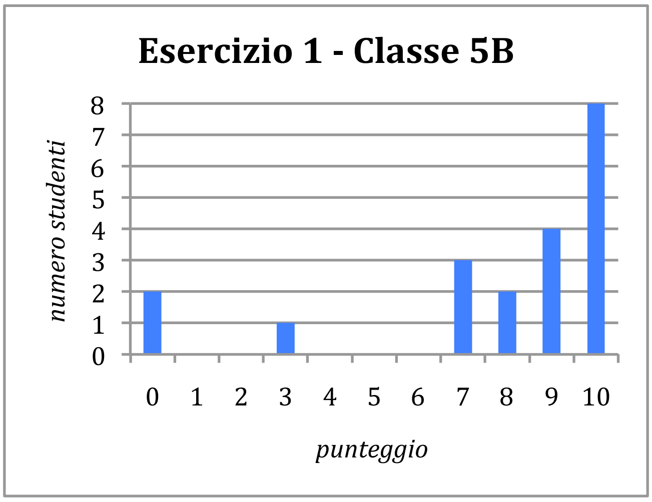
Nella tabella riporto il punteggio assegnato all'esercizio:

Esercizio 1	**Quesito *a***	**Quesito *b***	**TOT**
	4	6	10

Ho deciso da dare un punteggio leggermente più alto al secondo punto, in quanto ho notato, nel corso delle ore passate in classe, che i ragazzi hanno molta difficoltà ad esprimere correttamente i concetti che hanno in mente. Inoltre, una definizione può essere semplicemente imparata a memoria e non compresa. Ho ritenuto quindi che l'esercizio applicativo fosse maggiormente significativo per valutare la comprensione acquisita della definizione rigorosa.

Nei grafici seguenti riporto i punteggi ottenuti dagli studenti nelle due classi:





Sinceramente, mi aspettavo che questo primo esercizio avrebbe creato notevoli difficoltà, visti i problemi sorti nelle attività svolte per casa con Geogebra. Invece è andata meglio del previsto: evidentemente, molti ragazzi hanno studiato individualmente il materiale che avevo consegnato loro, recuperando molte (se non tutte) delle loro lacune.

Come si può vedere dai grafici, i risultati della 5B sono in generale migliori. In entrambe le classi sono stati comunque buoni, perché nel complesso soltanto 8 ragazzi hanno mostrato particolari difficoltà, mentre gli altri hanno risposto correttamente alla seconda domanda, per me molto importante. In generale, ciò che è stato maggiormente tralasciato nella risposta alla prima domanda è la precisazione sull'ordine degli intorni. Questo, però, non sempre è stato indice di una scarsa comprensione della relazione tra gli intorni: molti, infatti, nel quesito *b* hanno specificato che, affinché la definizione risulti soddisfatta, sarebbe necessario considerare una striscia verticale più piccola (a volte l'hanno proprio disegnata), mostrando quindi di aver assimilato la dipendenza di δ da ε e probabilmente anche l'ordine in cui vanno fissati (avendo deciso di modificare δ e non ε).

Esercizio 2

Sia $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ *con* x_0 *e L finiti o infiniti. Indica se le seguenti affermazioni sono vere o false:*

a) I valori della funzione si avvicinano al limite L quando le x si avvicinano a x_0*. In nessun caso f(x) = L .*

b) Il limite rappresenta il processo di avvicinamento delle f(x) a L quando le x si avvicinano a x_0*.*

c) Il limite della funzione per x che tende a x_0 *può non esistere.*

d) Se y = L è asintoto orizzontale per la funzione, il grafico di f non può mai attraversare tale retta.

e) Se x = x_0 *è asintoto verticale per la funzione, il grafico di f non può mai attraversare tale retta.*

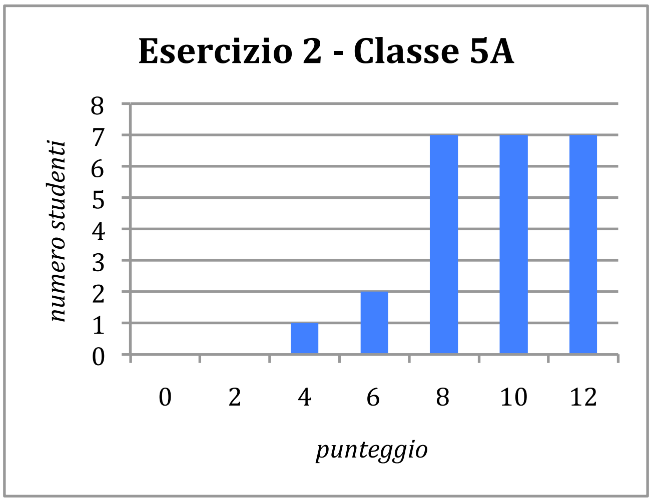
f) La funzione f assume valori vicini quanto si vuole a L tutte le volte che i valori di x sono sufficientemente vicini a x_0 *(con eventuale esclusione del punto x =* x_0*).*

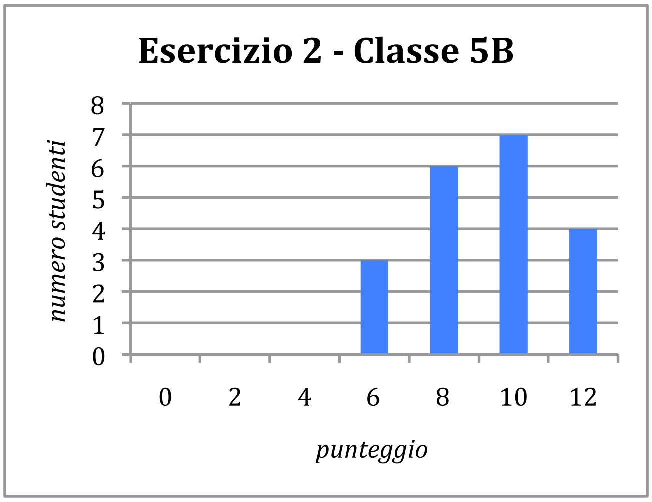
Con questo esercizio volevo verificare se gli studenti possedevano ancora alcuni dei misconcetti registrati in letteratura: il fatto che il limite non possa essere raggiunto né superato e il fatto che il limite coincida con il processo di avvicinamento delle *f(x)* a *L* e non con il risultato di tale processo. Inoltre, sono presenti due domande relative agli asintoti verticali e orizzontali su cui il professore ed io abbiamo molto insistito. Alcune delle domande sono state riprese da [40].

Nella tabella riporto il punteggio assegnato all’esercizio:

Esercizio 2	***a***	***b***	***c***	***d***	***e***	***f***	**TOT**
	2	2	2	2	2	2	12

Nei grafici seguenti riporto i punteggi ottenuti nelle due classi:





Mi aspettavo che i ragazzi trovassero questo quesito abbastanza ostico, per la loro difficoltà a trattare con domande teoriche e "astratte". Avevo infatti notato, assistendo alle interrogazioni, che il professore puntava maggiormente sulle applicazioni e tendeva a sorvolare sulle imprecisioni degli studenti nel linguaggio e nelle definizioni.

- I ragazzi hanno mostrato di avere ben chiaro che il limite può essere raggiunto: solo un ragazzo in 5B, infatti, ha sbagliato la domanda *a*.
- La domanda più ostica è risultata la seconda: circa la metà degli studenti (14 in 5A e 10 in 5B) ritiene che il limite sia il processo di avvicinamento delle $f(x)$ a L quando le x si avvicinano a x_0. Devo dire che questo risultato mi ha stupita, dal momento che nella lezione introduttiva ai limiti avevo più volte insistito su questo punto. E' anche vero che è un aspetto che non abbiamo più ripreso; inoltre, sia durante le lezioni che nella correzione dei compiti per casa, non mi è mai capitato di sentire espressioni del tipo "il limite *tende a L*" o simili, che fossero segnali della presenza di questo misconcetto. Potrebbe quindi essere che i ragazzi non abbiano

semplicemente capito cosa significasse la domanda (anche se conferma di questo deriverebbe solo da interviste agli studenti).

- Consideravo il quesito *c* il più semplice di tutti. Qualcuno ha comunque risposto in maniera errata (4 in 5A e 5 in 5B).
- La domanda *d* è risultata semplice per la maggior parte dei ragazzi: in 5B è stata sbagliata soltanto da una persona, in 5A da 6. Il professore (e successivamente anche io) aveva spesso insistito sul fatto che gli asintoti orizzontali possono essere attraversati, a differenza dei verticali. La domanda successiva è però risultata in generale più ostica (è stata sbagliata da 4 studenti in 5A e 7 in 5B), probabilmente perché i ragazzi hanno avuto modo di vedere in classe vari esempi di asintoti orizzontali attraversati dal grafico della funzione, mentre il fatto che i verticali non possano essere attraversati è rimasta soltanto un'affermazione teorica.
- L'ultimo quesito è stato sbagliato da 5 persone in 5A e 6 in 5B.

Esercizio 3

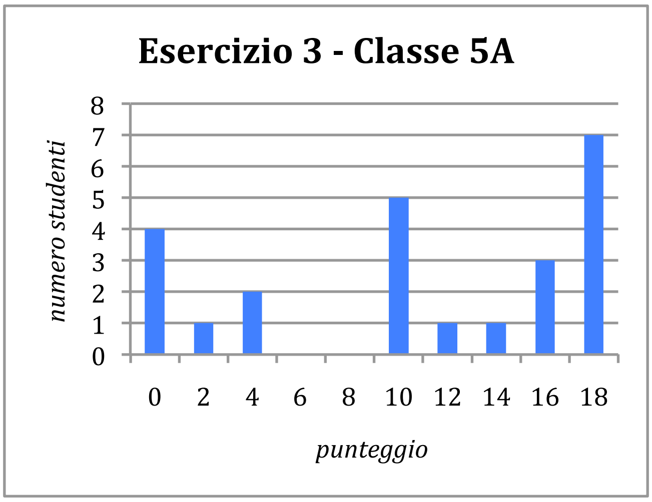
Quali affermazioni sono <u>sicuramente</u> vere se f è una funzione tale che $\lim_{x \to 4} f(x) = 6$*? Fornisci un controesempio grafico quando le affermazioni sono false.*

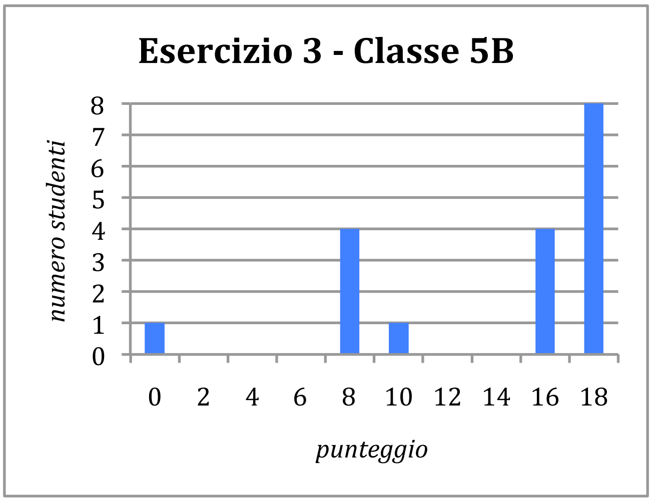
a) f (4) = 6.
b) f è continua in x = 4.
c) x = 4 appartiene al dominio di f .
d) f è discontinua in x = 4.
e) Nessuna delle precedenti è vera.

Obiettivo di questo esercizio era quello di verificare se i ragazzi possedevano ancora alcuni dei misconcetti riscontrati in letteratura: il fatto che il limite in x_0 coincida con $f(x_0)$; che la funzione debba essere continua (o, al contrario, discontinua) in x_0; che x_0 debba appartenere al dominio della funzione. Ho avuto la possibilità di inserire nel compito questo esercizio in quanto i ragazzi avevano già visto con il professore la continuità delle funzioni e i tre tipi di discontinuità.
Nella tabella riporto il punteggio assegnato all'esercizio. Ogni risposta corretta vale 2 punti, più altri 2 punti per ogni grafico corretto.

Esercizio 3	a	b	c	d	e	TOT
	2	2	2	2	2	18
Grafico	2	2	2	2	/	

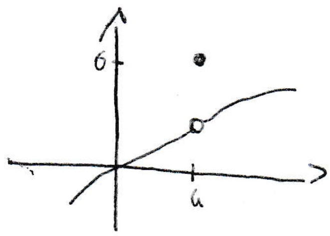
Nei grafici seguenti riporto i punteggi ottenuti dagli studenti nelle due classi:





Si tratta dell'esercizio più complesso, in quanto viene richiesto di fornire un controesempio grafico per le affermazioni ritenute false: necessita quindi di una certa capacità di astrazione per individuare il grafico corretto, tenendo presente che deve essere soddisfatto il limite $\lim_{x \to 4} f(x) = 6$ e allo stesso tempo deve essere confutata una certa affermazione. E' risultato, infatti, che molti non riuscivano a capire cosa significasse dare un controesempio: alcuni hanno disegnato grafici che confermavano le affermazioni (indicate come false) invece di confutarle; altri hanno disegnato grafici che effettivamente confutavano le affermazioni, ma in cui non valeva $\lim_{x \to 4} f(x) = 6$. Ad esempio, un ragazzo di

5A per dare un controesempio dell'affermazione *b* ha disegnato il grafico seguente, pur mostrando di sapere (nell'esercizio 5) che il limite di tale funzione in $x = 4$ non è 6:



A posteriori, mi rendo conto che avrei potuto modificare la traccia dell'esercizio per renderlo più facile da comprendere e quindi da risolvere. Ad esempio avrei potuto scrivere:

Sia f una funzione tale che $\lim_{x \to 4} f(x) = 6$.

a) *Disegna il grafico di f, se possibile, in modo che f (4) ≠ 6.*
b) *Disegna il grafico di f, se possibile, in modo che f sia discontinua in x = 4.*
c) *Disegna il grafico di f, se possibile, in modo che x = 4 non appartenga al dominio di f.*
d) *Disegna il grafico di f, se possibile, in modo che f sia continua in x = 4.*

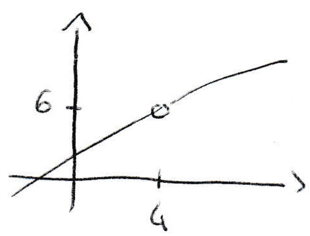
Dai grafici si nota subito che i risultati della 5B sono nettamente migliori. Questa classe in effetti, oltre ad avere rendimenti più alti in matematica, ha una maggiore capacità di rielaborare in un quadro organico i vari concetti acquisiti. In questa classe tutti hanno provato a disegnare dei grafici (ad eccezione di un ragazzo che ha lasciato in bianco l'esercizio), facendone corretti almeno due, mentre in 5A in 4 non hanno svolto l'esercizio e in 8 non hanno provato a tracciare nemmeno un grafico. I ragazzi mi hanno confessato che questo esercizio li aveva parecchio spaventati, essendo molto diverso da quelli generalmente svolti sia con il professore che con me.

- In entrambe le classi, l'affermazione *b* è quella che ha creato meno problemi: la sua falsità non è stata riconosciuta soltanto da 5 persone (4 in 5A e 1 in 5B, gli stessi che hanno lasciato l'esercizio in bianco). I ragazzi mostrano quindi di aver chiaro che la funzione non deve essere necessariamente continua. Per quanto riguarda i grafici, gli studenti di 5B non hanno avuto difficoltà, mentre in 5A solo la metà ha disegnato un grafico corretto.
- L'affermazione *d* ha creato invece più problemi in 5A: 8 persone hanno ritenuto che la funzione sia necessariamente discontinua, e solo la metà di quelli che hanno

risposto correttamente ha disegnato un grafico adeguato (in generale, gli altri hanno tracciato una funzione discontinua o non hanno disegnato niente).

In 5B, invece, non ci sono stati particolari problemi: solo 2 ragazzi hanno risposto in maniera errata e in generale non ci sono state difficoltà a tracciare un grafico.

- La domanda risultata più ostica in 5B è stata la prima: 5 persone l'hanno considerata vera e molti tra quelli che l'hanno contrassegnata come falsa, hanno sbagliato nel disegnarne il grafico.
- La *c* è stata sbagliata da 7 ragazzi di 5A e 4 di 5B. Nella seconda classe, l'errore è stato commesso da studenti che non solo avevano risposto correttamente alla domanda *b*, ma ne avevano anche disegnato il seguente grafico, valido quindi per confutare anche l'affermazione *c*:



Questo può indicare semplicemente distrazione, oppure può essere un segno che questi ragazzi non hanno chiaro cosa significhi che un punto appartiene al dominio della funzione: durante le interrogazioni del professore avevo infatti notato che alcuni avevano qualche esitazione a stabilire l'appartenenza di un punto al dominio.

Esercizio 4

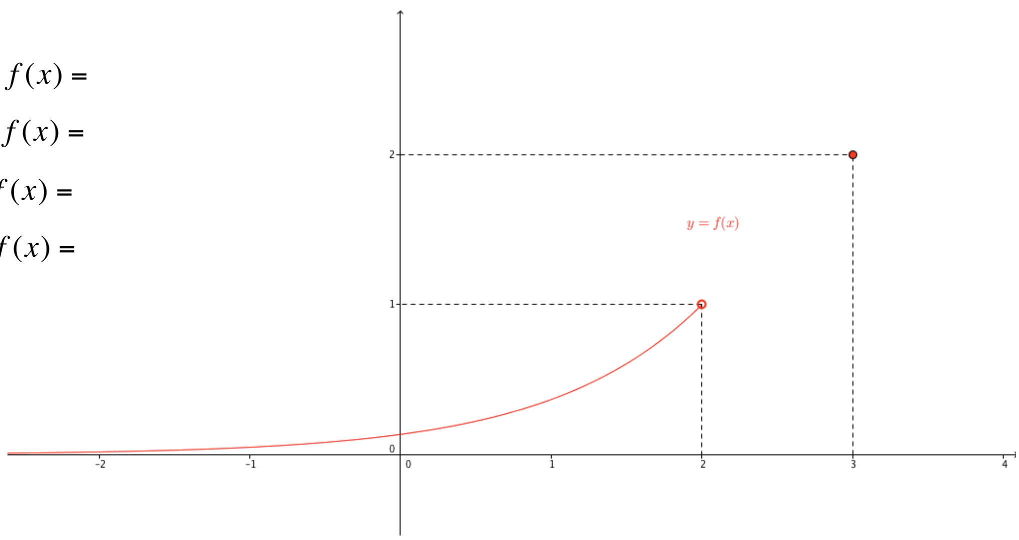
Deduci dal grafico i valori dei seguenti limiti, se esistono:

$a) \lim_{x \to -\infty} f(x) =$

$b) \lim_{x \to 2^-} f(x) =$

$c) \lim_{x \to 2} f(x) =$

$d) \lim_{x \to 3} f(x) =$

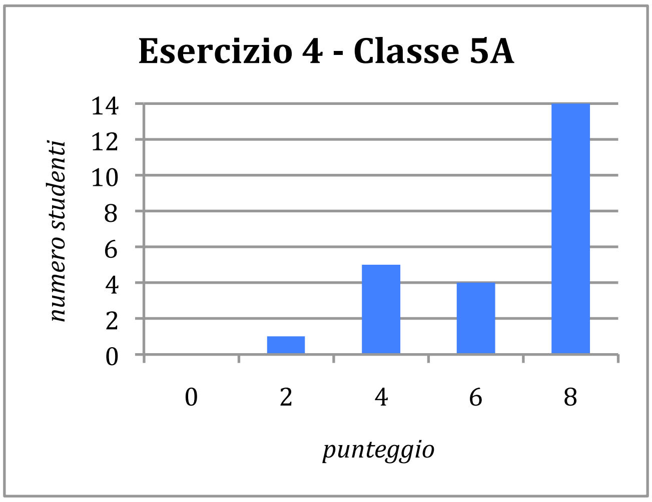


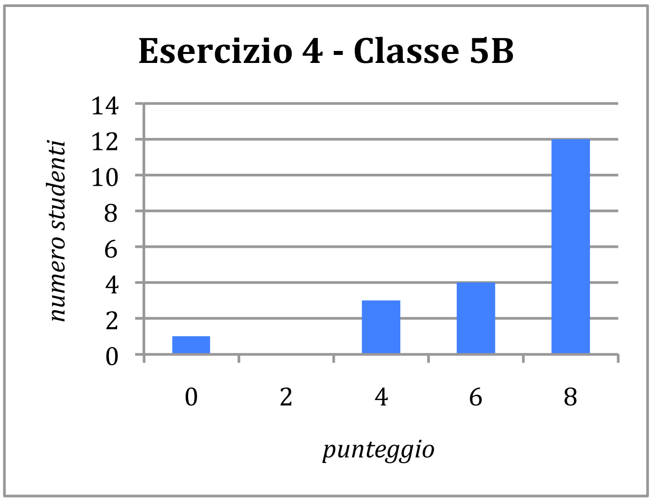
Con questo esercizio volevo verificare se gli studenti avevano chiaro il fatto che il punto in cui si calcola il limite deve essere di accumulazione per il dominio della funzione, e che il limite esiste se e solo se esistono e sono uguali limite destro e limite sinistro.

Nella tabella riporto il punteggio assegnato all'esercizio:

Esercizio 4	***a***	***b***	***c***	***d***	**TOT**
	2	2	2	2	8

Nei grafici seguenti riporto i punteggi ottenuti dagli studenti nelle due classi:





- I limiti *a* e *b* non hanno creato problemi: in 5B nessuno li ha sbagliati (ad eccezione di un ragazzo che ha lasciato in bianco l'esercizio), in 5A ci sono stati due errori nel primo (in entrambi i casi il limite indicato è stato -∞).
- Il limite *c* è stato sbagliato da 6 persone in 5A e 4 in 5B, avendo tutti risposto 1.
- Come mi aspettavo, il limite più sbagliato è stato l'ultimo: 9 errori in 5A e 8 in 5B, avendo tutti riposto 2.

Esercizio 5

Osserva il grafico di y = f(x). Indica quali dei seguenti limiti sono corretti e quali sono errati. Correggi quelli errati.

$a)\ \lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$

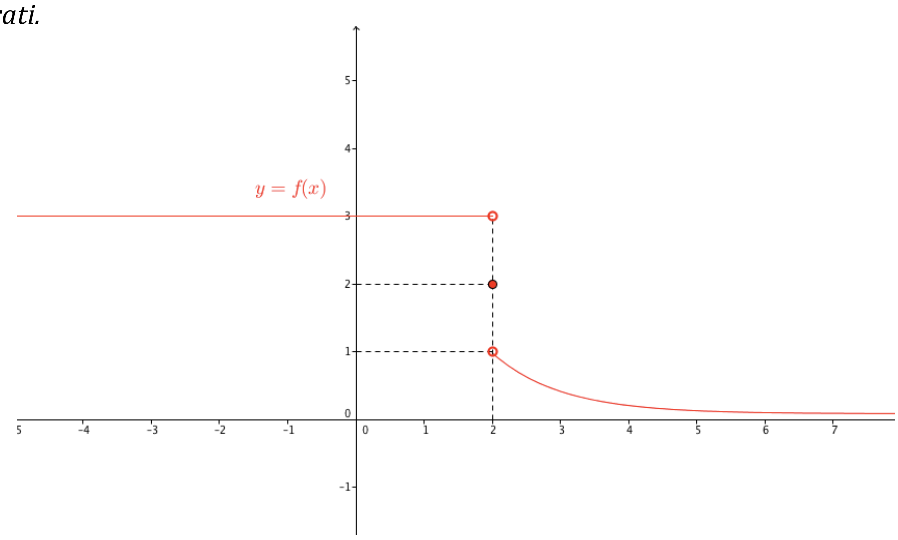
$b)\lim_{x\to 1} f(x) = 3$

$c)\ \lim_{x\to 2^-} f(x) = 3$

$d)\lim_{x\to 2} f(x) = 2$

$e)\ \lim_{x\to 2^+} f(x) = 1$

$f)\ \lim_{x\to +\infty} f(x) = 0^-$



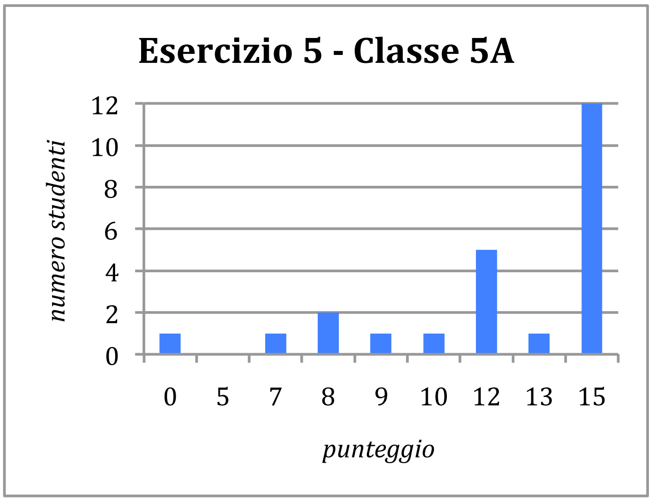
Con questo esercizio volevo verificare la presenza di misconcetti tipici, quali la non esistenza del limite di funzioni costanti e la coincidenza tra $f(x_0)$ e il limite in x_0.

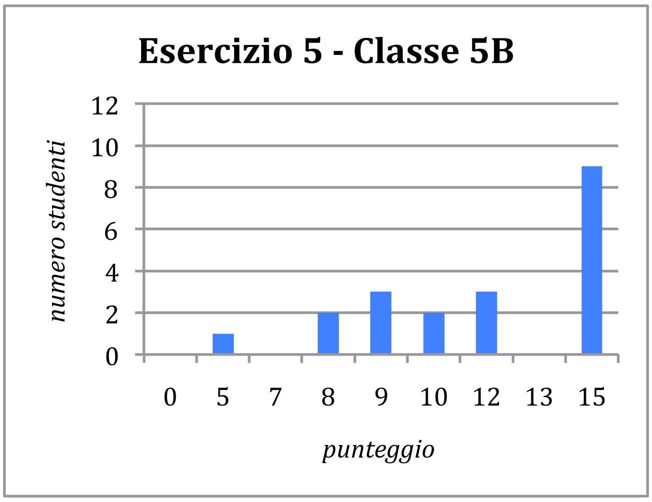
Nella tabella riporto il punteggio assegnato all'esercizio:

Esercizio 5	***a***	***b***	***c***	***d***	***e***	***f***	**TOT**
	3	3	2	3	2	2	15

Ho deciso di assegnare ad alcuni limiti un punteggio leggermente maggiore in quanto relativi agli aspetti che più mi interessava verificare.

