

6. Alla scoperta di fenomeni regolati da una legge esponenziale. La scala semilogaritmica

Cominciamo con l'esaminare un problema attuale: la crescita della popolazione mondiale. I seguenti dati approssimativi si riferiscono, appunto, alla popolazione mondiale, valutata ogni 10 anni, a partire dal 1900.

Riportiamo questi dati su un grafico (fig. 13). Se si interpreta la crescita della popolazione come un fenomeno continuo, si è condotti a raccordare i "punti sperimentali" con una linea continua sempre crescente, come quella di fig. 14; si ottiene una curva che "somiglia" ad un'esponenziale.

anni	popolazione p (in miliardi)
1900	1
1910	1,2
1920	1,5
1930	1,8
1940	2,3
1950	2,7
1960	3,4
1970	4,2
1980	4,8

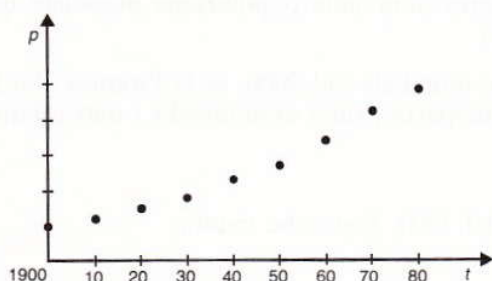


Fig. 13

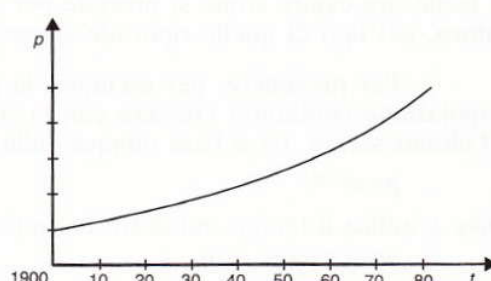


Fig. 14

Ci si chiede: come si può verificare se il grafico ottenuto è vicino ad una curva esponenziale?

Un metodo, molto usato nelle applicazioni, consiste nel tracciare un nuovo grafico nel modo seguente: si riporta sempre sull'asse delle ascisse il tempo, ma si riportano sull'asse delle ordinate i valori dei logaritmi (per esempio in base e) della popolazione. Ci si vale così di una scala logaritmica per le ordinate, mentre si lascia inalterata la scala sull'asse delle ascisse; si introduce dunque una **scala semilogaritmica**.

Abbiamo proprio seguito questo procedimento per tracciare il grafico di fig. 15, dove sono rappresentati i dati riportati nella tabella a fianco della figura.

X =tempo valutato in anni, a partire dal 1900	$y=\ln p$
0	0
10	0,18
20	0,41
30	0,59
40	0,83
50	0,99
60	1,22
70	1,44
80	1,57

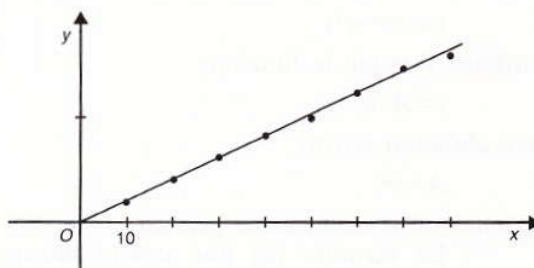


Fig. 15

Ci si accorge che si ottiene, approssimativamente, una retta. Nel Cap. 6 è presentato un metodo – il metodo dei minimi quadrati – che consente di individuare la retta che meglio “racconta” dei punti sperimentali. Qui ci limitiamo a calcolare, per varie coppie di dati a disposizione, il valore del rapporto $\frac{y}{x}$; risulta

$$\frac{y}{x} \cong 0,02.$$

Si ha quindi

$$y \cong 0,02x,$$

ossia

$$\ln p \cong 0,02 x,$$

da cui

$$p \cong e^{0,02x}.$$

Concludiamo che la crescita della popolazione mondiale in questo secolo può essere approssimativamente descritta da una legge esponenziale. Il tasso di incremento annuo è

$$r = 0,02 = 2\%.$$

È facile ora capire come si procede per dare delle previsioni sulla popolazione mondiale nel futuro, del tipo di quelle riportate spesso sui giornali

