Documento estratto dal testo fuori catalogo E.Castelnuovo, C.Gori Giorgi, D.Valenti 'Elementi di analisi matematica'

8. Gli asintoti di una curva

In questo paragrafo completiamo lo studio dell'andamento di una curva, esaminando una caratteristica già osservata nel cap. 2 paragrafi 2 e 5: un ramo della curva si avvicina indefinitamente ad una retta che prende il nome di **asintoto**.
Un esempio di curva che presenta questa caratteristica è dato dal grafico della seguente funzione

$$y=x+2+\frac{1}{x^2}.$$

Per tracciare la curva, ci si può basare sulla somma grafica[1] (fig. 43), rappresentando sullo stesso riferimento cartesiano

- la retta d'equazione $y_1=x+2$ (in nero),
- la curva d'equazione $y_2=\frac{1}{x^2}$ (in grigio).

In corrispondenza ad un valore di x si indica il punto che ha l'ordinata y, data dalla somma delle ordinate y_1 e y_2 "lette" su ciascuna curva; ripetendo questo procedimento si ottengono tanti punti (in colore). Raccordando questi punti, si ottiene la curva richiesta (fig. 44).

[1] Vedi anche cap. 1, paragrafo 6.

Il procedimento grafico suggerisce due osservazioni:

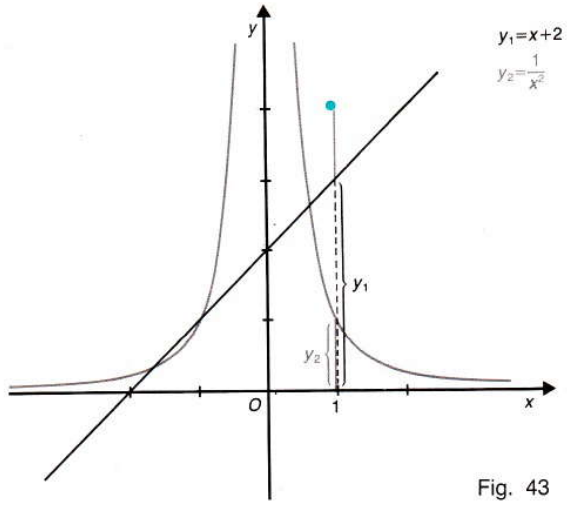

Fig. 43

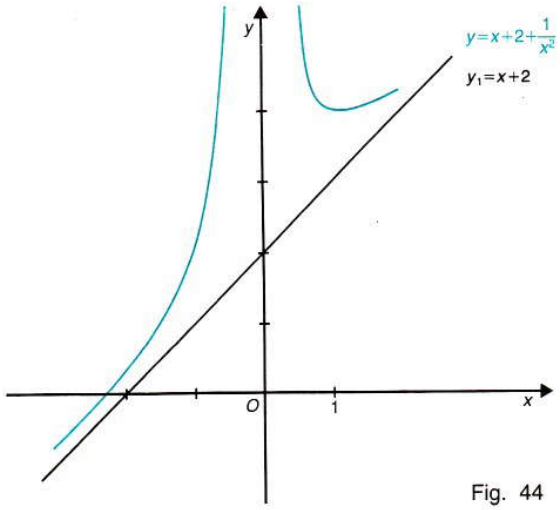

Fig. 44

1) Il valore 0 è escluso dal campo di esistenza della funzione; inoltre, quando x assume valori prossimi a 0, l'ordinata

$$y_2=\frac{1}{x^2}$$

diventa sempre più grande, mentre l'ordinata

$$y_1=x+2$$

assume valori sempre più vicini a 2.
In corrispondenza (fig. 45), l'ordinata

$$y=y_1+y_2$$

diventa sempre più grande, mentre la curva si avvicina sempre di più all'asse delle y.
In questo caso si dice che la curva ha **un asintoto verticale** d'equazione