Nei grafici seguenti riporto i punteggi ottenuti dagli studenti nelle due classi:





Era stato lasciato per casa un esercizio molto simile (si veda l'esercizio 6 riportato al §3.2.2.3): visti i commenti agli svolgimenti dei singoli studenti e la correzione fatta in classe, mi aspettavo un miglioramento, effettivamente riscontrato in entrambe le classi.

- Gli errori relativi al tratto costante sono stati modesti: 5 ragazzi di 5A hanno considerato vero o non esistente il limite *a* e solo 1 ragazza ha considerato non esistente il limite *b*; in 5B, 6 ragazzi hanno ritenuto che il limite *a* fosse pari a +∞ e 2 ragazzi hanno indicato come non esistente il limite *b*. Pochi studenti, quindi, hanno difficoltà con il limite di funzioni costanti. Tra i due, è risultato più ostico il primo, probabilmente per la difficoltà ad immaginare l'andamento della funzione a -∞.
- Per quanto riguarda la terna *c*-*d*-*e*, i limiti destro e sinistro sono stati generalmente considerati corretti (in 5A ci sono stati 4 errori per *c* e 3 per *e*, in 5B 3 per *c* e 3 per *e*); il limite *d* è stato sbagliato da più studenti (9 in 5A e 7 in 5B). Tutti hanno commesso l'errore di considerare $\lim_{x \to 2} f(x) = f(2)$ e la maggior parte ha poi ritenuto corretti i limiti destro e sinistro; qualcuno, invece, ha posto questi ultimi entrambi pari a 2 (come a voler applicare forzatamente il fatto che il limite esiste se e solo se limite destro e sinistro sono uguali), altri hanno affermato che non esistono.
- L'ultimo limite non ha creato particolari problemi: soltanto 3 ragazzi in 5A e 2 in 5B lo hanno indicato come corretto.

Rispetto all'esercizio svolto per casa c'è stato un miglioramento, ma meno marcato rispetto a quello relativo ad altri misconcetti.

Esercizio 6

Se $\forall a > 0$ $|f(x)+5| < a$ *è verificato per* $x > 1 + \frac{3}{a}$ *allora:*

$a)\ \lim_{x \to -\infty} f(x) = -5$

$b)\ \lim_{x \to 1^+} f(x) = -5$

$c)\ \lim_{x \to +\infty} f(x) = -5$

$d)\ \lim_{x \to 1} f(x) = 5$

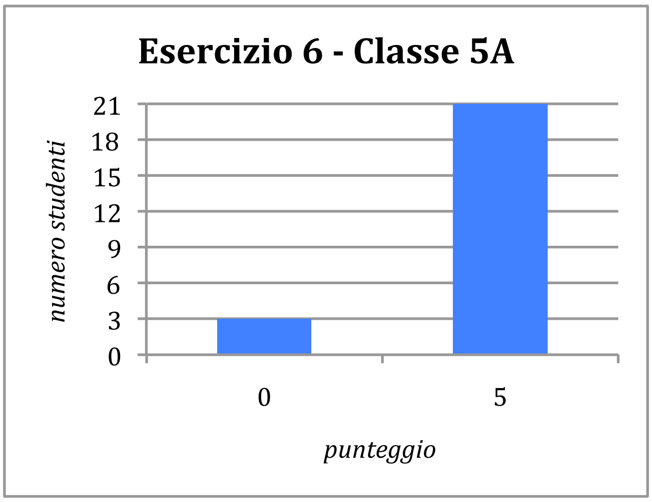
$e)\ \lim_{x \to +\infty} f(x) = 5$

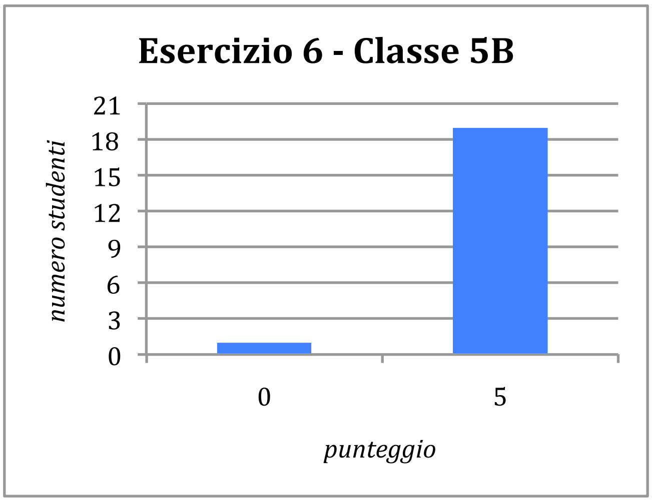
Scopo di questo esercizio era quello di verificare la comprensione dei ragazzi della definizione rigorosa di limite. Come si può notare, non sono presenti le lettere ε e M utilizzate nella definizione data in classe: volevo evitare che gli studenti identificassero la risposta corretta avendo solo associato alle lettere le varie definizioni.

Nella tabella riporto il punteggio assegnato all'esercizio:

	Risposta errata o non data	Risposta corretta
Esercizio 6	0	5

Nei grafici sottostanti riporto i punteggi ottenuti dai ragazzi:

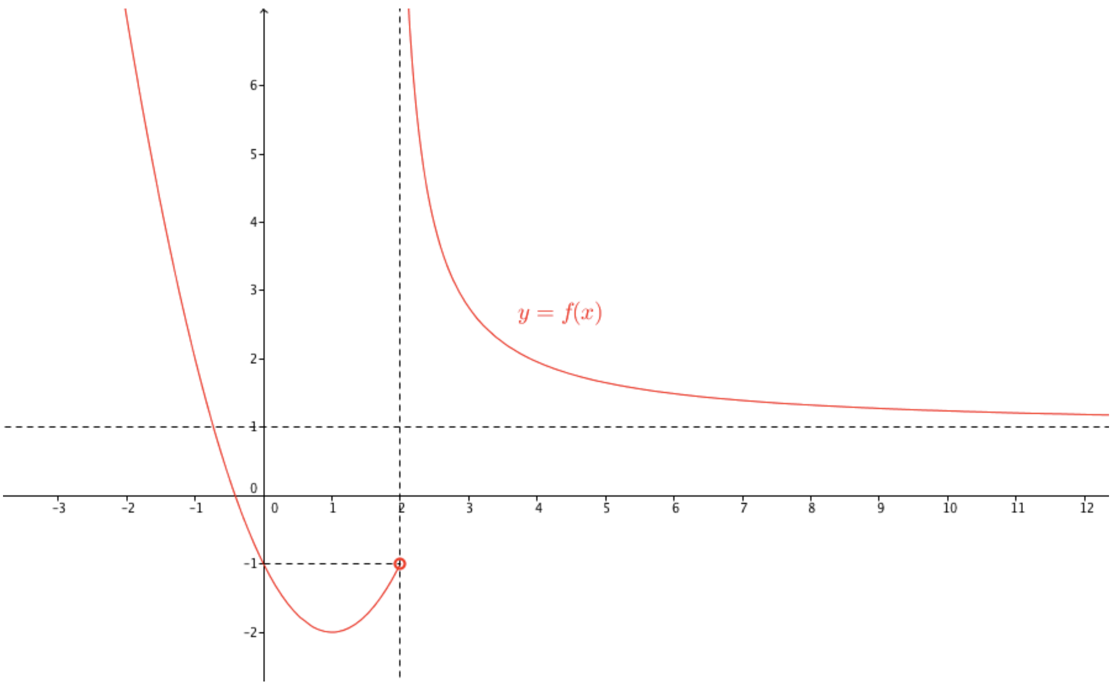




Mi aspettavo che qualcuno avrebbe indicato come corretta la risposta *b*, tratto in inganno dalla scrittura $1+\frac{3}{a}$. Invece, come si può vedere dai grafici, i risultati sono molto buoni e chi ha ottenuto 0 punti non ha dato alcuna risposta.

Nonostante mi aspettassi qualche errore in più, non mi stupisce che questo esercizio sia stato svolto correttamente da così tanti studenti: la definizione rigorosa di limite è stata ripresa anche con il professore a seguito delle mie lezioni ed è stata oggetto di grande attenzione (sia da parte del professore che dei ragazzi) in quanto possibile argomento d'esame di stato.

Esercizio 7



a) In base al grafico di y = f(x) determina i seguenti limiti:

$$a.1)\ \lim_{x \to -\infty} f(x) =$$
$$a.2)\ \lim_{x \to 2^-} f(x) =$$
$$a.3)\ \lim_{x \to 2^+} f(x) =$$
$$a.4)\ \lim_{x \to +\infty} f(x) =$$

b) Che cosa rappresentano le rette y = 1 e x = 2 ?

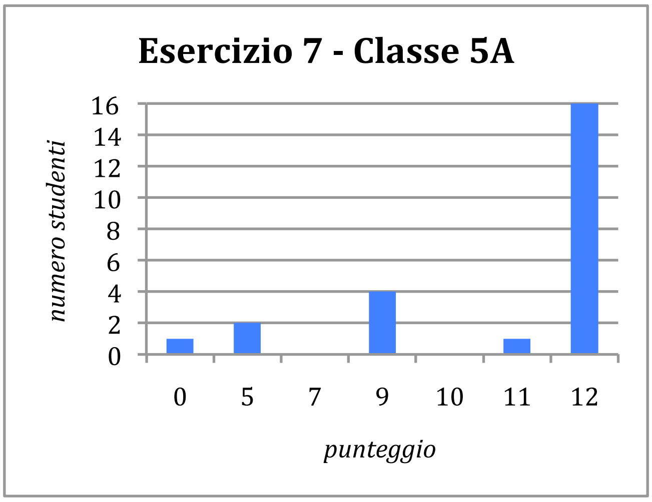
Ho scelto questo esercizio perché molti ragazzi, soprattutto in 5A, avevano mostrato di avere difficoltà in presenza di asintoti verticali destri o sinistri (si veda l'esercizio 7 riportato al §3.2.2.3).

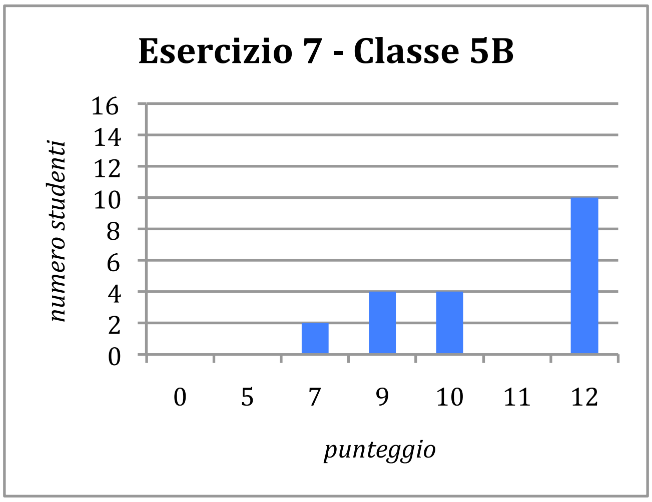
Nella tabella riporto il punteggio assegnato all'esercizio:

Esercizio 7	***a.1***	***a.2***	***a.3***	***a.4***	***b***	**TOT**
	2	3	3	2	2	12

Ho deciso di assegnare un punteggio leggermente maggiore ai limiti *a.2* e *a.3* perché relativi all'aspetto che maggiormente mi interessava verificare.

Nei grafici seguenti riporto i punteggi ottenuti dagli studenti nelle due classi:





Visti i commenti agli svolgimenti dei singoli studenti e la correzione fatta in classe, mi aspettavo un miglioramento in entrambe le classi. In effetti, quasi tutti gli studenti che avevano svolto gli esercizi per casa, nel compito non hanno commesso errori.

- Il limite *a.1* è stato sbagliato da 2 persone in 5A e 2 in 5B, i quali hanno indicato che il limite non esiste, forse per difficoltà ad immaginarsi l'andamento della funzione.
- Il maggior numero di errori si è registrato, come immaginabile, nella risposta al punto *a.2*: in 5A 3 ragazzi hanno indicato +∞ come risposta (probabilmente per la presenza dell'asintoto $x = 2$), in 5B 6 ragazzi hanno affermato che il limite non esiste. C'è stato comunque un netto miglioramento rispetto agli errori commessi nell'esercizio per casa.
- Il limite *a.3* non ha creato problemi a nessun alunno di 5B, mentre in 5A 2 persone hanno indicato che il limite è -1 o non esiste.
- L'ultimo limite è stato sbagliato da 4 persone in 5A e 4 in 5B, 3 dei quali hanno indicato come risposta -1, forse un errore di distrazione.
- Tutti hanno riconosciuto che le due rette sono asintoti (a parte una ragazza di 5A che non ha svolto l'esercizio) anche se solo in pochi hanno specificato che $x = 2$ è un asintoto verticale destro.

Esercizio 8

Disegna il grafico di una funzione y = f(x) che soddisfi i seguenti limiti:

$a)\ \lim_{x \to -\infty} f(x) = 1^-$

$b)\ \lim_{x \to 3^-} f(x) = +\infty$

$c)\ \lim_{x \to 3^+} f(x) = -\infty$

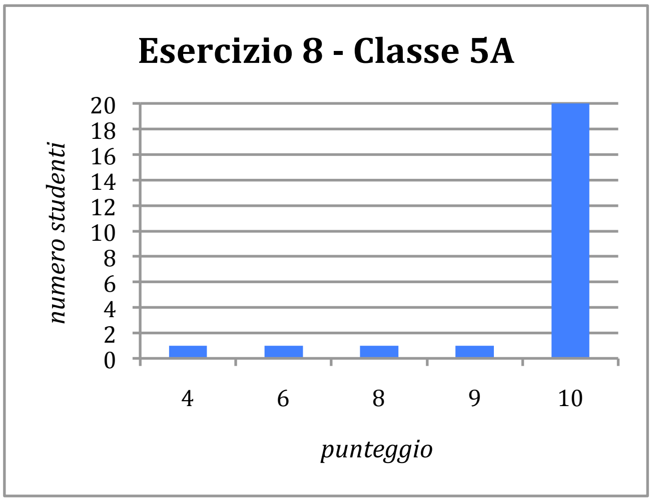
$d)\ \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0^-$

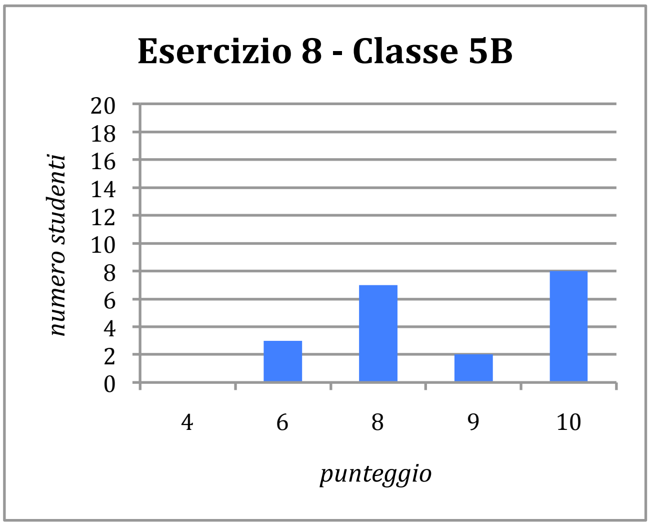
Anche questo esercizio è stato scelto per le difficoltà riscontrate nei compiti lasciati per casa (si vedano gli esercizi 9 e 10 riportati al paragrafo §3.2.2.3). In particolare, l'asintoto orizzontale viene attraversato dal grafico della funzione.

Nella tabella riporto il punteggio assegnato all'esercizio:

Esercizio 8	***a***	***b***	***c***	***d***	***asintoti***	**TOT**
	2	2	2	2	2	10

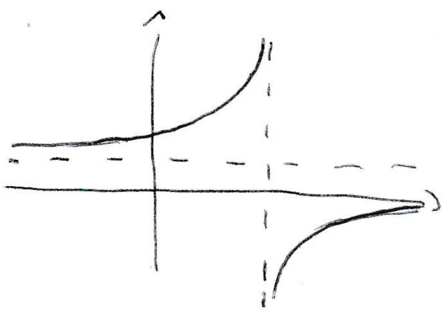
Nei grafici seguenti riporto i punteggi ottenuti dai ragazzi:



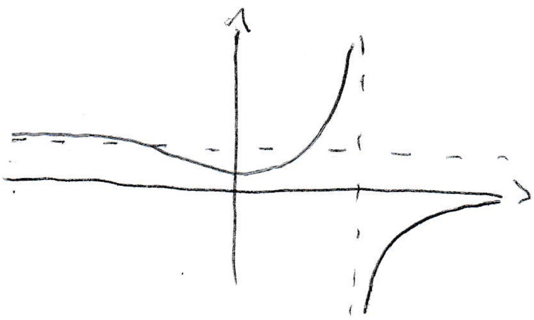


Visti i commenti agli svolgimenti dei singoli studenti e la correzione fatta in classe, mi aspettavo un miglioramento, effettivamente riscontrato in maniera netta in 5A e in modo meno marcato in 5B.

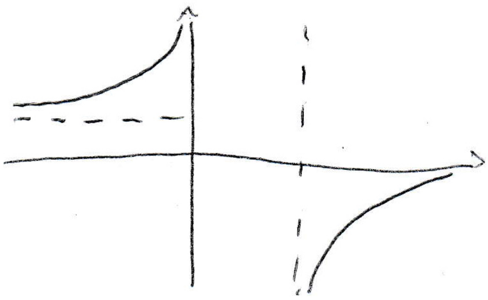
In generale, l'errore più diffuso è stato relativo al limite a (3 in 5A e 7 in 5B): normalmente il grafico tracciato è stato il seguente:

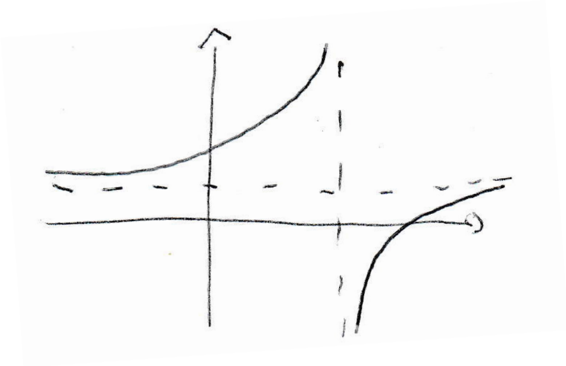


Alcuni però hanno disegnato grafici del tipo seguente:

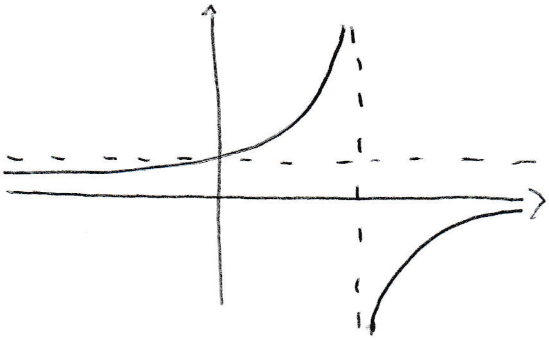


Altri hanno sbagliato anche gli asintoti:



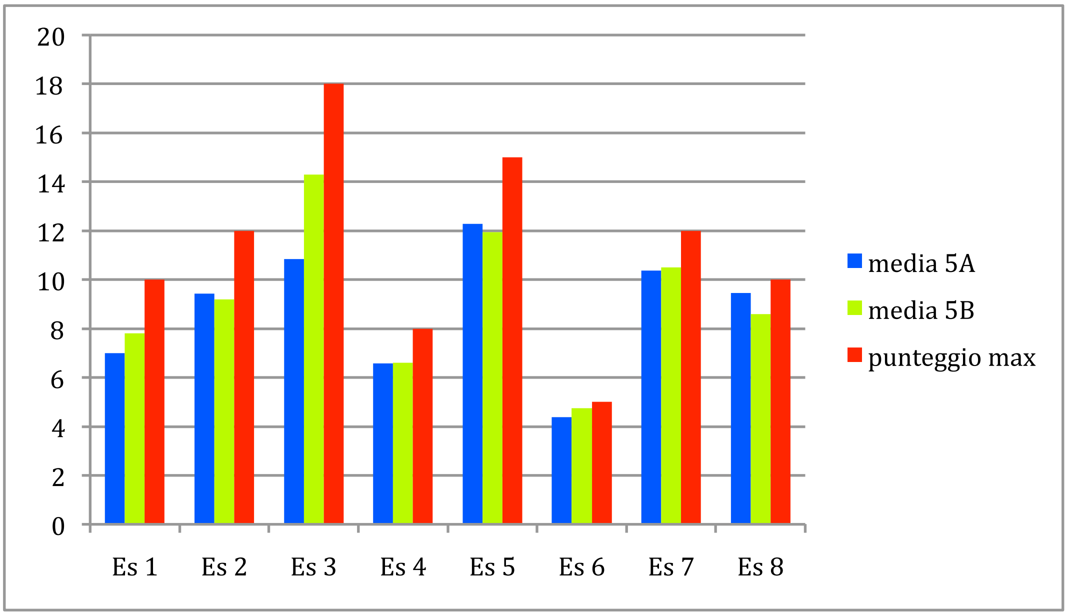


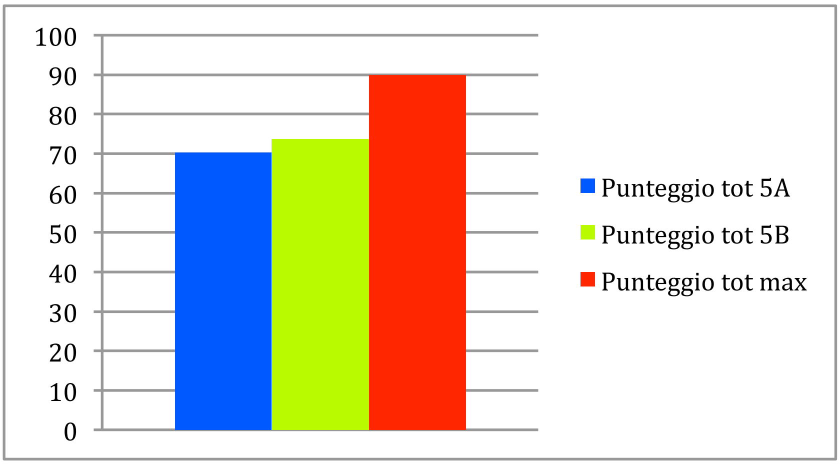
Ho assegnato 9 punti a grafici non molto precisi, come quello seguente, in cui non è chiaro l'andamento della funzione al di sotto dell'asintoto:



CONSIDERAZIONI FINALI

Riporto nei grafici seguenti la media dei punteggi ottenuti dai ragazzi nei vari esercizi e sul totale.





Come si può osservare, la prova ha avuto un esito sostanzialmente positivo e non c'è molta differenza tra i rendimenti delle due classi.

Nella tabella seguente riporto la percentuale degli studenti che hanno commesso errori relativi ai misconcetti più frequenti.

ESERCIZIO	MISCONCETTI/ERRORI	5A	5B
2.a	**Limite non raggiungibile**	0%	5%
2.b	**Limite come processo di avvicinamento**	58%	50%
2.d	**Limite non superabile**	25%	5%
3.a	$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$	25%	25%
3.b	**Funzione necessariamente continua**	17%	5%
3.c	x_0 **necessariamente appartenente al dominio**	29%	20%
3.d	**Funzione necessariamente discontinua**	33%	10%
4.d	x_0 **punto di accumulazione**	37.5%	40%
5.a - 5.b	**Limite di funzioni costanti non esistente**	21%	30%
5.d	$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$	37.5%	35%
7.a.2 - 7.a.3	**Asintoto verticale dx o sx**	25%	30%
8	**Asintoto orizzontale non attraversabile**	12.5%	30%

2.a) Gli studenti di entrambe le classi hanno mostrato, sia durante le lezioni che nel compito finale, di *avere ben chiaro che il limite può essere raggiunto*.

2.d-8) Maggiori incertezze sono state rilevate rispetto al fatto che il limite possa essere superato. La domanda *2.d* (più teorica) che chiedeva se il grafico di una funzione può attraversare un suo asintoto orizzontale, ha creato più problemi in 5A, mentre la domanda *8* (più pratica) in cui si chiedeva di disegnare il grafico di una funzione che attraversa il suo asintoto orizzontale, è stata sbagliata in percentuale maggiore in 5B. Si tratta comunque di percentuali basse, per cui possiamo dire che in generale gli studenti *hanno chiaro che il* *limite può essere superato*. Avevo fornito ai ragazzi vari esempi di grafici che intersecano un loro asintoto orizzontale[2]. La classe 5A ha mostrato di averne risentito positivamente, seguendo con attenzione le lezioni e svolgendo gli esercizi lasciati per casa; il miglioramento in 5B è stato invece meno marcato: c'è da sottolineare che molti di quelli che hanno sbagliato l'esercizio *8* non avevano svolto i compiti assegnati per casa.

3) Le percentuali relative all'esercizio 3 si riferiscono soltanto all'indicazione sulla veridicità delle affermazioni. Tenendo conto anche dei grafici disegnati, la situazione in 5B non cambia sostanzialmente, mentre in 5A circa la metà dei ragazzi ha mostrato di avere difficoltà con l'intero quesito. Questo, come già detto in precedenza, può essere legato alla difficoltà intrinseca di questo esercizio e al fatto che i ragazzi di 5A fanno fatica a riordinare in un quadro organico le conoscenze acquisite e ad operare con registri rappresentativi diversi. Ad esempio, più della metà ha avuto problemi nel fornire un controesempio per l'affermazione *3.d* (cioè per il fatto che la funzione debba essere necessariamente discontinua nel punto in cui si calcola il limite), ma quasi tutti hanno determinato correttamente il limite del tratto costante della funzione dell'esercizio 5 (mostrando quindi di sapere che il limite in un punto di continuità per la funzione è determinabile). Anche dalle risoluzioni degli esercizi per casa non sono emerse difficoltà a riguardo. Considerazioni analoghe possono essere fatte rispetto ai misconcetti che la funzione debba essere necessariamente continua nel punto x_0 e che quest'ultimo debba necessariamente appartenere al dominio della funzione. Ritengo quindi che in generale i ragazzi di entrambe le classi non possiedano tali misconcetti, ma che quelli di 5A abbiano bisogno di essere aiutati a lavorare con registri rappresentativi diversi e a riordinare le proprie conoscenze.