Per prevedere, per esempio, la popolazione mondiale nel 2000, si fa l'ipotesi che la popolazione continui a crescere con la stessa legge scoperta prima esaminando i dati relativi all'ultimo secolo. Ci si basa dunque sulla legge

$$p = e^{0,02x}$$

dove x indica il tempo, misurato in anni, a partire dal 1900. Dato che risulta:

$$2000 = 1900 + 100,$$

si ha

$$x = 100;$$

quindi si calcola

$$p = e^{0,02 \cdot 100} = e^2 \cong 7,4 \text{ miliardi!}$$

Questo primo esempio dà un'idea dell'efficacia della scala semilogaritmica e suggerisce delle considerazioni di carattere generale.

Se dei dati sperimentali, presentati nella forma di tante coppie (x, y) , sembrano legati da una legge esponenziale, conviene tracciare un grafico nel modo seguente: si riportano sull'asse delle ascisse i dati x e sull'asse delle ordinate i logaritmi delle y .

Se il grafico così ottenuto si avvicina ad una retta, come quella di fig. 16, possiamo dire che i dati sono legati da una legge esponenziale. Infatti la retta ha un'equazione del tipo

$$\ln y = mx + n$$

e questa si può scrivere nella forma

$$y = e^{(mx+n)}. \quad (1)$$

Eseguendo le operazioni indicate nella (1), si ha:

$$y = e^{mx} \cdot e^n;$$

si ottiene dunque la funzione

$$y = A \cdot e^{mx},$$

dove abbiamo scritto

$$A = e^n. \quad (2)$$

La funzione si traduce nel grafico di fig. 17.

La formula (2) può essere interpretata basandosi sulle considerazioni svolte nel paragrafo precedente. Diremo dunque che:

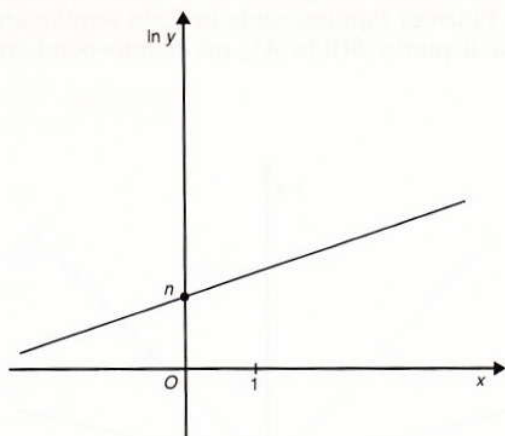


Fig. 16

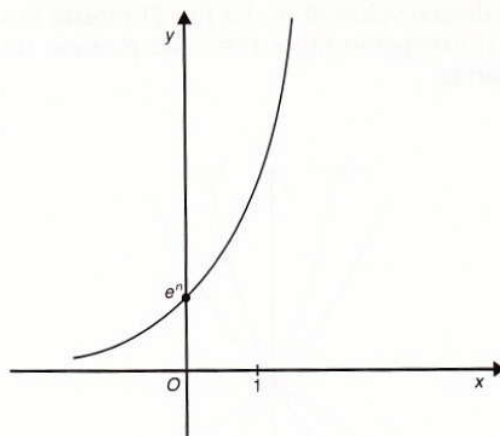


Fig. 17

- A indica il valore che assume la grandezza y , quando la grandezza x vale 0 ; infatti per $x=0$, si ha $y=Ae^0=A \cdot 1=A$.
- m indica il tasso di crescita (o decrescita) della grandezza y , in corrispondenza ad un aumento unitario della grandezza x .

La fig. 18 mostra i grafici di varie funzioni del tipo (2) con uguale valore di m e diversi valori del coefficiente A , mentre la fig. 19 mostra le stesse funzioni rappresentate in scala semilogaritmica: si ottengono tante rette parallele che hanno pendenza m ed intersecano l'asse delle ordinate nel punto B di coordinate $B(0, \ln A)$.

