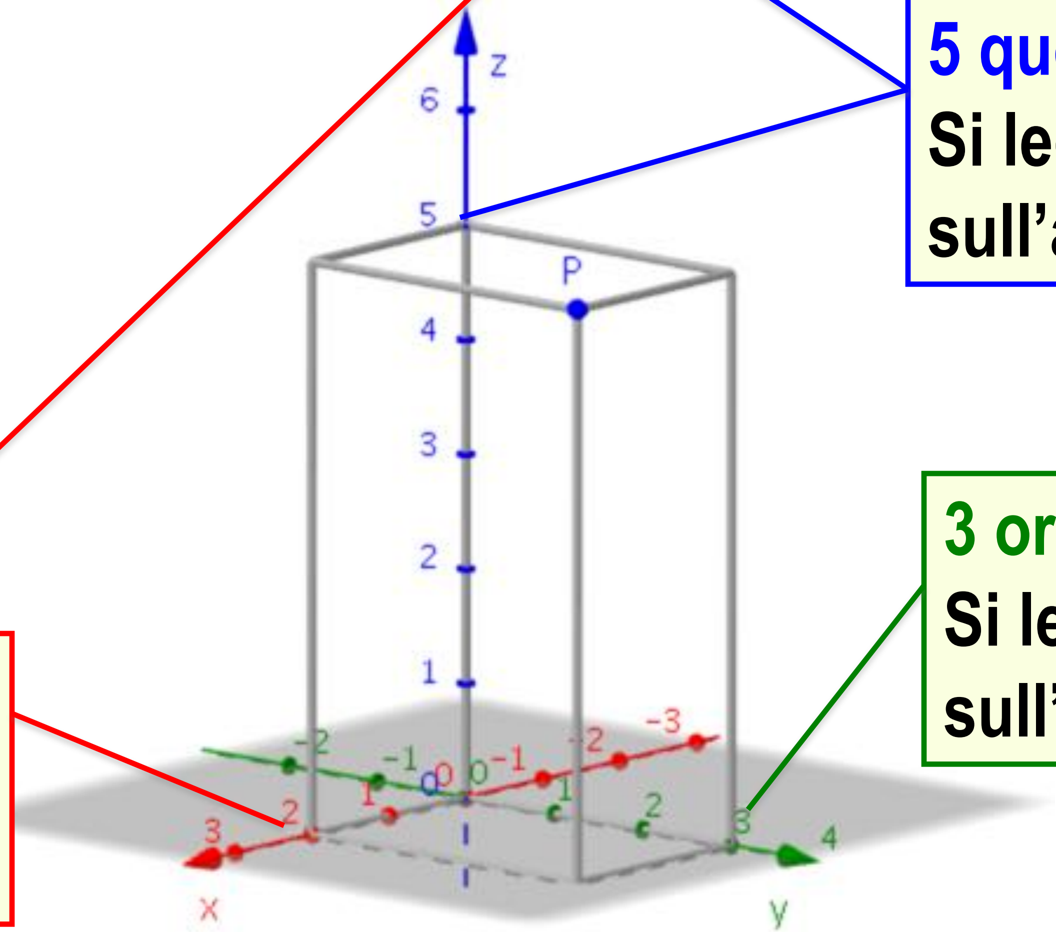
Coordinate cartesiane nello spazio

Equazioni di piani e sfere nello spazio

Aggiungo una dimensione…

Punto P(2, 3, 5)



