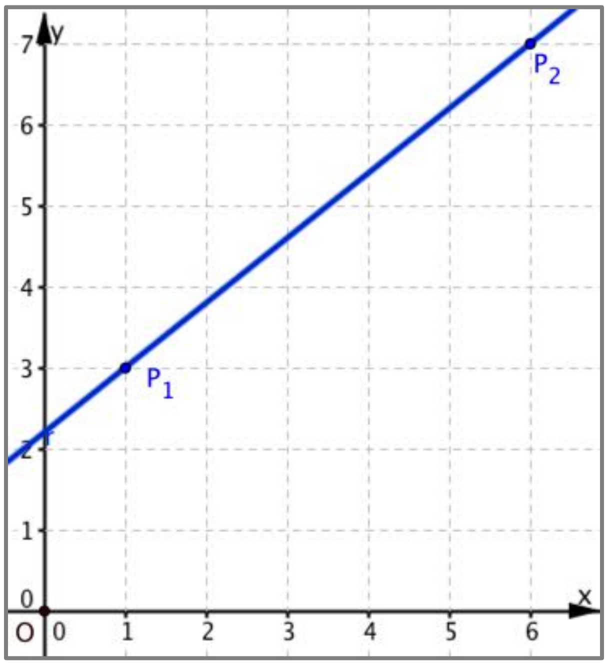
Coordinate cartesiane nello spazio

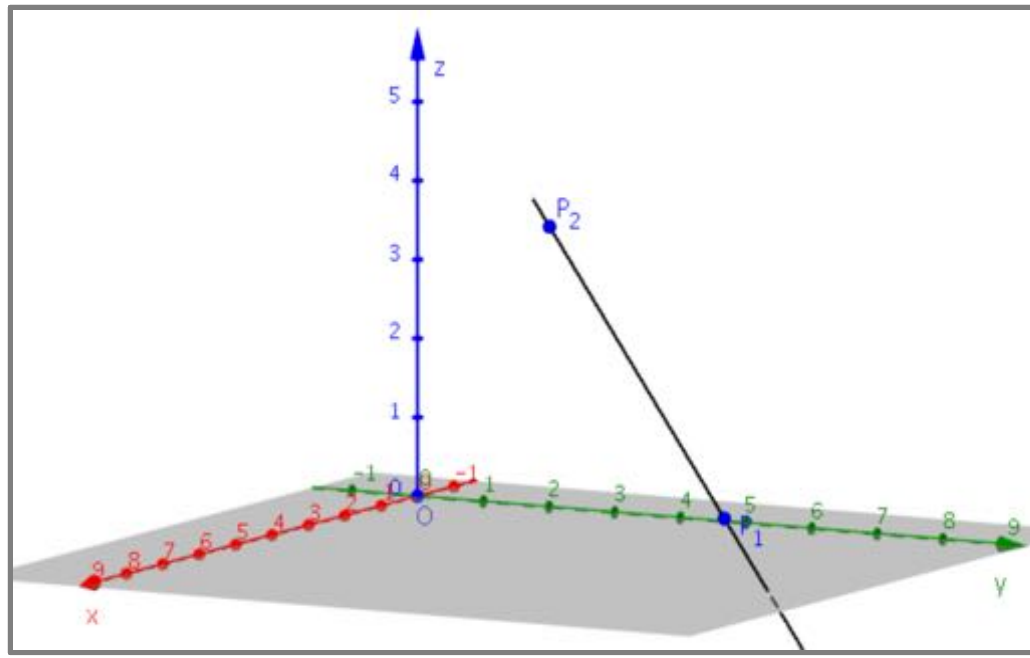
Equazioni di rette e circonferenze nello spazio

Dal piano allo spazio

Ricordiamo quello che conosciamo sulla retta nel piano cartesiano e, per analogia, troviamo equazioni e proprietà della retta nello spazio.

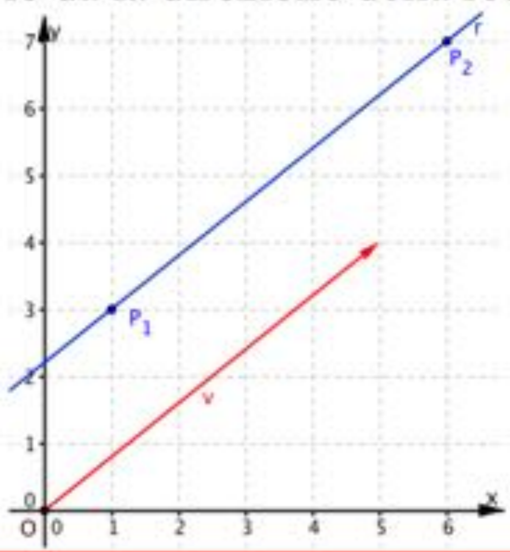
PIANO → **SPAZIO**





Per due punti passa una sola retta.

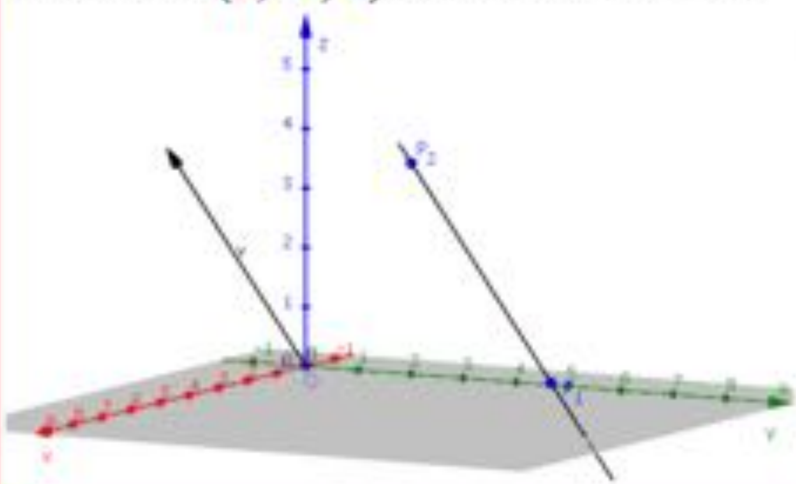
Retta nel piano: vettore direzione

RETTA NEL PIANO	
Esempio	**In generale**
Retta r per $P_1(1; 3)$ e $P_2(6; 7)$	**Retta r per $P_1(x_1; y_1)$ e $P_2(x_2; y_2)$**
Vettore direzione	
$\frac{x-1}{6-1}=\frac{y-3}{7-3} \Leftrightarrow \frac{x-1}{\boxed{5}}=\frac{y-3}{\boxed{4}}$ Il vettore $\boldsymbol{v}(5, 4)$ è parallelo ad r, perciò dà la direzione della retta r 	$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1} \Leftrightarrow \frac{x-x_1}{\boxed{l}}=\frac{y-y_1}{\boxed{m}}$ Il vettore $\boldsymbol{v}(l, m)$ dà la direzione della retta r che passa per P_1 e P_2. ***Perciò individuo una retta nel piano cartesiano con:*** ***- due punti P_1 e P_2*** ***oppure*** ***- un punto P_1 e un vettore $\boldsymbol{v}(l, m)$***