Leggermente diverso è il caso del punto *3.a*, relativo al misconcetto che il limite in x_0 coincida con $f(x_0)$: per le stesse ragioni dette sopra, non tutti quelli che hanno sbagliato a disegnare il grafico possiedono necessariamente questo misconcetto, ma, come diremo anche rispetto all'esercizio *5.d*, esso è sicuramente più radicato e diffuso nei ragazzi.

5.a-5.b) In generale, *il limite di una funzione costante è stato determinato correttamente*. L'errore più frequente è stato, in entrambe le classi, rispetto al limite a $-\infty$, forse per difficoltà ad immaginare l'andamento della funzione. In 5A è stato

---

[2] Si vedano gli esercizi 3 e 4 al §3.2.2.2 e l'esercizio 9 al §3.2.2.3.

per lo più considerato come non esistente, in 5B è stato da tutti posto pari a $+\infty$.

7.a.2-7.a.3) Riguardo agli asintoti verticali destri o sinistri, c'è stato un netto miglioramento in entrambe le classi rispetto allo svolgimento degli esercizi lasciati per casa. Alcuni hanno comunque mostrato di rimanere attaccati alle proprie idee: l'abitudine a vedere asintoti verticali "completi" (cioè per i quali sia limite destro che limite sinistro sono infiniti) li porta a considerare entrambi i limiti pari a ∞ o a considerarne uno non esistente.

Come si può ricavare dalla tabella, i problemi principali per entrambe le classi risiedono nei misconcetti evidenziati in grigio.

2.b) Più della metà dei ragazzi sembra considerare il limite come un processo e non come un numero. Come già evidenziato in precedenza, però, c'è da sottolineare che nessun alunno ha mai mostrato di possedere un tale misconcetto, né nella risoluzione degli esercizi per casa né a lezione. Non tutti hanno svolto gli esercizi assegnati e io non ho avuto modo in classe di stare di fronte ad ogni singolo studente, perciò è plausibile che alcuni possiedano un tale misconcetto, ma in percentuale probabilmente minore rispetto a quella rilevata dal compito. E' possibile, infatti, che alcuni non abbiano compreso la domanda.

4.d-5.d) Ritengo che questi due misconcetti siano più radicati nei ragazzi: fin dalle prime lezioni essi hanno mostrato difficoltà sia in relazione al fatto che x_0 deve essere punto di accumulazione per il dominio della funzione, sia per quanto riguarda $f(x_0)$ e il limite in x_0. Quando gli studenti vedono un "pallino pieno" sono indotti a credere che quello sia il limite richiesto. Rispetto alle lezioni e ai compiti svolti per casa c'è stato leggero un miglioramento, ma alcuni ragazzi sono rimasti fermi nelle proprie convinzioni.

3.3 CONSIDERAZIONI FINALI SULLA SPERIMENTAZIONE

Considerando anche i risultati della prova finale, riporto alcune considerazioni sull'efficacia e sui limiti dell'intera sperimentazione didattica.

In generale, ritengo che questo ciclo di lezioni sia stato impostato abbastanza bene: i risultati del compito sono buoni e i misconcetti tipici registrati nella letteratura sui limiti non sono così diffusi. In particolare, molti studenti hanno mostrato di comprendere e correggere alcuni (se non tutti) dei loro errori, soprattutto quelli che hanno svolto gli esercizi lasciati per casa e che hanno partecipato attivamente alle lezioni, chiedendo chiarimenti e facendo osservazioni. Miglioramenti sono stati registrati rispetto a tutti i misconcetti elencati all'inizio di questo capitolo, in maniera meno marcata rispetto al fatto che x_0 deve essere punto di accumulazione per il dominio della funzione e che in generale $\lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$. Non so se insistere maggiormente su questi due aspetti avrebbe aiutato di più gli studenti, perché in quasi tutte le lezioni ho richiamato questi due punti. Probabilmente, sarebbe stato più produttivo lasciare che i ragazzi si scontrassero in maniera più autonoma con questi misconcetti: ad esempio l'esercizio 2, riportato al §3.2.2.2, poteva essere lasciato a tutti da svolgere singolarmente in classe, in maniera tale che le idee di ognuno fossero aiutate a venire fuori e ciascuno ne diventasse più consapevole. La successiva correzione sarebbe stata forse più incisiva, riguardando un esercizio su cui i ragazzi si erano messi personalmente in gioco.

L'esercizio 3 del compito ha mostrato una difficoltà comune a circa la metà dei ragazzi di 5A: dato il grafico di una funzione, essi sono in grado di determinare il limite in x_0 (sia esso punto di continuità o discontinuità, punto in cui la funzione non è definita o in cui assume un valore diverso dal limite), capacità legata anche al fatto che a lezione ho presentato vari esercizi di questo tipo; ma non sono stati in grado di fare il contrario, ossia conoscendo il limite in x_0 non hanno saputo disegnare un grafico in cui x_0 avesse una certa caratteristica (fosse punto di continuità o discontinuità, punto in cui la funzione non è definita o in cui assume un valore diverso dal limite). Questo problema non si è verificato invece in 5B, non credo per merito mio, ma piuttosto per una loro capacità acquisita nel tempo di muoversi in situazioni diverse. Per accompagnare gli studenti di 5A nell'acquisizione di questa capacità, avrei potuto farli lavorare su esempi diversi.

OSSERVAZIONI GENERALI SULL'UTILIZZO DI GEOGEBRA

Come confermato anche dalle risoluzioni delle attività lasciate per casa, sarebbe stato necessario impiegare più tempo nell'utilizzo del software Geogebra. Purtroppo, le ore a disposizione per l'intera sperimentazione didattica non potevano essere aumentate.

L'attività svolta in classe ha permesso di aiutare gli studenti a costruire la definizione rigorosa di limite in maniera il più possibile autonoma (cosa che potrebbe aver contribuito a interiorizzarla meglio), aiutandoli a "toccare con mano" l'importanza dei quantificatori e dell'ordine di scelta degli intorni; sarebbe stato però necessario concentrarsi maggiormente sull'utilizzo delle strisce per la verifica della correttezza di un limite dato. Alcuni ragazzi, infatti, hanno mostrato di non aver capito che cosa rappresentasse l'immagine che si trovavano davanti, quale fosse cioè il collegamento tra la definizione di limite e la sua rappresentazione su Geogebra. Sarebbe stato sicuramente più produttivo riservare più tempo al punto 4 dell'attività svolta in classe, riportata al §3.2.2.4, e ad esercizi simili. Inoltre, avrei preferito svolgere in classe le attività al contrario lasciate per casa, soprattutto la numero 2, molto complessa e significativa per comprendere appieno la definizione di limite.

Alcuni ragazzi, nello svolgere gli esercizi per casa, hanno mostrato di rimanere ancorati alle proprie idee: ad esempio, molti hanno invertito l'ordine di ε e δ, senza considerare le indicazioni che avevo dato loro.

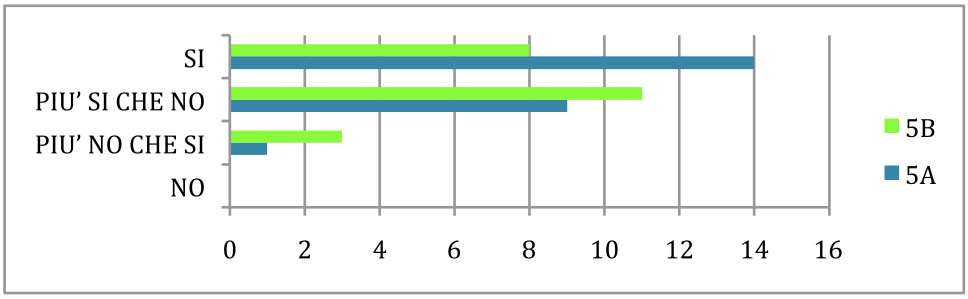
Sicuramente, l'apprendimento non può avvenire soltanto in classe: è indispensabile che gli studenti riprendano a casa le lezioni e mettano in gioco le conoscenze acquisite nella risoluzione di esercizi. Riconosco però che le "basi" date ai ragazzi nell'ora di lezione con Geogebra sono state un po' fragili per il poco tempo a disposizione. Ho cercato di rimediare correggendo e commentando singolarmente le risoluzioni di ogni studente e, in aggiunta a questo, ho consegnato ai ragazzi le soluzioni degli esercizi, riportate nell'Appendice di questa tesi. Grazie a questo, molti alunni sono riusciti a correggere i propri errori, come mostrato nel compito finale. Si è trattato però dei ragazzi più incuriositi dall'argomento trattato e generalmente più volenterosi; quelli che fanno più fatica nello studio individuale non hanno mostrato particolari miglioramenti.
Bisogna inoltre sottolineare che più della metà dei ragazzi che non hanno svolto gli esercizi per casa si è trovata in difficoltà nel compito finale, in particolare nel primo, terzo e quinto esercizio.

QUESTIONARIO DI VALUTAZIONE

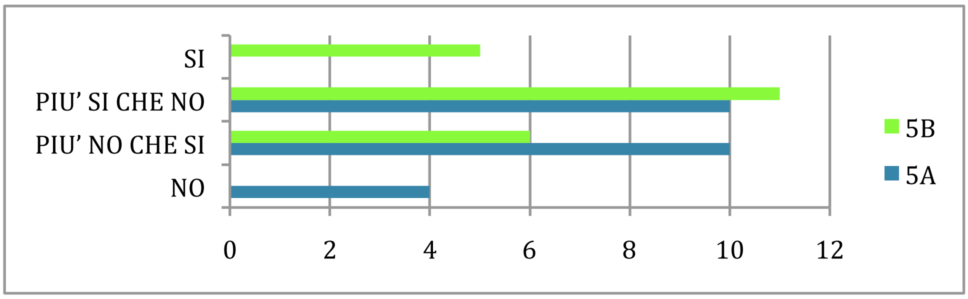
Al termine del mio tirocinio, ho consegnato agli studenti un questionario anonimo per valutare l'esperienza che avevano fatto:

1. Gli argomenti delle lezioni svolte sono stati interessanti?
2. Gli argomenti delle lezioni svolte sono stati difficili da apprendere?
3. La tua preparazione scolastica è stata sufficiente per affrontare questi argomenti?
4. E' stato impegnativo seguire le lezioni?
5. Il tempo impiegato per ogni lezione è risultato sufficiente?
6. Pensi che sia stato interessante vedere alcune applicazioni storiche del concetto di limite?
7. Gli strumenti utilizzati (presentazioni in Power Point, Geogebra, esercizi) sono stati utili per capire meglio gli argomenti trattati?
8. Pensi che l'utilizzo del software Geogebra aiuti a capire meglio tutti gli aspetti legati alla definizione rigorosa di limite?
9. Ritieni che sarebbe stato più utile dare maggiore spazio all'utilizzo di Geogebra?
10. La tirocinante ha esposto gli argomenti in maniera chiara?
11. La tirocinante è stata disponibile in caso di richiesta di chiarimenti?
12. La tirocinante ha motivato il tuo interesse verso gli argomenti trattati?

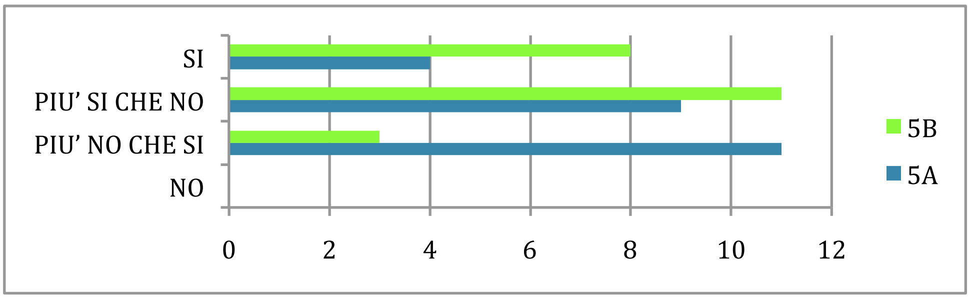
Domanda 1: Gli argomenti delle lezioni svolte sono stati interessanti?



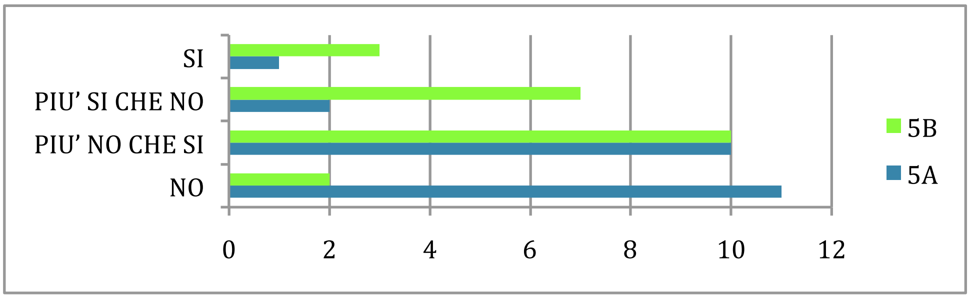
Domanda 2: Gli argomenti delle lezioni svolte sono stati difficili da apprendere?



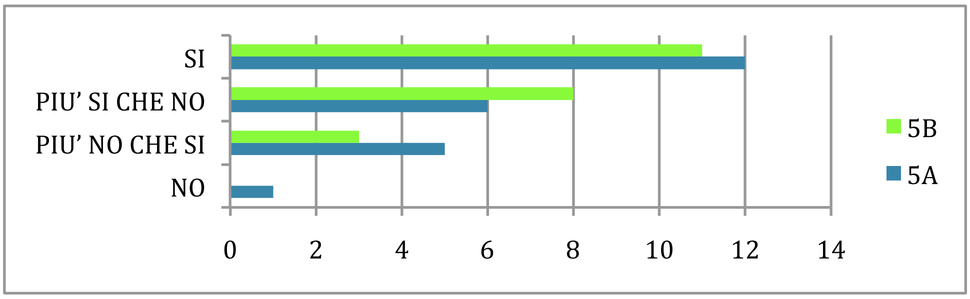
Domanda 3: La tua preparazione scolastica è stata sufficiente per affrontare questi argomenti?



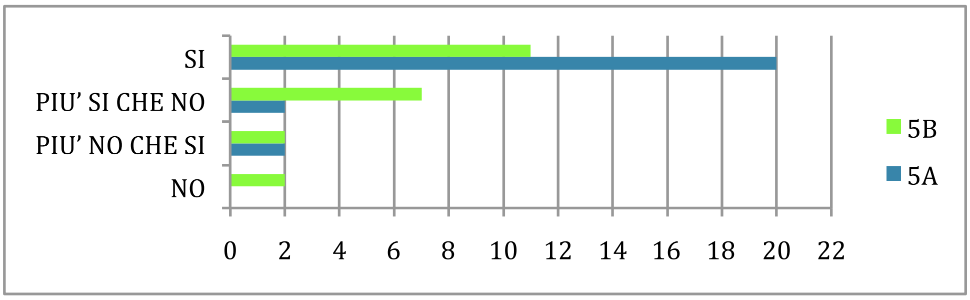
Domanda 4: E' stato impegnativo seguire le lezioni?



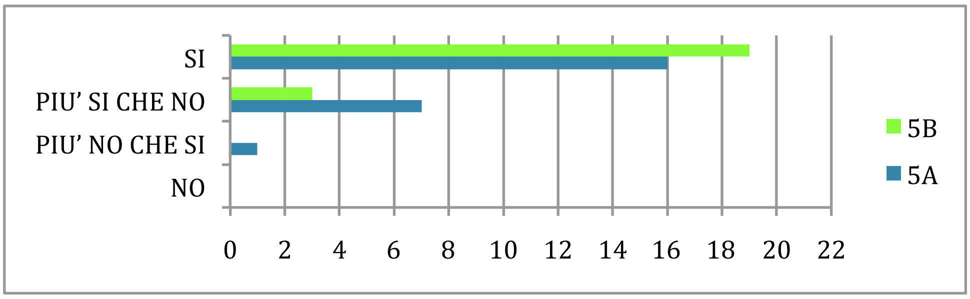
Domanda 5: Il tempo impiegato per ogni lezione è risultato sufficiente?



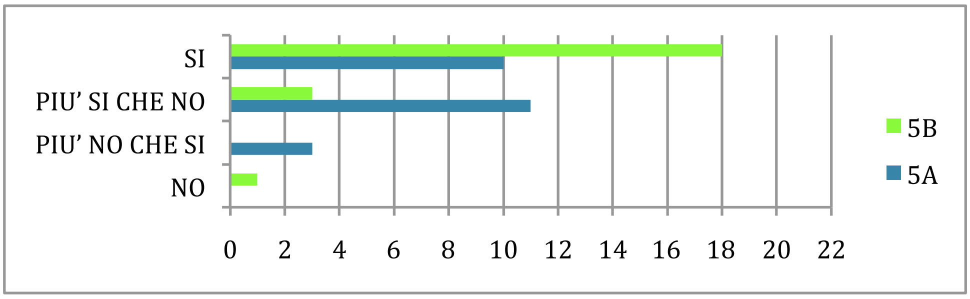
Domanda 6: Pensi che sia stato interessante vedere alcune applicazioni storiche del concetto di limite?



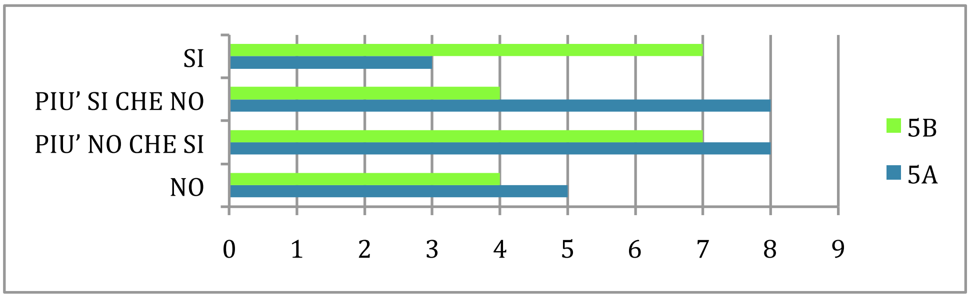
Domanda 7: Gli strumenti utilizzati (presentazioni in Power Point, Geogebra, esercizi) sono stati utili per capire meglio gli argomenti trattati?



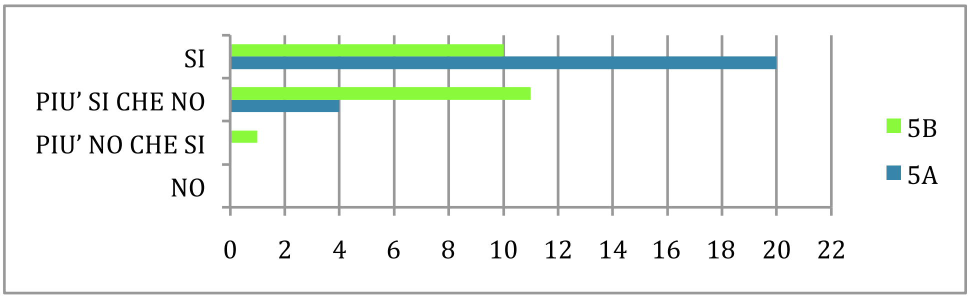
Domanda 8: Pensi che l'utilizzo del software Geogebra aiuti a capire meglio tutti gli aspetti legati alla definizione rigorosa di limite?



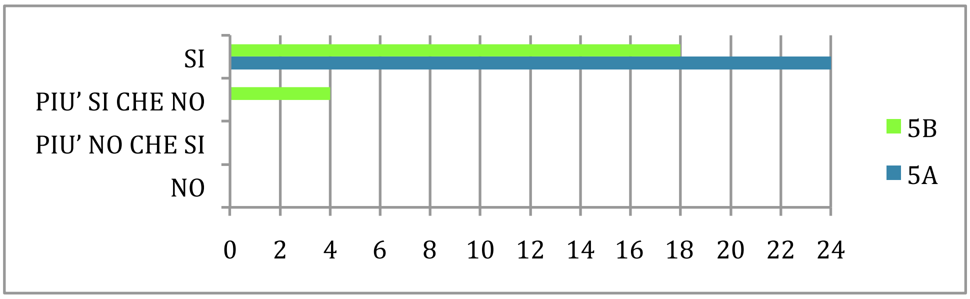
Domanda 9: Ritieni che sarebbe stato più utile dare maggiore spazio all'utilizzo di Geogebra?



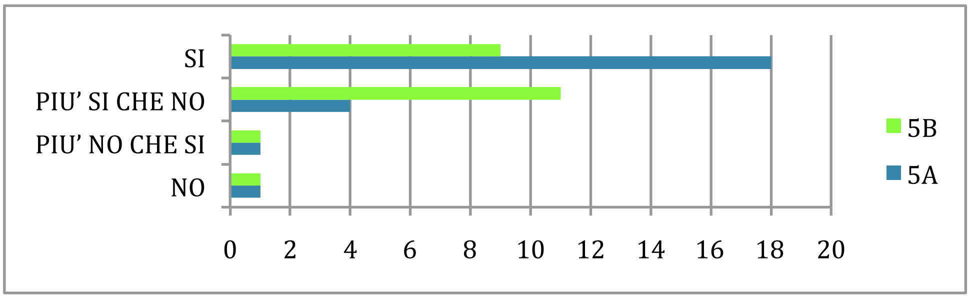
Domanda 10: La tirocinante ha esposto gli argomenti in maniera chiara?



Domanda 11: La tirocinante è stata disponibile in caso di richiesta di chiarimenti?



Domanda 12: La tirocinante ha motivato il tuo interesse verso gli argomenti trattati?



CAPITOLO 4
ALCUNE “BUONE PRASSI” PER LA DIDATTICA DEI LIMITI

Alla luce della esperienza positiva fatta durante il tirocinio, riporto alcune “buone prassi” per l’insegnamento dei limiti, ripercorrendo la trattazione da me svolta in classe e tenendo anche conto delle mancanze che ho riconosciuto nella mia didattica.
In Appendice si trova il materiale utilizzato durante le lezioni.

Introduzione storica e motivazioni

Consiglio di iniziare la trattazione del concetto di limite indicando schematicamente le tappe fondamentali della storia del suo sviluppo, in maniera da mostrare agli studenti che arrivare alla sua completa formalizzazione ha richiesto un arco di tempo molto vasto. Questo permette di sottolineare la complessità del concetto di limite (e quindi l’impegno richiesto da parte dei ragazzi per poterlo comprendere pienamente), ma anche di mostrare quanto la matematica possa essere dinamica e vitale. Suggerisco di presentare alcuni esempi (come il paradosso della dicotomia di Zenone, l’approssimazione di π di Archimede, la determinazione della retta tangente ad una curva in un punto) che storicamente hanno motivato la nascita del concetto di limite, in modo che i ragazzi possano intuire da subito la sua utilità pratica. In particolare, è possibile sfruttare questi esempi per sondare le intuizioni degli studenti riguardo ai processi infiniti e ai limiti. Nell’analisi di questi esempi è possibile cercare di evitare la nascita del misconcetto che il limite coincida con il processo di avvicinamento di $f(x)$ a L quando x si muove verso x_0: ad esempio, in classe ho sempre sottolineato che abbiamo a che fare con un certo processo e che il limite rappresenta il *risultato* di questo processo, non il processo in sé.

Primo approccio intuitivo[1]

E’ bene evitare che gli studenti si confrontino subito con la definizione rigorosa di limite (troppo complessa e astratta) e conviene piuttosto dare ampio spazio ad un approccio iniziale intuitivo, in modo che gli studenti possano familiarizzare con questa nozione.
Dato che uno dei misconcetti più diffusi consiste nel ritenere che valga $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ indipendentemente dalla continuità della funzione, può essere molto produttivo insistere

[1] Si veda in Appendice “Lezioni 1, 2 e 3: Approccio intuitivo al concetto di limite”.

fin da subito sulla differenza tra $f(x_0)$ e limite della funzione in x_0. Ad esempio, in classe mi sono sempre riferita al limite come a quel concetto che permette di avere informazioni sul comportamento della funzione nell'intorno di un punto x_0: questo mette in evidenza la differenza con $f(x_0)$ che permette invece di conoscere soltanto il valore della funzione nel punto.

Ritengo che il classico approccio dinamico ai limiti, che consiste nel mostrare a cosa si avvicinano i valori della funzione quando le x si avvicinano a x_0, sia il più adatto per aiutare gli studenti a formarsi una prima immagine del concetto. Dallo studio della letteratura esistente sui limiti è emerso che questo approccio può portare alla nascita di vari misconcetti, come la non esistenza del limite di funzioni costanti e il fatto che il limite non possa essere raggiunto o superato; nelle mie lezioni ho quindi presentato diversi esempi che ponessero gli studenti di fronte a questi (e altri) misconcetti, sfruttando ampiamente un registro visivo da me considerato il più intuitivo.

Ho anche lasciato agli studenti alcuni esercizi da svolgere per casa, affinché si scontrassero ancora con alcuni misconcetti e acquisissero la capacità di determinare i limiti dal grafico di una funzione e di disegnare una funzione arbitraria assegnati alcuni suoi limiti.

Ho concluso questa prima fase dando una definizione intuitiva, quella sfruttata nella determinazione grafica dei limiti, sottolineando che si tratta di una definizione approssimativa che richiede di essere perfezionata e resa rigorosa traducendo in termini matematici il concetto di vicinanza:

"Data una funzione f, x_0 e L finiti o infiniti, diciamo che $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ se la funzione f assume valori vicini quanto si vuole a L tutte le volte che i valori di x sono sufficientemente vicini a x_0 (con eventuale esclusione del punto $x = x_0$)".

Credo che sia importante dare molta autonomia agli studenti in questa prima fase intuitiva, ad esempio assegnando alcuni esercizi da svolgere singolarmente in classe per poi riprenderli insieme: questo consentirebbe di far emergere le intuizioni di ognuno e di aiutare maggiormente ogni studente a diventare consapevole dei propri misconcetti.