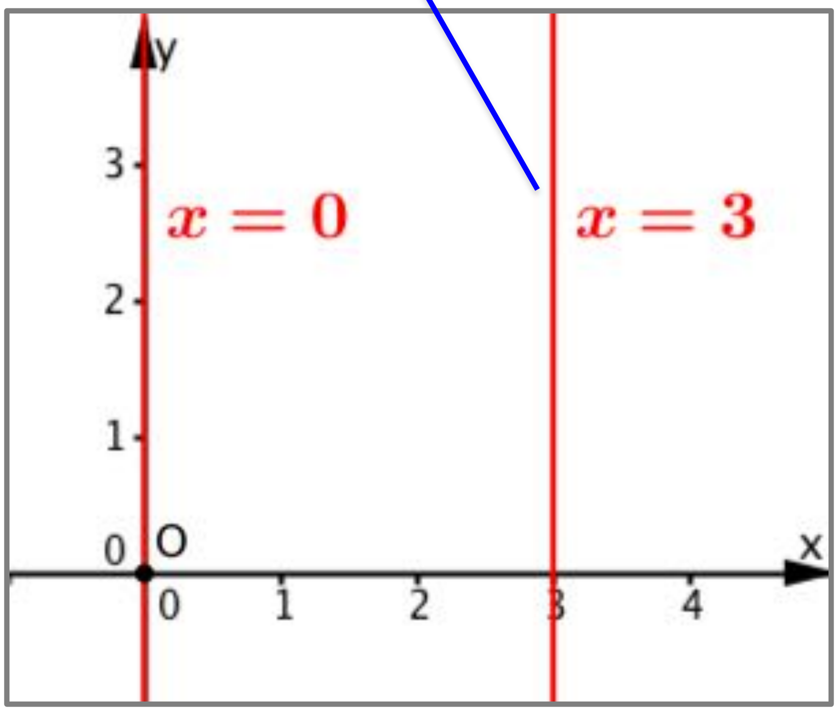
5 quota
Si legge
sull'asse **z**

3 ordinata
Si legge
sull'asse **y**

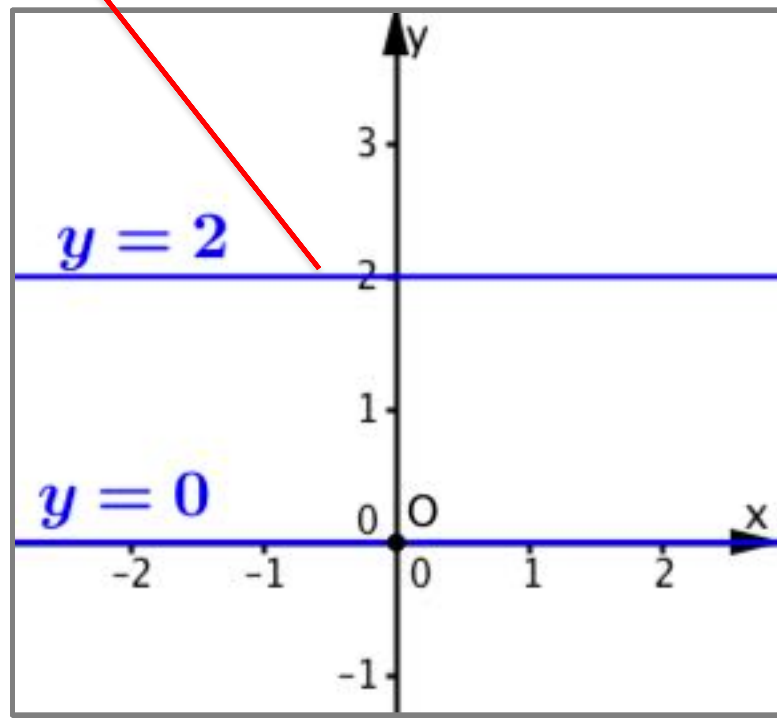
2 ascissa
Si legge
sull'asse ***x***

Nel piano rette particolari

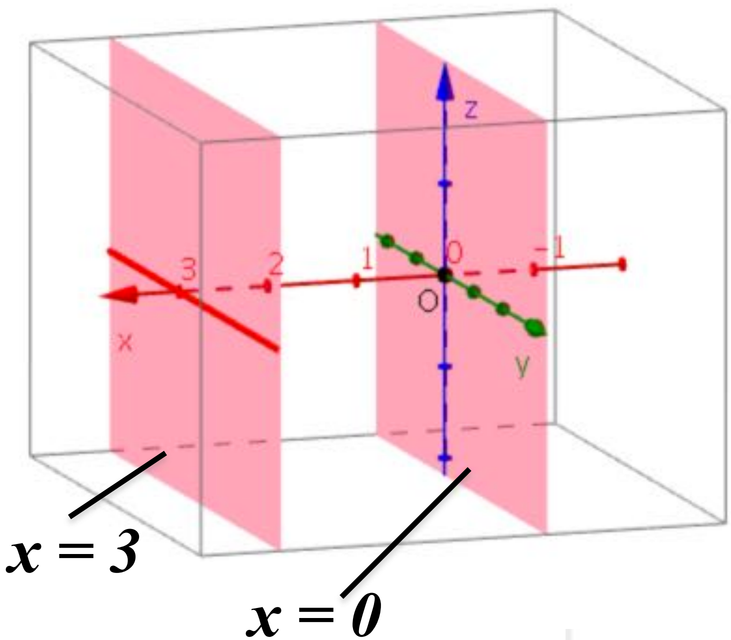
y non compare, perciò è libera di variare