Retta nel piano: equazioni parametriche

RETTA NEL PIANO	
Esempio	**In generale**
Retta r per $P_1(1; 3)$ e $P_2(6; 7)$	Retta r per $P_1(x_1; y_1)$ e $P_2(x_2; y_2)$
$\frac{x-1}{5}=\frac{y-3}{4}=t \Rightarrow \begin{cases} x-1=5t \\ y-3=4t \end{cases}$ Ottengo così le *equazioni parametriche* $\begin{cases} x=1+5t \\ y=3+4t \end{cases}$	$\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=t \Rightarrow \begin{cases} x-x_1=lt \\ y-y_1=mt \end{cases}$ Ottengo così le *equazioni parametriche* $\begin{cases} x=x_1+lt \\ y=y_1+mt \end{cases}$
Le equazioni parametriche descrivono le coordinate (x, y) di un punto P che percorre la retta, mentre il parametro t assume tutti i valori reali	

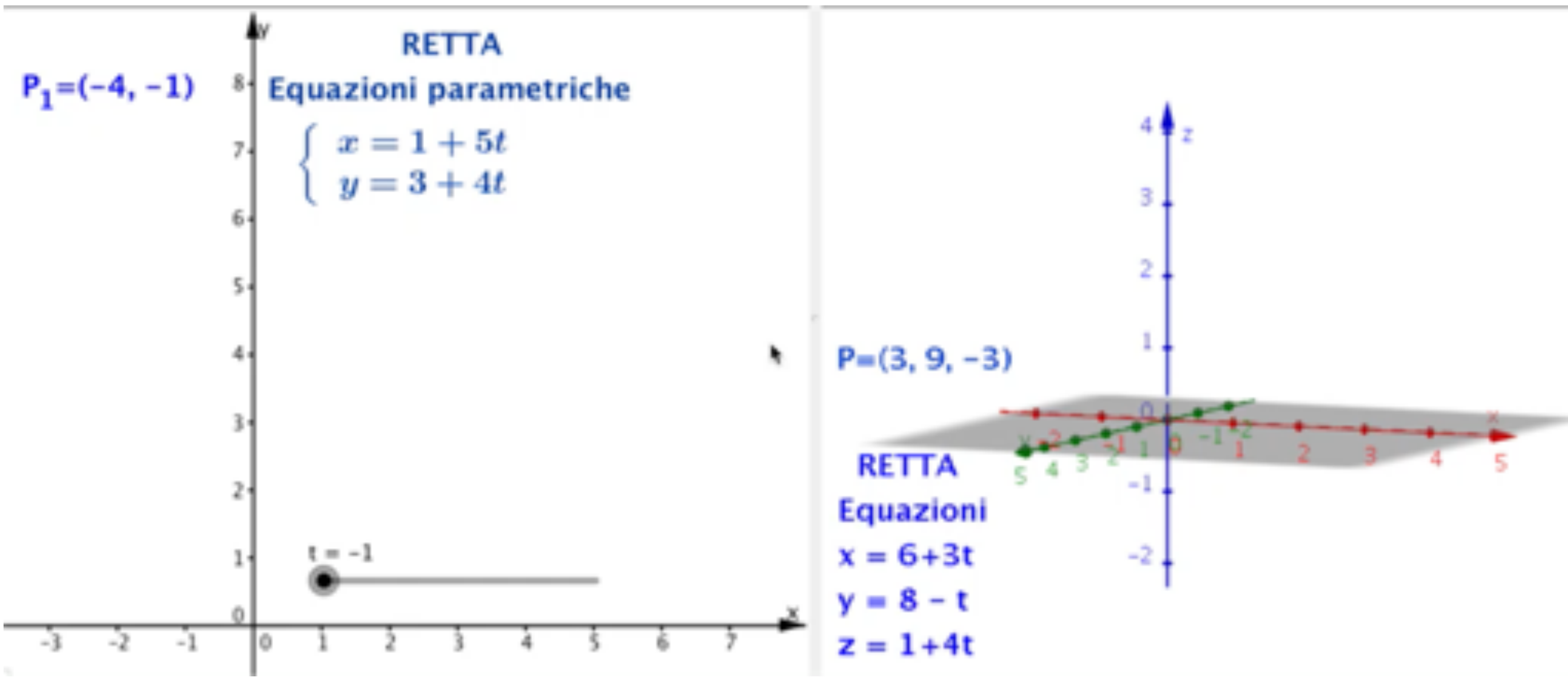
Retta nello spazio: vettore direzione

RETTA NELLO SPAZIO	
Esempio	**In generale**
Retta r per $P_1(6; 8; 1)$ e $P_2(9; 7; 5)$	**Retta r per $P_1(x_1; y_1; z_1)$ e $P_2(x_2; y_2; z_2)$**
Vettore direzione	
$\frac{x-6}{9-6}=\frac{y-8}{7-8}=\frac{z-1}{5-1} \Leftrightarrow \frac{x-1}{\boxed{3}}=\frac{y-8}{\boxed{-1}}=\frac{z-1}{\boxed{4}}$ Il vettore $\boldsymbol{v}(3, -1, 4)$ dà la direzione di r 	$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1} \Leftrightarrow \frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n}$ Il vettore $\boldsymbol{v}(l, m, n)$ dà la direzione della retta r. ***Perciò anche nello spazio individuo una retta:*** ***- con due punti P_1 e P_2*** ***oppure*** ***- con un punto P_1 e un vettore $\boldsymbol{v}(l, m, n)$***

Retta nello spazio: equazioni parametriche

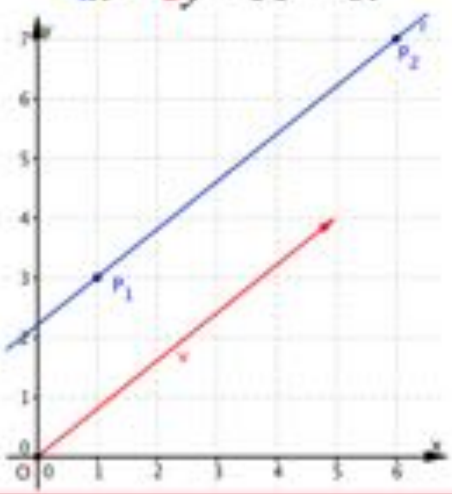
RETTA NELLO SPAZIO	
Esempio	**In generale**
Retta *r* per $P_1(6; 8; 1)$ e $P_2(9; 7; 5)$	**Retta *r* per $P_1(x_1; y_1; z_1)$ e $P_2(x_2; y_2; z_2)$**
$\frac{x-6}{3}=\frac{y-8}{-1}=\frac{z-1}{4}=t \Rightarrow \begin{cases} x-6=3t \\ y-8=-t \\ z-1=4t \end{cases}$	$\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n}=t \Rightarrow \begin{cases} x-x_1=lt \\ y-y_1=mt \\ z-z_1=nt \end{cases}$
Ottengo così le *equazioni parametriche* $\begin{cases} x=6+3t \\ y=8-t \\ z=1+4t \end{cases}$	Ottengo così le *equazioni parametriche* $\begin{cases} x=x_1+lt \\ y=y_1+mt \\ z=z_1+nt \end{cases}$
Le equazioni parametriche descrivono le coordinate (x, y, z) di un punto P che percorre la retta, mentre il parametro t assume tutti i valori reali	

