VIII. La dialettica dell'infinito: dall'infinitesimo al limite zero

Nella Nota IV abbiamo esaltato i matematici-filosofi, e i filosofi-matematici, che nel Seicento ebbero l'ardire di pensare l'infinito in atto, e non più soltanto in potenza, come voleva Aristotele. Con il loro coraggio intellettuale, essi inventarono e usarono metodi che implicavano l'infinitamente grande e l'infinitamente piccolo attualmente dati (o che, quanto meno, sembravano a prima vista implicarli); fondarono una teoria, il **calcolo infinitesimale,** strumento matematico essenziale per l'astronomo, il fisico, più tardi per l'ingegnere.

La questione dell'infinito e degli infinitesimi si poneva allora, lo ricordiamo ancora una volta, come problema della **composizione del continuo.** Prendiamo il caso più semplice, quello di un segmento di retta. In questo caso, infinito e infinitesimi sono strettamente collegati. Se penso un segmento come divisibile in un numero crescente, arbitrariamente grande ma mai infinito di parti **(infinito potenziale),** allora tali parti saranno piccole quanto si vuole, ma sempre « quante », sempre dotate di misura **(infinitesimi potenziali).** Se invece risolvo il segmento in una **infinità attuale** di parti, queste dovranno essere « non quante » cioè prive di dimensioni: **infinitesimi attuali,** punti e non più segmentini.

Nel calcolo infinitesimale, tanto nella esposizione di Newton quanto (e si potrebbe dire ancor più) in quella di Leibniz, c'è però una difficoltà razionale molto grossa. Il fatto è che gli infinitesimi dei quali essi parlano non sono punti senza dimensioni: sono, invece, quantità « incipienti », « evanescenti », insomma quantità estremamente piccole, non misurabili e insieme non nulle. Questo sono i differenziali dx e dy di Leibniz, con i quali egli insegna a fare calcoli.

Le regole di calcolo che dà Leibniz (attenzione, senza mai dimostrarle) funzionano — almeno in generale — benissimo, e consentono di risolvere, nel migliore dei modi, problemi di massimo e di minimo, di determinazione di tangenti, velocità, accelerazioni ecc., problemi tutti fino a quel momento inaccostabili. Quello che però non si riesce a comprendere, e che fa apparire il calcolo infinitesimale ai suoi esordi come arcana magia, è il significato del rapporto $\frac{dy}{dx}$, di due infinitesimi, fondamento di tutta l'efficacissima tecnica. Il secolo successivo, il grande Settecento, non chiarisce il mistero. Infatti, come dice Ludovico Geymonat,[1] nel Settecento « i progressi tecnici realizzati dall'analisi infinitesimale in alcune fondamentali direzioni già aperte dai matematici del secolo precedente furono veramente cospicui »; tuttavia la matematica del Settecento, « malgrado i grandi progressi compiuti in sede tecnica, [...] non era riuscita [...] a darsi un assetto logicamente rigoroso; i suoi successi, anche nel campo applicativo, erano incontestabili, ma sembrava impossibile trovar loro alcuna autentica garanzia razionale ».

Non aveva quindi torto Voltaire (1694-1778) quando, nel suo *Dictionnaire philosophique,* definiva il calcolo infinitesimale come « l'arte del numerare e misurare esattamente una cosa di cui non si può concepire l'esistenza ». Questa contraddizione tra chiarezza della pratica e oscurità della teoria, appassionò, come si vede, non solo scienziati, ma filosofi non specialisti di matematica. Così François-Arouet-Marie Voltaire alla fine del Settecento; così Karl Marx (1818-1883), verso la fine dell'Ottocento, nei suoi *Manoscritti matematici,* appunti scritti nel 1881 per l'amico Friedrich Engels (1820-1895). Marx, infatti, considerava molto importanti per l'elaborazione della sua filosofia rivoluzionaria (**superamento-conservazione,** ossia **negazione della negazione** che fa passare dal capitalismo al socialismo) lo studio e la comprensione delle teorie che erano state sviluppate dalla scienza nella società capitalistica, contrariamente a quanto affermano con orgogliosa ignoranza certi suoi nipotini, che parlano invece di « cultura alternativa » e « scienza di classe ». Marx, nei suoi appunti, nega un'esistenza matematica primaria (in sé) ai differenziali dx e dy, cioè a quantità infinitamente piccole, ma non nulle: tra il nulla, e il qualcosa, tra lo zero e un nu-