$$x=0.$$

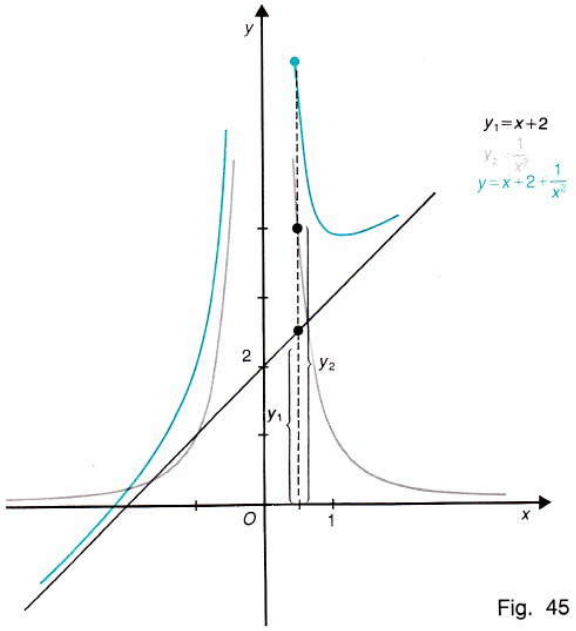

Fig. 45

2) Quando x assume valori sempre più grandi in modulo, l'ordinata

$$y_2=\frac{1}{x^2},$$

diventa sempre più piccola, perciò, calcolando l'ordinata di un punto P della curva, data da

$$y=y_1+y_2,$$

"si aggiunge sempre di meno" all'ordinata y_1 di un punto Q che percorre la retta (fig. 46).
Si capisce così che, quando $x\to\infty$, la curva "tende ad adagiarsi" sulla retta r d'equazione

$$y=x+2.$$

La retta r è dunque un asintoto per la curva. Per mettere in evidenza che r non è parallela agli assi cartesiani, si parla di **asintoto obliquo**. Se invece l'asintoto e parallelo all'asse delle x, si dice che è **asintoto orizzontale**.

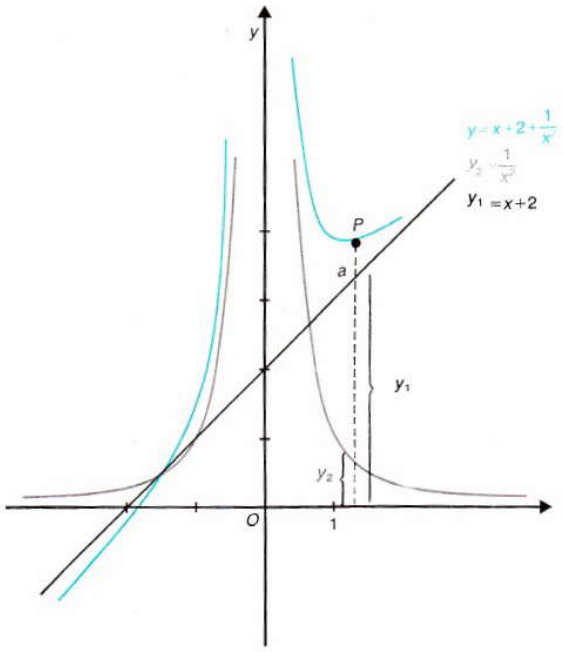

Fig. 46

Ora è chiaro che queste considerazioni grafico-intuitive non sono sempre possibili nel caso di curve dall'espressione analitica complicata. Eppure, è proprio in questi casi più complicati che la conoscenza degli asintoti di una curva è indispensabile per descrivere in modo preciso "il comportamento all'infinito" e il "comportamento nelle vicinanze dei punti singolari"[1].

Occorre dunque un procedimento di carattere più strettamente algebrico, che indichi i calcoli da svolgere per determinare gli asintoti. È proprio di questo che ora ci occuperemo.

[1] Vedi anche cap. 2, paragrafi 1 e 4.

Prima di tutto si tiene presente che l'equazione di una retta si presenta sempre in una di queste due forme:

$x=a$ che descrive le rette parallele all'asse delle y;
$y=mx+n$ che descrive sia le rette oblique, sia le parallele all'asse delle x nel caso $m=0$.

Divideremo perciò il lavoro in due parti:

A) relativa agli asintoti d'equazione $x=a$,
B) relativa alla ricerca degli asintoti d'equazione $y=mx+n$.

A) Asintoti d'equazione $x=a$

Basta riprendere le nozioni esposte nel cap. 2 (paragrafi 5 e 6) per arrivare alle seguenti conclusioni (fig. 47):

Una curva d'equazione $y=f(x)$ ammette un asintoto d'equazione $x=a$ se si verificano le seguenti condizioni:
1) il numero a è escluso dal campo d'esistenza,
2) $\lim_{x\to a} f(x)=\infty$.