Retta: equazioni parametriche nel piano e nello spazio

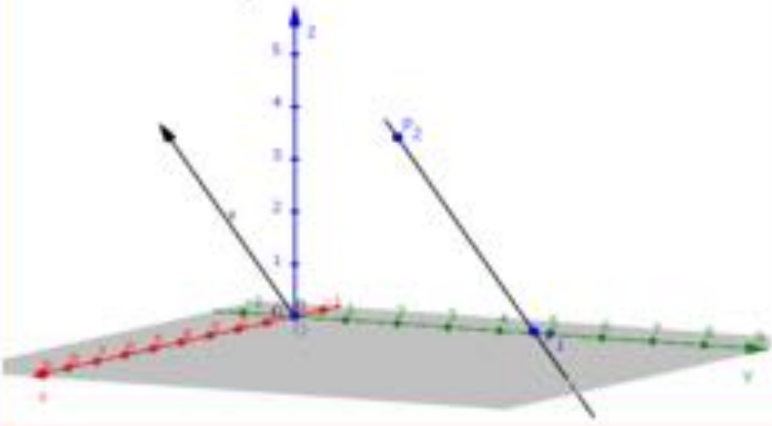


Clicca sulla figura per vedere l'animazione

Retta nel piano: equazione cartesiana

RETTA NEL PIANO	
Esempio	**In generale**
Retta r per $P_1(1; 3)$ e $P_2(6; 7)$	Retta r per $P_1(x_1; y_1)$ e $P_2(x_2; y_2)$
Equazione cartesiana	
$\frac{x-1}{5} = \frac{y-3}{4} \Leftrightarrow 4(x-1) = 5(y-3)$ Il vettore $\boldsymbol{v}(5, 4)$ dà la direzione della retta che ha equazione cartesiana $4x - 5y + 11 = 0.$ 	$\frac{x-x_1}{l} = \frac{y-y_1}{m} \Leftrightarrow m(x-x_1) = l(y-y_1)$ Il vettore $\boldsymbol{v}(l, m)$ dà la direzione della retta con equazione cartesiana $\mathbf{a}x + \mathbf{b}y + \mathbf{c} = 0$ dove trovo $a = m$ e $b = -l$

Retta nello spazio: equazioni cartesiane

RETTA NELLO SPAZIO	
Esempio	**In generale**
Retta r per $P_1(6; 8; 1)$ e $P_2(9; 7; 5)$	**Retta r per $P_1(x_1; y_1; z_1)$ e $P_2(x_2; y_2; z_2)$**
Equazioni cartesiane	
$\frac{x-6}{3}=\frac{y-8}{-1}=\frac{z-1}{4} \Rightarrow \begin{cases} 4(x-6)=3(z-1) \\ 4(y-8)=-1(z-1) \end{cases}$	$\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n} \Rightarrow \begin{cases} n(x-x_1)=l(z-z_1) \\ n(y-y_1)=m(z-z_1) \end{cases}$
Il vettore $\boldsymbol{v}(3, -1, 4)$ dà la direzione della retta r, che ha equazioni cartesiane: $\begin{cases} 4x-3z-21=0 \\ 4y+z-33=0 \end{cases}$ 	Il vettore $\boldsymbol{v}(l, m, n)$ dà la direzione della retta r, che ha equazioni cartesiane: $\begin{cases} ax+bz+d=0 \\ a'y+b'z+d'=0 \end{cases}$ dove trovo $a=a'=n$, $b=-l$, $b'=-m$

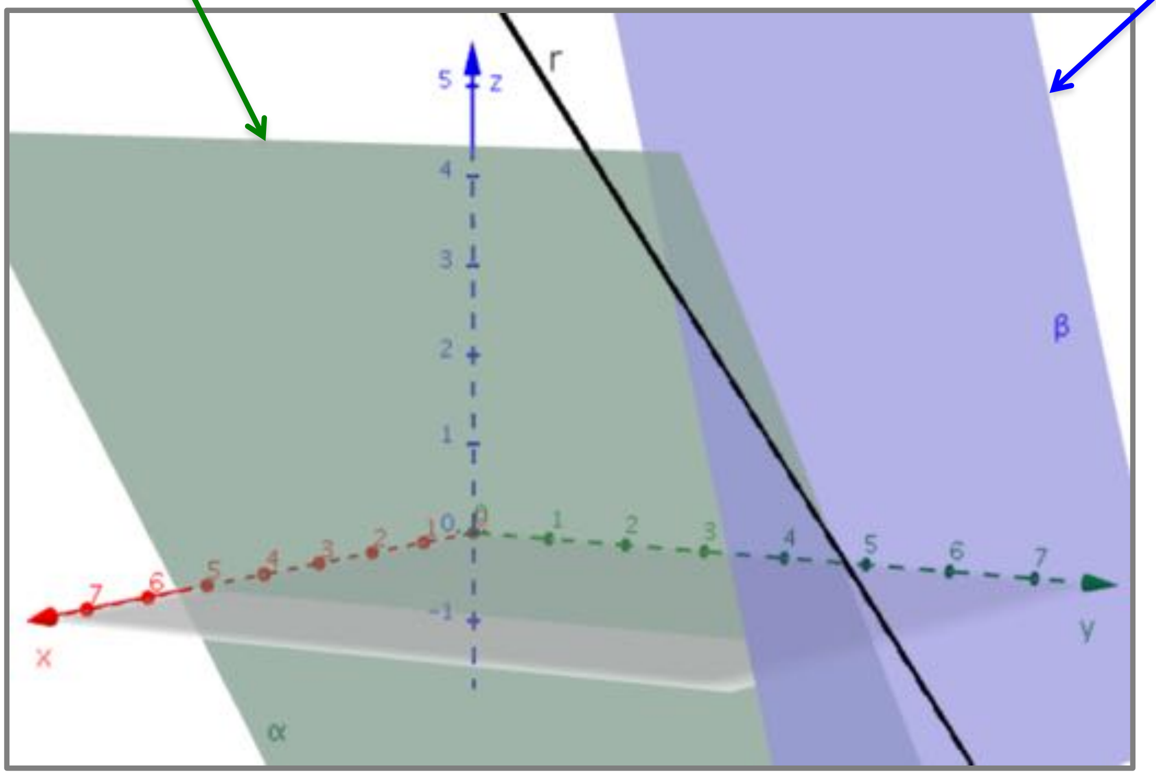
Retta nello spazio: equazioni cartesiane

Qual è il significato delle due equazioni cartesiane della retta? Ragioniamo sull'esempio.

$$\begin{cases} 4x - 3z - 21 = 0 \\ 4y + z - 33 = 0 \end{cases}$$

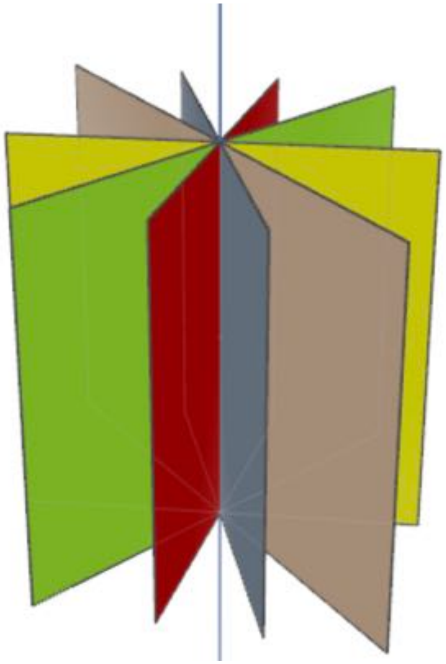
Piano α

Piano β



La retta è descritta come intersezione di due piani.