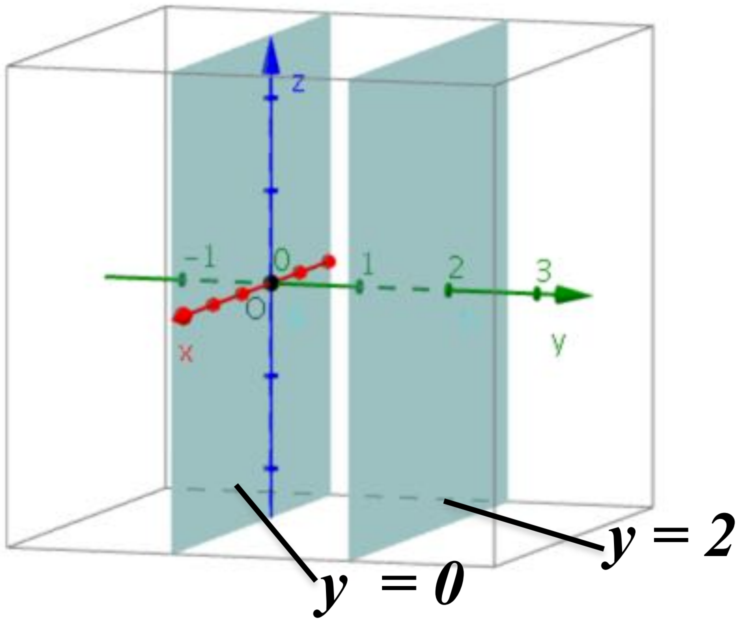


x non compare, perciò è libera di variare

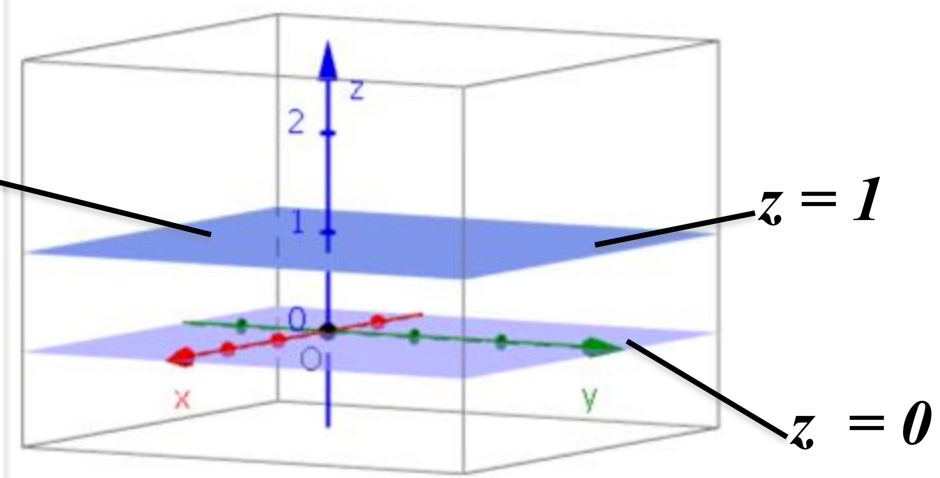


Nello spazio: piani particolari





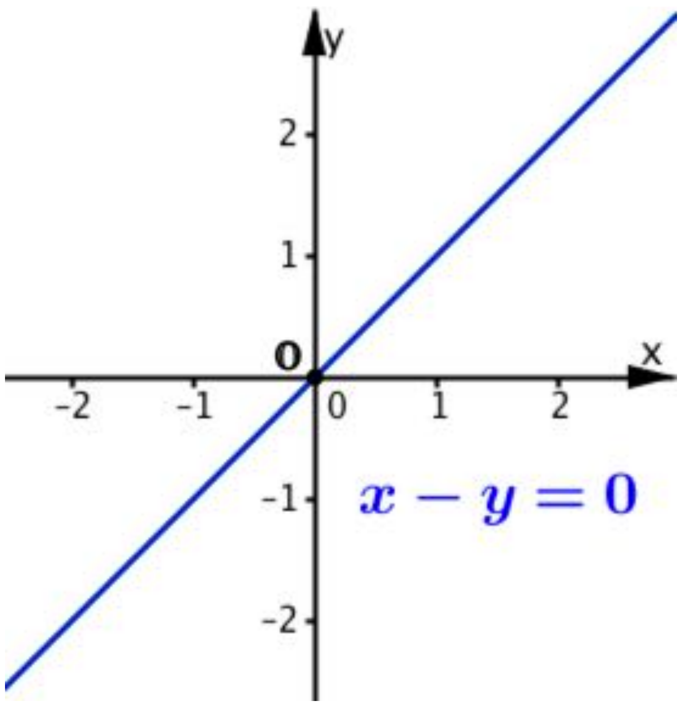
x e y non compaiono, perciò sono libere di variare



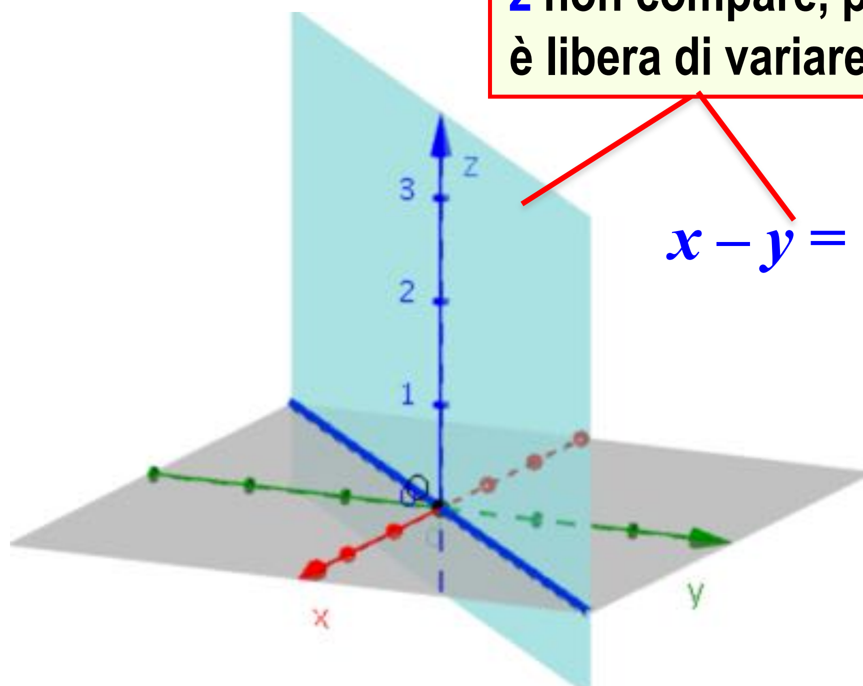
Riferimento cartesiano nel piano e nello spazio

Equazione $x - y = 0$ nel piano
Rappresenta una retta particolare:
la bisettrice del I e III quadrante

Equazione $x - y = 0$ nello spazio
Rappresenta un piano particolare:
il piano bisettore del I e III 'ottante'



z non compare, perciò è libera di variare



Aggiungo una dimensione …

Equazione di retta nel piano

Forma implicita

$$\mathbf{a}x + \mathbf{b}y + \mathbf{c} = 0$$

Forma esplicita

$$y = \mathbf{m}x + \mathbf{q}$$

Equazione di piano nello spazio

Forma implicita

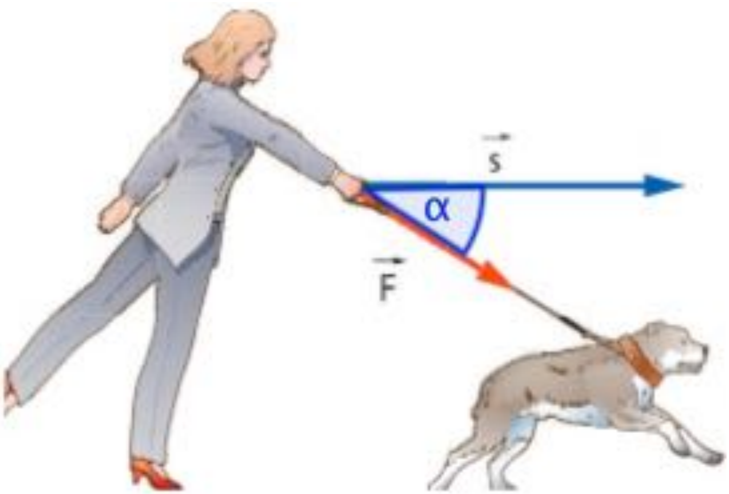
$$\mathbf{a}x + \mathbf{b}y + \mathbf{c}z + \mathbf{d} = 0$$