Un'osservazione importante. Il fatto che il numero a deve essere escluso dal campo di esistenza della funzione ha un'intuitiva interpretazione geometrica: sul grafico della funzione non si può trovare un punto che ha per ascissa il numero a, e questo vuol dire che **una curva non può mai incontrare un suo asintoto verticale**.

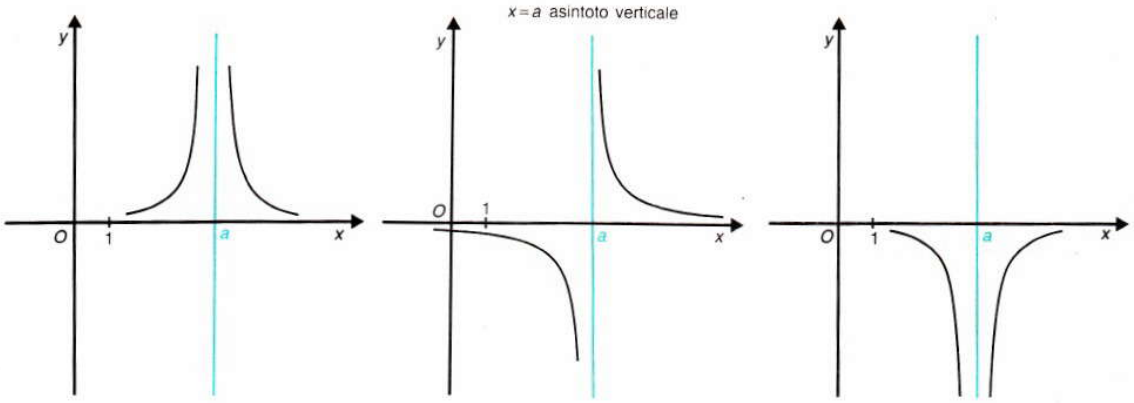

Fig. 47

Applichiamo ora le condizioni indicate a qualche esempio numerico.

1) Determinare gli asintoti verticali della funzione

$$y=\frac{x^3-1}{x^2-x}.$$

I valori da escludere dal campo d'esistenza di questa funzione razionale sono solo quelli per cui risulta

$$x^2-x=0, \quad \text{ossia} \quad x(x-1)=0;$$

si tratta dunque dei valori

$$x=0 \text{ e } x=1.$$

Risulta poi

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3-1}{x^2-x}=\infty,$$

e perciò la retta d'equazione $x=0$ **è un asintoto verticale** della curva. Calcolando poi

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x^2-x}$$

si trova invece una forma indeterminata[1] del tipo $\frac{0}{0}$. Tuttavia si arriva facilmente a calcolare il risultato del limite, applicando la regola di de l'Hôpital[2]; si trova:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x^2-x}=\lim_{x\to 1}\frac{3\cdot x^2}{2x-1}=3.$$

Non si verifica dunque la 2ª condizione, e perciò la retta d'equazione **$x=1$ non è un asintoto della curva**.

2) Determinare gli eventuali asintoti verticali di un polinomio del tipo:

$$y=a_0+a_1\cdot x+a_2\cdot x^2+\ \dots\ +a_n\cdot x^n$$

È immediato verificare che nessun numero reale è escluso dal campo di esistenza di questa funzione; viene dunque a mancare la 1ª condizione, e perciò la curva non ammette asintoti verticali.

3) Determinare gli asintoti verticali della funzione

$$y=\operatorname{tg} x.$$

Dato che la funzione è periodica con periodo π (fig. 48), basta esaminarla in un periodo, per esempio l'intervallo $[0, \pi]$. Ricordando che risulta:

$$\operatorname{tg} x=\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x},\quad \text{e}\quad \cos x=0\quad \text{per}\quad x=\frac{\pi}{2},$$

si trova che il valore $x=\frac{\pi}{2}$ è escluso dal campo di esistenza I; risulta inoltre:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}=\infty.$$

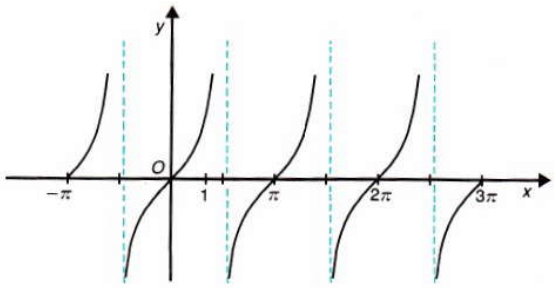

Fig. 48

[1] Vedi cap. 3, paragrafo 5.
[2] Vedi cap. 4, paragrafo 8.