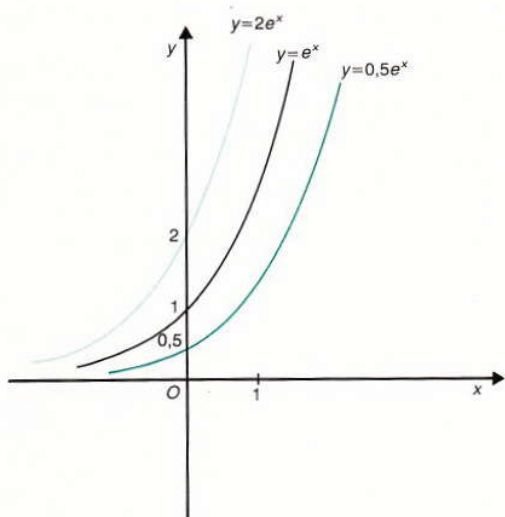


Fig. 18

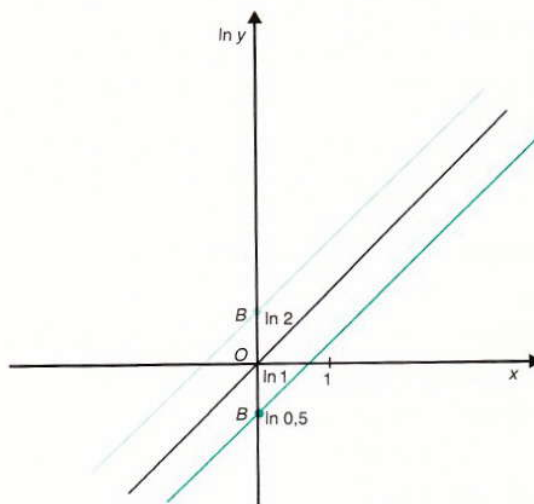


Fig. 19

La fig. 20 mostra invece i grafici di varie funzioni del tipo (2) con uguale coefficiente A e diversi valori di m . La fig. 21 mostra le stesse funzioni rappresentate in scala semilogaritmica: si ottengono tante rette che passano tutte per il punto $B(0, \ln A)$, ma hanno pendenza m variabile.

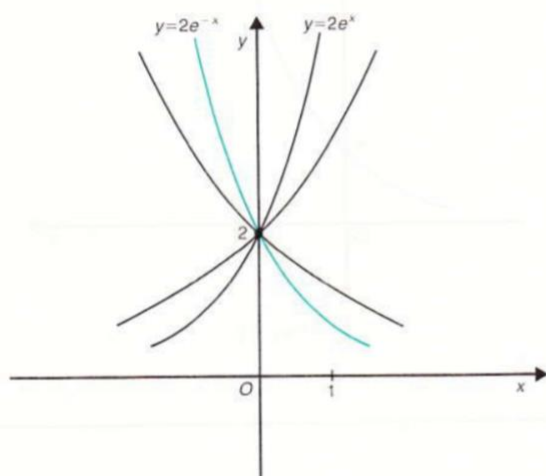


Fig. 20

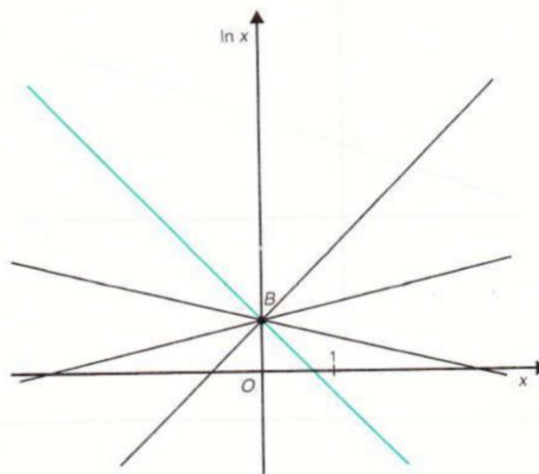


Fig. 21

ESERCIZI

Esaminare dei dati valendosi della scala semilogaritmica

Gli esercizi dal 73 al 78 conducono ad esaminare dei dati valendosi della scala semilogaritmica.

