# INTRODUZIONE STORICA

## *Il ritorno dell'infinitesimo*

È un ramo della matematica dai molti nomi, all'inizio si chiamò *calcolo infinitesimale*, o anche *calcolo differenziale*, poi fu detto *calcolo sublime*, sin dall'inizio ebbe anche il nome di *analisi* a volte come *analisi matematica*, altre come *analisi infinitesimale*.
Chi oggi studia analisi nelle scuole secondarie o all'Università faticherà a capire il motivo di quell'aggettivo *infinitesimale* che ogni tanto riappare.
Perché oltre ad aver cambiato più volte di nome, l'analisi ha anche cambiato le sue stesse fondamenta.
All'inizio con Leibniz, insieme a Newton padre fondatore di questa disciplina, a fondamento di tutto era l'*infinitesimo*, numero infinitamente piccolo eppure diverso da zero, derivate e integrali si definivano semplicemente come rapporti o somme di infinitesimi.
La prima contestazione arrivò nel Settecento ad opera di George Berkeley filosofo empirista e vescovo anglicano che mise in luce gli aspetti contraddittori degli infinitesimi definendoli *spettri di quantità estinte* (*ghosts of departed quantities)*.
Nonostante queste critiche il calcolo divenne rapidamente uno strumento irrinunciabile per i matematici ma soprattutto per fisici e ingegneri e le critiche di Berkeley restarono sullo sfondo di fatto irrisolte.
Solo nell'Ottocento il problema delle basi dell'analisi fu preso di petto e risolto in modo radicale principalmente ad opera di Augustin Cauchy che ridefinì derivate e integrali in termini di *limiti* invece che di infinitesimi e poi di Karl Weierstrass che diede una definizione rigorosa di limite, quella nota come *epsilon-delta*.
Gli infinitesimi divenuti superflui furono cacciati dall'universo matematico; di fatto continuarono a essere usati con il nuovo nome di *differenziali*.

Il rigore di Cauchy e Weierstrass comportava però un prezzo elevato: una considerevole complicazione di buona parte delle definizioni e delle dimostrazioni dell'analisi. La definizione epsilon-delta è astrusa e di non immediata comprensione per gli studenti, le dimostrazioni vengono ad essere più complicate e oscure, per esempio le regole di derivazione della funzione composta o della funzione inversa, di dimostrazione quasi immediata usando gli infinitesimi, richiedono dimostrazioni lunghe e contorte usando l'approccio di Cauchy e Weierstrass.
Certamente di questa idea era Abraham Robinson, nostalgico degli infinitesimi di Leibniz, che tra il 1960 e il 1966 riuscì a dare un fondamento logico rigoroso a questi numeri che Berkeley aveva considerato *spettrali*.
Nel suo libro *Non-standard Analysis* Robinson scriveva[2]:

> However in spite of this shattering rebuttal, the idea of infinitely small or infinitesimal quantities seems to appeal naturally to our intuition,[3]

Robinson in realtà non era un analista ma un logico-matematico e fu proprio un teorema della logica, quello di compattezza che gli fornì lo strumento per reintrodurre con tutti gli onori gli infinitesimi (numeri non standard) nella matematica, dopo un secolo di *esilio*.
L'analisi rifondata da Robinson si basa nuovamente sugli infinitesimi, e prende il nome di *Analisi Non Standard*, in inglese *Non Standard Analisis* (NSA).
Kurt Gődel uno dei più grandi matematici del Novecento, che di Robinson era amico, nel marzo 1973 disse in un discorso a favore della NSA[4]:

> *[...]This state of affairs should prevent a rather common misinterpretation of Non-standard Analysis, namely the idea*

2 A. ROBINSON, *Non-standard Analysis*, Princeton University Press, Princeton, 1966-1996, pag.2

3 D'altra parte nonostante questo rifiuto, l'idea di quantità infinitamente piccole o infinitesime sembra naturalmente attraente per la nostra intuizione.

4 A,ROBINSON, *ibidem*, pag. xvi.

> *that it is some kind of extravagance or fad of mathematical logicians. Nothing could be farther from the truth. Rather there are good reasons to believe that Non-standard Analysis in some version or other, will be the analysis of the future.*[5]

e subito dopo specificò così le ragioni che dovrebbero fare della NSA l'analisi del futuro.

> *One reason is the just mentioned simplification of proofs, since simplification facilitates discovery. Another, even more convincing reason, is the following: Arithmetic starts with the integers and proceeds by successively enlarging the number system by rational and negative numbers, irrational numbers etc. But the next quite natural step after the reals, namely the introduction of infinitesimals, has simply been omitted [...]*[6].

Sono passati quasi quarant'anni da questa profezia di Gődel e la NSA sembra ancora confinata in un Limbo, in particolar modo in Italia dove finora ha incontrato più diffidenza che altro.
Al di là delle ragioni enunciate da Gődel la NSA presenta un altro aspetto interessante e cioé che sembra particolarmente adatta ad un primo approccio all'analisi, in particolare nelle scuole secondarie; l'ambizione di questo libro è proprio quella di mostrare come questo sia possibile.

---

5 Questa situazione dovrebbe metterci al riparo dal un fraintendimento piuttosto comune dell'analisi non-standard, e cioè l'idea che si tratti di una qualche sorta di stravaganza o smania dei logici-matematici. Nulla potrebbe essere più lontano dalla verità. Piuttosto ci sono buone ragioni per credere che in una forma o in un'altra la NSA sarà l'analisi del futuro.

6 Una di queste ragioni è la già ricordata semplificazione delle dimostrazioni, dal momento che la semplificazione facilita la scoperta. Un altra, ancor più convincente ragione, è la seguente: l'Aritmetica inizia con i numeri interi e continua allargando via via il sistema dei numeri con i numeri razionali e i negativi, gli irrazionali ecc. Ma il successivo passo piuttosto naturale dopo i reali, e cioé l'introduzione degli infinitesimi, è stata semplicemente omessa

**Documento tratto dal testo: Bonavoglia P., Il calcolo infinitesimale**
http://www1.unipa.it/provenzano/index_file/support/Bonavoglia-Il_Calcolo_Infinitesimale.pdf