Si conclude dunque che la retta d'equazione $x=\frac{\pi}{2}$ è un asintoto verticale della curva. Se ora si considera la funzione in tutto il suo campo di esistenza, ci si rende conto che il grafico ha **infiniti asintoti verticali**.

Quest'ultimo esempio fa capire che **una curva grafico di una funzione può avere molti asintoti verticali**.

B) Asintoti d'equazione $y=mx+n$

Riprendiamo (fig. 49) il grafico della funzione

$$y=x+2+\frac{1}{x^2}$$

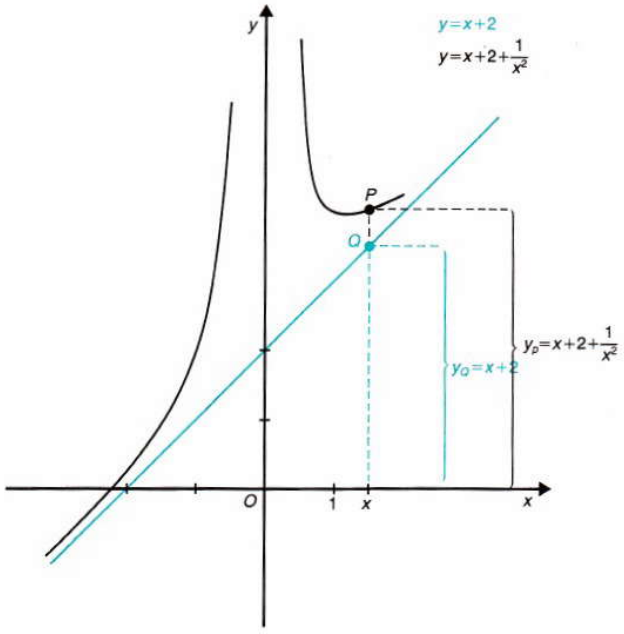

Fig. 49

per tradurre in termini analitici le considerazioni geometriche svolte prima a proposito degli asintoti obliqui.

Cominciamo dall'affermazione più significativa: «la retta r d'equazione $y=x+2$ è un asintoto della curva, dato che la curva si avvicina sempre di più alla retta, quando $x\to\infty$».

Prima di tutto, si può esprimere algebricamente il fatto che «la curva si avvicina alla retta» dicendo che la distanza fra la retta e la curva tende a 0.

Si è condotti allora a valutare la distanza retta-curva, che può essere calcolata così: si considera un punto P che percorre la curva e un punto Q, di uguale ascissa, che percorre la retta r; si valuta quindi la distanza retta-curva mediante la distanza $\overline{PQ}$. Si ha:

$$\overline{PQ}=y_P-y_Q=x+2+\frac{1}{x^2}-(x+2)$$

e quindi

$$\overline{PQ}=\frac{1}{x^2}.$$

Si ottiene dunque che la distanza $\overline{PQ}$ è una funzione di x che presenta una caratteristica notevole:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2}=0.$$

Così la frase «la retta r è un asintoto della curva, dato che la curva si avvicina sempre di più alla retta r, quando $x\to\infty$» può essere espressa mediante il linguaggio dei limiti: r è un asintoto della curva perché risulta

$$\lim_{x\to\infty} \overline{PQ}=0.$$

Queste considerazioni possono essere facilmente generalizzate (fig. 50): una retta r d'equazione