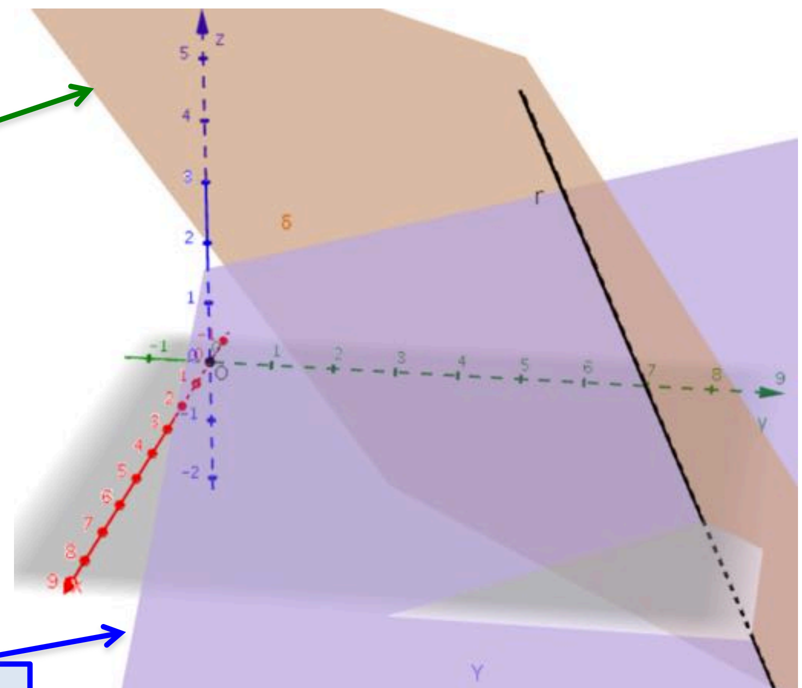
Retta come intersezione di due piani



Ma α e β non sono gli unici due piani che passano per la retta *r*.
Posso rappresentare la stessa retta *r* con altre coppie di piani. Ecco un altro esempio.

Piano δ

$$\begin{cases} x - y - z + 3 = 0 \\ 2x + 2y - z - 27 = 0 \end{cases}$$



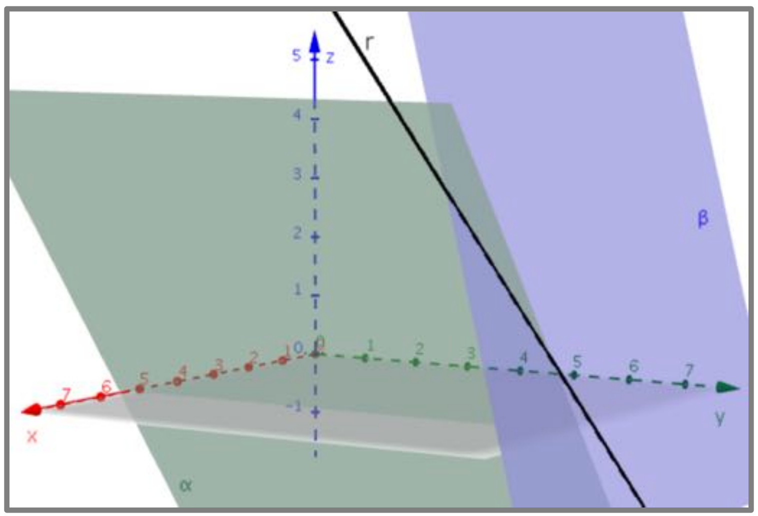
Piano γ

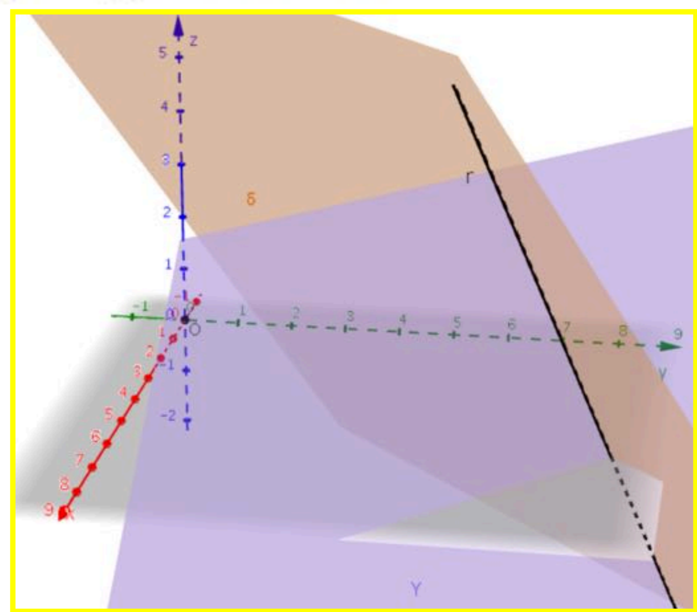
Retta come intersezione di due piani

Tutti i sistemi rappresentano la stessa retta, perciò debbono essere equivalenti. Infatti trovo

$$\begin{cases} 4x-3z-21=0 \ \text{(I)} \\ 4y+z-33=0 \ \text{(II)} \end{cases} \text{equivalente a} \begin{cases} 4x+4y-2z-54=0 \ \text{(I+II)} \\ 4x-4y-4z-12=0 \ \text{(I-II)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x+2y-z-27=0 \\ x-y-z+3=0 \end{cases}$$





