Problemi di massimo e minimo: un pò di storia

Valentina Girolimetti

Potrà sembrare strano ma il primo *problema di massimo* nella storia si deve ad un'antica leggenda narrata anche nel I Libro dell'Eneide. Nel lontano 800 a.C. Elissa o Elisa (a noi nota come Didone, l'*errante*), principessa di origine fenicia, dopo la morte del marito Sicheo, fugge per mare insieme alla sorella e a pochi fedeli finchè approda sulle coste africane. Lì chiede al re della Libia, Iarba, un pezzo di terra su cui fondare una città. Il re, folgorato dalla bellezza di Didone, non vuole dare ai fuggiaschi né asilo né terre ove stabilirsi, a meno che lei non acconsenta a sposarlo. La donna rifiuta e ottiene da Iarba tanta terra *taurino quantum possent circumdare tergo"* (quanta una pelle di bue ne potesse circondare, *Eneide I, 367-368*). Didone accetta la sfida e riesce ad occupare la terra necessaria per fondare Cartagine: chiede un paio di forbici, taglia in strisce sottilissime la pelle, le annoda e con il filo ottenuto recinta un bel pezzo di terreno a forma di semicerchio. Il problema di Didone è noto come **problema isoperimetrico**: *fra tutte le curve piane di ugual perimetro qual è quella che racchiude la massima area?*. I Greci avevano capito che la soluzione era rappresentata dalla circonferenza (semicirconferenza nel caso di Didone), ma non ne possedevano una dimostrazione. La soluzione geometrica rigorosa occupò i matematici per secoli. Vari tentativi di varia efficacia furono fatti da Archimede, Zenodoro, Pappo e poi in tempi più recenti da Eulero, Galileo, Legendre, L'Huilier, Riccati, Simpson, e, tra il 1838 e il 1841, Steiner fino a Hilbert.

Al di là del problema isoperimetrico sopra citato, le questioni di massimo e di minimo hanno sempre avuto un grande valore nellìinterpretazione dei fenomeni naturali, sulla scia del principio aristotelico (*Metafisica*, Libro V) secondo cui la natura sceglie sempre la via più facile*....nulla accade nell'universo che non faccia capo a qualche criterio di massimo o di minimo...*, così si esprimeva Eulero nel XVIII secolo, in altre parole, *essendo la costruzione del mondo la più perfetta possibile, come quella di un Creatore infinitamente saggio, in natura nulla avviene che non presenti proprietà di massimo o di minimo.* Vedremo, infatti, che Erone e Fermat (1601-1665) hanno dedotto da un principio di minimo le leggi della riflessione e della rifrazione.

Vediamo ora le questioni che hanno interessato i matematici lungo il corso dei secoli. Il primo problema di massimo esplicitamente formulato è contenuto negli *Elementi* di **Euclide**, matematico alessandrino vissuto nel III secolo a.C. Euclide, raccogliendo tutto il patrimonio di sapere costruito dagli studiosi che lo precedettero, ci offre, con la sua monumentale opera, il primo esempio di quello che oggi diremmo un trattato scientifico per il metodo rigorosamente deduttivo usato. Nel Libro VI dei suoi *Elementi* scrive:

Proposizione 27. *Di tutti i parallelogrammi applicati alla stessa retta (costruiti su parte della retta) e deficienti (dal parallelogramma costruito sullìintera retta) di figure parallelogrammatiche simili e similmente situate rispetto al parallelogramma descritto su metà della retta, ha area maggiore quel parallelogramma che è applicato a metà della retta e che è simile al difetto.*

In termini moderni potremmo enunciare la proposizione nella seguente forma geometricamente modificata: *dato un triangolo ABC, se da un punto D del lato BC si tracciano le parallele ED ad AC, FD ad AB,* **l'area del parallelogramma $AEDF$ è massima quando D è il punto medio di BC**. La situazione è mostrata nella seguente Figura 1:

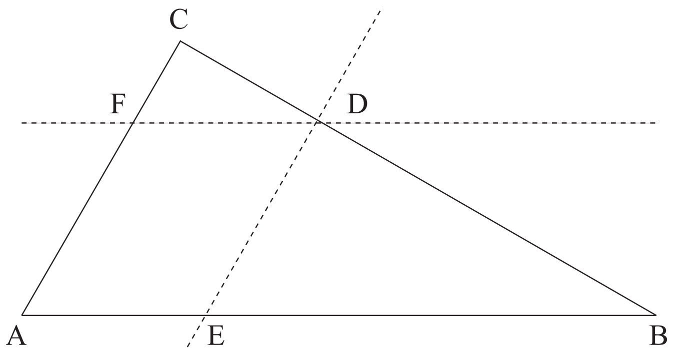

Figura 1: Parallelogramma $AEDF$

Nel caso particolare che $AB = AC$ e l'angolo BAC è retto (vedi Figura 2), allora tra tutti i rettangoli di perimetro dato, **il quadrato è quello di area massima** (nella Proposizione 27 equivale a richiedere che il parallelogramma dato sia un rettangolo), proprietà già implicitamente contenuta nella Proposizione 5 del Libro II degli *Elementi*. Non è difficile mostrare che fra tutti i triangoli con due lati assegnati, quello rettangolo avente per cateti tali lati ha area massima.