Per risolvere gli esercizi è opportuno tenere presenti le considerazioni svolte nel paragrafo 6. Altri quesiti di questo tipo sono proposti negli esercizi del cap. 4.

73. I seguenti dati approssimativi si riferiscono alla popolazione italiana maschile p rilevata nei censimenti ed espressa in decine di milioni:

anno	1861	1871	1881	1901	1911	1921	1931	1936	1951	1961	1971	1981
p	1	1,35	1,43	1,62	1,7	1,87	2,01	2,11	2,33	2,48	2,65	2,78

Rappresentare i dati in scala semilogaritmica, riportando sull'asse delle ascisse il tempo x e sull'asse delle ordinate $y = \ln p$; a partire dal grafico ottenuto, scrivere la legge che, in prima approssimazione, lega p ad x .

74. Ripetere l'esercizio 73 a partire dai seguenti dati approssimativi relativi alla popolazione femminile p' rilevata nei censimenti ed espressa in decine di milioni.

anno	1861	1871	1881	1901	1911	1921	1931	1936	1951	1961	1971	1981
p'	1	1,33	1,42	1,63	1,76	1,92	2,10	2,19	2,43	2,58	2,77	2,88

75. Si organizza un esperimento di chimica, facendo reagire il perossido di sodio con il permanganato di potassio in una soluzione alcalina; in questo modo si sviluppa ossigeno, che viene raccolto in un apposito recipiente graduato. La tabella seguente presenta i dati raccolti durante un esperimento di questo tipo: t è il tempo misurato in minuti e V il volume di ossigeno, misurato in centilitri.

t	0	1	2	3	4	5
V	1	1,2	1,4	1,7	2,1	2,5

Rappresentare i dati in scala semilogaritmica, riportando sull'asse delle ascisse il tempo x e sull'asse delle ordinate $y = \ln V$; a partire dal grafico ottenuto, scrivere la legge che, in prima approssimazione, lega V ad x .

76. Si studia il decadimento radioattivo del polonio, misurando in decine di grammi la massa M di un campione di questa sostanza al variare del tempo t , misurato in giorni. Si ottiene la tabella seguente:

t	0	2	4	6	8	10
M	1	0,99	0,98	0,97	0,96	0,95

Rappresentare i dati in scala semilogaritmica, riportando sull'asse delle ascisse il tempo x e sull'asse delle ordinate $y = \ln M$; a partire dal grafico ottenuto, scrivere la legge che, in prima approssimazione, lega M ad x .

Si riesce a prevedere dopo quanto tempo la massa dimezza?

77. La concentrazione C di una medicina nel sistema circolatorio di un uomo decresce al passare del tempo, mano a mano che il farmaco viene assorbito. In una ricerca sull'efficacia di un nuovo medicinale si è misurata C (in milligrammi per litro) al passare del tempo t misurato in ore, ottenendo la seguente tabella:

t	0	2	4	6	8	12
C	1	0,71	0,50	0,35	0,25	0,12

Rappresentare i dati in scala semilogaritmica, riportando sull'asse delle ascisse il tempo x e sull'asse delle ordinate $y = \ln C$; a partire dal grafico ottenuto, scrivere la legge che, in prima approssimazione, lega C ad x .

78. Si studia la scarica di un condensatore, misurando la corrente i al passare del tempo t ; si ottiene la seguente tabella, dove i è misurata in milliampère e t in millisecondi.

t	0	1	2	3	4	5
i	1	0,60	0,37	0,22	0,13	0,08

Rappresentare i dati in scala semilogaritmica, riportando sull'asse delle ascisse il tempo x e sull'asse delle ordinate $y = \ln i$; a partire dal grafico ottenuto, scrivere la legge che, in prima approssimazione, lega i ad x .

Grafici in scala semilogaritmica

Gli esercizi dal 79 all'85 conducono a tracciare dei grafici su una scala semilogaritmica.