Forma esplicita

$$z = \mathbf{m}x + \mathbf{n}y + q$$

Vettori e prodotto scalare in fisica e in matematica

Vettori e prodotto scalare in fisica



Vettori: spostamento s e forza F

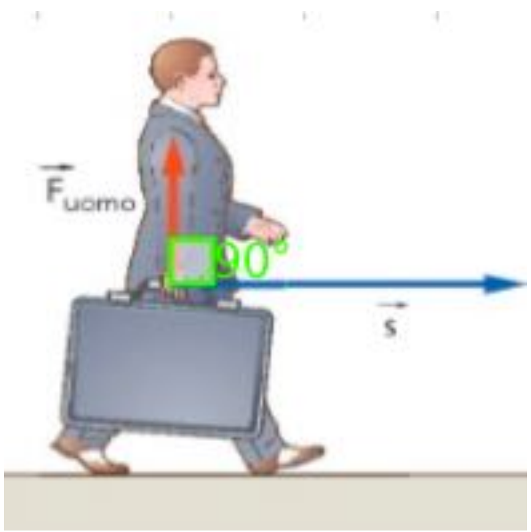
Lavoro W della forza F

$$W = F \cdot s \cdot \cos\alpha \qquad 0° \leq x \leq 180°$$

Prodotto scalare

Intensità della forza

Lunghezza dello spostamento



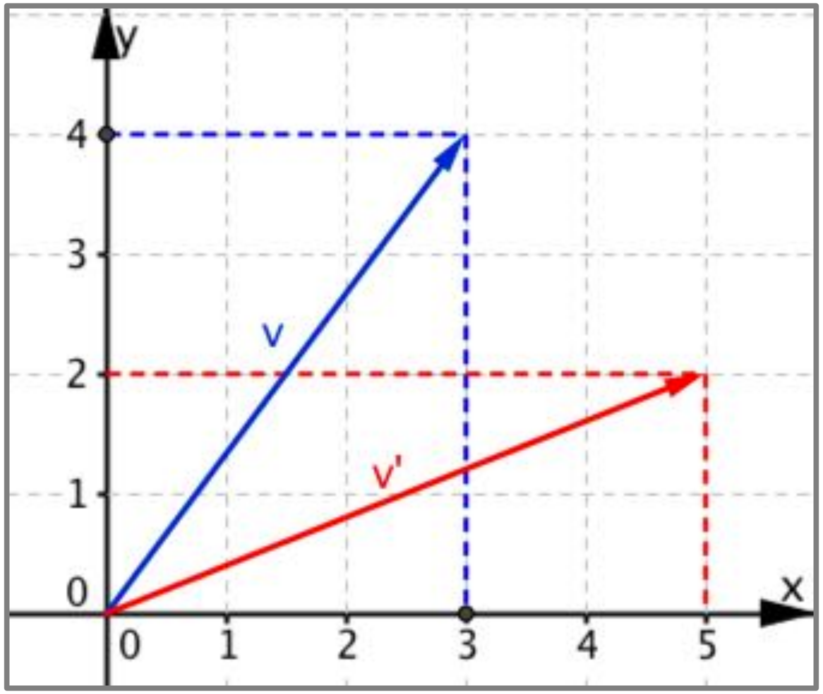
Se i vettori sono perpendicolari

$\alpha = 90° \rightarrow \cos 90° = 0$

$W = 0$

Vettori in un riferimento cartesiano

Nel piano



Esempio

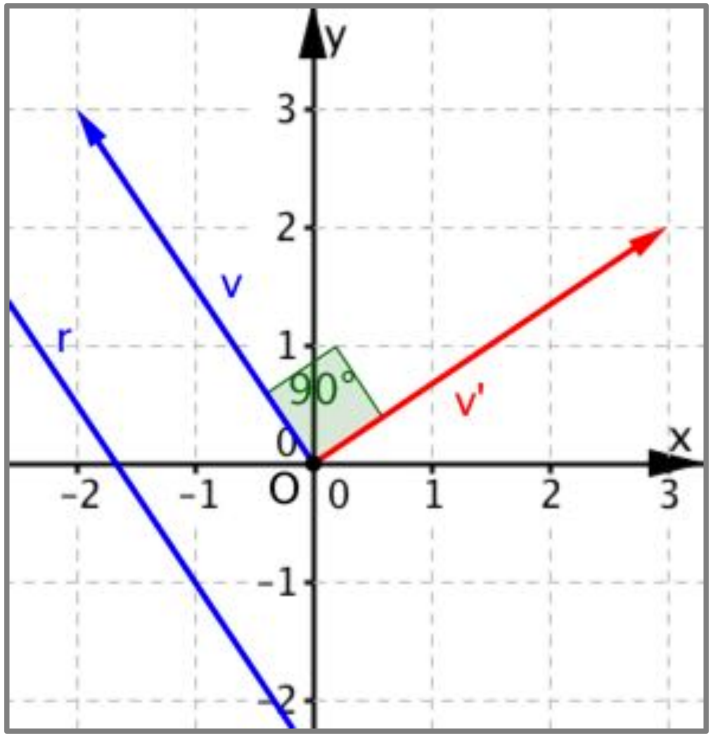
Vettori v(3, 4) e v'(5, 2)

Prodotto scalare
v • v' = 3 · 5 + 4 · 2

In generale
Vettori v(a, b) e v'(a', b')

Prodotto scalare
v · v' = aa' + bb'

Rette e vettori nel piano cartesiano



Esempio

La retta r ha equazione

$$3x + 2y + 5 = 0$$

Il vettore $v(-2, 3)$ è parallelo alla retta r, perciò dà la *direzione* di *r*.

Il vettore $v'(3, 2)$ è perpendicolare a v, perché risulta v • v' = 0.
Perciò v' è perpendicolare a r.

In generale

La retta r ha equazione $ax + by + c = 0$

$v(-b, a)$ dà la direzione di r.

$v'(a, b)$ è perpendicolare a r.