Ma tra le questioni note ai Greci si possono ricordare i seguenti **problemi isoperimetrici**:

- *fra tutti i poligoni convessi di n lati e di dato perimetro quello regolare racchiude l'area massima;*

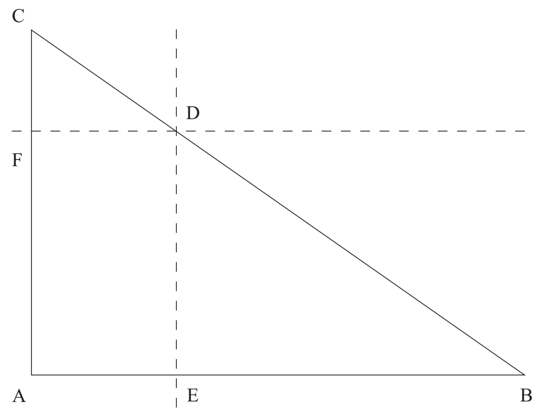

Figura 2: Rettangolo $AEDF$

- *fra tutte le superfici piane, il cui contorno ha una data lunghezza, il cerchio ha l'area massima (problema di Didone);*
- *fra tutti i solidi di data superficie la sfera ha il massimo volume.*

Tra coloro che si interessarono di tali questioni ricordiamo **Zenodoro** (II secolo a.C.) che confrontò le superfici dei poligoni con ugual perimetro e dimostrò che **l'area maggiore è racchiusa dai poligoni con maggior numero di lati e, fra tutti, dal cerchio, raggiungendo un'analoga conclusione (senza dimostrazione) per la sfera**. I suoi risultati ci vengono riportati da Pappo nell'opera *Collezioni matematiche* il cui Libro V è dedicato proprio ai problemi di isoperimetria.

Si hanno anche altri risultati quali:

- *fra tutti i triangoli di assegnato perimetro, con la stessa base, quello che ha area maggiore è il triangolo equilatero;*
- *fra i poligoni, quelli con area maggiore sono le figure convesse, in particolare i poligoni regolari;*
- *tutti i segmenti circolari limitati da un arco di data lunghezza il semicerchio ha l'area massima (ancora il problema di Didone).*

Successivamente all'opera di Euclide troviamo in Grecia il lavoro di **Apollonio** (circa 262 a.C. - 190 a.C.). L'opera che meritò ad Apollonio il titolo di Grande Geometra è intitolata *Coniche*. Di essa, però, nella lingua originale greca ci sono pervenuti soltanto i primi quattro degli otto libri di cui è composta, mentre degli altri si ha una traduzione araba. Le sezioni coniche erano già note da un secolo e mezzo, ma allo stesso modo che gli *Elementi* di Euclide avevano rimpiazzato precedenti manuali elementari, così, al livello superiore delle sezioni coniche, l' opera di Apollonio soppiantò tutti i trattati esistenti intorno a tali curve. Il Libro V dell'opera di Apollonio tratta il problema della determinazione delle **rette di lunghezza massima e minima** che da particolari punti possono essere condotte a una conica. Nella prefazione a questo libro, il più notevole per la sua novità e originalità, Apollonio ripete che *l'argomento è uno di quelli che sembrano degni di essere studiati per se stessi.* Quello, però, che ad Apollonio sembrava lungi dal potere essere applicato nel mondo fisico si è rivelato poi di notevole utilità pratica. I suoi teoremi sui massimi e minimi sono in realtà teoremi sulle tangenti e sulle normali alle sezioni coniche di fondamentale importanza in campi quali la meccanica celeste e la dinamica terrestre. Nella determinazione delle rette di lunghezza minima e massima, Apollonio inizia con punti speciali situati nell'asse maggiore di una conica a centro o sull'asse di una parabola, poi passa ai punti dell'asse minore dell'ellisse. In tal modo dimostra anche che se O è un punto interno ad una conica e se OP è una retta di lunghezza massima o minima da O, allora la perpendicolare a OP in P è tangente alla conica in P. I matematici greci non possedevano una definizione soddisfacente di tangente ad una curva C in un punto P. Apollonio potè evitare di definire la normale a una curva C da un punto Q come una retta passante per Q che interseca la curva in un punto P ed è perpendicolare alla tangente alla C in P. Egli usò il fatto che la normale tracciata dal punto Q a C rappresenta un massimo o un minimo relativo. Non solo, Apollonio si spinge fino a formulare criteri che permettono di dire quante normali si possono tracciare da un punto dato ad un conica, criteri che equivalgono alle moderne equazioni delle evolute delle coniche.