Per risolvere gli esercizi è opportuno tenere presenti le considerazioni svolte nel paragrafo 6.

79. Tracciare in scala semilogaritmica i grafici delle seguenti funzioni e confrontare i disegni ottenuti:

$$a) y = e^x, \quad b) y = 2e^x, \quad c) y = \frac{1}{3}e^x, \quad d) y = \sqrt{2}e^x.$$

80. Ripetere l'esercizio 79 a partire dalle seguenti funzioni:

$$a) y = e^{-x}, \quad b) y = 4e^{-x}, \quad c) y = \frac{3}{4}e^{-x}, \quad d) y = \sqrt{3}e^x.$$

81. Ripetere l'esercizio 79 a partire dalle seguenti funzioni:

$$a) y = e^{-\frac{x}{2}}, \quad b) y = 3e^{-\frac{x}{2}}, \quad c) y = \frac{5}{2}e^{-\frac{x}{2}}, \quad d) y = \frac{1}{\sqrt{5}}e^{-\frac{x}{2}}.$$

82. Ripetere l'esercizio 79 a partire dalle seguenti funzioni:

$$a) y = e^x, \quad b) y = e^{4x}, \quad c) y = e^{-x}, \quad d) y = e^{\frac{x}{4}}.$$

83. Ripetere l'esercizio 79 a partire dalle seguenti funzioni:

$$a) y = \sqrt{7}e^{-x}, \quad b) y = \sqrt{7}e^{-3x}, \quad c) y = \sqrt{7}e^{3x}, \quad d) y = \sqrt{7}e^{-\frac{x}{3}}.$$

84. Ripetere l'esercizio 79 a partire dalle seguenti funzioni:

$$a) y = e^{x^2}, \quad b) y = e^{2x^2}, \quad c) y = e^{-x^2}, \quad d) y = e^{-3x^2}.$$

85. Ripetere l'esercizio 79 a partire dalle seguenti funzioni:

$$a) y=e^{\frac{1}{x}}, \quad b) y=e^{-\frac{1}{x}}, \quad c) y=e^{\frac{2}{x}}, \quad d) y=e^{-\frac{1}{2x}}.$$

Gli esercizi dall'86 al 92 conducono a riconoscere funzioni, di cui è noto il grafico in scala semilogaritmica.

Per svolgere gli esercizi è opportuno tenere presenti le considerazioni svolte nel paragrafo 6.

86. Esaminare le seguenti espressioni, in cui si è indicato $z=\ln y$:

$$a) z=x, \quad b) z=x-2, \quad c) z=x+3, \quad d) z=x+\sqrt{2}.$$

Esprimere, in ogni caso, y in funzione di x .

87. Ripetere l'esercizio 86 a partire dalle seguenti espressioni:

$$a) z=-2x, \quad b) z=-2x+1, \quad c) z=-2x-\frac{5}{2}, \quad d) z=-2x+\sqrt{7}.$$

88. Ripetere l'esercizio 86 a partire dalle seguenti espressioni:

$$a) z=2x, \quad b) z=\frac{1}{2}x, \quad c) z=-x, \quad d) z=-\sqrt{3}x.$$

89. Ripetere l'esercizio 86 a partire dalle seguenti espressioni:

$$a) z=2x+4, \quad b) z=\frac{1}{2}x+4, \quad c) z=-x+4, \quad d) z=-\sqrt{3}x+4.$$

90. Ripetere l'esercizio 86 a partire dalle seguenti espressioni:

$$a) z=x^2, \quad b) z=3x^2, \quad c) z=-x^2, \quad d) z=-\frac{1}{2}x^2.$$

91. Ripetere l'esercizio 86 a partire dalle seguenti espressioni:

$$a) z=x^3, \quad b) z=x^4, \quad c) z=-x^3, \quad d) z=3x^4.$$

92. Ripetere l'esercizio 86 a partire dalle seguenti espressioni:

$$a) z=\frac{1}{x}, \quad b) z=-\frac{1}{x}, \quad c) z=\frac{1}{x^2}, \quad d) z=-\frac{1}{x^2}.$$