Piani e vettori nello spazio

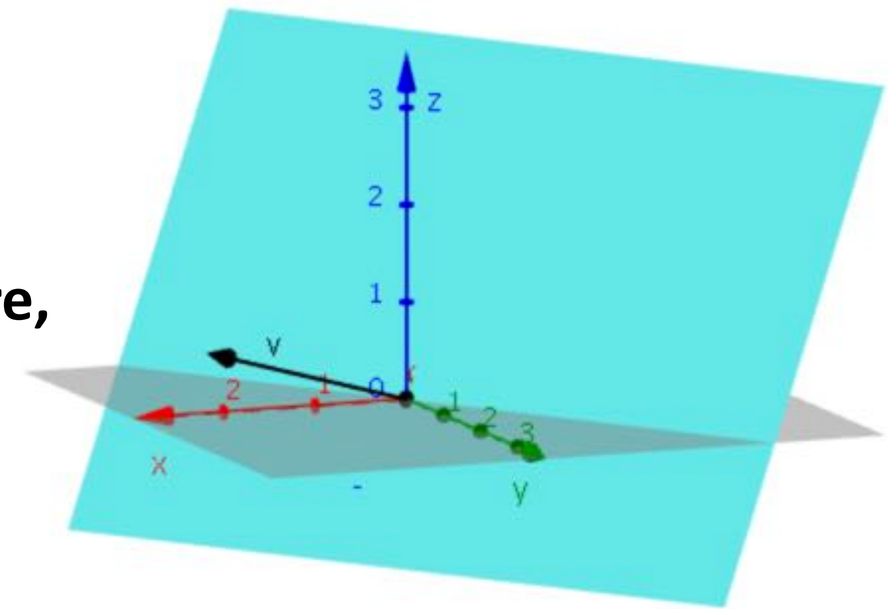
ESEMPIO

Il piano α ha equazione

$$3x + 2y + z + 5 = 0$$

Per analogia

Il vettore $\mathbf{v}$ (3, 2, 1) è perpendicolare, ossia *normale* al piano α.



IN GENERALE

Il piano α ha equazione

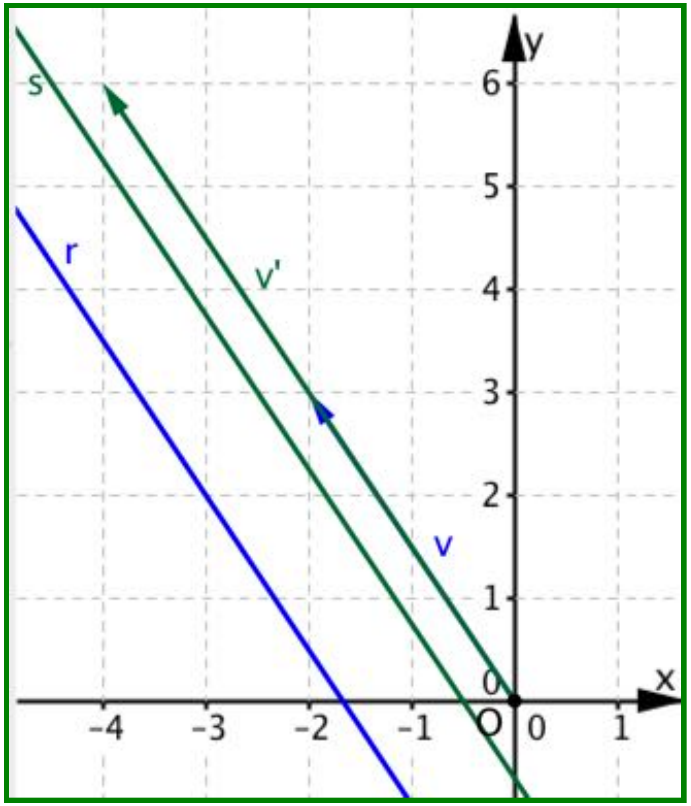
$$\mathbf{a}x + \mathbf{b}y + \mathbf{c}z + \mathbf{d} = 0$$

Per analogia

Il vettore $\mathbf{v}$ $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$

è ***normale*** al piano α.

Rette parallele e vettori nel piano cartesiano



Esempio: due rette parallele

Retta r

- Equazione $3x + 2y + 5 = 0$
- Vettore $v(-2, 3)$

Retta s

- Equazione $6x + 4y + 3 = 0$
- Vettore $v'(-4, 6)$

In generale: due rette parallele

r ha equazione $ax + by + c = 0$

s ha equazione $a'x + b'y + c = 0$

$$a'/a = b'/b$$

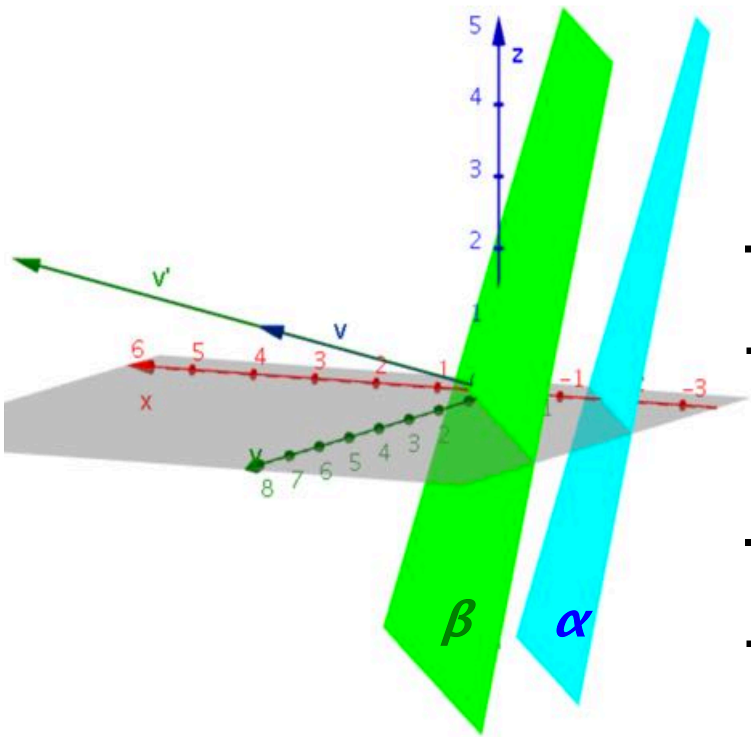
v e v' hanno la stessa direzione, perciò trovo