Posizione di rette nello spazio

RETTE PARALLELE

Due rette r ed r’ sono parallele quando sono paralleli i vettori direzione

$$v(l,m,n) \text{ e } w(l', m', n')$$

e quindi trovo

$$\boxed{\frac{l}{l'} = \frac{m}{m'} = \frac{n}{n'}}$$

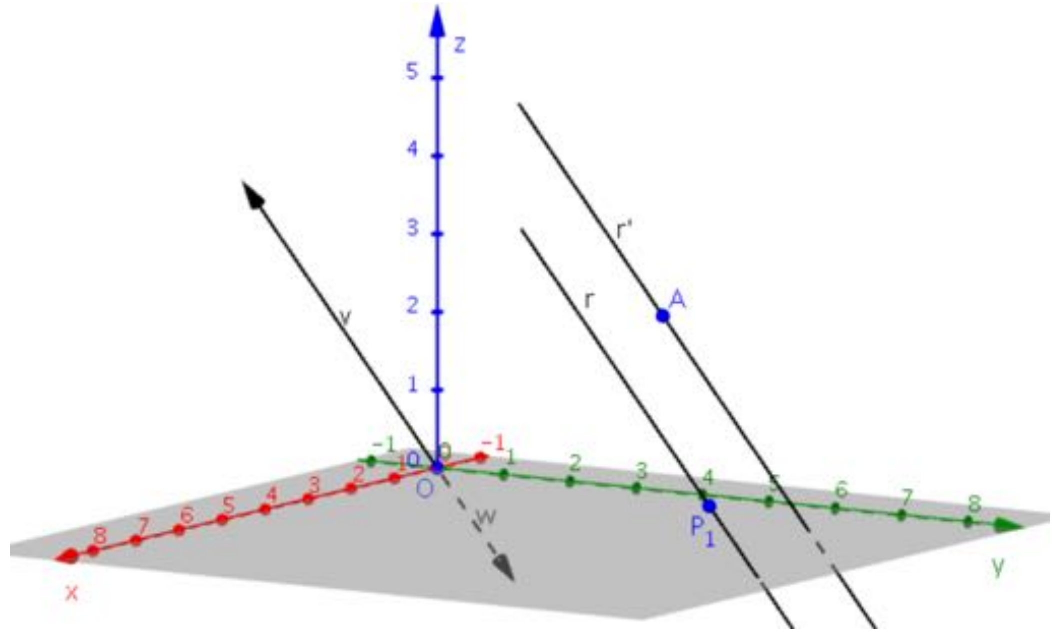
Posizione di rette nello spazio

RETTE PARALLELE UN ESEMPIO

r ha equazioni

$$\frac{x-6}{3}=\frac{y-8}{-1}=\frac{z-1}{4}$$

$v\ (3, -1, 4)$



r' ha equazioni

$$\frac{x-3}{-1{,}2}=\frac{y-5}{0{,}4}=\frac{z-4}{-1{,}6}$$

$w\ (-1{,}2;\ 0,\ 4;\ -1{,}6)$

$$\frac{3}{-1{,}2}=\frac{-1}{0{,}4}=\frac{4}{-1{,}6}=-2{,}5$$

Posizione di rette nello spazio

RETTE PERPENDICOLARI

Due rette r ed r’ sono perpendicolari quando sono perpendicolari i vettori direzione

v(l,m,n) e w(l’, m’,n’)

e quindi trovo

$$\boxed{l \cdot l' + m \cdot m' + n \cdot n' = 0}$$

Posizione di rette nello spazio

RETTE PERPENDICOLARI UN ESEMPIO

r **ha equazioni**

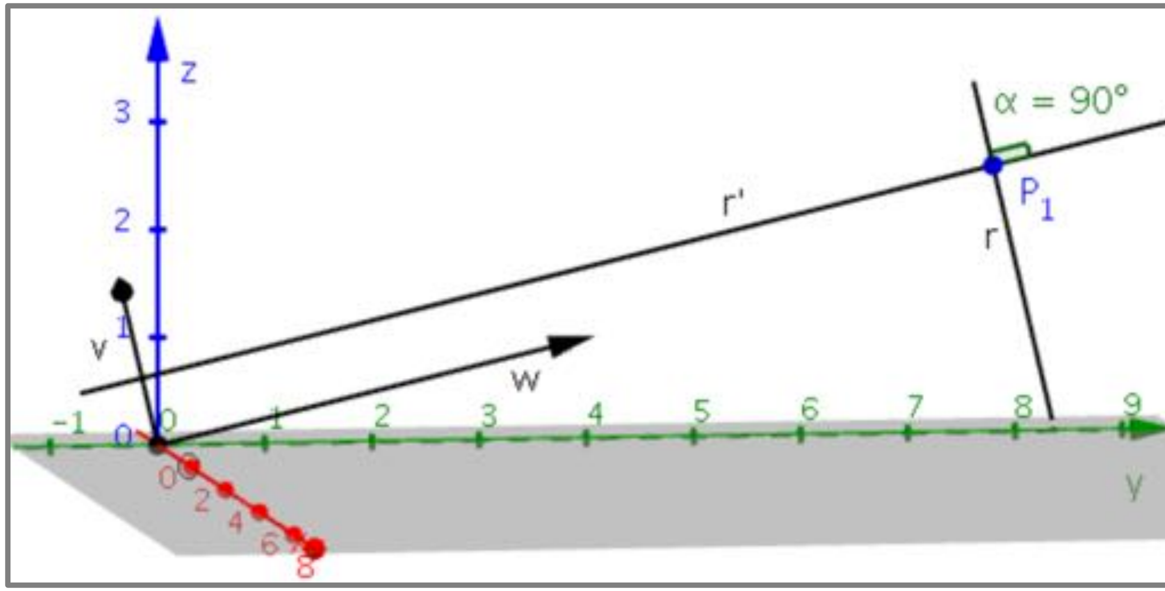
$$\frac{x-5}{4}=\frac{y-7}{-1}=\frac{z-3}{2}$$

v **(4, -1, 2)**

r' **ha equazioni**

$$\frac{x-5}{0,5}=\frac{y-7}{4}=\frac{z-3}{1}$$

w **(0,5; 4; 1)**



$$0,5\cdot 4+4\cdot(-1)+1\cdot 2=0$$

Posizione di retta e piano

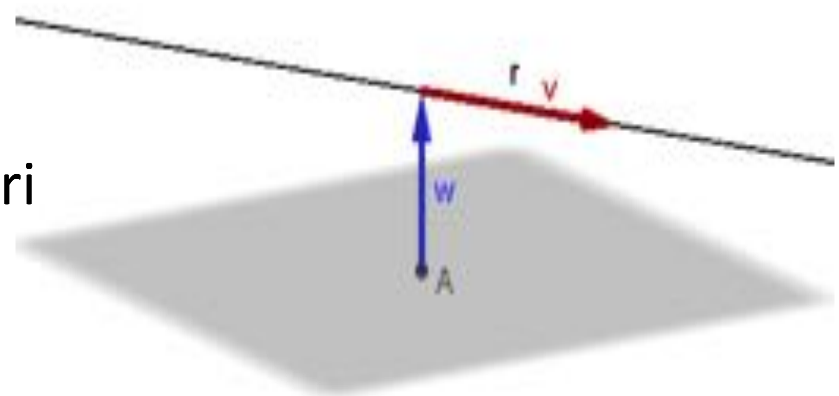
RETTA E PIANO PARALLELI

Una retta r e un piano α sono ***paralleli*** quando sono **perpendicolari i vettori**

- $\boldsymbol{v}(l,m,n)$ (direzione della retta);
- $\boldsymbol{w}(a,b,c)$ normale al piano α.