Definizione rigorosa

Ho cercato di far sì che gli studenti costruissero la definizione rigorosa di limite nella maniera più autonoma possibile, in modo da aiutarli a comprenderla pienamente e farla propria. Ho deciso di avvalermi dell'utilizzo del software di geometria dinamica Geogebra, per la possibilità di visualizzare gli intorni di L e x_0 come strisce (rispettivamente orizzontale e verticale) e modificarli dinamicamente tramite appositi cursori. Ho quindi elaborato un'attività[2] che portasse gli studenti a passare in modo naturale dalla definizione intuitiva a quella rigorosa in termini di strisce:

"Diciamo che $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ se per ogni striscia orizzontale, centrata in L, esiste una striscia verticale, centrata in x_0, dipendente dalla striscia orizzontale, tale che per ogni x appartenente alla striscia verticale, con $x \neq x_0$, $f(x)$ appartiene alla striscia orizzontale".

Innanzitutto, i ragazzi si sono occupati della parte relativa alle ordinate: lavorando sulla striscia orizzontale, sono stati aiutati a comprendere che essa rappresenta un intorno centrato in L. In particolare, sono stati guidati a tradurre in termini rigorosi l'espressione "f assume valori vicini *quanto si vuole* a L" facendo notare che *qualunque sia* l'ampiezza della striscia orizzontale considerata, $f(x)$ ricade sempre in essa.
Successivamente, gli studenti sono stati guidati alla traduzione in termini rigorosi dell'espressione "tutte le volte che i valori di x sono sufficientemente vicini a x_0 (con eventuale esclusione del punto $x = x_0$)": assegnati alcuni valori dell'ampiezza della striscia orizzontale, è stato chiesto agli studenti quali valori può assumere x affinché $f(x)$ appartenga ad essa, aiutandoli a comprendere la relazione tra le strisce. I ragazzi sono stati anche spinti a porre attenzione sul fatto che in x_0 la funzione può non essere definita e che comunque la definizione di f in x_0 non influisce sul valore del limite.
Infine, i ragazzi si sono impratichiti con questo gioco di strisce: dati alcuni valori dell'ampiezza della striscia orizzontale, è stato loro chiesto di determinare un'ampiezza della striscia verticale che soddisfacesse la definizione di limite; oppure, assegnati alcuni valori dell'ampiezza delle due strisce hanno stabilito se la definizione fosse soddisfatta.

Consiglio di assegnare ulteriori esercizi da svolgere con Geogebra, per insistere su alcuni dei misconcetti più diffusi e sul significato dei quantificatori logici presenti nella definizione rigorosa[3]. Suggerisco di far lavorare gli studenti su queste attività durante le ore di lezione, dato che trattano di aspetti significativi del concetto di limite che spesso non vengono compresi. Ad esempio, è possibile realizzare un'attività che evidenzi l'importanza dell'ordine nella scelta degli intorni, mostrando che, fissando prima

[2] Si veda in Appendice "Lezione 4: Attività per la costruzione della definizione rigorosa di limite tramite il software Geogebra".
[3] Si veda in Appendice "Esercizi assegnati per casa sulla definizione rigorosa di limite da svolgere con Geogebra e loro risoluzione", dove sono riportate le attività da me assegnate.

l'ampiezza della striscia verticale e scegliendo in dipendenza da essa un valore per l'ampiezza della striscia orizzontale, si ottengono risultati assurdi.

Definizione ε-δ

Ritengo importante mostrare anche la definizione ε - δ, perché si tratta della formulazione più comune che i ragazzi incontreranno probabilmente nel corso della loro carriera universitaria, e perché permette di verificare algebricamente un limite dato. In classe ho evidenziato come si possono esprimere intorni simmetrici di L e x_0 in termini di disequazioni. Solo a questo punto ho introdotto la definizione di limite nel caso in cui L e/o x_0 non siano finiti, cercando di sottolineare che essa è la stessa del caso finito, richiedendo solo di aggiustare la nozione di intorno di x_0 e di L.

Abbiamo svolto insieme alcune verifiche di limiti[4] in termini algebrici: si è trattato di esercizi tecnicamente semplici, in maniera da aiutare gli studenti a comprendere il procedimento di verifica e da concentrare l'attenzione sul fatto che la definizione deve essere soddisfatta per ogni $\varepsilon > 0$ (mostrando anche un esempio di limite non corretto) e che ε può essere scelto "piccolo a piacere".

Verifica finale[5]

Gli esercizi della prova finale sono stati scelti in modo da verificare la comprensione acquisita dagli studenti della definizione rigorosa di limite e l'eventuale presenza di misconcetti.

[4] Si veda in Appendice "Lezioni 5 e 6: Esercizi sulla verifica di limite tramite definizione".
[5] Si veda in Appendice "Verifica finale".

CAPITOLO 5
OSSERVAZIONI SULLA TRATTAZIONE DEI LIMITI IN ALCUNI LIBRI DI TESTO

Abbiamo analizzato la presentazione del concetto di limite di alcuni testi scolastici, cercando di osservare in particolare quegli aspetti che contribuiscono a combattere o, al contrario, ad alimentare i misconcetti tipici, valutando anche gli esempi presentati e gli esercizi proposti.

I libri di testo che siamo riusciti a reperire sono i seguenti:

i. L. Sasso, *Nuova matematica a colori edizione blu 5*, Petrini, 2012.
ii. L. Scaglianti, L. Severi, *Astratto e concreto*, La Scuola, 2012.
iii. L. Tonolini, F. Tonolini, G. Tonolini, A. Manenti Calvi, *I fondamenti concettuali della matematica*, Milano, Minerva Scuola, 2012.
iv. L. Lamberti, L. Mereu, A. Nanni, *Nuovo Matematica Tre*, Milano, Etas Libri, 1993.
v. G.T. Bagni, *Corso di Matematica 3*, Bologna, Zanichelli, 1996.

Riportiamo innanzitutto qualche considerazione comune a tutti i tesi considerati:

- Aspetto positivo di tutti i testi è il fatto che nessuno di essi inizia immediatamente dando la definizione rigorosa di limite, cosa che, per la sua complessità, potrebbe mettere lo studente in difficoltà: tutti i testi utilizzano, in maniera più o meno estesa, un approccio iniziale intuitivo.
- Tutti i testi si impegnano a far capire al lettore che il punto x_0 può appartenere o meno al dominio della funzione, in quanto siamo interessati solo al comportamento della funzione nelle sue vicinanze; l'importante è che x_0 sia di accumulazione per il dominio.

  I testi *i*, *iii* e *v*, come vedremo, insistono maggiormente su questo aspetto proponendo esercizi specifici.
- Tutti i testi sottolineano a parole l'importanza del quantificatore universale presente nella definizione rigorosa, ma solo i testi *ii*, *iii* e *v* ne sottolineano l'applicazione pratica nelle verifiche di limiti. A tal fine invitano il lettore a scontrarsi con limiti errati, in cui il procedimento di verifica porta ad un intorno di x_0 solo per certi valori di ε.

- Riguardo all'errore che consiste nell'invertire l'ordine di scelta degli intorni, solo i testi *i* e *iii* ne fanno menzione esplicita. In ogni caso, nessun testo presenta attività mirate a mostrare le conseguenze della scelta di fissare prima l'intorno di x_0 e soltanto dopo l'intorno del limite: ritengo che riportare un esempio che evidenzi l'errore che si commette potrebbe aiutare gli studenti a comprendere meglio, e quindi ricordare, questo aspetto fondamentale della definizione.

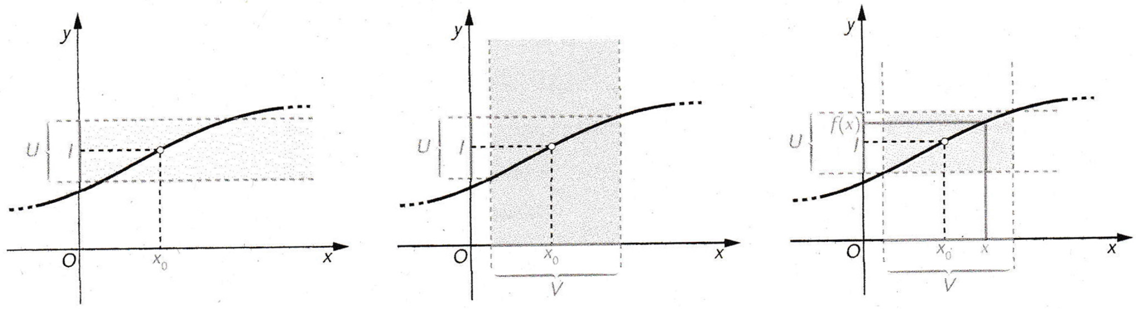
- ***TESTO i***

La trattazione dei limiti secondo me più convincente è quella del testo *i*, utilizzato nelle classi in cui ho svolto la sperimentazione didattica. L'autore, infatti, accompagna il lettore con gradualità e chiarezza nel passaggio da un approccio intuitivo al concetto di limite alla sua definizione rigorosa, dando ad ogni punto della trattazione lo spazio che necessita.
Innanzitutto si cerca di motivare l'importanza del concetto di limite: vengono presentati una breve storia dello sviluppo dei limiti e alcuni esempi storici in cui compare questo concetto, come il paradosso della dicotomia di Zenone e la determinazione della retta tangente ad una curva in un punto.
Segue poi un'introduzione intuitiva al concetto di limite, in cui vengono analizzati alcuni esempi utilizzando un'impostazione dinamica. Data una funzione si studia il suo comportamento nelle vicinanze di x_0, tramite un'analisi numerica (assegnati diversi valori alla x sempre più prossimi a x_0 si osserva a quale valore si avvicinano le $f(x)$) e un'interpretazione grafica. Vengono introdotti a livello intuitivo anche i concetti di limite destro e limite sinistro. In questa fase, l'autore rimane totalmente nell'ambito dell'intuizione senza parlare di intorni o introdurre disequazioni che esprimano il concetto di vicinanza.
Questo primo approccio si conclude con una definizione intuitiva di limite, sottolineando che essa utilizza un linguaggio fortemente impreciso. L'autore cerca inoltre di spiegare al lettore perché si rende necessaria una rigorosa definizione: essa consente di "disporre di un criterio che permetta di decidere *senza ambiguità* se una funzione tenda o meno a un certo limite" e di "fondare su di una base sicura le dimostrazioni dei teoremi sui limiti".

Prima di enunciare la definizione ε - δ, l'autore traduce il concetto di vicinanza presente nella definizione intuitiva con quello matematico di intorno, enunciando la seguente definizione generale:

"Diciamo che il limite della funzione *f(x)* per *x* che tende a x_0 è *l* se per ogni intorno U di *l* esiste un intorno V di x_0, tale che per ogni $x \in$ V, con $x \neq x_0$, risulta $f(x) \in$ U".

Si tratta di uno dei due testi che, oltre a sottolineare la dipendenza di V da U, esplicita, sia a parole che graficamente, il fatto che prima deve essere fissato U, mettendo in guardia il lettore da possibili errori. L'autore infatti scrive: "Viene ribaltato l'ordine con cui solitamente siamo abituati a ragionare quando lavoriamo con le funzioni: in genere siamo abituati a partire dal dominio della funzione per arrivare poi alla sua immagine". Riporta poi le seguenti figure, in cui si rende evidente che prima viene fissato U:



a. Per ogni intorno U di l sull'asse y... **b.** esiste un intorno V di x_0 sull'asse x... **c.** ...tale che per ogni $x \in V$ con $x \neq x_0$ risulta: $f(x) \in U$.

Il passaggio alle definizioni operative viene scandito mostrando la tabella seguente, in cui si esplicita la rappresentazione degli intorni in termini di distanza:

Un intorno U di l è della forma...		**$f(x)$ appartiene all'intorno U se e solo se soddisfa la disequazione:**
$(l-\varepsilon, l+\varepsilon)$	con $\varepsilon > 0$, se $l \in \mathbf{R}$	$\lvert f(x) - l \rvert < \varepsilon$
$(M, +\infty)$	con $M > 0$, se $l = +\infty$	$f(x) > M$
$(-\infty, -M)$	con $M > 0$, se $l = -\infty$	$f(x) < -M$

Un intorno V di x_0 è della forma...		**x appartiene all'intorno V se e solo se soddisfa la disequazione:**
$(x_0-\delta, x_0+\delta)$	con $\delta > 0$, se $x_0 \in \mathbf{R}$	$\lvert x - x_0 \rvert < \delta$
$(N, +\infty)$	con $N > 0$, se $x_0 = +\infty$	$x > N$
$(-\infty, -N)$	con $N > 0$, se $x_0 = -\infty$	$x < -N$

Un altro aspetto importante del testo è il fatto che viene messo graficamente in evidenza che un asintoto orizzontale può essere attraversato, disegnando anche la funzione $\frac{\sin(x)}{x}$.

Questo concetto non viene però espresso anche parole, cosa che secondo me aiuterebbe maggiormente il lettore a farlo proprio.
Anche gli esercizi proposti sono interessanti, in quanto attenti al significato del concetto di limite. Si trovano varie tipologie di esercizi, quali disegnare una funzione arbitraria assegnati alcuni suoi limiti, determinare certi limiti dal grafico di una funzione o tramite un'analisi numerica. Ci sono poi domande relative all'importanza che x_0 sia punto di accumulazione per il dominio della funzione: ad esempio, viene chiesto "spiega perché non ha senso calcolare $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{1 - x^2}$".
Si nota attenzione alla differenza tra limite in x_0 e $f(x_0)$ (a cui però non si fa riferimento nella trattazione teorica) e alla condizione di esistenza del limite in un punto; ci sono anche casi particolari come asintoti verticali destri o sinistri, mentre non sono presenti limiti di funzioni costanti.
Tra le verifiche di limiti tramite la definizione non sono presenti limiti errati, cosa che permetterebbe di mostrare l'importanza del quantificatore universale che compare nella definizione.

- ***Testi ii, iii, iv***

L'iniziale approccio intuitivo di questi testi è molto simile: mettiamo innanzitutto in evidenza alcuni aspetti comuni ai tre testi, per poi sottolinearne le differenze.

Gli autori riportano alcuni esempi applicativi del concetto di limite, in cui si fa prevalentemente riferimento ad un'analisi numerica. Viene quindi subito introdotta la disequazione rappresentativa della vicinanza di $f(x)$ al limite e fornito un esempio numerico.
Riportiamo per chiarezza un esempio tratto da *iii*:

c) Consideriamo la funzione $y = f(x) = \frac{4}{x^2}$, definita per ogni $x \neq 0$.

Cerchiamo di esaminare cosa succede della variabile y quando la x assume valori sempre più prossimi allo zero, sia positivi che negativi. Poiché la funzione è pari, la y assume valori uguali per valori opposti della x; nella tabella sono riportati alcuni valori della variabile x ed i corrispondenti della y.

x	$y = f(x) = \frac{4}{x^2}$
± 1	4
$\pm 0{,}1$	$4 \cdot 10^2$
$\pm 0{,}01$	$4 \cdot 10^4$
$\pm 0{,}001$	$4 \cdot 10^6$
$\pm 0{,}0001$	$4 \cdot 10^8$
...	...

Risulta evidente che quanto più il valore della x si avvicina allo zero, tanto più quello della y cresce, senza nessuna limitazione, in modo tale cioè da superare un numero grande quanto si vuole.
Possiamo anche dire che: prefissato arbitrariamente un numero positivo M (comunque grande), è possibile determinare un numero positivo $\bar{x}$ (che dipende dal valore di M prefissato) tale che per ogni x, diverso da 0, che soddisfa la condizione $-\bar{x} < x < \bar{x}$ valga la relazione:

$$f(x) > M.$$

Ad esempio, prefissato $M = 10^8$, affinché:

$$f(x) > 10^8 \quad \text{e quindi:} \quad \frac{4}{x^2} > 10^8$$

occorre che risulti:

$$x^2 < \frac{4}{10^8} = 4 \cdot 10^{-8} \quad \text{e quindi:} \quad -2 \cdot 10^{-4} < x < 2 \cdot 10^4.$$

Risulta allora che $\bar{x} = 2 \cdot 10^{-4}$ e che per ogni x diverso da zero e che soddisfa la condizione $-\bar{x} < x < \bar{x}$ (o, equivalentemente, per ogni $|x| < \bar{x}$) per la funzione vale $f(x) > 10^8$.
Possiamo esprimere tutto ciò dicendo che il limite a cui tende la funzione $f(x) = \frac{4}{x^2}$ per x che tende a 0 è più infinito, e scriviamo:

$$\lim_{x \to 0} \frac{4}{x^2} = +\infty.$$

Il fatto di unire l'approccio intuitivo al linguaggio formale delle disequazioni non mi sembra adeguato: ritengo che sia necessario lasciare spazio all'intuizione per permettere agli studenti di familiarizzare con il concetto di limite e soltanto in un secondo momento arrivare a formalizzare la nozione di vicinanza.
C'è da dire però che il testo *iv*, a differenza degli altri due, cerca di guidare maggiormente il lettore a comprendere il concetto di vicinanza di *f(x)* al limite. Partendo da un esempio di funzione non definita in $x = 2$ e con limite 8 in quel punto e osservando che "mano a mano che x si avvicina a 2, i valori di *f(x)* si avvicinano sempre più a 8", sottolinea che *sempre più vicino a* esprime qualcosa di dinamico: "dire che i valori della funzione si avvicinano sempre di più a 8 vuol dire che ne distano sempre meno, cioè che comunque si scelga un valore $\varepsilon > 0$ la differenza $|f(x)-8|$ è più piccola di ε, purché x sia abbastanza vicino a 2. Quindi l'avverbio *comunque*, relativo ad ε, traduce ora il concetto *sempre più vicino a*".
Per chiarire cosa si intende con l'espressione "purché x sia abbastanza vicino a 2", gli autori risolvono la disequazione $|f(x)-8| < \varepsilon$ e trovano l'intorno di 2 che la soddisfa: "preso

comunque $\varepsilon > 0$ è possibile determinare in corrispondenza di esso un intorno di 2 tale che, per ogni $x \neq 2$ e appartenente a tale intorno, si abbia $|f(x)-8| < \varepsilon$".

Si può osservare anche che gli autori decidono di lasciare ε (senza attribuirgli un valore preciso), scrivendo così l'intorno di x_0 in termini di ε: questo, a mio parere, può aiutare maggiormente a visualizzare la relazione tra gli intorni già in questa fase.

Un'altra caratteristica comune ai tre testi è il fatto di non dare importanza alla condizione di esistenza del limite in un punto. Ad esempio, non viene fatto cenno al fatto che se limite destro e limite sinistro sono diversi allora il limite non esiste, o comunque questo aspetto viene riportato usando un carattere di dimensione più piccola, come a dargli poco peso.

Testo ii

Tra tutti i libri considerati, la presentazione dei limiti del testo *ii* è quella per me meno convincente: in generale gli autori sono molto attenti alla scelta degli esercizi, ma non ritengo adeguata la trattazione teorica.

Le notazioni utilizzate potrebbero creare un po' di confusione: le definizioni di limite nel caso in cui x_0 sia finito vengono date in una forma "mista", ossia sfruttando la disequazione con ε e parlando di intorno completo di x_0. Ad esempio:

"Si dice che per x tendente a c la funzione $f(x)$ ha per limite il numero l, quando fissato un arbitrario numero positivo ε, sia sempre possibile determinare, in corrispondenza ad esso, un intorno completo H del punto c, tale che, per tutti i valori della x che appartengono ad H, escluso eventualmente c, i corrispondenti valori della funzione soddisfano la disequazione $|f(x)-l| < \varepsilon$".

Le definizioni nel caso in cui x_0 sia infinito, invece, sfruttano solo disequazioni e non si fa riferimento ad intorni di ∞. Ad esempio:

"Si dice che la funzione $f(x)$, per x tendente all'infinito, ha per limite il numero l e si scrive $\lim_{x \to \infty} f(x) = l$ quando in corrispondenza ad un arbitrario numero $\varepsilon > 0$, si può determinare un numero $N > 0$ tale che per ogni x verificante la condizione $|x|>N$, si abbia $|f(x)-l| < \varepsilon$".

Inoltre, dopo aver enunciato le varie definizioni, ne viene fornita una presentazione unitaria in termini di intorni, senza aver definito da nessuna parte nel testo che cosa sia un intorno di infinito.

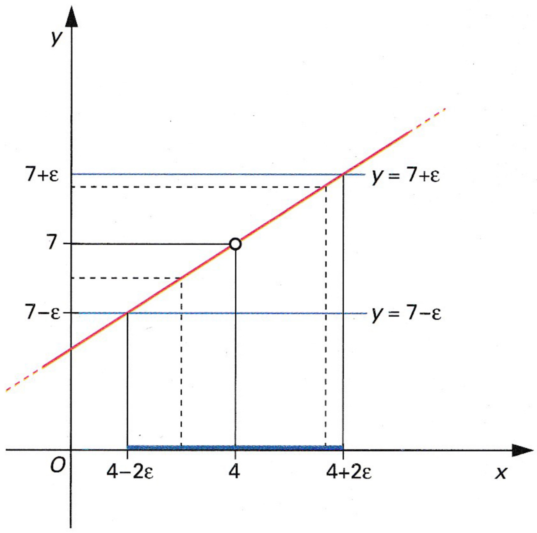
Tutte le definizioni sono inoltre abbastanza discorsive e non viene fatto riferimento ai quantificatori logici universale ed esistenziale.

Un altro aspetto molto negativo riguarda gli asintoti, nominati per la prima volta nel capitolo relativo alla continuità delle funzioni. Non viene infatti combattuto il misconcetto che l'asintoto non può essere attraversato, ma viene piuttosto alimentato: viene riportato il significato etimologico di asintoto, come "ciò che tende ad avvicinarsi sempre più a qualcosa senza mai raggiungerlo o coincidere con esso", senza specificare che la realtà dei fatti non è così.

Aspetti positivi riguardano invece, come accennato sopra, gli esempi presentati e gli esercizi proposti.
Subito dopo ogni definizione, vengono riportati esempi di verifiche di limiti. Gli autori insistono molto sul fatto che l'esistenza del limite di una funzione in x_0 è assolutamente indipendente dal comportamento della funzione nel punto stesso, mostrando con vari esempi i casi che si possono presentare. Inoltre, sottolineano la dipendenza dell'ampiezza dell'intorno di x_0 da ε, mostrando anche il caso di un limite non corretto per evidenziare l'arbitrarietà di ε.
Gli esercizi proposti sono mirati ad insistere nuovamente sulla differenza tra limite in x_0 e $f(x_0)$. Ad esempio, viene chiesto se necessariamente risulta $f(c)=l$ sapendo che $\lim_{x \to c} f(x) = l$, giustificando la risposta.
Si trovano poi varie tipologie di esercizi, quali disegnare una funzione arbitraria assegnati alcuni suoi limiti e determinare certi limiti dal grafico di una funzione, presentando anche casi particolari come asintoti verticali destri o sinistri e funzioni costanti.

<u>Testo iii</u>

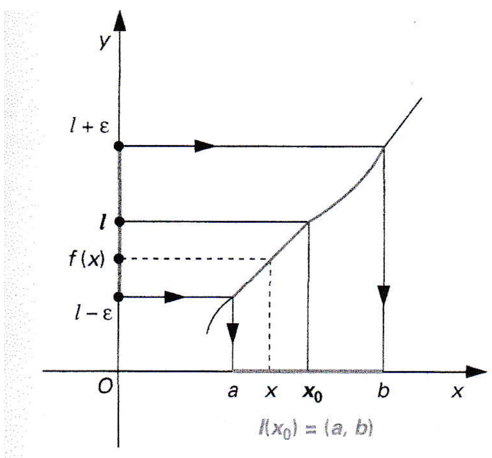
Ritengo che questo testo utilizzi una rappresentazione poco chiara. Ad esempio, la funzione $\frac{x}{2}+5$ viene disegnata come in figura, inserendo un "pallino vuoto" dove invece la funzione è continua:



Credo che questa scelta sia legata al fatto di voler evidenziare che non ci interessa come si comporta la funzione in x_0, ma rischia di indurre l'idea che non abbia senso calcolare il limite di funzioni continue.

Anche questo testo, come il *ii*, nomina gli asintoti per la prima volta nel capitolo relativo alla continuità delle funzioni e non combatte il misconcetto che l'asintoto non può essere attraversato.

Gli esercizi proposti sono interessanti. Innanzitutto sono riportati degli specchietti riassuntivi della teoria, in cui sono disegnati grafici rappresentativi delle varie definizioni, come ad esempio il seguente:



$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists I(x_0): \ |f(x) - l| < \varepsilon, \quad \forall x \in I(x_0) \setminus \{x_0\}$

Le frecce utilizzate possono aiutare i ragazzi a ricordare l'ordine di scelta degli intorni.

Il testo presenta varie tipologie di esercizi, quali disegnare una funzione arbitraria assegnati alcuni suoi limiti, determinare certi limiti dal grafico di una funzione o effettuando un'analisi numerica. Si trovano esercizi mirati ad insistere sulla differenza tra limite in x_0 e $f(x_0)$ (a cui però non si fa riferimento nella trattazione teorica). Ad esempio, viene chiesto se l'esistenza di una funzione in un punto x_0 è condizione necessaria affinché esista il limite per x che tende a x_0, motivando la risposta.
Si trovano anche esercizi relativi all'importanza che x_0 sia di accumulazione per il dominio della funzione. Ad esempio, viene chiesto quali limiti si possono valutare sapendo che il dominio della funzione è $[0,2] \cup \{3\}$.
Infine, vengono presentati esempi e esercizi di verifica di limiti non corretti, che mettono in evidenza l'arbitrarietà di ε.

<u>Testo iv</u>

Questo testo fa cenno agli asintoti nel corpo della trattazione dei limiti, riportando come esempio una funzione che attraversa il suo asintoto orizzontale e osservando che il grafico "a mano a mano si confonde con quello di una retta orizzontale". Gli asintoti vengono poi definiti formalmente nel capitolo sulla continuità, mostrando nuovamente il grafico di una funzione che attraversa il suo asintoto e il grafico di $\frac{\sin(x)}{x}$. Gli autori cercano quindi di mettere in evidenza graficamente il fatto che un asintoto orizzontale può essere attraversato, anche se questo concetto non viene espresso a parole.