-4/-2 = 6/3

E anche

6/3 = 4/2

Piani paralleli e vettori nello spazio



Esempio: due piani paralleli

Piano α

- Equazione $3x + 2y + z + 5 = 0$
- Vettore normale $v(3, 2, 1)$

Piano β

- Equazione $6x + 4y + 2z + 3 = 0$
- Vettore normale $v'(6, 4, 2)$

In generale: due piani paralleli

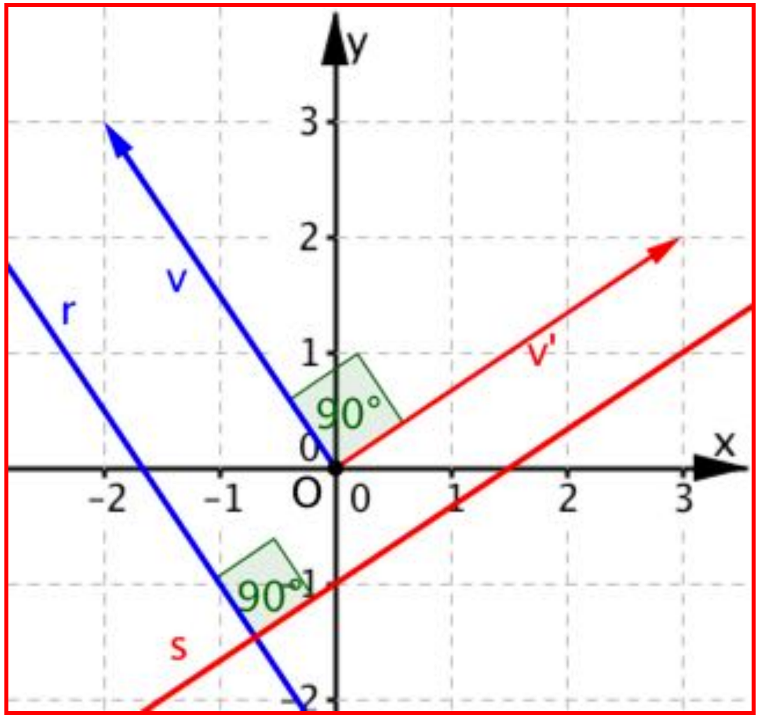
α ha equazione $ax + by + cz + d = 0$

β ha equazione $a'x + b'y + c'z + d' = 0$

$a'/a = b'/b = c'/c$

v e v' hanno la stessa direzione, perciò trovo $6/3 = 4/2 = 2/1$

Rette perpendicolari e vettori nel piano cartesiano



Esempio: due rette perpendicolari

Retta r

- Equazione $3x + 2y + 5 = 0$
- Vettore $v(-2, 3)$

Retta s

- Equazione $-2x + 3y + 3 = 0$
- Vettore $v'(3, 2)$

In generale: due rette perpendicolari

r ha equazione $ax + by + c = 0$

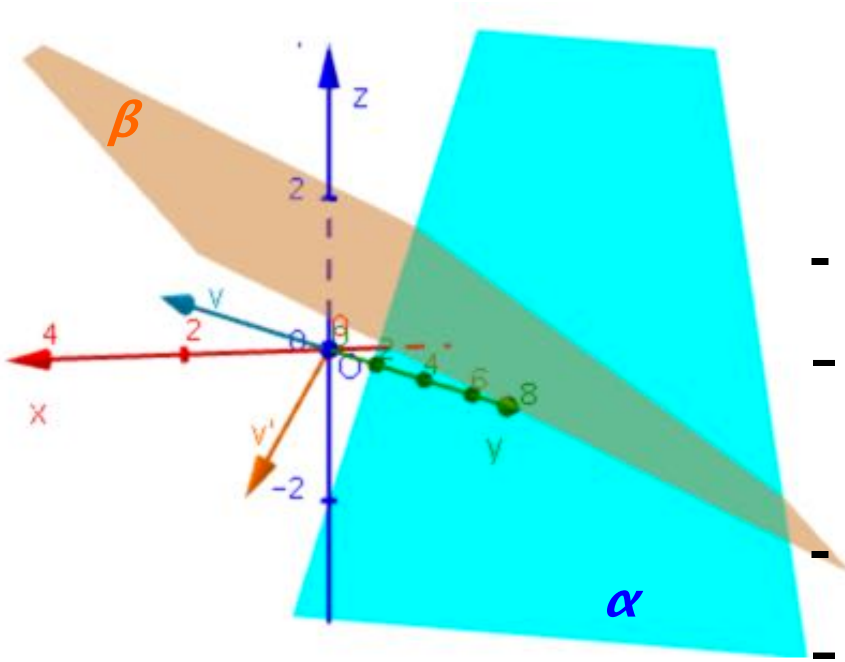
s ha equazione $a'x + b'y + c = 0$

$$aa' + bb' = 0$$

$v \cdot v' = 0$, perciò trovo

$-2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 = 6 - 6 = 0$