Perciò il prodotto scalare dei 2 vettori deve essere nullo e troviamo:

$$\boxed{l \cdot a + m \cdot b + n \cdot c = 0}$$



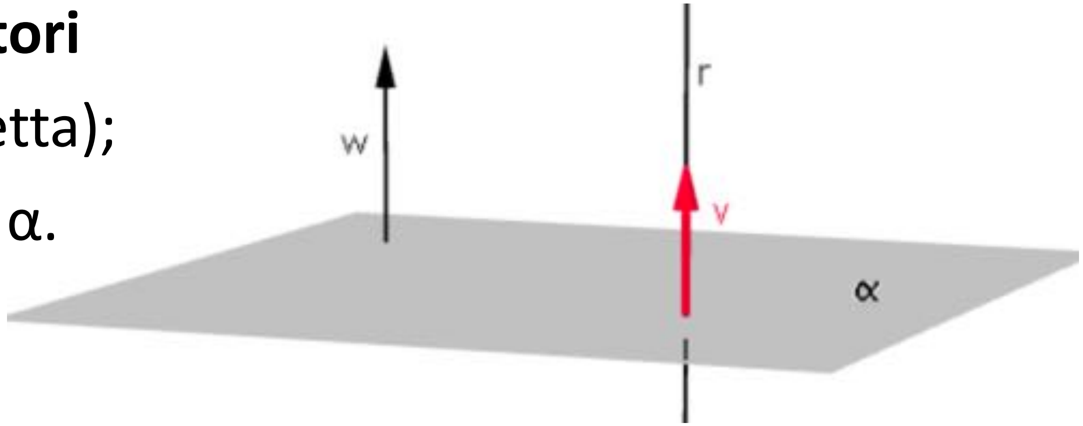
Posizione di retta e piano

RETTA E PIANO PERPENDICOLARI

Una retta **r** e un piano **α** sono ***perpendicolari*** quando sono **paralleli i vettori**

- $\boldsymbol{v}(l,m,n)$ (direzione della retta);
- $\boldsymbol{w}(a,b,c)$ normale al piano α.

E perciò risulta:



$$\frac{a}{l}=\frac{b}{m}=\frac{c}{n}$$

Attività

Completa la scheda di lavoro che ti guiderà nell'applicazione dei concetti fin qui appresi

Attività

Che cosa hai trovato

Problema 1

1. Sono dati il punto $A(2; -2; -1)$ e il vettore $\mathbf{v}(3; 4; 1)$.
Determinare le equazioni parametriche e le equazioni cartesiane della retta r, che passa per A e ha direzione **v**.

Equazioni parametriche

$$\frac{x-2}{3}=\frac{y+2}{4}=\frac{z+1}{1}=t \text{ da cui } \begin{cases} x-2=3t \\ y+2=4t \\ z+1=t \end{cases}$$

Ricavo quindi le equazioni parametriche

$$\begin{cases} x=2+3t \\ y=-2+4t \\ z=-1+t \end{cases}$$

Per le equazioni cartesiane

$$\frac{x-2}{3}=\frac{y+2}{4}=\frac{z+1}{1} \text{ da cui ricavo il sistema } \begin{cases} \dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+2}{4} \\ \dfrac{y+2}{4}=\dfrac{z+1}{1} \end{cases}$$

Perciò equazioni cartesiane possono essere $\begin{cases} 4x-3y-14=0 \\ y-4z-2=0 \end{cases}$

Problema 2

Quesiti a, b, c

2. Sono date nella tabella le equazioni di due rette e due piani. Scrivi il vettore direzione di ogni retta e il vettore normale di ogni piano per completare la tabella e rispondere ai quesiti seguenti.

Piano o retta	$\alpha: 3x + 2y + 7z - 28 = 0$	$\beta: 2x + 4y - 2z + 5 = 0$	$r: \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 1 - t \\ z = 4 - t \end{cases}$	$s: \begin{cases} x = 5 + t \\ y = 19 + 2t \\ z = 8 - t \end{cases}$
Vettori	$w = (3, 2, 7)$	$w' = (2, 4, -2)$	$v = (3, -1, -1)$	$v' = (1, 2, -1)$

a. La retta r è parallela al piano α? Sì No

Perché $3 \cdot 3 + 2 \cdot (-1) + 7 \cdot (-1) = 9 - 7 - 2 = 0$, perciò v perpendicolare a w e r parallela ad α.

b. La retta s è parallela al piano α? Sì No

Perché $1 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 7 \cdot (-1) = 3 + 4 - 7 = 0$, perciò v' perpendicolare a w e s parallela ad α.

c. La retta s è parallela alla retta r? Sì No

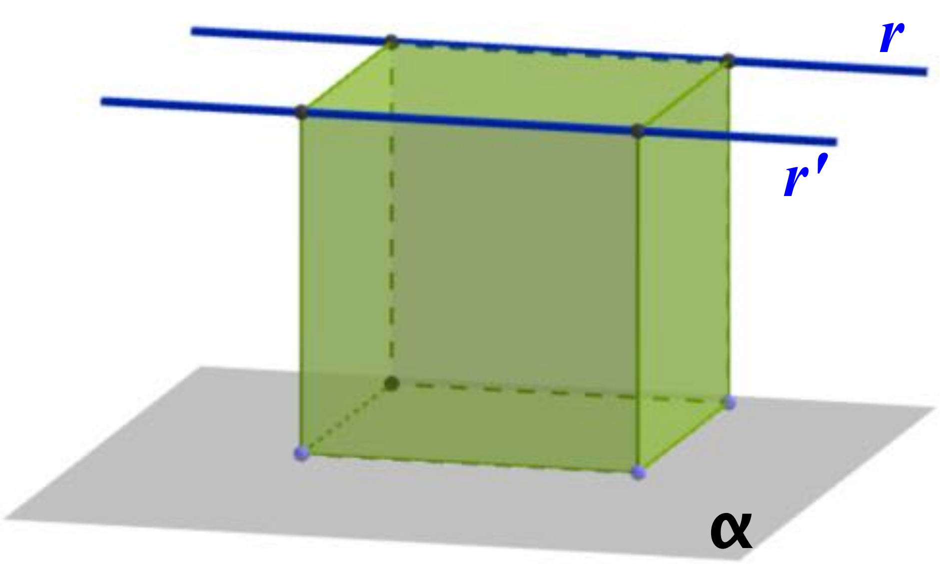
Perché $\frac{1}{3} \neq \frac{2}{-1} \neq \frac{-1}{-1}$, perciò v non è parallelo a v'.

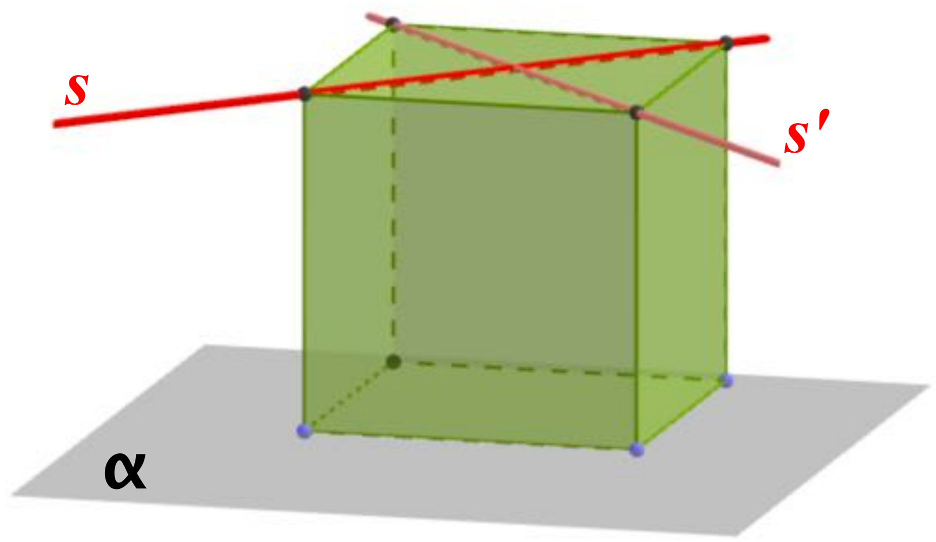
Pensi che le due rette r ed s, parallele allo stesso piano, debbono essere parallele fra loro?