Si tratta di un testo molto carente a livello di esercizi, in quanto propone soltanto verifiche di limiti tramite la definizione. Per di più, il lettore non può confrontarsi con la verifica di un limite falso.

- ***TESTO V***

Il testo di Bagni è di grande interesse in quanto è l'unico, tra quelli analizzati, che utilizza un'impostazione statica per presentare il concetto di limite. Come egli chiarisce in [5] e come abbiamo già avuto modo di sottolineare nel paragrafo §1.2.1.2 di questa tesi, Bagni si preoccupa di evitare i misconcetti derivanti dall'impostazione dinamica tradizionalmente utilizzata. Notiamo infatti che l'autore non utilizza un linguaggio che rimandi ad un'idea di movimento (come l'espressione "si avvicina a"). Ad esempio, la definizione intuitiva da lui utilizzata è la seguente:

"La funzione *f* ammette limite *l* per *x* tendente a *c* se tutte le *x* situate nelle *immediate vicinanze* di $x = c$ (a parte $x = c$ stesso di cui ci disinteressiamo) hanno per corrispondenti delle *y* che si trovano nelle *immediate vicinanze* di $y = l$".

E' anche vero, però, che egli non propone esercizi o esempi che mettano gli studenti di fronte a questi misconcetti: non ci sono infatti limiti di funzioni costanti o riferimenti al fatto che un limite può essere raggiunto e superato. E' quindi compito dell'insegnante mostrare esempi con cui poter verificare l'efficacia di questa trattazione.

Ritengo invece che l'autore riesca bene nel suo intento di combattere l'idea che il limite in $x = c$ coincida con $f(c)$.
Bagni, infatti, considera il caso di limite finito di una funzione in un punto e sottolinea fin da subito la differenza tra il limite in $x = c$ e $f(c)$, il primo che dà informazioni sul comportamento della funzione nelle *vicinanze* del punto *c*, il secondo che fornisce solo il valore della funzione in quel punto. Insiste molto su questo aspetto, sia a parole sia mostrando grafici a sostegno delle sue affermazioni.

Vengono forniti esempi di verifiche di limite tramite definizione tecnicamente semplici, in maniera da concentrare l'attenzione sul fatto che la definizione deve essere soddisfatta per ogni $\varepsilon > 0$ (mostrando anche esempi di limiti non corretti) e, nuovamente, sulla differenza tra limite in $x = c$ e $f(c)$.

Gli esercizi proposti insistono sull'arbitrarietà di ε, sull'importanza che $x = c$ sia punto di accumulazione per il dominio della funzione e sulla determinazione di limiti dal grafico di una funzione, con particolare attenzione alla differenza tra limite in $x = c$ e $f(c)$.

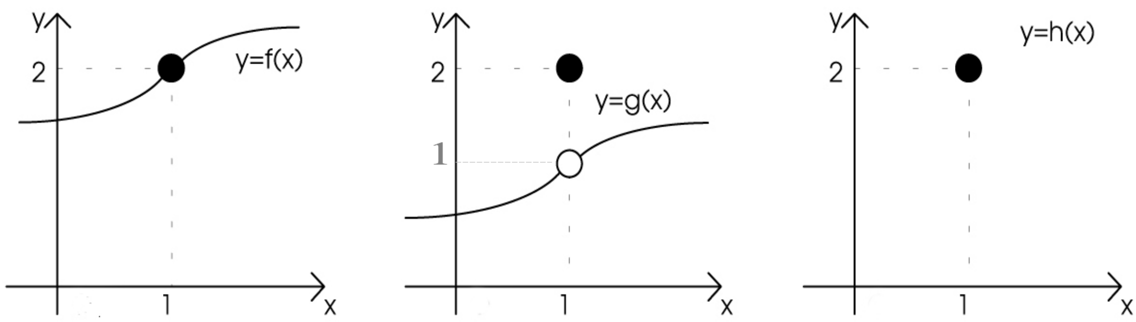
APPENDICI
LEZIONI, ESERCIZI ASSEGNATI E VERIFICA FINALE

LEZIONI 1, 2 e 3: APPROCCIO INTUITIVO AL CONCETTO DI LIMITE

Ho iniziato la trattazione del concetto di limite indicando schematicamente le tappe fondamentali della sua storia, presentando anche alcuni esempi che storicamente ne hanno motivato la nascita. Si rimanda al §3.2.2.1 per una descrizione dettagliata della lezione svolta in classe. Ci limitiamo qui a riportare l'iniziale approccio intuitivo utilizzato, gli esercizi presentati a lezione e quelli assegnati per casa. Il testo degli esercizi è scritto in corsivo.

Abbiamo anticipato la definizione del concetto di limite mostrando chiaramente la differenza tra $f(x_0)$ e il limite della funzione in x_0: il primo permette di conoscere il valore della funzione nel punto, il secondo il comportamento della funzione in prossimità del punto.

Ho mostrato ai ragazzi i tre grafici in figura, per evidenziare che nelle immediate vicinanze di x_0 l'andamento delle funzioni può essere molto diverso, anche se il valore assunto in x_0 è lo stesso:



Il secondo grafico si presta bene a mostrare che il comportamento di g in un intorno di $x=1$ è diverso dal valore che g assume nel punto di ascissa 1. Per chiarire questo aspetto, ho utilizzato la classica impostazione dinamica: se ci muoviamo lungo l'asse delle x, avvicinandoci a 1 da destra e da sinistra, vediamo che il grafico è vicino al "pallino vuoto", ossia le $g(x)$ si avvicinano a 1.

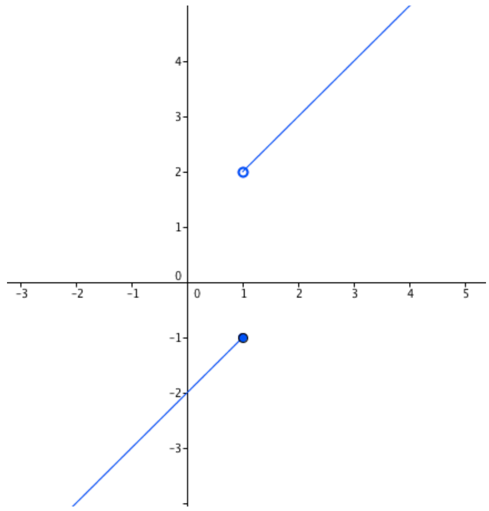
Ho inoltre esplicitato ai ragazzi che quando parliamo di limiti non ci interessa cosa succede nel punto x_0: la valutazione di una funzione in un punto $x = x_0$ e il limite di tale funzione per *x* che tende a x_0 sono due cose in generale diverse e indipendenti. Coincidono soltanto se la funzione è continua nel punto x_0, come vediamo nel primo grafico, cioè solo quando il valore della funzione in x_0 e il comportamento nelle sue immediate vicinanze è lo stesso.

Il terzo grafico permette di sottolineare che ha senso determinare il limite soltanto nei punti di accumulazione per il dominio della funzione.

<u>Esercizio 1</u>

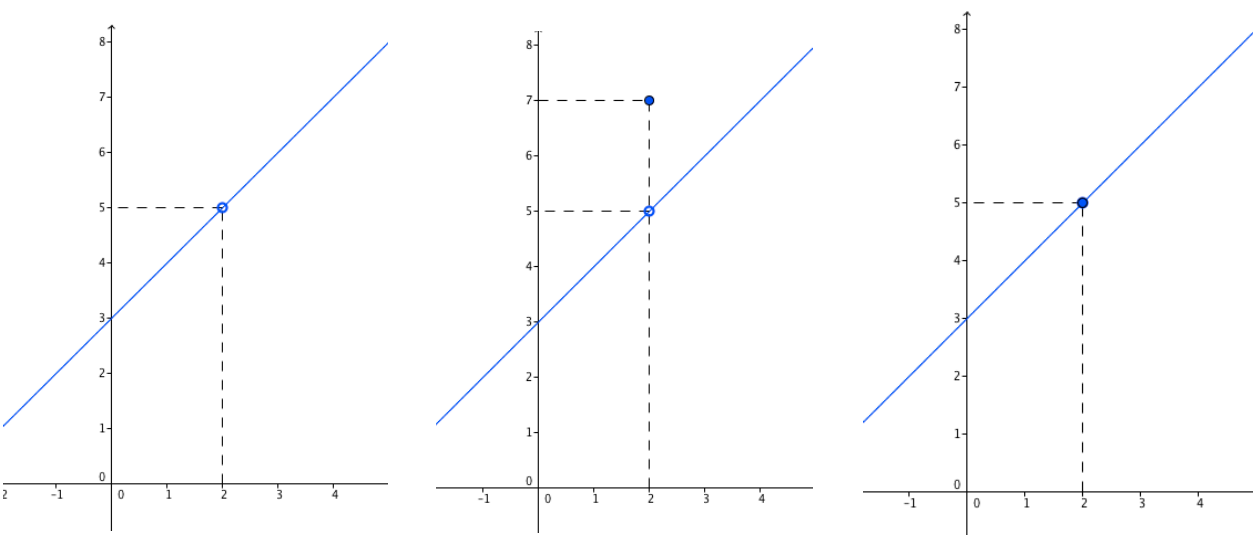
Sia $f(x) = \begin{cases} x+1 & se\ x > 1 \\ x-2 & se\ x \leq 1 \end{cases}$

Determinare $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$.



Questo esercizio è stato scelto per introdurre le nozioni di limite destro e limite sinistro e il fatto che il limite esiste se e solo se limite destro e limite sinistro esistono e sono uguali, cioè se e solo se il comportamento della funzione a destra e a sinistra di x_0 è lo stesso.

<u>Esercizio 2</u>

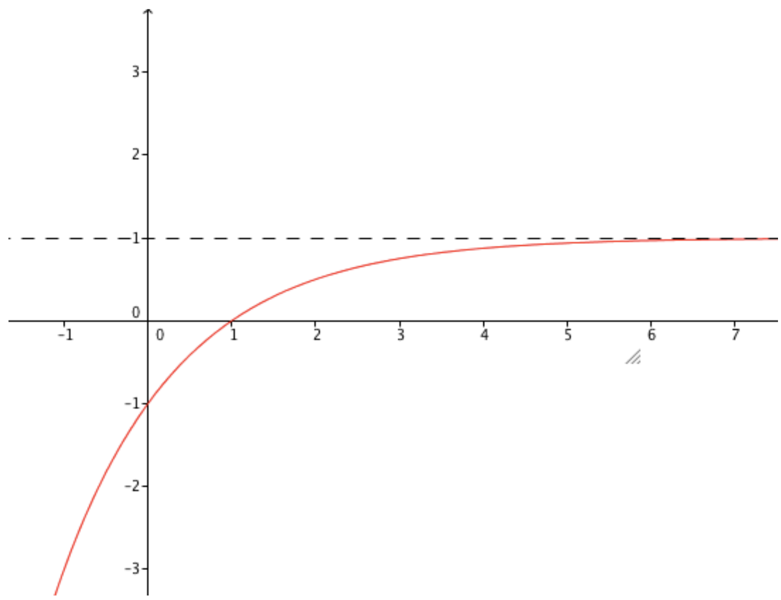


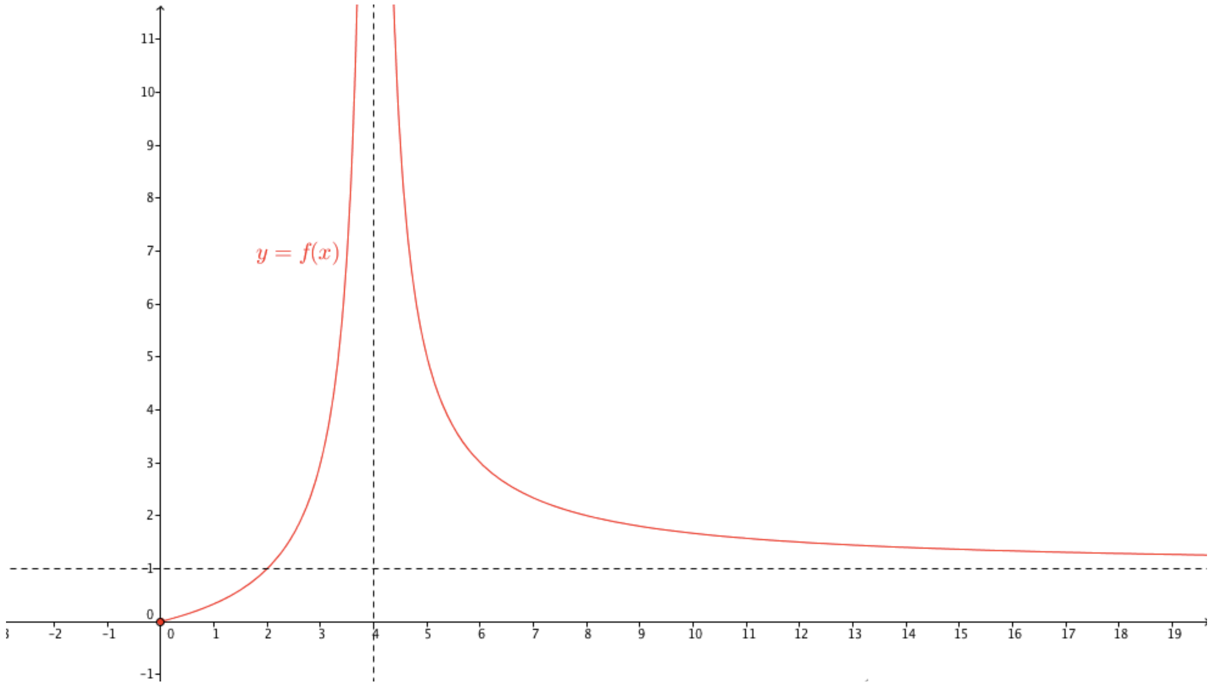
Mostrando uno alla volta i tre grafici precedenti, è possibile aiutare gli studenti a comprendere che il limite di una funzione in x_0 è in generale diverso da $f(x_0)$ e coincide con esso solo quando la funzione è continua in x_0. Può essere molto utile lasciare che i ragazzi provino a determinare autonomamente i limiti in $x = 2$ delle tre funzioni, in maniera tale da far venire fuori i loro misconcetti e aiutarli a diventarne consapevoli.

Esercizi 3 e 4

I due esempi seguenti possono essere usati per mostrare come il grafico di una funzione possa avvicinarsi all'asintoto, da sopra oppure da sotto. In particolare, modificando opportunamente il grafico, è possibile mostrare agli studenti che l'asintoto orizzontale può essere attraversato. Dato che un misconcetto molto diffuso è il fatto che l'asintoto sia una retta a cui la funzione si avvicina senza mai toccarla, è opportuno mostrare anche grafici di funzioni che oscillano attorno al proprio limite (come nel classico esempio $\frac{\sin(x)}{x}$).

Il secondo grafico, inoltre, può essere usato per sottolineare che nel punto 0 esiste solo il limite destro.





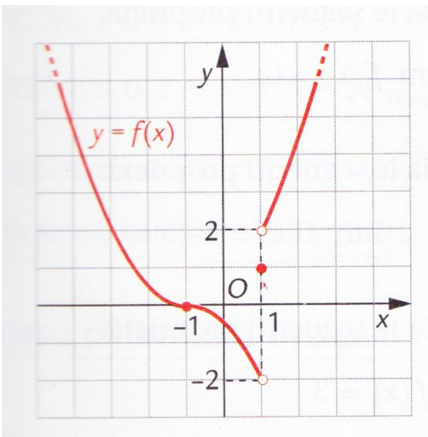
Esercizio 5

Determinare qualche limite per la funzione f(x) = -1.

Questo esempio può essere usato per combattere il misconcetto che le funzioni costanti non abbiano limite.

Esercizio 6

Completa le seguenti uguaglianze, deducendo dal grafico il valore dei seguenti limiti, se esistono.



$$\lim_{x \to -\infty} f(x) =$$

$$\lim_{x \to -1} f(x) =$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) =$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) =$$

$$\lim_{x \to 1} f(x) =$$

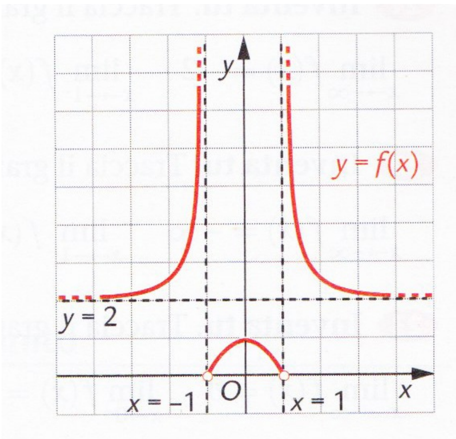
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) =$$

Tramite questo esercizio è possibile combattere in particolare il misconcetto che il limite in x_0 coincida con $f(x_0)$.

<u>Esercizio 7</u>

Completa le seguenti uguaglianze, deducendo dal grafico il valore dei seguenti limiti, se esistono.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) =$$
$$\lim_{x \to -1^-} f(x) =$$
$$\lim_{x \to -1^+} f(x) =$$
$$\lim_{x \to -1} f(x) =$$
$$\lim_{x \to 1^-} f(x) =$$
$$\lim_{x \to 1^+} f(x) =$$
$$\lim_{x \to 1} f(x) =$$
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) =$$

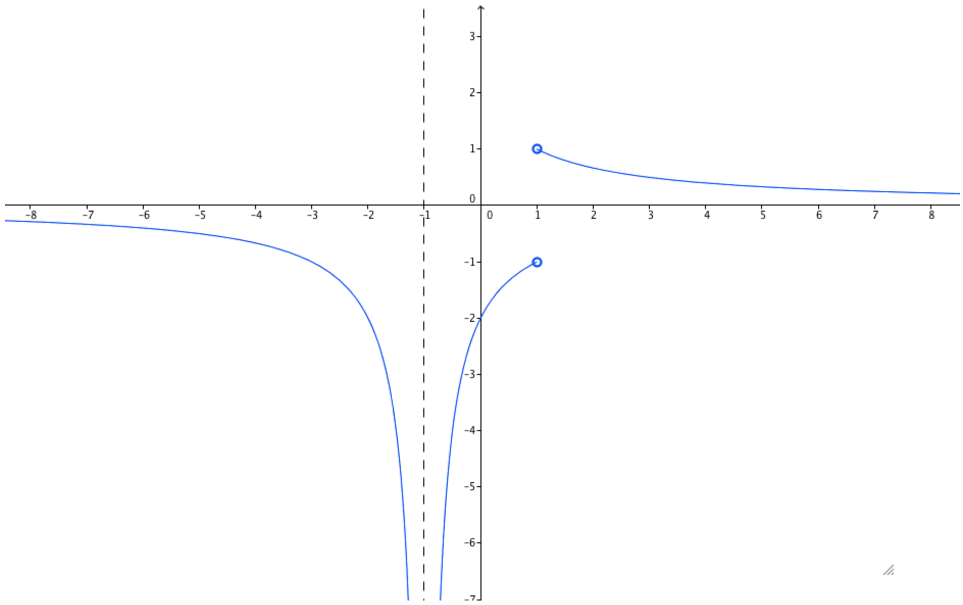


Può essere necessario porre gli studenti di fronte ad asintoti verticali destri (o sinistri), la cui esistenza può non essere intuita.

<u>Esercizio 8</u>

Disegna il grafico della funzione $f(x) = \dfrac{2x-2}{|x^2-1|}$ *e utilizzalo per dedurre quanto valgono i seguenti limiti:*

$$\lim_{x \to -\infty} f(x),\ \lim_{x \to -1^-} f(x),\ \lim_{x \to -1^+} f(x),\ \lim_{x \to 1^-} f(x),\ \lim_{x \to 1^+} f(x),\ \lim_{x \to 1} f(x),\ \lim_{x \to +\infty} f(x)$$



Si insiste ancora sull'esistenza del limite se e solo se limite destro e limite sinistro esistono e sono uguali.

Esercizio 9

Traccia il grafico di una funzione che abbia le seguenti proprietà:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -2^+, \quad \lim_{x \to -1^-} f(x) = 1, \quad \lim_{x \to -1^+} f(x) = -1, \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0^+$$

Questo esercizio (così come quello successivo) consente di aiutare gli studenti ad acquisire la capacità di disegnare una funzione arbitraria assegnati alcuni suoi limiti, maneggiando i limiti per eccesso e per difetto e limiti destro e sinistro; inoltre, si insiste sul fatto che il grafico della funzione può intersecare uno dei suoi asintoti orizzontali.

Esercizio 10

Traccia il grafico di una funzione che abbia le seguenti proprietà:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0^+, \quad \lim_{x \to 0^-} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to 0^+} f(x) = 0^-, \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = 3^-$$

LEZIONE 4: ATTIVITA' PER LA COSTRUZIONE DELLA DEFINIZIONE RIGOROSA DI LIMITE TRAMITE IL SOFTWARE GEOGEBRA

Presentiamo di seguito l'attività svolta con Geogebra somministrata agli studenti per tradurre la definizione intuitiva di limite

"Diciamo che $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ *se la funzione f assume valori vicini quanto si vuole a L tutte le volte che i valori di x sono sufficientemente vicini a* x_0 *(con eventuale esclusione del punto* $x=x_0$*)"*

nella definizione rigorosa in termini di intorni (o, equivalentemente, di strisce):

"Diciamo che $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ *se per ogni intorno U di L (per ogni striscia orizzontale centrata in L) esiste un intorno V di* x_0 *(esiste una striscia verticale centrata in* x_0*), dipendente da U, tale che per ogni* $x \in V$*, con* $x \neq x_0$*, risulta* $f(x) \in U$*".*

E' possibile scaricare l'applet da [21, def_rigorosa]. Gli studenti si trovano a lavorare con una funzione non definita in x = 2 per la quale vale $\lim_{x \to 2} f(x) = 4$. I valori x_0= 2 e $L=4$ sono fissi; muovendo con il mouse i cursori corrispondenti, gli studenti possono invece modificare le ampiezze degli intorni di L e x_0 (rappresentati rispettivamente dalla striscia orizzontale e dalla striscia verticale) e spostare il generico punto x (e di conseguenza il suo $f(x)$).

Innanzitutto, nel punto 2 i ragazzi vengono invitati a familiarizzare con la striscia orizzontale, in modo da comprendere che essa rappresenta un intorno centrato in 4: si aiuta a far capire la relazione tra ε e gli estremi superiore e inferiore della striscia assegnando alcuni valori di ε e chiedendo di inserire in un'apposita tabella le ordinate dei punti.
In particolare, nel punto 2.d si guida a tradurre in termini rigorosi l'espressione "*f* assume valori vicini quanto si vuole a 4", assegnando alcuni valori di ε e facendo notare che qualunque sia l'ε considerato $f(x)$ ricade sempre nella striscia orizzontale.

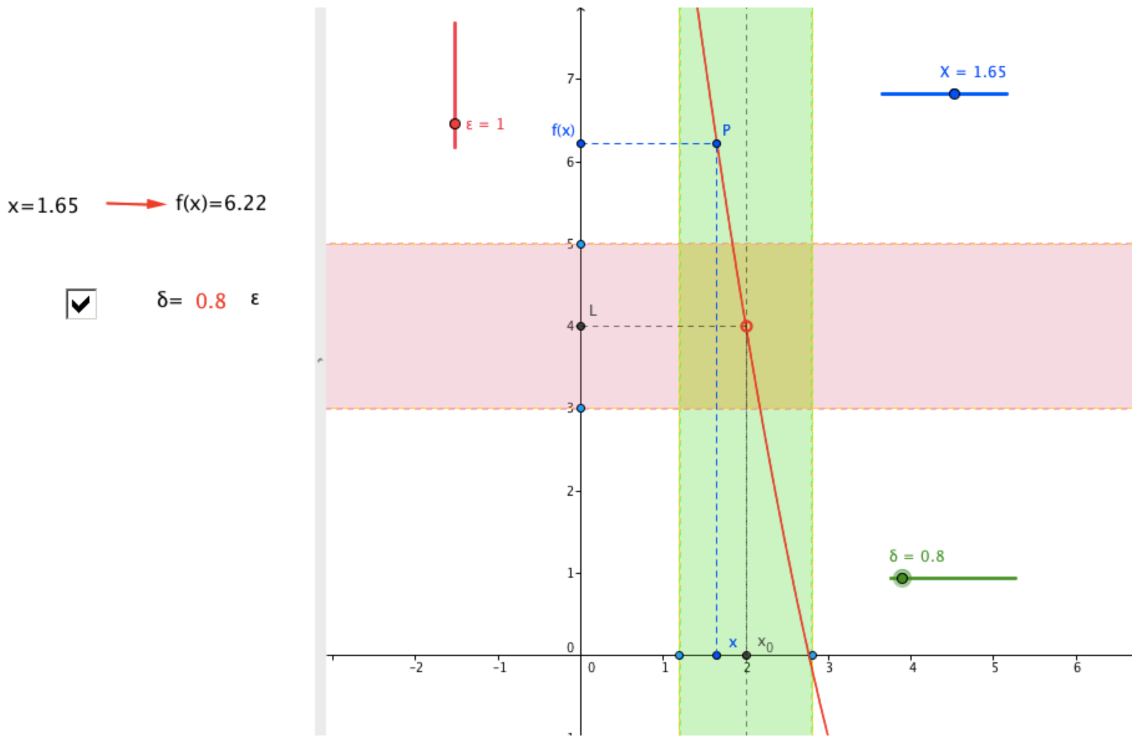
Nel punto 3 dell'attività si guida alla traduzione in termini rigorosi dell'espressione "tutte le volte che i valori di x sono sufficientemente vicini a 2 (con eventuale esclusione del punto $x = 2$)": assegnati alcuni valori di ε, viene chiesto agli studenti quali valori può assumere x affinché $f(x)$ appartenga alla striscia orizzontale, aiutandoli a comprendere la dipendenza di δ da ε. I ragazzi vengono anche spinti a porre attenzione sul fatto che in $x = 2$ la funzione non è definita e che questo non influisce sul limite.

L'ultimo punto dell'attività ha come scopo quello di far impratichire i ragazzi con questo gioco di strisce: dati alcuni valori di ε, devono determinare un δ che soddisfi la definizione di limite; oppure, assegnati ε e δ, devono stabilire se la definizione è soddisfatta.