Nel I secolo d.C. **Erone di Alessandria**, interessato alle misure in ottica e in meccanica, trasse nella sua *Catrottica* un'importante conseguenza dalla legge della riflessione secondo cui un raggio di luce proveniente da un punto P e incidente su uno specchio piano L in un punto R viene riflesso nella direzione di un punto Q tale che PR e QR formano con L angoli uguali. Erone mostrò che fra tutti i cammini possibili per andare da P a Q passando per lo specchio il cammino più breve è quello per cui gli angoli di incidenza e riflessione sono uguali. Come a dire che la natura conosce bene la geometria e la sfrutta a suo vantaggio. Dal risultato di Erone si possono derivare altre proprietà in geometria elementare quali le proprietà tangenziali dell'ellisse e dell'iperbole. Dobbiamo attendere il XVII secolo per avere altri risultati interessanti; in quel periodo, infatti, **Fermat** dimostrò che anche la legge della rifrazione della luce può esser enunciata in termini di un principio di minimo.

La soluzione di problemi di massimo e minimo mediante metodi puramente geometrici, cioè senza basarsi sull'ormai nato *calcolo delle variazioni*, continuò ad essere oggetto di studio. Nel secolo successivo **Cramer** mostrò che fra tutti i poligoni piani convessi aventi come lati n segmenti dati, ha area massima quello inscrivibile in un cerchio. A **Lhuilier**, vissuto a cavallo tra il XVIII e il XIX secolo, si deve l'opera di raccolta e riordino di quanto si conosceva fino allora sui problemi degli isoperimetri nel piano e nello spazio. Il famoso studioso di geometria **Jacob Steiner**, operante a Berlino nella prima metà dell'800, trattò numerose questioni di massimo e minimo utilizzando modi diversi per stabilire le proprietà isoperimetriche del cerchio e della sfera dalle quali dedusse numerosi applicazioni. Una tra le questioni (già nota a Caratheodory) mostrate da Steiner è la seguente: *Tre villaggi A, B, C devono essere congiunti da un sistema stradale di minima lunghezza totale.* Matematicamente il problema si traduce nel cercare, nel piano in cui giacciono i punti dati, un punto P tale che sia minima la somma $a + b + c$ delle distanze di P rispettivamente da A, B e C. Sulla scia della dimostrazione delle proprietà tangenziali dell'ellisse si può vedere che la soluzione al problema è la seguente: *se nel triangolo ABC tutti gli angoli sono minori di $120°$, P è il punto che proietta ciascuno dei tre lati AB, BC, AC, secondo un angolo di $120°$. Se un angolo è maggiore o uguale a $120°$, il punto P coincide con il vertice di tale angolo.* L'opera di raccolta e perfezionamento di Steiner fu continuata da **R. Sturm** nel suo libro *Maxima und Minima in der elementaren Geometrie* del 1910. Il risultato di Steiner più famoso ottenuto per via sintetica è il **teorema sugli isoperimetri**, ovvero che tra tutte le figure piane di dato perimetro il cerchio è quello che racchiude l'area massima. I suoi metodi sintetici furono attaccati dal punto di vista analitico dai suoi contemporanei, primo tra tutti Dirichlet. Sfortunatamente, infatti, Steiner ipotizzava l'esistenza della curva massimizzante, mentre ciò che dimostrò è il fatto che se tale curva esiste allora è una circonferenza. La dimostrazione di una curva massimizzante creò non pochi problemi ai matematici negli anni successivi fino a quando **Weierstrass** fece ricorso al calcolo delle variazioni. Un altro risultato

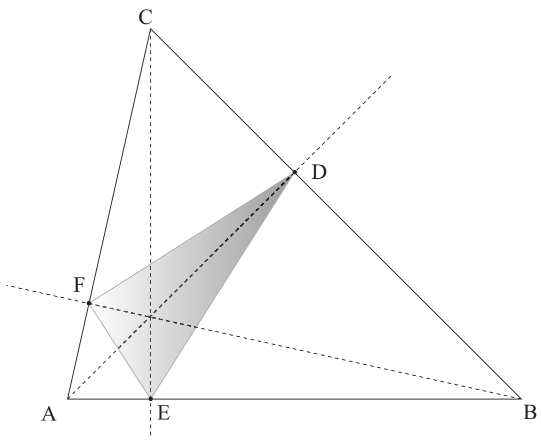

Figura 3: Triangolo di perimetro minimo

fondamentale si deve a **Hermann Schwartz**, matematico di Berlino, che trattò e dimostrò il seguente problema (già noto e dimostrato geometricamente ma in maniera decisamente meno elegante): *dato un triangolo acutangolo ABC, iscrivere in esso un triangolo di perimetro minimo.* Egli dimostrò che esiste un solo triangolo di questo tipo e precisamente è quello avente i vertici ai piedi delle altezze del triangolo dato (Figura 3).

Nel 1884 Schwartz dimostrò la proprietà di isoperimetria della sfera nello spazio tridimensionale e nel 1958 **Ennio de Giorgi** dimostrò che vale la stessa proprietà in uno spazio di dimensione maggiore.