Piani perpendicolari e vettori nello spazio



Esempio: due piani perpendicolari

Piano α

- Equazione $3x + 2y + z + 5 = 0$
- Vettore normale $v(3, 2, 1)$

Piano β

- Equazione $x - 0{,}5y - 2z + 4 = 0$
- Vettore normale $v'(1; -0{,}5; -2)$

In generale: due piani perpendicolari

α ha equazione $ax + by + cz + d = 0$

β ha equazione $a'x + b'y + c'z + d' = 0$

$$aa' + bb' + cc' = 0$$

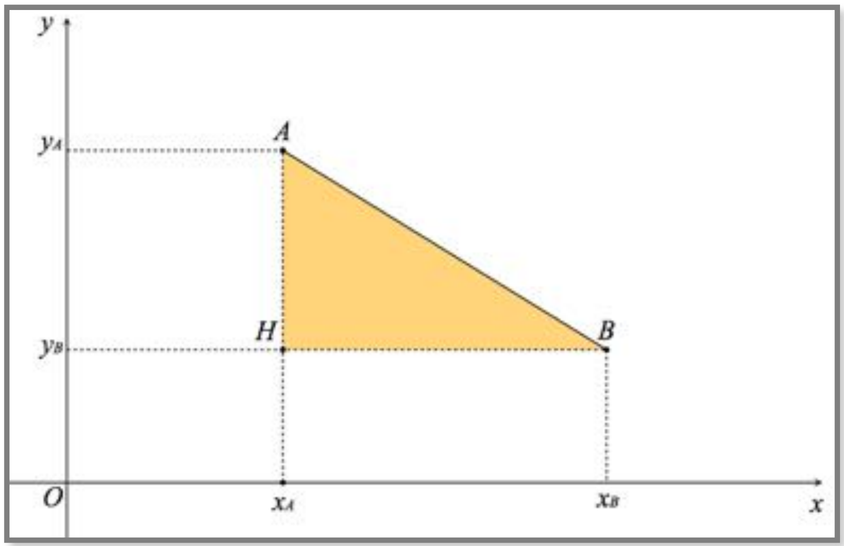
$v \cdot v' = 0$, perciò trovo

$3 \cdot 1 + 2 \cdot (-0{,}5) + 1 \cdot (-2) =$

$= 3 - 1 - 2 = 0$

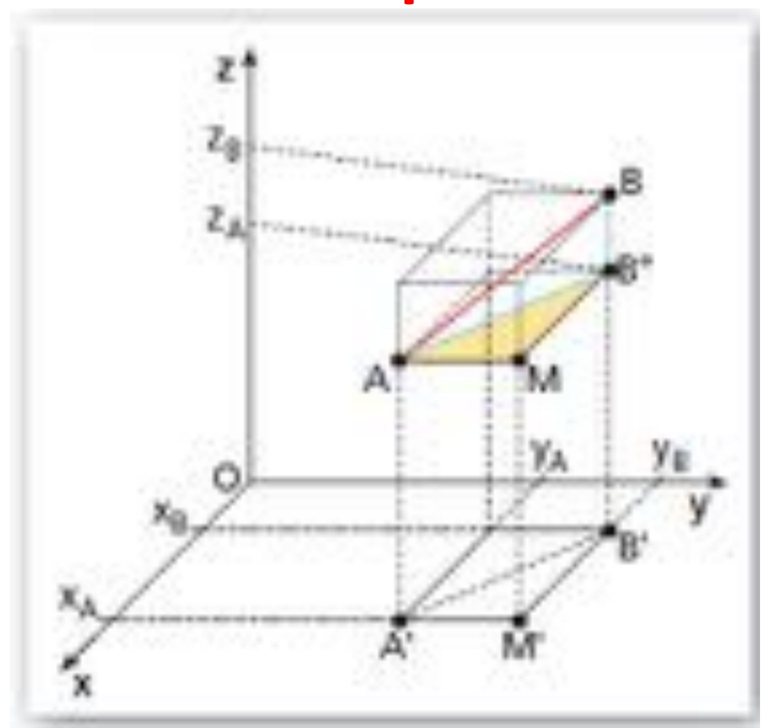
Distanza di due punti

Nel piano



$$AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$$

Nello spazio

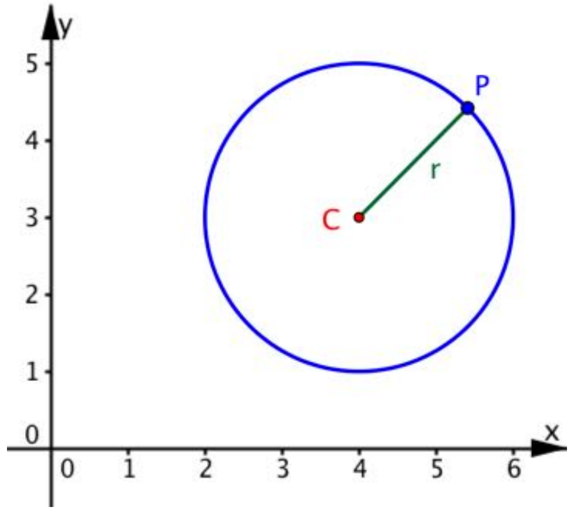


$$AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2}$$

Equazione di circonferenza e sfera

Nel piano

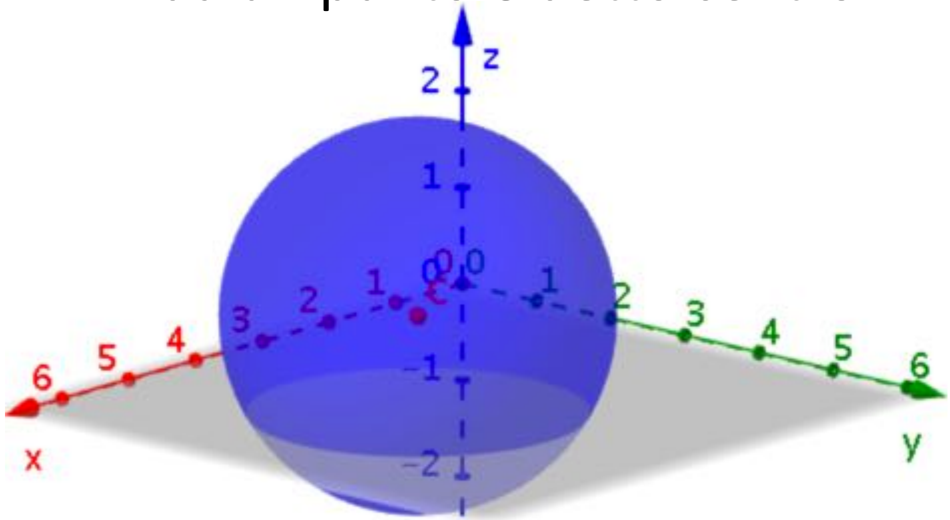
La circonferenza è il luogo dei punti ***P(x, y)*** che hanno distanza **r** da un punto ***C*** detto centro.