Di seguito vengono riportati in corsivo il testo dell'attività, in carattere normale osservazioni e interventi fatti per rendere più chiara la spiegazione.

ATTIVITA'

Apri il file "def_rigorosa"



1. *All'apertura del file ti trovi davanti una funzione f(x) non definita per x = 2.*
   Osserva il grafico: quanto vale $\lim_{x \to 2} f(x)$*?*
   Vogliamo passare per gradi dalla definizione intuitiva a quella formale del limite per x che tende a 2 di f(x).

2. *Vediamo di interpretare quello che compare sullo schermo.*

   a) *In alto trovi uno slider blu denominato X: cliccando sullo slider e spostandolo a destra e a sinistra puoi spostare il punto x presente sull'asse delle ascisse. Prova a farlo.*
   Vedrai muoversi anche f(x), il valore che la funzione assume in x.
   Sulla sinistra della schermata trovi i valori di x e f(x).

   b) *Che cosa rappresenta L ?*

   c) *In alto a sinistra trovi uno slider rosso denominato ε: clicca sullo slider e, spostandolo in alto e in basso, modifica il valore di ε. Che cosa puoi osservare quando aumenta ε? E quando diminuisce?*

   Variando ε, cosa vedi muoversi e cosa invece rimanere fisso?

   Cosa rappresenta dunque la striscia orizzontale? Prova ad aiutarti con qualche valore numerico. Poni ε = 3: qual è l'ordinata del punto azzurro sotto L e del punto azzurro sopra L? E se ε = 2? E se ε = 1? Riporta i valori nella seguente tabella:

ε	***ordinata punto in basso***	***ordinata punto L***	***ordinata punto in alto***
3		*4*	
2		*4*	
1		*4*	

   Osserva che cosa lega le ordinate dei punti azzurri all'ordinata di L e prova a dire cosa rappresenta la striscia orizzontale.

   d) *Rileggi la definizione intuitiva di limite: "L è il limite di f(x) per x che tende a* x_0 *se la funzione f assume valori* <u>*vicini quanto si vuole*</u> *a L…". Vogliamo capire cosa*

significa che i valori di f(x) sono vicini a L. Poni ε = 1: dove si trova f(x) quando dista da L meno di 1?
Poni ε = 0.8: dove si trova f(x) quando dista da L meno di 0.8?

Quindi, in cosa si traduce il fatto che f(x) è vicina a L?

In relazione alla striscia orizzontale, in cosa si traduce l'espressione "quanto si vuole?".

Ritengo importante interrompere l'attività in questo punto e riprenderla insieme ai ragazzi per assicurarsi che abbiano capito questo primo passaggio della definizione (altrimenti il rischio è che abbiano difficoltà con i punti successivi dell'attività).
Si può quindi sottolineare che la prima parte della definizione intuitiva ("la funzione *f* assume valori vicini quanto sia vuole a 4") può essere sostituita con "se qualunque sia l'intorno U di 4 (o, equivalentemente, qualunque sia la striscia orizzontale) *f(x)* ∈ U (*f(x)* sta dentro la striscia orizzontale). E' importante dare rilievo al fatto che possiamo prendere una striscia di **ampiezza qualunque**.

3. *Vediamo adesso la seconda parte della definizione.*

   a) *Posto ε = 1, sposta il punto x: quale valore può assumere approssimativamente x affinché f(x) appartenga alla striscia orizzontale? C'è un unico valore o più di uno?*
   (Se ne hai bisogno, puoi aiutarti con i valori numerici indicati nella parte sinistra della schermata)

   E se ε = 0.7 ? Se ε = 0.5?

   Se ε continua a diminuire, riesci a trovare <u>sempre</u> un valore di x per cui f(x) sta nella striscia orizzontale? Oppure esiste un valore di ε per cui f(x) NON sta nella striscia?

   Cosa succede quindi alle x mano a mano che la striscia orizzontale si assottiglia?

b) *Secondo la definizione intuitiva, i valori di x devono essere <u>sufficientemente vicini</u> a x_0. Come abbiamo visto nel caso di f(x), possiamo tradurre l'espressione "sufficientemente vicini" in termini di intorni: all'intorno di quale punto deve appartenere x affinché f(x) sia contenuto nella striscia orizzontale?*

   Tale intorno può essere scelto a piacere oppure dipende da qualche elemento della costruzione?

c) *Cosa succede se $x = x_0$?*

Interrompiamo nuovamente l'attività e riprendiamola con i ragazzi, chiarendo eventuali dubbi. Può essere inoltre necessario sottolineare con insistenza la **dipendenza di δ da ε** e sottolineare che **ε deve essere fissato prima di δ**.
La seconda parte della definizione intuitiva ("tutte le volte che i valori di *x* sono sufficientemente vicini a 2, con eventuale esclusione del punto $x = 2$") può essere sostituita con "tutte le volte che *x* appartiene ad un intorno V di 2 (o, equivalentemente, tutte le volte che *x* sta in una striscia verticale) dipendente da U, con $x \neq 2$".

Riordinando le frasi e sostituendo le espressioni "qualunque sia l'intorno U" e "tutte le volte che *x* appartiene ad un intorno V" con le espressioni (in linguaggio più matematico) "per ogni intorno U" e "esiste un intorno V tale che per ogni $x \in V$" otteniamo la definizione rigorosa.

4. *Poni $\varepsilon = 0.8$. Trova approssimativamente un valore di δ per cui qualunque x nella striscia verticale ha il corrispondente f(x) nella striscia orizzontale.*

   Fai la stessa cosa per $\varepsilon = 0.6$ e 0.4.

   Osserva ancora che l'intorno di 2 cambia al variare dell'intorno di 4.

   Posto $\varepsilon = 0.5$ e $\delta = 0.2$, la definizione di limite risulta soddisfatta? Perché?

   E se $\delta = 0.08$? E se $\delta = 0.04$?

ESERCIZI ASSEGNATI PER CASA SULLA DEFINZIONE RIGOROSA DI LIMITE DA SVOLGERE CON GEOGEBRA E LORO RISOLUZIONE

Riportiamo i tre esercizi assegnati per casa da svolgere con Geogebra e le relative risoluzioni. Consigliamo di far lavorare gli studenti su queste attività durante le ore di lezione, dato che trattano di aspetti significativi del concetto di limite che spesso non vengono compresi. E' possibile scaricare le applets da [21, attività_1, attività_2, attività_3].

I ragazzi hanno la possibilità, muovendo con il mouse i cursori corrispondenti, di spostare i punti x_0 e L, di modificare le ampiezze dei loro intorni (rappresentati rispettivamente dalla striscia verticale e dalla striscia orizzontale) e spostare il generico punto x (e di conseguenza il suo $f(x)$).

Si richiede di svolgere tutti gli esercizi sfruttando la definizione rigorosa di limite in termini di strisce: verificare con Geogebra se $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ è corretto (con x_0 e L finiti o infiniti) significa che per ogni striscia orizzontale, centrata in L, esiste una striscia verticale, centrata in x_0, dipendente dalla striscia orizzontale tale che, per ogni x appartenente alla striscia verticale, il corrispondente $f(x)$ appartiene alla striscia orizzontale.
E' importante che i ragazzi rispondano alle domande nell'ordine in cui sono date.

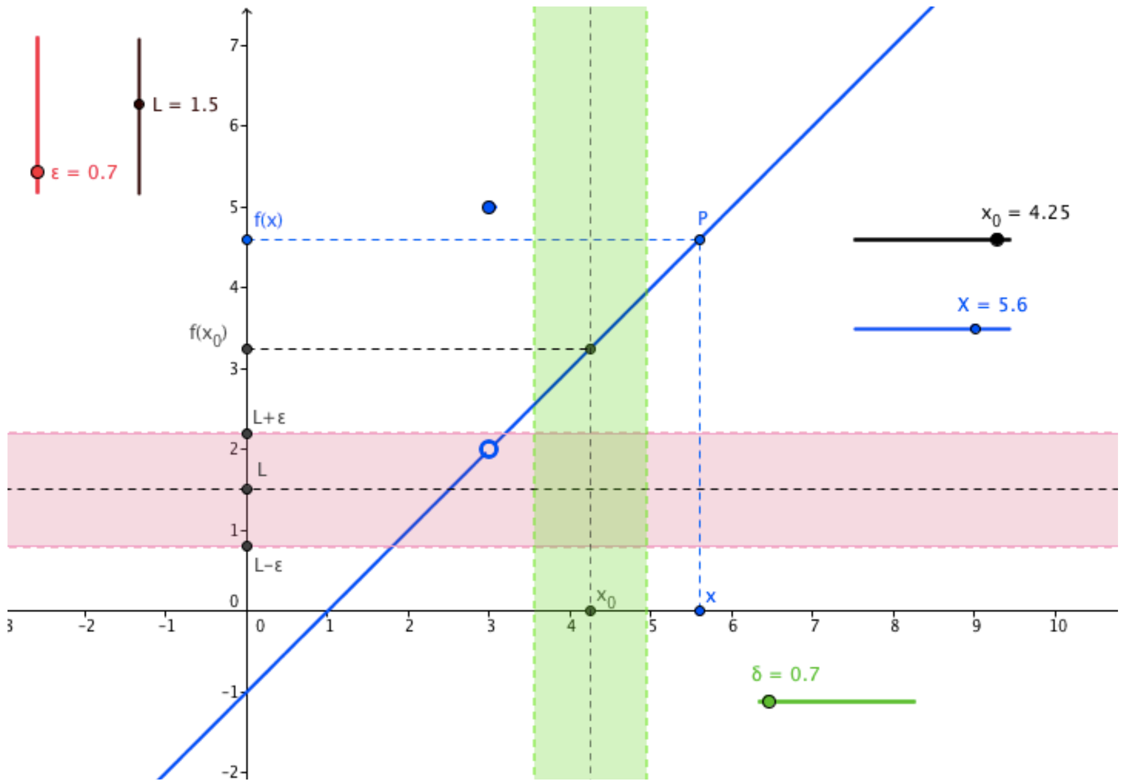
La prima attività ha come scopo quello di aiutare gli studenti a capire la differenza tra il valore che la funzione assume nel punto $x = x_0$ e il valore del limite per x che tende a x_0.
Il punto 1 della seconda attività mostra l'importanza dell'ordine nella scelta degli intorni: si vuole mostrare che, fissando prima δ e scegliendo in dipendenza da esso un valore di ε, si ottengono risultati assurdi. Nel punto 2 si vuole far riflettere sull'importanza della scelta arbitraria dell'intorno di L.
L'ultima attività mostra il caso di un limite non esistente che spesso crea difficoltà.

Attività 1

Apri il file "attività_1". Ti trovi davanti la funzione $f(x) = \begin{cases} 5 & se\ x = 3 \\ \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x - 3} & se\ x \neq 3 \end{cases}$

Guardando il grafico, prova a pensare a quanto vale $\lim_{x \to 3} f(x)$

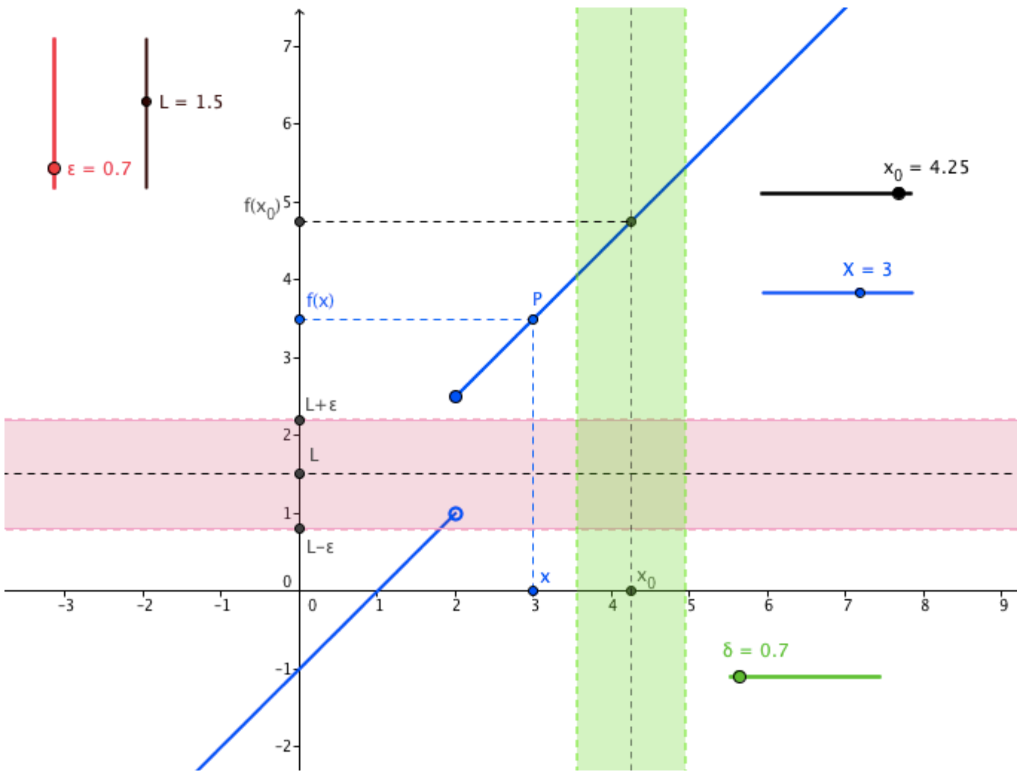
1. Verifica, usando le strisce, se $\lim_{x \to 3} f(x) = 5$. Spiega come procedi.
2. Verifica, usando le strisce, se $\lim_{x \to 3} f(x) = 2$. Spiega come procedi.
3. Qual è il valore che la funzione assume in $x = 3$? Coincide con il valore del limite in $x = 3$?



Attività 2

Apri il file "attività_2". Ti trovi davanti la funzione $f(x)=\begin{cases} x+\frac{1}{2} & se\ x \geq 2 \\ x-1 & se\ x<2 \end{cases}$

Osservando il grafico, prova a pensare quanto vale $\lim_{x\to 2} f(x)$



1. Luca deve determinare $\lim_{x\to 2} f(x)$. Ripercorri tutti i passaggi che esegue.

   Luca osserva che $f(2)=\frac{5}{2}=2.5$ e quindi ipotizza che $\lim_{x\to 2} f(x)=2.5$.

   Decide di controllare se la sua ipotesi è corretta. Esegue quindi la seguente verifica: pone L = 2.5, x_0 = 2 e fissa δ = 0.6. Osserva che scegliendo ε = 2.1 la definizione di limite è soddisfatta: qualunque x nella striscia verticale ha il corrispondente *f(x)* nella striscia orizzontale.

   Sapendo che non basta controllare un solo intorno, Luca considera δ = 0.4. Trova che scegliendo ε = 1.9 la definizione è soddisfatta. Se δ = 0.2, ε = 1.7 soddisfa la definizione. E così via, scegliendo δ sempre più piccoli.

   Luca è quindi soddisfatto perché la sua ipotesi era corretta: il limite di *f(x)* per *x* che tende a 2 è effettivamente 2.5.

1.a. Sei d'accordo con l'ipotesi di partenza di Luca? Perché?

1.b. Sei d'accordo con la sua verifica? Perché?

2. Poni adesso L = 2.5, x_0 = 2 e fissa ε = 2. Trova approssimativamente il più grande valore di δ per cui la verifica di limite è soddisfatta (cioè tutte le *x* appartenenti alla striscia verticale hanno le rispettive *f(x)* nella striscia orizzontale).

   Spiega perché questo non implica necessariamente che $\lim_{x\to 2} f(x) = 2.5$

3. Mantenendo L = 2.5 e x_0 = 2, trova un valore di ε per cui nessun valore di δ soddisfa la definizione (cioè ci sono alcune *x* nella striscia verticale le cui *f(x)* non stanno nella striscia orizzontale).

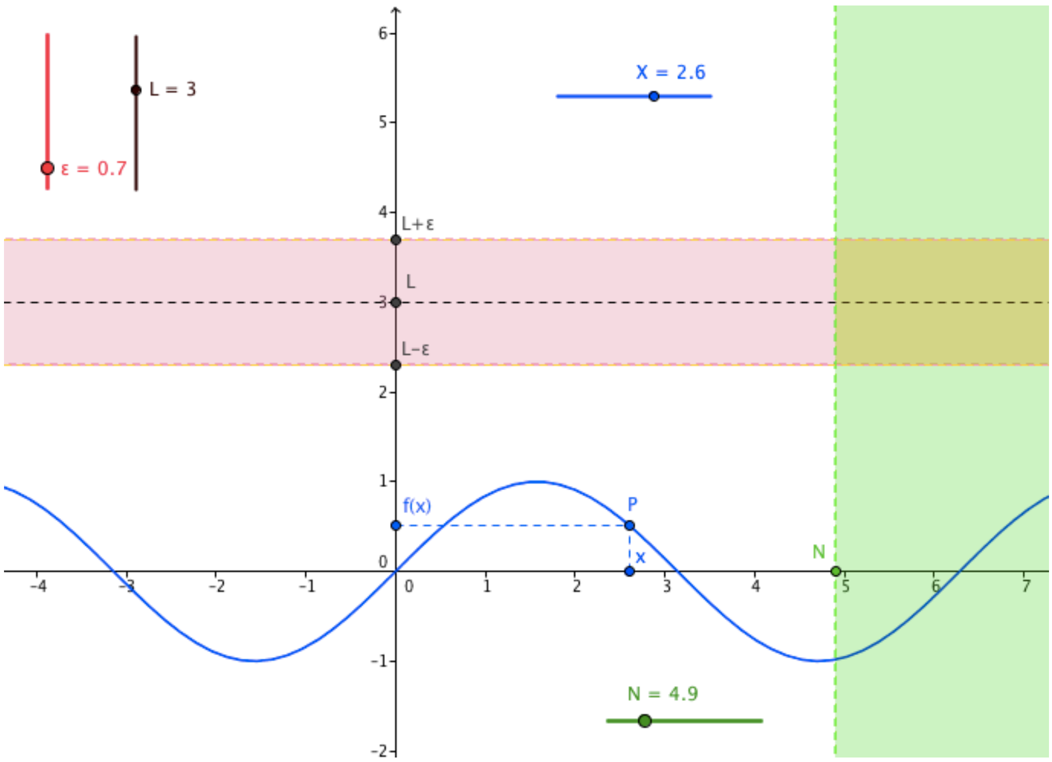
   Spiega quindi perché 2.5 non è il limite di *f(x)* per *x* che tende a 2.

4. Qual è dunque il limite di *f(x)* per *x* che tende a 2? Motiva la tua risposta.

Attività 3

Apri il file "attività_3".

Ti trovi davanti la funzione *f(x) = sin(x).* Guardando il grafico, prova a pensare qual è il limite di *f(x)* per *x* che tende a +∞.



Vogliamo verificare se $\lim_{x \to +\infty} \sin(x) = 0$. Poni quindi $L = 0$.

1. Poni inizialmente $\varepsilon = 1.2$ e $N = 6$. Quando $x > N$ cosa puoi dire di $|f(x) - L|$? Sposta il punto *x* per aiutarti, usando lo slider blu X.

2. Prova a prendere un $\varepsilon < 1$. Che cosa puoi dire adesso di $|f(x) - L|$?
   Cambia qualcosa se scegli *N* più grande? Perché?

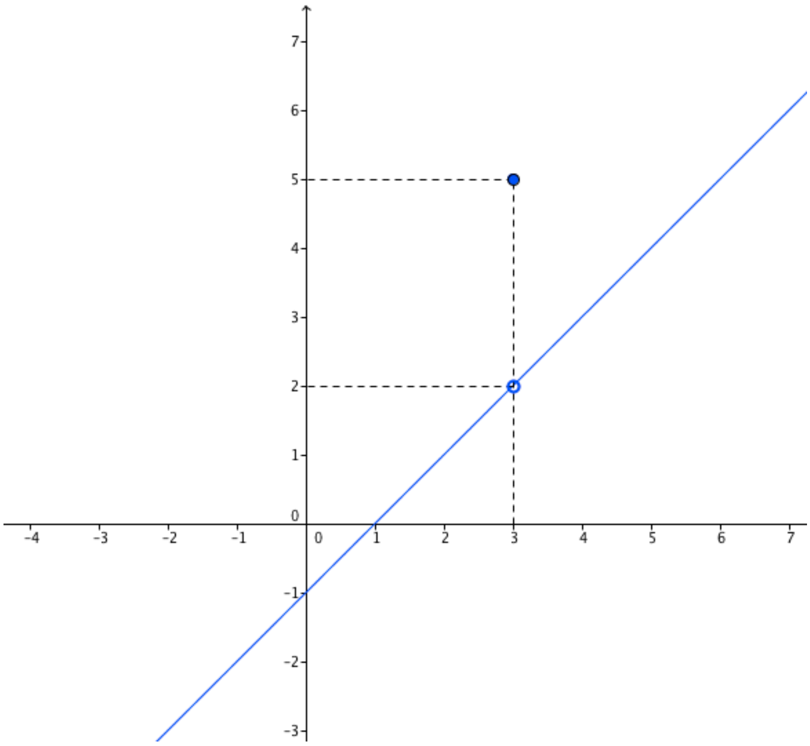
3. E' vero dunque che $\lim_{x \to +\infty} \sin(x) = 0$? Se sì, perché? Se no, qual è allora il valore del limite?

RISOLUZIONI

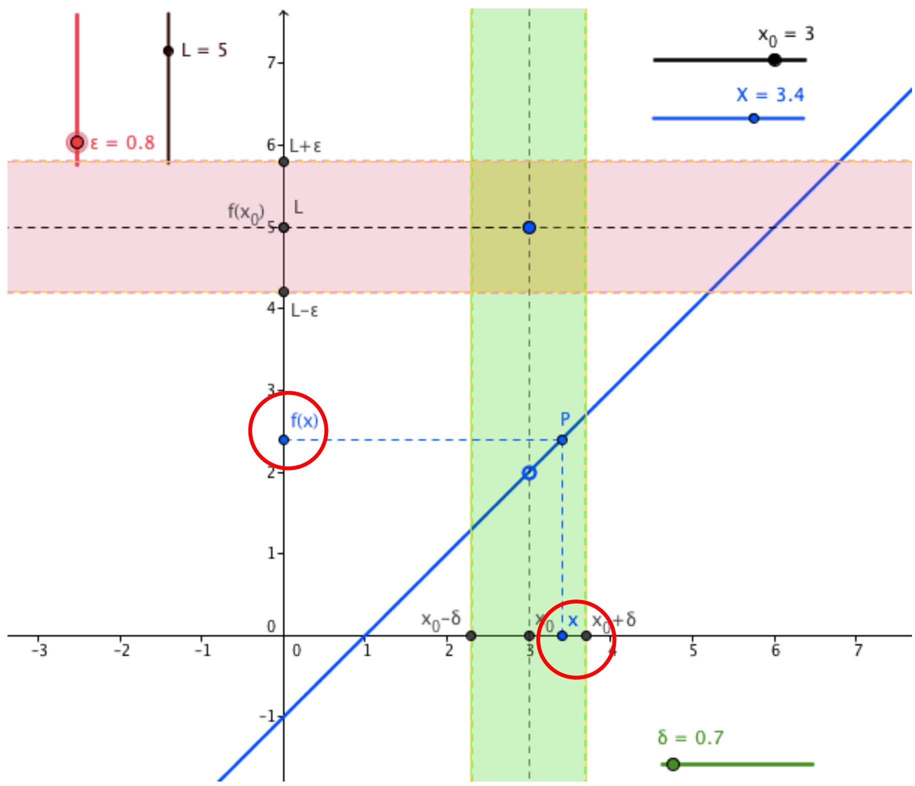
Attività 1

$$f(x) = \begin{cases} 5 & se\ x = 3 \\ \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x - 3} & se\ x \neq 3 \end{cases}$$

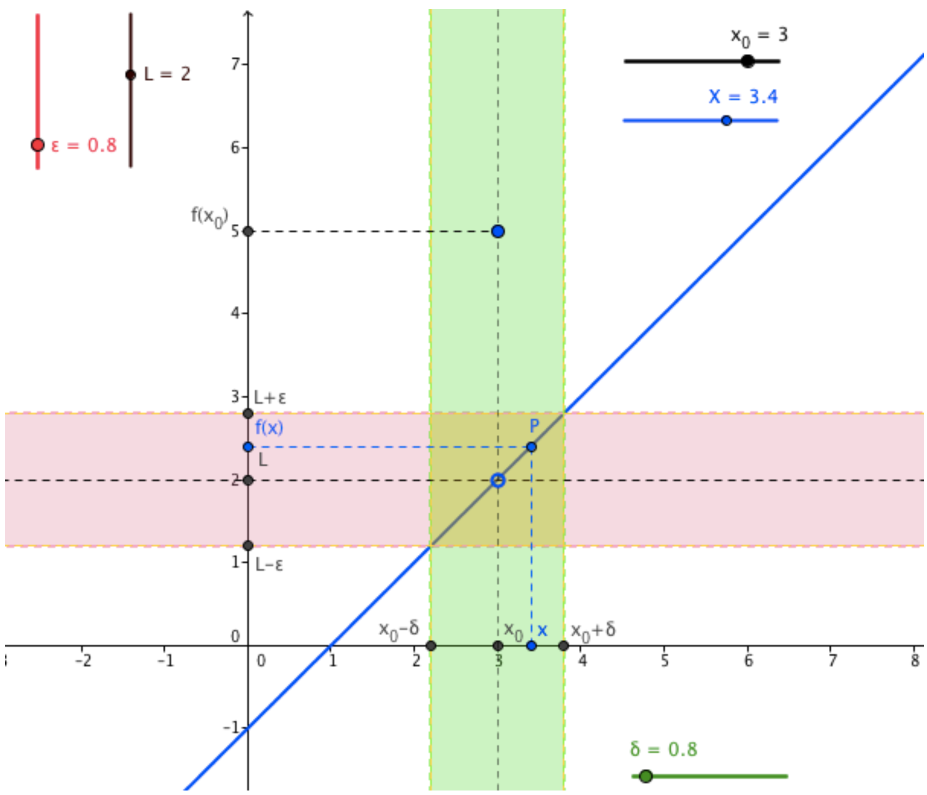
La funzione data è riportata in figura:



1. Già osservando il grafico, si nota che $\lim_{x \to 3} f(x) = 2$, perché quando le *x* si avvicinano a 3 da destra e da sinistra, le corrispondenti *f(x)* si avvicinano a 2.
   In base a questa osservazione, sappiamo già che $\lim_{x \to 3} f(x) = 5$ non è corretto. Infatti, se consideriamo una striscia orizzontale intorno di 5, NON possiamo trovare una striscia verticale intorno di 3 che soddisfi la definizione di limite: ci sono *x* nella striscia verticale le cui *f(x)* NON stanno nella striscia orizzontale (vedi figura sotto).