Problema 2

Quesito c

Nello spazio, due rette parallele ad uno stesso piano non sono necessariamente parallele fra loro.





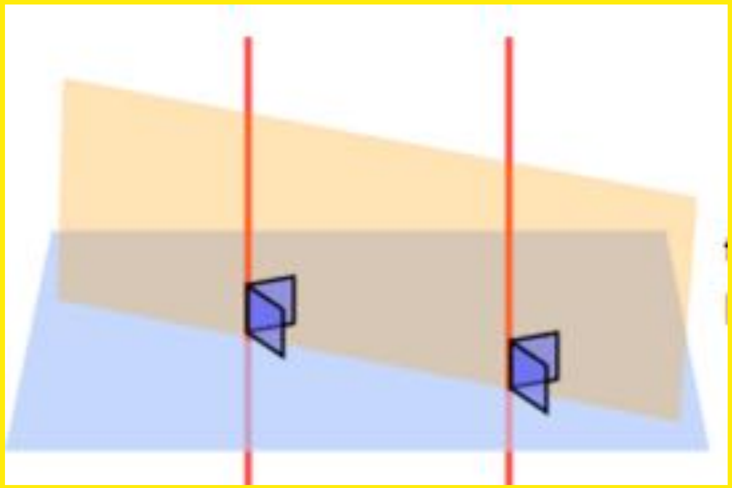
r , r' parallele ad α e parallele fra loro

s , s' parallele ad α e NON parallele fra loro

Problema 2

UNA RIFLESSIONE

INVECE, nello spazio, sono sempre parallele fra loro due rette perpendicolari ad uno stesso piano.



Problema 2

Quesiti d, e

2. Sono date nella tabella le equazioni di due rette e due piani. Scrivi il vettore direzione di ogni retta e il vettore normale di ogni piano per completare la tabella e rispondere ai quesiti seguenti.

Piano o retta	α: $3x + 2y + 7z - 28 = 0$	β: $2x + 4y - 2z + 5 = 0$	$r: \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 1 - t \\ z = 4 - t \end{cases}$	$s: \begin{cases} x = 5 + t \\ y = 19 + 2t \\ z = 8 - t \end{cases}$
Vettori	$\boldsymbol{w} = (3, 2, 7)$	$\boldsymbol{w'} = (2, 4, -2)$	$\boldsymbol{v} = (3, -1, -1)$	$\boldsymbol{v'} = (1, 2, -1)$

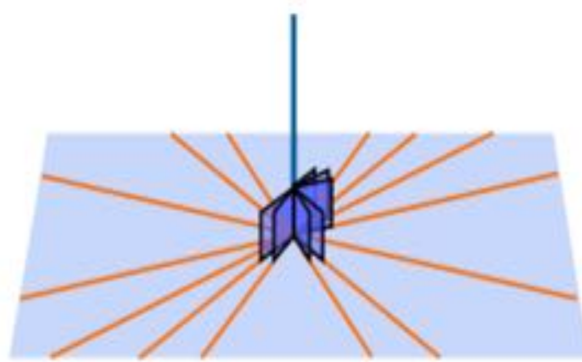
d. La retta s è perpendicolare al piano β? Sì No

Perché $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{-1}{-2}$, perciò $\boldsymbol{v'}$ è parallelo a $\boldsymbol{w'}$ e s perpendicolare a β.

e. Modifica solo $\boldsymbol{v'}$ per scrivere le equazioni parametriche di una retta s' che è perpendicolare a r.

Varie risposte possibili perché tutte le rette perpendicolari ad r per il punto $P(5, 19, 8)$ riempiono il piano perpendicolare ad r per P. Ad esempio, può essere $\boldsymbol{v'}(1, 2, 1)$, così trovo:

$1 \cdot 3 + 2 \cdot (-1) + 1 \cdot (-1) = 3 - 2 - 1 = 0$ e l'equazione è $s': \begin{cases} x = 5 + t \\ y = 19 + 2t \\ z = 8 + t \end{cases}$



Problema 3

Quesito a

3. In un riferimento cartesiano $Oxyz$ è data la sfera di centro O e raggio 5.
Completa la soluzione dei seguenti quesiti:
a. Determina l'equazione della superficie sferica.

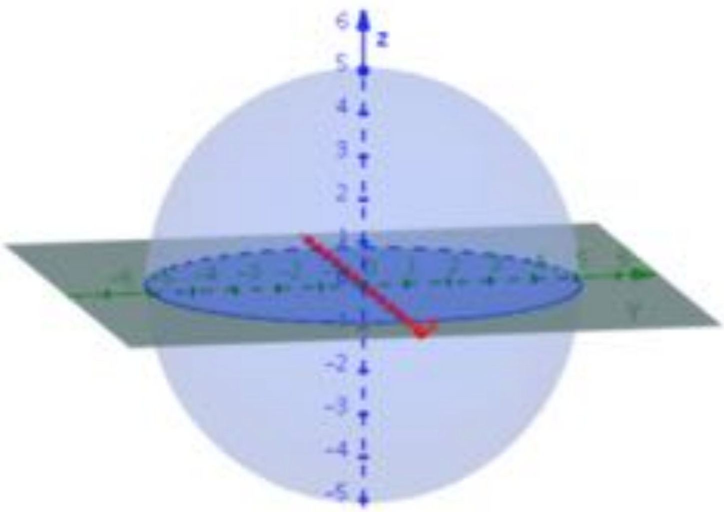
La superficie sferica ha equazione

$$x^2 + y^2 + z^2 = 25$$

perché è il luogo definito dall'equazione

$$(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 + (z - z_C)^2 = r^2$$

dove $\mathbf{C}\,(x_C, y_C, z_C)$ *è il centro e* $\mathbf{r}$ *il raggio.*

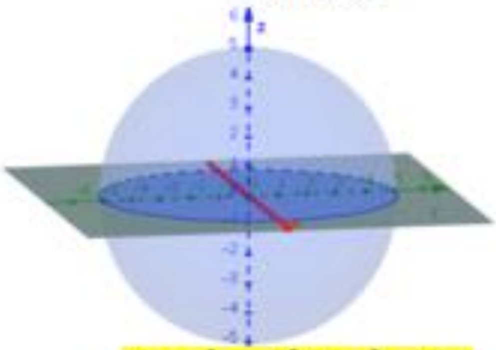


Problema 3

Quesito b

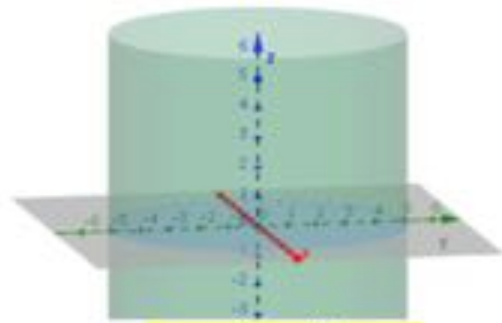
b. Qui sotto sono date cinque equazioni e quattro grafici nel riferimento *Oxyz*. Associa ad ogni equazione il suo grafico.