$C(x_C, y_C)$ **raggio** r

Nello spazio

La sfera è il luogo dei punti ***P(x, y, z)*** che hanno distanza ***r*** da un punto ***C*** detto centro.



$C(x_C, y_C, z_C\ )$ **raggio** r

Attività

Lavora ora con la scheda che ti guiderà nell’applicazione dei concetti fin qui appresi

Attività

Che cosa hai trovato

Problema 1

Piano	Coefficienti	Vettore normale
$\alpha: x-3y+2z-1=0$	$a=1,\ b=-3, c=2,\ d=-1$	$v(1,-3,2)$
$\alpha_1: 3x-y+2z=0$	$a_1=3,\ b_1=0,\ c_1=2,\ d_1=0$	$v(3,0,2)$
$\alpha_2: 2x-6y+4z-5=0$	$a_2=2,\ b_2=-6, c_2=4,\ d_2=-5$	$v(2,-6,4)$
$\alpha_3: 3x-y-3z=0$	$a_3=3,\ b_3=-1, c_3=-3,\ d_3=0$	$v(3,-1,-3)$

a. Quali piani sono paralleli? α e α_2

Perché $\frac{2}{1}=\frac{-6}{-3}=\frac{4}{2}=2$ ossia $\frac{a_2}{a}=\frac{b_2}{b}=\frac{c_2}{c}$

b. Quali piani sono perpendicolari? α e α_3 , α_2 e α_3

Perché $1\cdot 3+(-3)\cdot(-1)+2\cdot(-3)=3+3-6=0$ ossia $a\cdot a_3+b\cdot b_3+c\cdot c_3=0$
e α_2 parallelo ad α_3

c. Quali piani non sono né perpendicolari né paralleli? α_1 e α_3

Perché $3\cdot 3+(-1)\cdot(-1)+2\cdot(-3)=4\neq 0$ e $\frac{3}{3}=\frac{-1}{-1}\neq\frac{2}{-3}$

Problema 2

2. Completa il procedimento per risolvere il seguente problema.
Scrivi l'equazione del piano β *che passa per* P(−3, 2, 4) *ed è parallelo al piano* α *d'equazione* $3x - 2y - z + 6 = 0$

Nell'equazione di α trovo i coefficienti $a = 3$, $b = -2$, $c = -1$

Nell'equazione di β debbo trovare a', b', c' in modo che

$$\frac{a'}{3} = \frac{b'}{-2} = \frac{c'}{-1} = k \neq 0 \quad \text{da cui} \quad a' = 3k\ ,\ b' = -2k\ ,\ c' = -k$$

L'equazione di β sarà del tipo: $3kx - 2ky - kz + d' = 0$

Divido i due membri per $k \neq 0$ e ottengo $3x - 2y - z + \dfrac{d'}{k} = 0$

Ma il piano deve passare per P e quindi deve essere

$3(-3) - 2 \cdot 2 - 4 + \dfrac{d'}{k} = 0$, da cui ricavo $\dfrac{d'}{k} = 17$

Il piano β ha quindi equazione $3x - 2y - z + 17 = 0$.

Problema 3

3. Completa il procedimento per risolvere il seguente problema. *Scrivi l'equazione del piano β che passa per* O(0, 0, 0), *per* P(2, –4, 3) *ed è perpendicolare al piano α d'equazione* $x - 2y - z - 1 = 0$

Nell'equazione del piano α trovo i coefficienti $a = 1$, $b = -2$, $c = -1$

Nell'equazione del piano β debbo trovare a', b', c' in modo che:

- β passi per O(0, 0, 0) e perciò risulti $a' \cdot 0 + b' \cdot 0 + c' \cdot 0 + d' = 0$, da cui $d' = 0$ (*)
- β passi per P(2, –4, 3) e perciò risulti $a' \cdot 2 + b'(-4) + c' \cdot 3 + d' = 0$, da cui $2a' - 4b' + 3c' + d' = 0$ (**)
- β sia perpendicolare ad α e perciò risulti $a' \cdot 1 + b' \cdot (-2) + c' \cdot (-1) = 0$, da cui $a' - 2b' - c' + d' = 0$ (***)

Le tre condizioni debbono valere contemporaneamente, perciò risolvo il sistema formato dalle tre equazioni ottenute e ottengo:

$$\begin{cases} d' = 0 (*) \\ 2a' - 4b' + 3c' + d' = 0 (**) \\ a' - 2b' - c' + d' = 0 (***) \end{cases} \text{ da cui } \begin{cases} d' = 0 \\ 2a' - 4b' + 3c' = 0 \\ a' = 2b' + c' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d' = 0 \\ c' = 0 \\ a' = 2b' \end{cases}$$

Il piano β ha quindi equazione $2b'x + b'y = 0$ ossia $2x + y = 0$.

Problema 4

4. Scrivi l'equazione della sfera di centro C(−4, 1, 3) e raggio r = 5.

$$[x-(-4)]^2+(y-1)^2+(z-3)^2=5^2$$

ossia

$$(x+4)^2+(y-1)^2+(z-3)^2=25$$

La sfera passa per O(0, 0, 0)? Sì No

Perché $(0+4)^2+(0-1)^2+(0-3)^2=16+1+9=26\neq 25$