$$y=mx+n$$

è un asintoto per una curva d'equazione

$$y=f(x),$$

se risulta

$$\lim_{x\to\infty} \overline{PQ}=0.$$

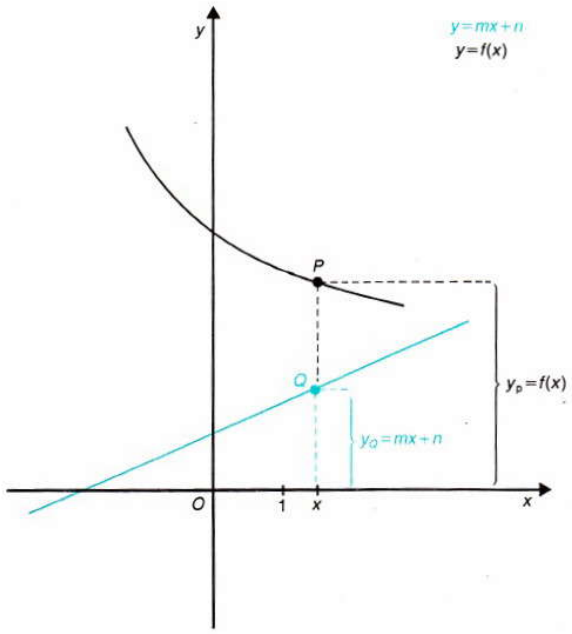

Fig. 50

In questo modo si ha una condizione algebrica per determinare un eventuale asintoto obliquo di una data funzione $y=f(x)$. La condizione può essere meglio scritta, indicando con $h(x)$ la distanza $\overline{PQ}$, che è una funzione di x; si ha:

$$\overline{PQ}=h(x)=f(x)-(mx+n), \qquad (1)$$

e si può dire che la retta r è asintoto della curva se risulta

$$\lim_{x\to\infty} h(x)=0, \quad \text{ossia} \quad \lim_{x\to\infty} [f(x)-mx-n]=0.$$

Ora si capisce che quest'unica condizione non può determinare i due coefficienti m ed n che compaiono nell'equazione della retta r.
Al più si può scrivere che deve risultare

$$\lim_{x\to\infty} [f(x)-mx]=n \tag{2}$$

si osserva così che, per determinare il termine noto n, bisogna conoscere la pendenza m.

Occorre dunque un'altra condizione che permetta di determinare m; per ricavare questa condizione si può ragionare così: se deve risultare

$$\lim_{x\to\infty} h(x)=0$$

a maggior ragione deve essere[1].

$$\lim_{x\to\infty} \frac{h(x)}{x}=0 \tag{3}$$

Quindi, oltre alla (1), si considera la funzione seguente

$$\frac{h(x)}{x}=\frac{f(x)-(mx+n)}{x}$$

ossia

$$\frac{h(x)}{x}=\frac{f(x)}{x}-m-\frac{n}{x} \tag{4}$$

Ricordando poi che per questa funzione (4) deve valere la relazione (3), si ricava appunto la seconda condizione cercata; si ha:

$$\lim_{x\to\infty} \left[\frac{f(x)}{x}-m-\frac{n}{x}\right]=0 \tag{5}$$

infine, dato che risulta

$$\lim_{x\to\infty} \frac{n}{x}=0,$$

la condizione (5) diventa

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}=m \tag{6}$$

Considerando insieme la (2) e la (6) si arriva alla seguente conclusione:

una retta d'equazione $y=mx+n$ è un asintoto della curva d'equazione $y=f(x)$, se risulta

$$m=\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{e} \quad n=\lim_{x\to\infty} [f(x)-mx].$$

[1] Vedi cap. 3, paragrafo 5.

Due osservazioni importanti:

- **il grafico di una funzione non può avere più di un asintoto obliquo**, e questo per il teorema dell'unicità del limite[1]. D'altra parte è facile capire che una curva come quella di fig. 51, che ammette due diversi asintoti obliqui, non può essere il grafico di una funzione, dato che ad una x corrispondono due valori di y.
- **il grafico di una funzione può intersecare anche più volte un suo asintoto obliquo**, dato che non è stabilita alcuna condizione che impedisca questo. La fig. 52 mostra appunto una curva che si avvicina asintoticamente ad una retta obliqua, dopo averla intersecata più volte.

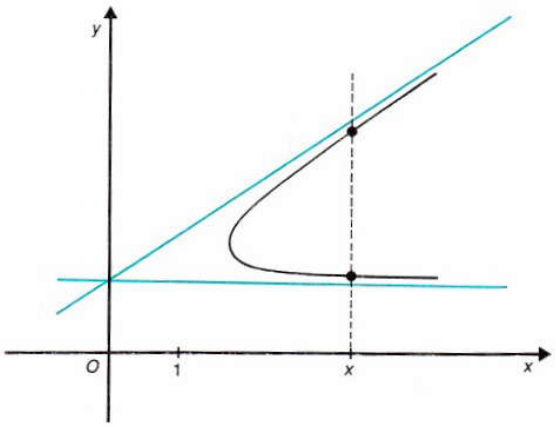

Fig. 51. Una curva con due asintoti obliqui non può essere il grafico di una funzione.