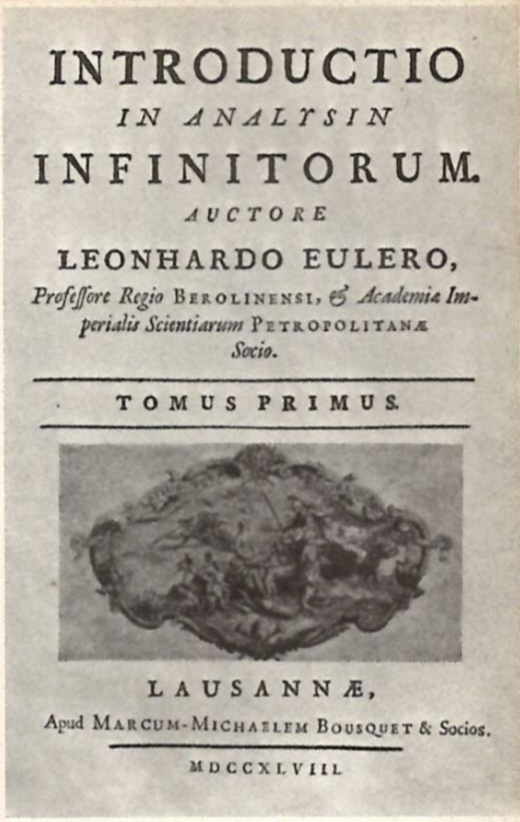
---

1. **Storia del pensiero filosofico e scientifico,** IV volume, pag. 568.

mero positivo, non ci sono enti intermedi. I differenziali perciò sono, secondo Marx, « figure d'ombra senza corpo », puri simboli di un'operazione algebrica (noi diremmo: analitica), quale è quella di passaggio da una funzione alla sua derivata. Marx, studioso anche di matematica, ma non specialista, non conosceva il lavoro di fondazione rigorosa dell'analisi infinitesimale che si era andato compiendo sul Continente Europeo nel suo secolo, e che tuttavia non era ancora molto noto in Inghilterra, dove Marx era esule. Egli sapeva però che la questione che lo appassionava aveva una storia; sapeva che, « cominciando dal metodo mistico di Newton e Leibniz », c'era stato poi il tentativo « di d'Alembert e di Eulero » di passare a un « metodo razionalistico ».

« L'opera di Leonhard Euler » (Eulero alla latina, 1707-1783, nato in Svizzera) « rappresenta una svolta fondamentale nella storia della matematica. Si può affermare, senza esagerazione, che Eulero fece per l'analisi infinitesimale di Newton e di Leibniz ciò che Euclide aveva fatto per la geometria di Eudosso e di Teeteto, o ciò che Viète aveva fatto per l'algebra di al-Khuwarizmi e di Cardano. Eulero trattò il calcolo differenziale » (Leibniz) « e il metodo delle flussioni » (Newton) « come parti di una branca più generale della matematica che da allora è nota con il nome di 'analisi' e che riguarda lo studio dei procedimenti infiniti ». Così Carl B. Boyer, nella sua grande *Storia della matematica*.[2] Il trattato in due volumi, *Introductio in analysin infinitorum* (1748), che il Boyer paragona, appunto, ai famosi *Elementi* di Euclide o all'*Al-jabr* (Algebra) di al-Khuwarizmi, è fondato sul concetto di **funzione.** Eulero non considera funzioni « architettate », strane, artificiali, ma solo quelle variabili dipendenti che si ottengono con precisi procedimenti di calcolo a partire da una (o più) variabili indipendenti; funzione è per lui infatti « una qualsiasi espressione analitica formata da quella quantità variabile e da numeri o quantità costanti ». Eulero continuò però a trattare i procedimenti infiniti con notevole disinvoltura (per dirla con il Boyer, fece « uso temerario di serie infinite »), e rappresenta quindi un primo momento di passaggio tra gli arditi fondatori dell'analisi infinitesimale del Seicento e i suoi sottili sistematori dell'Ottocento, più vicino forse ai primi che non ai secondi.

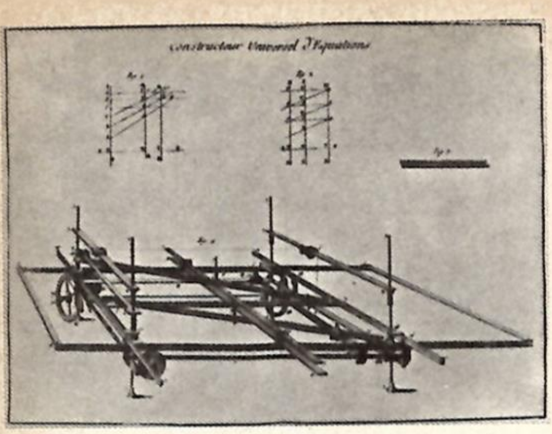
Mentre con Eulero si va definendo il concetto di **funzione,** con Jean le Rond d'Alembert (1717-1783), suo contemporaneo, ci si avvia al concetto fondamentale di **limite.** D'Alembert fu, con Denis Diderot, promotore della *Encyclopédie*, la contrastata opera che rappresentò il 'mani-


INTRODUCTIO
IN ANALYSIN
INFINITORUM.
AUCTORE
LEONHARDO EULERO,
Professore Regio BEROLINENSI, & Academiæ Imperialis Scientiarum PETROPOLITANÆ Socio.
TOMUS PRIMUS.
LAUSANNÆ,
Apud MARCUM-MICHAELEM BOUSQUET & Socios.
MDCCXLVIII.