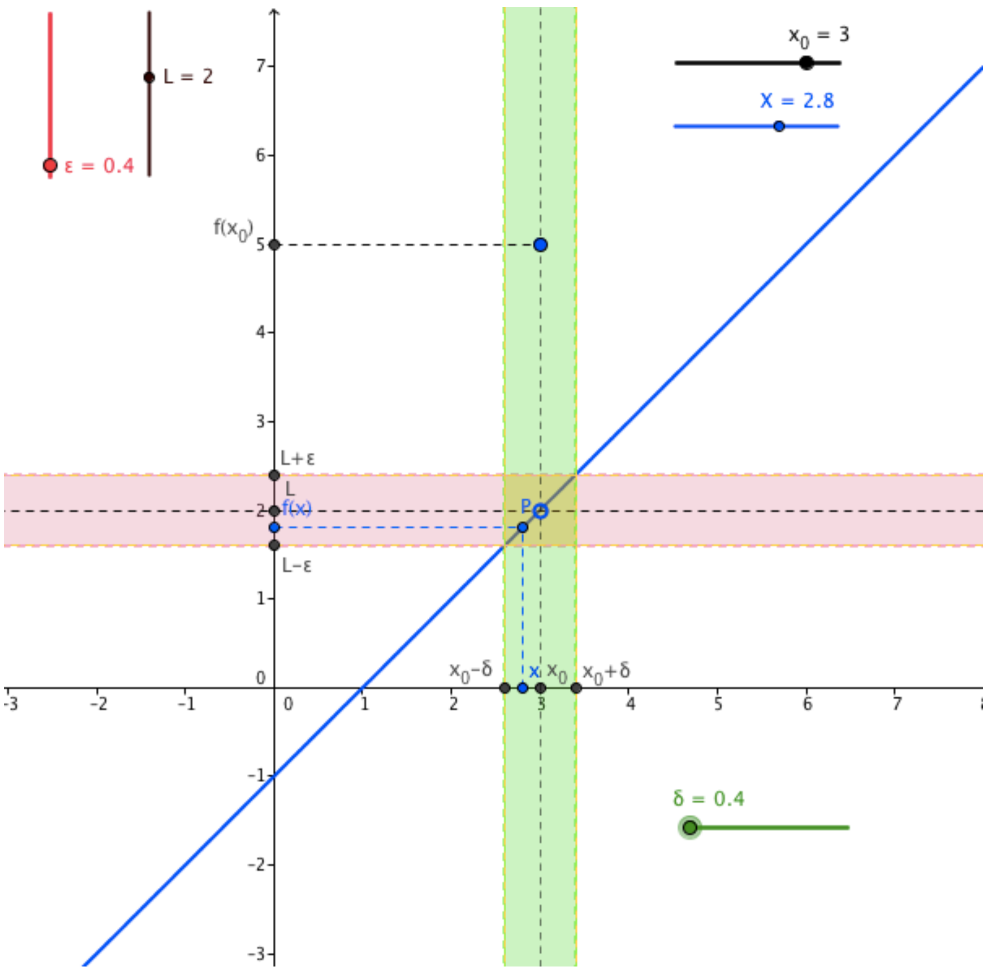
2. $\lim_{x \to 3} f(x) = 2$ è corretto: se prendiamo una striscia orizzontale intorno di 2 (ad esempio ε = 0.8), riusciamo a trovare una striscia verticale intorno di 3 (δ = 0.8) che soddisfa la definizione: ogni *x* nella striscia verticale ha il suo *f(x)* nella striscia orizzontale (vedi figura sotto).



L'unico punto della striscia verticale il cui *f(x)* non sta nella striscia orizzontale è $x = 3$, ma **non ci interessa!** Il limite ci dà un'informazione sul comportamento della funzione **nell'intorno** del punto $x = 3$: cosa succede esattamente in $x = 3$ non ci interessa.

Questo vale QUALUNQUE sia la striscia orizzontale considerata: se considero ε più piccolo, la striscia verticale avrà δ più piccolo (vedi figura sotto, con $\varepsilon = 0.4$ e $\delta = 0.4$).
E' fondamentale che la definizione sia soddisfatta per qualunque striscia orizzontale (qualunque ε) come vedremo nell'attività 2.

Notiamo anche la dipendenza di δ da ε: δ non può essere scelto a caso, se prendiamo ε più piccolo anche δ sarà più piccolo (vedi figura sotto)**.**



3. Il valore che la funzione assume in $x = 3$ è 5:

   $f(3) = 5$

   e non coincide con il limite:

   $\lim_{x \to 3} f(x) = 2$

In generale, limite e valore della funzione NON coincidono.

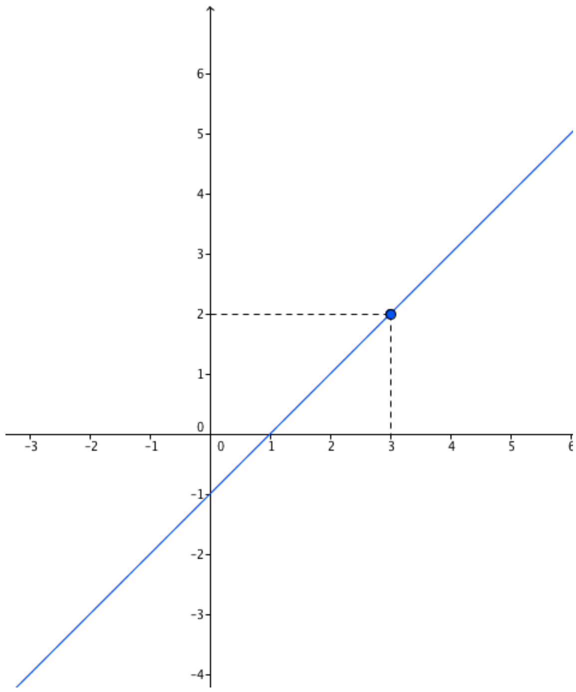
Coincidono SOLO se la funzione è continua nel punto.

In questo caso, f non è continua in $x = 3$: presenta infatti una discontinuità di 3° specie (o eliminabile).

Come visto a lezione, possiamo eliminare questa discontinuità modificando la funzione nel modo seguente:

$$f(x) = \begin{cases} 2 & se\ x = 3 \\ \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x - 3} & se\ x \neq 3 \end{cases}$$

Il grafico della funzione sarà allora quello della retta $y = x - 1$:

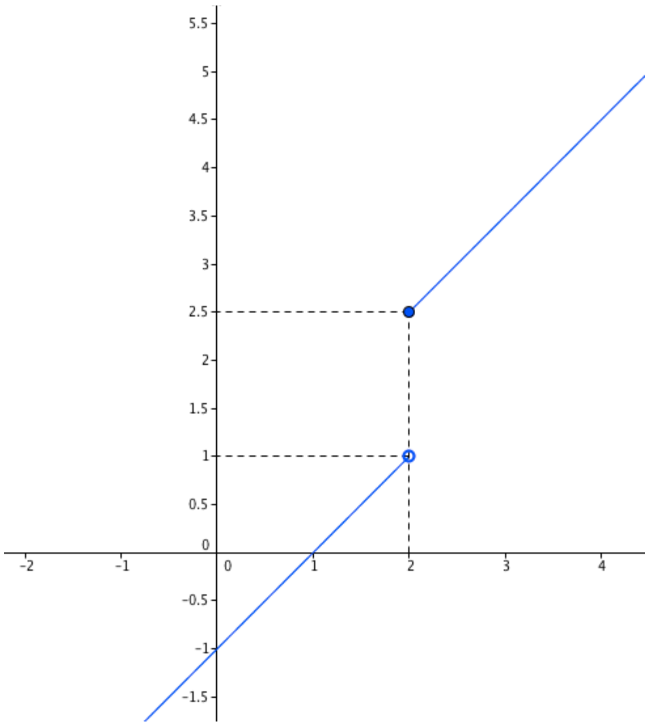


La funzione è quindi continua e $\lim_{x \to 3} f(x) = 2 = f(3)$

Attività 2

$$f(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{2} & se\ x \geq 2 \\ x - 1 & se\ x < 2 \end{cases}$$

La funzione data è riportata in figura:



Già osservando il grafico, si nota che $\lim_{x \to 2} f(x)$ NON ESISTE, perché limite destro e sinistro sono diversi: quando le *x* si avvicinano a 2 da destra, le corrispondenti *f(x)* si avvicinano a 2.5; quando le *x* si avvicinano a 2 da sinistra, le corrispondenti *f(x)* si avvicinano a 1.

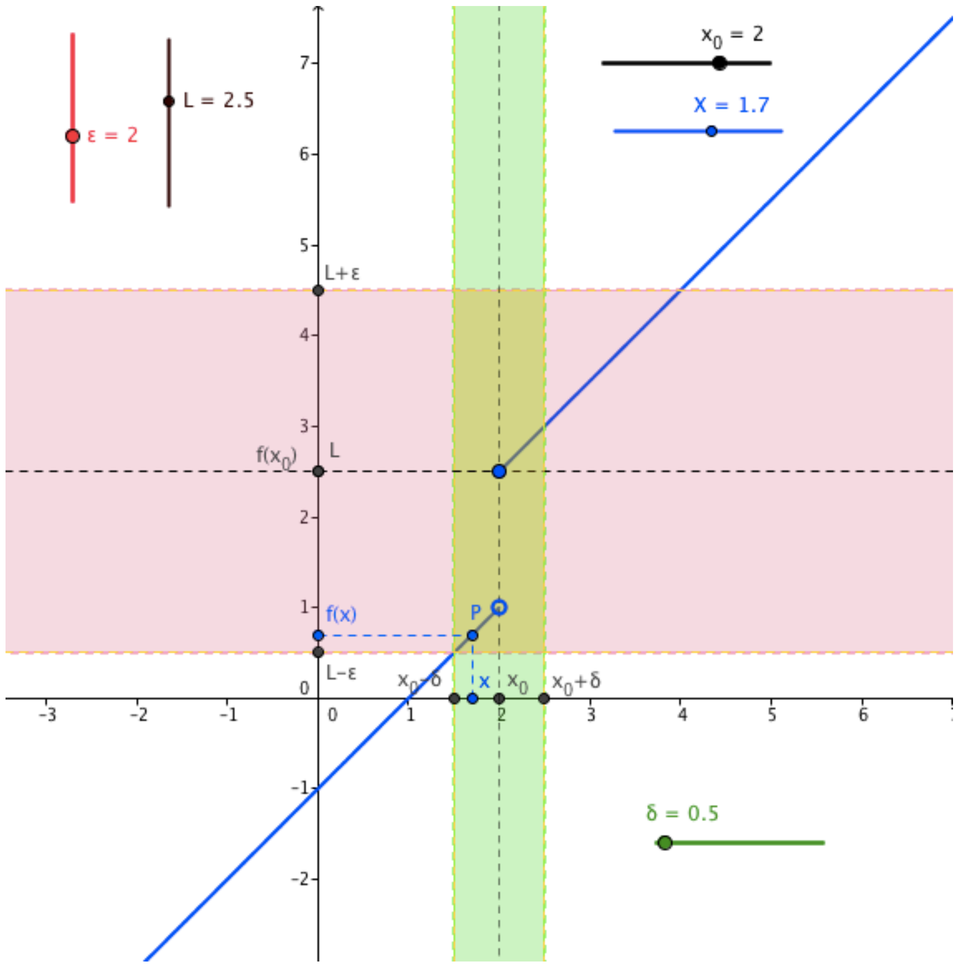
Quando limite destro e sinistro sono diversi, il limite non esiste. Esistono solo limite destro e limite sinistro.

1.a Luca ipotizza che $\lim_{x \to 2} f(x) = 2.5$ perché *f(2)* = 2.5. Come abbiamo detto nell'attività 1, questa ipotesi è sbagliata, perché in generale limite e valore della funzione nel punto sono diversi. In *x* = 2 infatti la funzione presenta una discontinuità di 1° specie (o di salto): dato che la funzione non è continua, limite e valore della funzione NON possono essere uguali.

1.b Luca esegue una verifica che apparentemente sembra confermare la sua ipotesi che $\lim_{x \to 2} f(x) = 2.5$. Ma la verifica è errata, in quanto Luca sceglie prima δ e poi ε. In base alla definizione di limite, **PRIMA si fissa ε e DOPO si sceglie δ**.

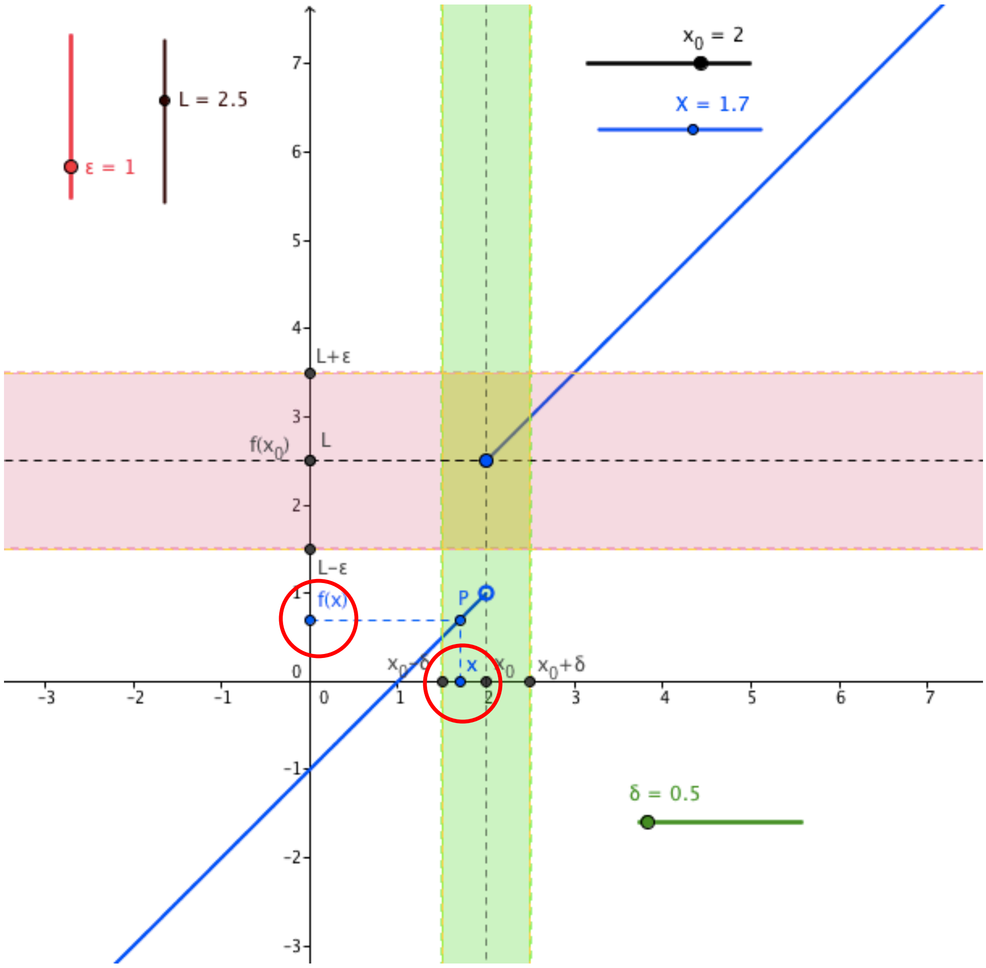
Perché questo? Abbiamo detto che il limite in x = 2 non esiste: se fissiamo prima δ e poi ε otteniamo l'assurdo che il limite esiste.

2. Fissiamo prima ε e poniamolo uguale a 2. Il più grande valore di δ che soddisfa la definizione è 0.5: ogni x nella striscia verticale ha il suo *f(x)* nella striscia orizzontale (vedi figura sotto).



Ma questo non significa che il limite è corretto (abbiamo infatti detto che non lo è). Trovare un solo valore di ε per cui esiste un δ che soddisfa la definizione, non è garanzia che il limite sia corretto. Abbiamo detto nell'attività 1 che la definizione deve essere soddisfatta **per ogni** valore di ε.

3. Se consideriamo un $\varepsilon < 1.5$, non riusciamo a trovare un δ che soddisfi la definizione: ci sono delle x nella striscia verticale le cui *f(x)* non stanno nella striscia orizzontale (vedi la figura sotto con $\varepsilon = 1$).



Se troviamo anche solo un ε per cui non esiste δ che soddisfi la definizione, il limite non è corretto.

4. Il limite in $x = 2$ non esiste perché limite destro e sinistro sono diversi. Esistono solo limite destro $\lim_{x \to 2^+} f(x) = 2.5$ e limite sinistro $\lim_{x \to 2^-} f(x) = 1$

RIASSUMIAMO I PUNTI FONDAMENTALI DELLA DEFINZIONE

a) **Prima si fissa ε e solo dopo si sceglie δ**

b) **La scelta del valore di δ dipende da ε**

c) **Il limite deve essere soddisfatto per ogni valore di ε**

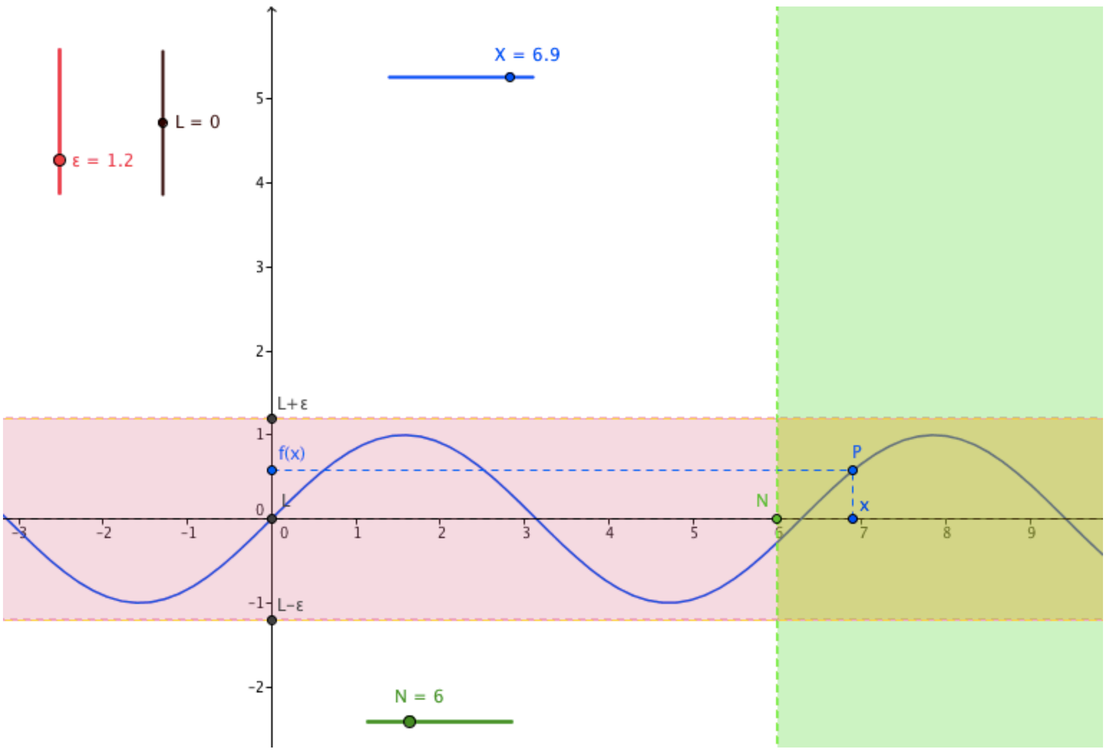
Attività 3

1. Siamo nel caso in cui L è finito e x è infinito. Quindi, a differenza delle attività precedenti, l'intorno di x_0 è l'intorno di $+\infty$, ossia un intervallo della forma $(N, +\infty)$ con $N > 0$.

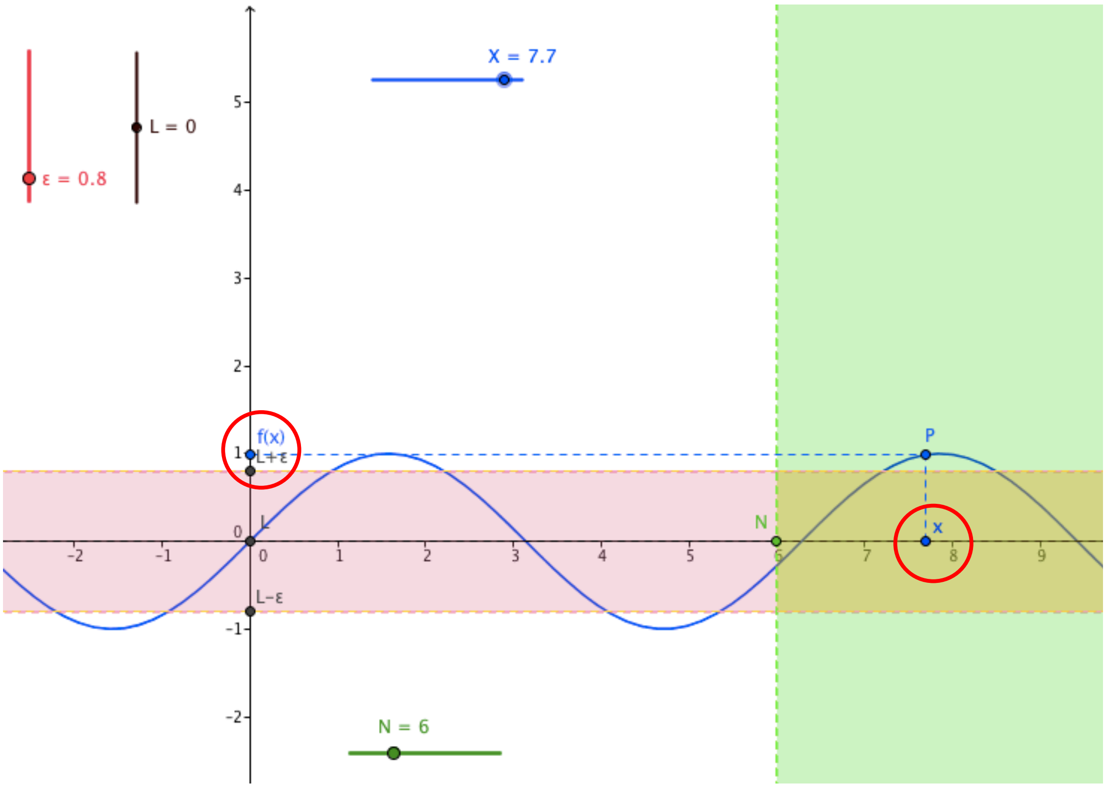
   Ponendo ε = 1.2 e N = 6 (vedi figura sotto), notiamo che, prendendo le x nella striscia verticale, le corrispondenti *f(x)* stanno nella striscia orizzontale, ossia:

   $$|f(x) - L| = |f(x) - 0| = |f(x)| < \varepsilon$$

   Per ε = 1.2 il limite sembra essere corretto. Ma sappiamo che deve essere corretto **per ogni** valore di ε .



2. Scegliamo ad esempio ε = 0.8. Adesso la definizione di limite non è soddisfatta, perché ci sono delle *x* nella striscia verticale le cui *f(x)* NON stanno nella striscia orizzontale (vedi figura sotto). Quindi $|f(x)| > \varepsilon$



Se prendiamo un *N* più grande non cambia niente, perché la funzione è periodica e quindi ci saranno sempre dei tratti della funzione esterne alla striscia orizzontale.

3. Non è vero che $\lim_{x \to +\infty} \sin(x) = 0$ perché ci sono valori di ε per cui la definizione non è soddisfatta. In particolare il limite **non esiste**: la funzione continua a oscillare tra 1 e -1 all'infinito, ossia non si avvicina mai ad un unico valore.

LEZIONI 5 e 6: ESERCIZI SULLA VERIFICA DI LIMITE TRAMITE DEFINIZIONE

Riportiamo gli esercizi svolti in classe sulla verifica dei limiti tramite definizione.

Esercizio 11

$$\lim_{x \to -1}(3x+1) = -2$$

Il primo esercizio svolto in classe è tecnicamente molto semplice, in maniera da aiutare gli studenti a comprendere il procedimento di verifica.

Esercizio 12

$$\lim_{x \to 4}(2x+1) = 7$$

Anche questo esercizio è molto semplice, ma si tratta di un limite errato: questo permette di mostrare ai ragazzi che quando il procedimento di verifica porta ad un intorno di x_0 solo per certi valori di ε, il limite non è corretto.
E' possibile inoltre chiedere agli studenti di scrivere il limite corretto in base ai risultati della verifica.

Esercizio 13

$$\lim_{x \to 2}\frac{x}{x-1} = 2$$

Questo limite può essere interessante per mostrare ai ragazzi alcune considerazioni necessarie nel corso dello svolgimento della verifica, come il fatto che non è restrittivo porre la condizione $\varepsilon < 1$, dal momento che ε può essere scelto "piccolo a piacere".

Esercizio 14

$$\lim_{x \to 2} x^2 = 4$$

Le soluzioni della verifica sono date da un intorno di 2 e un intorno di -2. Questo consente di far osservare ai ragazzi che vale anche $\lim_{x \to -2} x^2 = 4$.

Esercizio 15

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x-1}{x} = 1$$

Il risultato del procedimento di verifica permette di vedere che vale anche $\lim_{x \to -\infty} \frac{x-1}{x} = 1$

Esercizio 16

$$\lim_{x \to 1} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty$$

Esercizio 17

$$\lim_{x \to +\infty} \log_{\frac{1}{2}} x = -\infty$$

VERIFICA FINALE

ESERCIZIO 1

a) Descrivi utilizzando gli intorni o le strisce che abbiamo visto su Geogebra che cosa significa $\lim_{x\to 4} f(x) = 3$. Ricordati di sottolineare l'ordine con cui vanno presi gli intorni e le loro caratteristiche.

....

....