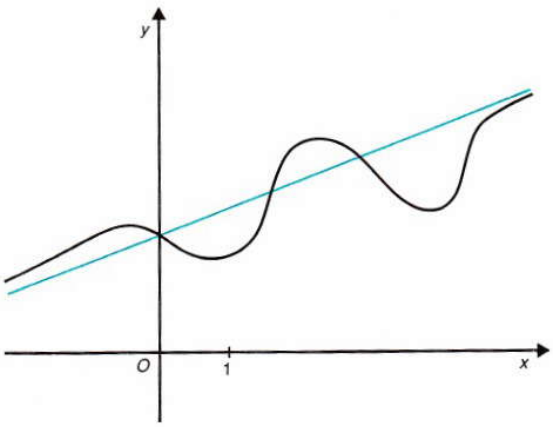

Fig. 52. Una curva può attraversare il suo asintoto obliquo.

Vediamo ora qualche applicazione dei risultati ottenuti.

1) Determinare gli asintoti d'equazione $y=mx+n$ della funzione

$$y=\frac{x^3-1}{x^2-x}.$$

Si comincia col calcolare la pendenza m, data da

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$$

nel nostro caso si ottiene[2]:

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-1}{x^3-x^2}=1.$$

Si calcola successivamente il termine noto n, dato da

$$n=\lim_{x\to\infty}[f(x)-mx]$$

si ha:

$$n=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-1}{x^2-x}-x=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-1-x^3+x^2}{x^2-x}$$

[1] Vedi cap. 2, paragrafo 8.

[2] Vedi cap. 3, paragrafo 6.

ossia

$$n=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{x^2-x}=1.$$

Si conclude che la curva ha l'asintoto obliquo d'equazione $y=x+1$.

È importante osservare che avevamo studiato a pag. 169 la funzione ora esaminata, trovando che aveva un asintoto verticale d'equazione $x=0$. Quest'esempio conduce dunque a fissare l'attenzione su un fatto: **una curva può avere più asintoti verticali e un asintoto obliquo.**

2) Calcolare gli eventuali asintoti d'equazione $y=mx+n$ della curva che ha l'equazione seguente

$$y=\frac{2\cdot x^4}{x^4+x^3+5}.$$

In questo caso si ottiene:

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{2\cdot x^3}{x^4+x^3+5}=0, \qquad n=\lim_{x\to\infty}\frac{2\cdot x^4}{x^4+x^3+5}=2.$$

Si conclude che la curva ha un asintoto orizzontale d'equazione $y=2$.

Questo esempio conduce a fissare l'attenzione sugli asintoti orizzontali. Una curva d'equazione $y=f(x)$ ha un asintoto orizzontale d'equazione $y=n$, se si verificano le seguenti condizioni:

$$\text{(I)}\ \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=0 \quad \text{e} \quad \text{(II)}\ \lim_{x\to\infty} f(x)=n.$$

Ora è chiaro che dalla prima condizione non segue necessariamente la seconda; invece[1], se risulta

$$\lim_{x\to\infty}[f(x)]=n,$$

risulta anche

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=0.$$

Arriviamo dunque alla seguente conclusione:

una curva d'equazione $y=f(x)$ ammette un asintoto orizzontale d'equazione $y=n$, se risulta

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=n.$$

3) Determinare gli eventuali asintoti d'equazione $y=mx+n$ di un polinomio del tipo:

$$y=a_0+a_1\cdot x+a_2\cdot x^2+\ \ldots\ +a_n\cdot x^n$$

Quando si prova a calcolare la pendenza m si ottiene:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{a_0}{x}+a_1+a_2x+\ldots+a_nx^{n-1}\right)=\infty.$$

Si conclude così che questo tipo di curve, che, come abbiamo visto prima, non ha asintoti verticali, non ha neanche asintoti d'equazione $y=mx+n$.

[1] Vedi cap. 3, paragrafo 5.