Frontespizio della Introduzione nella analisi degli infiniti *(1748), l'opera di Eulero che può considerarsi, per l'analisi infinitesimale moderna, l'equivalente di quella di Euclide per la geometria antica.*

festo dell'Illuminismo'; ne scrisse il *Discorso preliminare*, e molte voci. Alla voce *Differenziale*, in polemica con Leibniz e anche con Eulero, d'Alembert afferma che « una quantità è qualcosa o è niente; se **è** qualcosa, non si è ancora annullata; se è niente, si è letteralmente annullata. Supporre che vi sia uno stato intermedio tra qualcosa e niente è una pura chimera »; perciò « la differenziazione [...] consiste semplicemente nel trovare i limiti del rapporto delle differenze **finite** di due variabili » (la sottolineatura è nostra). Alla voce *Limite*, d'Alembert ne dà una definizione già molto vicina a quella rigorosa, che è dovuta però a un grandissimo matematico della generazione successiva, Augustin Louis Cauchy (1789-1857). Nelle sue *Leçons sur le calcul différentiel* del 1829 Cauchy scrive: « quando i valori successivi

2. ISEDI, Milano, 1976.



Questa singolare tavola è tratta dalla Enciclopedia *di Diderot e rappresenta un apparecchio definito "costruttore universale di equazioni". Diderot mirava alla fusione di scienza e pratica artigiana.*

attribuiti a una variabile si avvicinano indefinitamente a un valore fissato, così che finiscono con il differire da questo per una differenza piccola quanto si vuole, quest'ultimo viene detto il limite di tutti gli altri ».

Ma l'apporto decisivo di Cauchy a quella che Ludovico Geymonat ha chiamato la **filosofia** del calcolo infinitesimale è un radicale mutamento nella concezione dell'« infinitamente piccolo »: « Si dice che una quantità **variabile** diventa infinitamente piccola quando il suo valore numerico decresce indefinitamente in modo da convergere verso il limite zero ». L'infinitesimo-chimera, figura d'ombra senza corpo, l'infinitesimo che è e non è, l'infinitesimo **quantità** fissa ma evanescente, viene fugato dalla ragione, si trasforma in **variabile** (la sottolineatura nella citazione è nostra), nella **variabile che tende a zero.**

Possiamo fermarci qui perché, in buona sostanza, i manuali scolastici di analisi infinitesimale (incluso il nostro!) seguono ancora la traccia delle *Leçons* di Cauchy; faremo ancora soltanto il nome del tedesco Karl Weierstrass (1815-1897), che dà, tra l'altro, nel 1872, il primo esempio di una funzione continua ma non derivabile.

Vogliamo però chiudere con due riflessioni, che vanno al di là della tecnica, e anche della filosofia strettamente **matematica,** e che possono essere importanti anche per chi di funzioni, limiti, infinitesimi e infiniti non si occuperà mai nella sua vita professionale.

La prima riflessione riguarda la personalità di Cauchy. Non solo fu un reazionario allo stato quasi puro, legittimista, in esilio con il suo re, nemico della rivoluzione francese e dei suoi principi; fu anche persecutore sul terreno **scientifico** dei suoi nemici *politici* (espulsione di Monge, giacobino e seguace di Napoleone, dall'Accademia); fu egoisticamente chiuso nei confronti di giovani come Galois e Abel, destinati a rimanere nella storia della matematica come geni di prima grandezza. Galois considerò Cauchy uno dei responsabili della morte di Abel, che scriveva in effetti, nel 1826, a un amico da Parigi: « Ogni principiante trova grande difficoltà a farsi notare qui. Ho appena terminato un ampio trattato su una certa classe di funzioni trascendenti [...] ma il signor Cauchy non si è neanche degnato di dargli un'occhiata ». (Abel morirà giovane, anche per gli stenti sopportati, privo come fu fino all'ultimo di una sistemazione universitaria).

Et pourtant... E, tuttavia, Cauchy pensatore e scienziato è stato, nel fatto, progressista, ha dato contributi positivi alla società; anzi, per certi aspetti, possiamo ben dire che questo Barone (era, il Cauchy, tanto barone autentico quanto 'barone' accademico), è stato un rivoluzionario del pensiero.

Attenzione al giudizio in bianco e nero! Questa è la morale anche della seconda, ed ultima, riflessione. L'infinitesimo, e l'infinito, attuale, che rappresenta nel Seicento un grande e decisivo progresso filosofico e tecnico rispetto alla filosofia aristotelica e scolastica, cristallizzata in schemi dottrinari, divengono nell'Ottocento ostacoli a ulteriori progressi. Se vogliamo usare il linguaggio hegeliano (e in modo non mistico, ma storico circostanziato), il concetto di **limite-zero** ci appare come **negazione di una negazione,** negazione dell'infinitesimo attuale che era a sua volta negazione dell'infinitesimo soltanto potenziale.

Per quello che riguarda l'infinito, possiamo arrivare alla conclusione che non è possibile né utile ridurlo a uno solo dei suoi aspetti, che bisogna invece saperlo considerare **volta a volta** come **potenziale,** e come **attuale.** E questa è appunto la dialettica dell'infinito: che va avanti, e che non si concluderà mai.

Documento tratto dal testo fuori catalogo
L. Lombardo Radice e L. Mancini Proia,
Il metodo Matematico 3