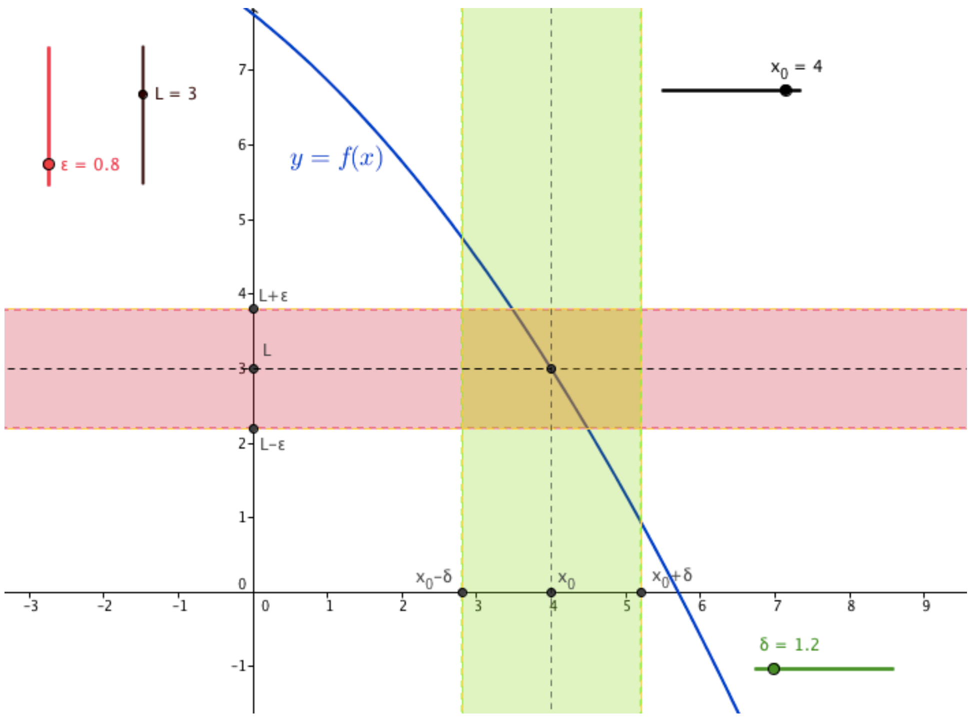
....

....

....

b) Sia data la funzione $y = f(x)$ il cui grafico è disegnato in blu su Geogebra. Sappiamo che $\lim_{x\to 4} f(x) = 3$, quindi è stato posto $x_0 = 4$ e $L = 3$.

Osserva la figura sottostante: i valori scelti $\varepsilon = 0.8$ e $\delta = 1.2$ soddisfano la definizione di limite? Perché?



ESERCIZIO 2

Sia $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ con x_0 e L finiti o infiniti. Indica se le seguenti affermazioni sono vere o false:

a) I valori della funzione si avvicinano al limite L quando le x si avvicinano a x_0. In nessun caso $f(x) = L$.

b) Il limite rappresenta il processo di avvicinamento delle $f(x)$ a L quando le x si avvicinano a x_0.

c) Il limite della funzione per x che tende a x_0 può non esistere.

d) Se $y = L$ è asintoto orizzontale per la funzione, il grafico di f non può mai attraversare tale retta.

e) Se $x = x_0$ è asintoto verticale per la funzione, il grafico di f non può mai attraversare tale retta.

f) La funzione f assume valori vicini quanto si vuole a L tutte le volte che i valori di x sono sufficientemente vicini a x_0 (con eventuale esclusione del punto $x = x_0$).

ESERCIZIO 3

Quali affermazioni sono <u>sicuramente</u> vere se f è una funzione tale che $\lim_{x \to 4} f(x) = 6$? Fornisci un controesempio grafico quando le affermazioni sono false.

a) $f(4) = 6$.

b) f è continua in $x = 4$.

c) $x = 4$ appartiene al dominio di f.

d) f è discontinua in $x = 4$.

e) Nessuna delle precedenti è vera.

ESERCIZIO 4

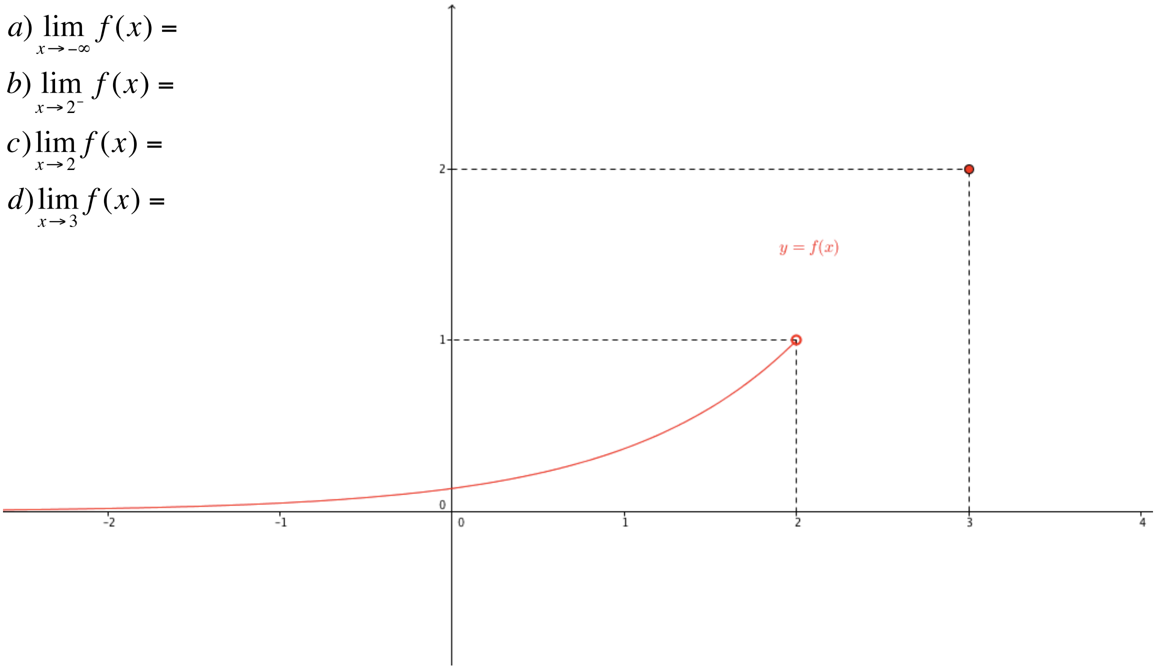
Deduci dal grafico i valori dei seguenti limiti, se esistono.

$a)\ \lim_{x \to -\infty} f(x) =$

$b)\ \lim_{x \to 2^-} f(x) =$

$c)\ \lim_{x \to 2} f(x) =$

$d)\ \lim_{x \to 3} f(x) =$



ESERCIZIO 5

Osserva il grafico di $y = f(x)$. Indica quali dei seguenti limiti sono corretti e quali sono errati. Correggi quelli errati.

$a)\ \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

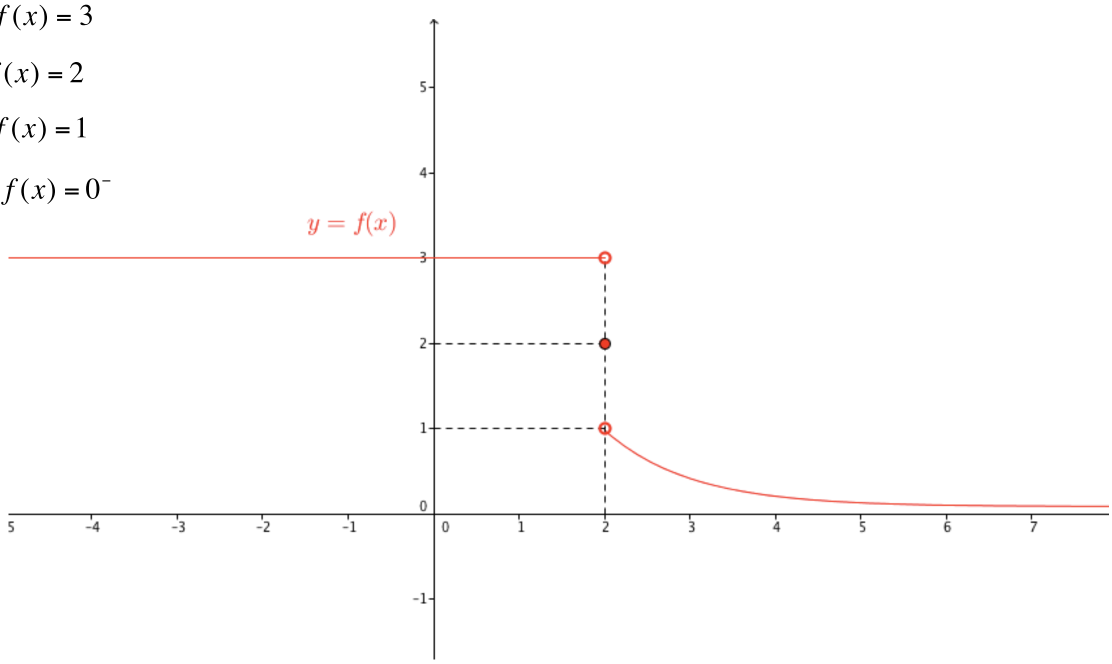
$b)\ \lim_{x \to 1} f(x) = 3$

$c)\ \lim_{x \to 2^-} f(x) = 3$

$d)\ \lim_{x \to 2} f(x) = 2$

$e)\ \lim_{x \to 2^+} f(x) = 1$

$f)\ \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0^-$



ESERCIZIO 6

Se $\forall\, a > 0$ $|f(x)+5| < a$ è verificato per $x > 1+\dfrac{3}{a}$ allora:

$a)\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -5$

$b)\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = -5$

$c)\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -5$

$d)\ \lim\limits_{x\to 1} f(x) = 5$

$e)\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 5$

ESERCIZIO 7

a) In base al grafico di *y = f(x)* determina i seguenti limiti:

$a.1)\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) =$

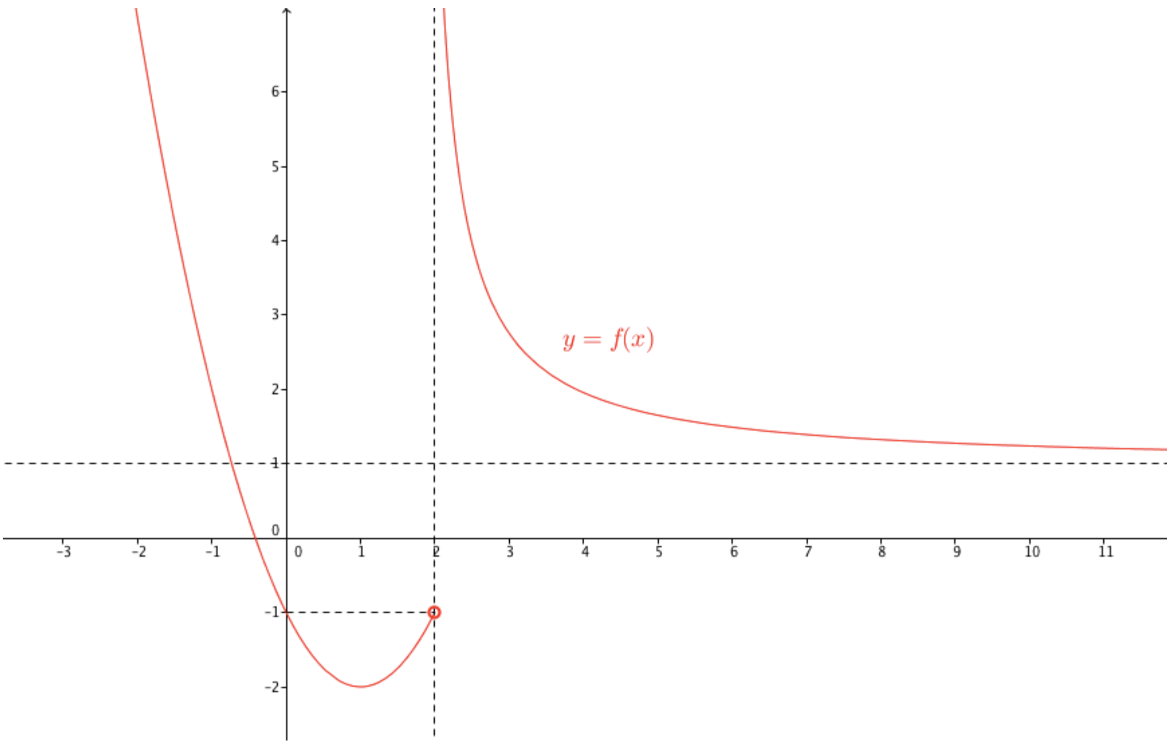
$a.2)\ \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) =$

$a.3)\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) =$

$a.4)\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) =$

b) Che cosa rappresentano le rette *y* = 1 e *x* = 2 ?

....



ESERCIZIO 8

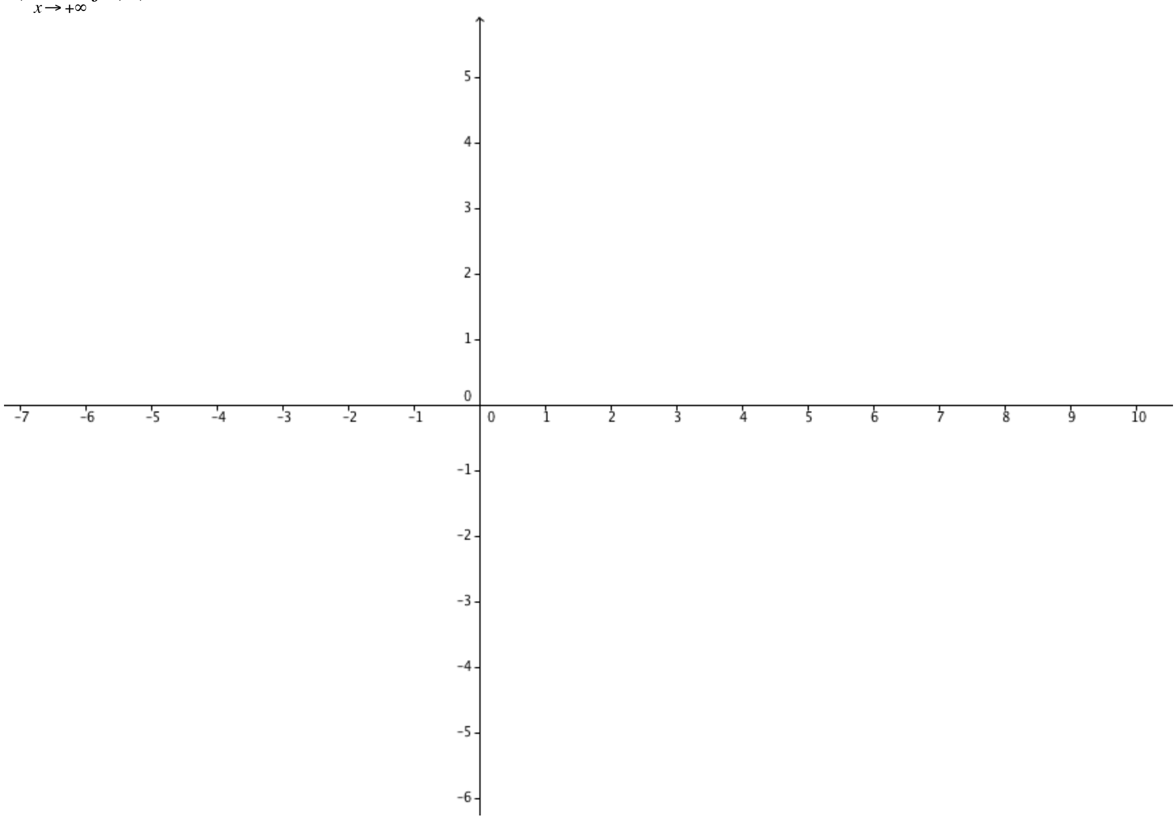
Disegna il grafico di una funzione *y = f(x)* che soddisfi i seguenti limiti:

$a)\ \lim_{x \to -\infty} f(x) = 1^-$

$b)\ \lim_{x \to 3^-} f(x) = +\infty$

$c)\ \lim_{x \to 3^+} f(x) = -\infty$

$d)\ \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0^-$



DURATA DELLA PROVA: 1 ORA

BIBLIOGRAFIA

[1] G. Bachelard, *La formation de l'esprit scientifique*, Paris, Vrin, 1971.

[2] G.T. Bagni, *Corso di Matematica 3*, Bologna, Zanichelli, 1996.

[3] G.T. Bagni, *La visualizzazione nella scuola secondaria superiore*, L'Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate, 20B no. 4 (1997), 309-335.

[4] G.T. Bagni, *L'infinitesimo nelle concezioni degli studenti prima e dopo lo studio dell'analisi*, L'Educazione Matematica, XIX, V, 3, 2 (1998), 110-121.

[5] G.T. Bagni, *Limite e visualizzazione: una ricerca sperimentale*, L'Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate, 22B no. 4 (1999), 353-372.

[6] G.T. Bagni, *Infinito e infinitesimo potenziale ed attuale: una sfida per la scuola secondaria superiore*, Bollettino dei Docenti di Matematica, 42 (2001), 9-20.

[7] J. Bezuidenhout, *Limits and continuity: some conceptions of first-year students,* International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 32 no. 4 (2001), 487-500.

[8] G. Brousseau, *Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques,* Recherches en Didactique des Mathématiques, 4 no. 2 (1983), 165-198.

[9] B. Cornu, *Apprentissage de la notion de limite: modèles spontanés et modèles propres*, Proceedings of PME 5, Grenoble, 322-326, 1981.

[10] B. Cornu, *Limits*, In D. Tall (ed.) *Advanced mathematical thinking*, Dordrecht, Kluwer Academic, 153-166, 1991.

[11] R. B. Davis e S. Vinner, *The notion of limit: some seemingly unavoidable misconception stages*, Journal of Mathematical Behavior, 5 (1986), 281-303.

[12] I. Dimarakis e A. Gagatsis, *Alcune difficoltà nella comprensione del concetto di limite*, La Matematica e la sua Didattica, 2 (1997), 132-149.

[13] R. Duval, *Régistres de représentations sémiotiques et fonctionnement cognitif de la pensée*, Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 5 (1993), 37-65.

[14] C. H. Edwards, *The historical development of the calculus*, New York, Springer-Verlag, 1979.

[15] J. V. Grabiner, *The changing concept of change: the derivative from Fermat to Weierstrass*, Mathematics Magazine, 56 no. 4 (1983), 195-206.

[16] E. Gray e D. Tall, *Duality, ambiguity and flexibility in successful mathematical thinking*, Proceedings of PME 15, Assisi, 72-79, 1991.

[17] B. Gucler, *Limitless ways to talk about limits: communicating mathematical ideas in the classroom*, Mathematics Teacher, 105 no. 9 (2012), 697–701.

[18] K. Juter, *Students' conceptions of limits: high achievers versus low achievers*, The Montana Mathematics Enthusiast, 4 no. 1 (2007), 53-65.

[19] H. J. Keisler, *Foundations of infinitesimal calculus*, Prindle, Schmidt - Weber, 1976.

[20] L. Lamberti, L. Mereu, A. Nanni, *Nuovo Matematica Tre*, Milano, Etas Libri, 1993.

[21] F. Magnanini, *Applets sulla definizione rigorosa di limite*. http://web.math.unifi.it/users/bianchi/didattica_del_calcolo/applets_magnanini/index.html

[22] J. Monaghan, *Problems with the language of limits*, For the Learning of Mathematics, 11 no. 3 (1991), 20–24.

[23] M. Przenioslo, *Perceiving the concept of limit by secondary school pupils*, Disputationes Scientificae Universitatis Catholicae in Ružomberok, 3 (2003), 75–84.

[24] A. Robinson, *Non-standard analysis*, Amsterdam, 1966.

[25] K. Roh, *College students' intuitive understanding of the concept of limit and their level of reverse thinking*, Doctoral dissertation, The Ohio State University, Columbus, 2005.

[26] L. Sasso, *Nuova matematica a colori edizione blu 5*, Petrini, 2012.

[27] L. Scaglianti, L. Severi, *Astratto e concreto*, La Scuola, 2012.

[28] R. Schwarzenberger e D. Tall, *Conflicts in the learning of real numbers and limits*, Mathematics Teaching, 82 (1978), 44-49.

[29] A. Sierpinska, *Obstacles épistémologiques relatifs à la notion de limite*, Recherches en Didactiques des Mathématiques, 6 no. 1 (1985), 5-67.

[30] A. Sierpinska, *Humanities students and epistemological obstacles related to limits*, Educational Studies in Mathematics, 18 (1987), 371-397.

[31] D. Tall, *Mathematical intuition, with special reference to limiting processes*, Proceedings of PME 4, Berkeley, 170-176, 1980.

[32] D. Tall, *Inconsistencies in the learning of calculus and analysis*, Focus on Learning Problems in Mathematics, 12 (1990), 49–64.

[33] D. Tall, *Students' difficulties in calculus*, Proceedings of Working Group 3 on Students' Obstacles in Calculus, ICME-7, Québec, 13-28, 1993.

[34] D. Tall e S. Vinner, *Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity*, Educational Studies in Mathematics, 12 no. 7 (1981), 151-169.

[35] F. Tonolini, G. Tonolini, L. Tonolini, *I fondamenti concettuali della matematica*, Milano, Minerva Scuola, 2012.

[36] V. Villani et al., *Non solo calcoli: domande e risposte sui perché della matematica*, Milano, Springer-Verlag, 2012.

[37] S. Vinner, *The naive platonic approach as a teaching strategy in arithmetic*, Educational Studies in Mathematics, 6 no. 3 (1975), 339–350.

[38] S. Vinner, *Concept image, concept definition and the notion of function*, International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 14 no. 3 (1983), 293-305.

[39] S. Vinner, *The role of definition in teaching and learning mathematics*, In D. Tall (ed.) *Advanced mathematical thinking*, Dordrecht, Kluwer Academic, 65-81, 1991.

[40] S. R. Williams, *Models of limit held by college calculus students*, Journal for Research in Mathematics Education, 22 no. 3 (1991), 219-236.

[41] R. Zan, *Difficoltà in matematica. Osservare, interpretare, intervenire,* Milano, Springer-Verlag, 2007.

RINGRAZIAMENTI

A poche ore dalla stampa di questo lavoro, mi accingo a scrivere i fatidici ringraziamenti, la parte più bella della tesi perché è l'unica che tutti leggono!!

Sarò sintetica, perché la brevità è nella mia natura e perché voi conoscete bene l'amicizia di cui mi fate oggetto.

Ringrazio innanzitutto il Prof. Bianchi, senza il quale non avrei potuto lavorare su una tesi in didattica della matematica: dopo una lunghissima ricerca tra vari professori, ho infatti trovato in lui una persona disponibile e interessata a seguirmi, che ringrazio soprattutto per la cura con cui mi ha aiutata nella preparazione delle lezioni e nella stesura della tesi, spiegandomi sempre le ragioni di ogni scelta e di ogni correzione.

Ringrazio poi il Prof. Checcaglini, che mi ha accolta a braccia aperte nelle sue classi e mi ha accompagnata nel mio primo ingresso nel mondo della scuola, con fiducia e disponibilità.

Ringrazio tutta la mia famiglia, per il calore e l'affetto mostrato nei piccoli gesti, in particolare i miei genitori che mi hanno permesso di cambiare facoltà, consentendomi di seguire quella che vedo essere la mia strada.

Ringrazio Fra, perché se sono qui adesso è in gran parte grazie a lui, che ha avuto fiducia in me e mi ha aiutata a prendere sul serio quello che desidero.

Un pensiero particolare va a Jenny, con la quale ho vissuto l'ultimo anno di università, condividendo fatiche e gioie, soprattutto quelle stocastiche ;-)

Ringrazio il mio vecchio appa, la Chiarina, l'Ila, la Fra, la Monica (a cui aggiungo anche la Chiara N. sempre considerata parte della famiglia!), di cui sento tanto la mancanza per la compagnia quotidiana e le grasse, grassissime risate.

Ringrazio tutto il gruppo di ingegneria che mi ha accolta e "allevata" e per il quale conservo un posto particolare nel mio cuore, pur essendo passata di là da viale Morgagni.

Ringrazio in particolare Alex, l'Anna, il Bazzica, la Cami, il Cata, Ciro, il Lore, il Gama, il Vannu, che, in un modo o in un altro, mi sono stati vicini in questi anni, soprattutto nell'ultimo periodo, facendomi sentire abbracciata e voluta bene in tutte le difficoltà.

Come non ringraziare il Fons che è come un altro fratello, per la sua amicizia sempre sincera e leale, e per la sua testimonianza che si può affrontare la vita con fiducia e serenità.

Ringrazio l'Ale, per i giorni passati insieme a Barcellona e per le telefonate su Skype (ma soprattutto per avermi scritto l'abstract della tesi in inglese!!!!!). La Vale, per la sua amicizia costante, per le sue domande "scomode" (forse meglio dire interrogatori!?) che mi aiutano sempre a prendere più coscienza di me.

Ringrazio tutto il gruppo di scienze, in particolare Le Dine, l'Alice, l'Elena, la Marta e la Marti, e ringrazio l'Elisa e la Francesca, che mi hanno fatto sentire meno pesante l'impatto con la nuova realtà matematica.

Ringrazio Renzo, che mi ha sostenuta (e ha sopportato le mie ansie!) negli ultimi mesi, credendo in me e nelle mie capacità più di quanto non faccia io, con affetto e rispetto per tutta la mia persona.

Infine ringrazio Eljona, l'amica a cui è dedicato tutto il mio lavoro, sempre presente nei miei pensieri e nella mia vita. Nei momenti di fatica e di sconforto, in cui era impensabile mettermi a scrivere al computer o andare in classe, avere in mente la sua passione per lo studio è sempre stato un punto di ripartenza, uno stimolo per ridomandarmi le ragioni per cui ho iniziato questa tesi, che cosa c'è in questo lavoro che corrisponde a me e risponde a quello che desidero. E la sua testimonianza che si può amare la vita, qualunque siano le circostanze che ti capitano, se ti affidi alle persone che ti vogliono bene e a Chi te le mette accanto, mi aiuta ad affrontare con fiducia ogni giornata.