A. Sfera



$A: x^2 + y^2 + z^2 = 25$

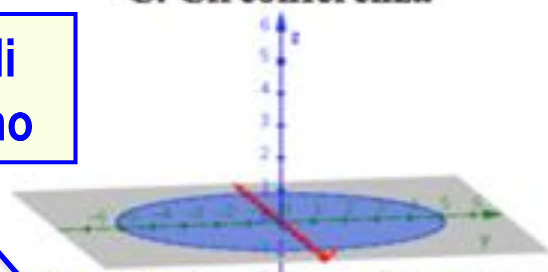
B. Cilindro



$B: x^2 + y^2 = 25$

z non compare, perciò è libera di variare

C. Circonferenza

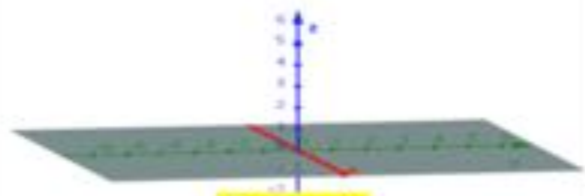


$C: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 25 \\ z = 0 \end{cases}$ $\quad C: \begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ z = 0 \end{cases}$

Intersezione di sfera con piano

Intersezione di cilindro con piano

D. Piano



$D: z = 0$

Problema 4

4. È data la superficie sferica di equazione $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ e la retta s rappresentata dal seguente sistema parametrico: $\begin{cases} x = -4t + 4 \\ y = -7t + 3 \\ z = 3t \end{cases}$ con $t \in \mathbf{R}$.

Completa la risoluzione dei seguenti quesiti.

a. Determina i punti A e B di intersezione fra la superficie sferica e la retta.

Risolvo con il metodo di sostituzione il sistema formato dalle equazioni della superficie sferica e della retta:

$$\begin{cases} x = -4t + 4 \\ y = -7t + 3 \\ z = 3t \\ x^2 + y^2 + z^2 = 25 \end{cases} \text{ da cui } \begin{cases} x = -4t + 4 \\ y = -7t + 3 \\ z = 3t \\ (-4t + 4)^2 + (-7t + 3)^2 + (3t)^2 = 25 \Rightarrow t^2 - t = 0 \end{cases}$$

e quindi

$$\begin{cases} x_1 = 4 \\ y_1 = 3 \\ z_1 = 0 \\ t_1 = 0 \end{cases} \text{ oppure } \begin{cases} x_2 = 0 \\ y_2 = -4 \\ z_2 = 3 \\ t_2 = 1 \end{cases}$$

I punti di intersezione sono dunque: $A(4, 3, 0)$ e $B(0, -4, 3)$

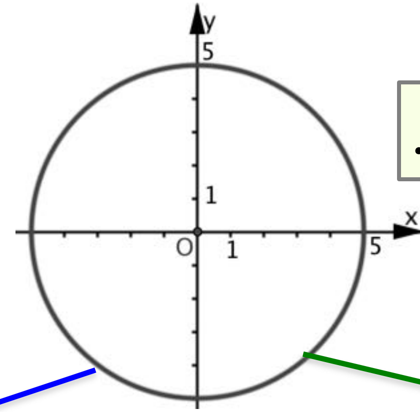
b. Calcola la lunghezza del segmento AB

La distanza fra i due punti è data da

$$\overline{AB} = \sqrt{(4-0)^2 + (3+4)^2 + (0-3)^2} = \sqrt{74} \cong 8{,}6$$

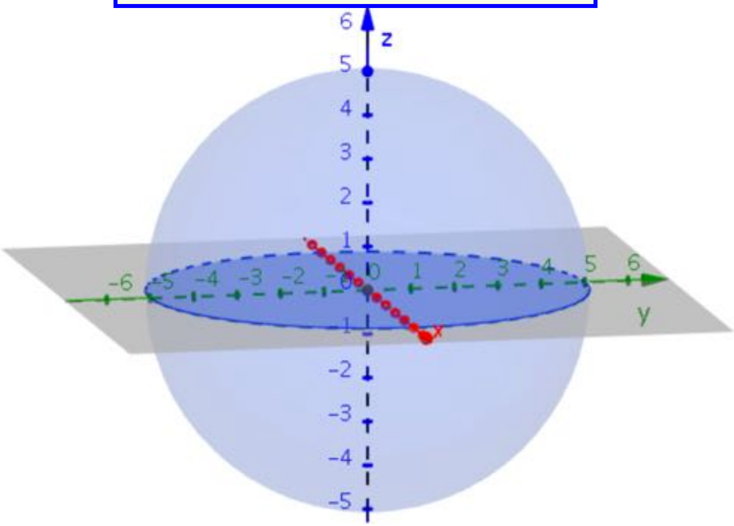
Equazioni dal piano allo spazio

CIRCONFERENZA



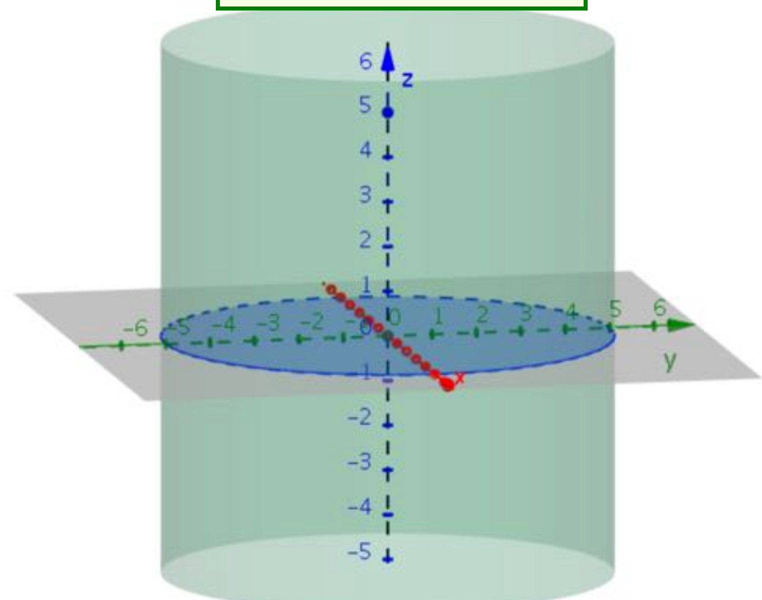
$$x^2 + y^2 = 25$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 25$$



SFERA

$$x^2 + y^2 = 25$$



CILINDRO