Idee per la prova di matematica all'esame di Stato 2022

Proposte basate su: grafico di polinomi o quoziente di polinomi, retta tangente, ottimizzazione e calcoli con derivate

PROPOSTA 1

Problema 1

Utilizzo un filo metallico lungo 20 metri per recintare una zona rettangolare.

a. Qual è la zona di area massima che posso recintare?

Taglio in due parti un altro filo metallico, sempre lungo 20 metri, per recintare due zone: una quadrata e una circolare. Spiega come debbo tagliare il filo per ottenere:

b. che la somma delle due aree sia minima;

c. che la somma delle due aree sia massima.

Problema 2

È data la curva grafico della funzione

$$f(x) = \frac{8}{4 + x^2}$$

Risolvi i seguenti quesiti:

a. traccia il grafico della curva;

b. scrivi le equazioni delle tangenti alla curva nei suoi punti P(–2, 1) e Q(2, 1);

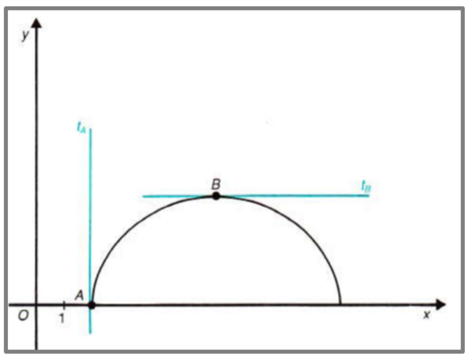
c. disegna il quadrilatero convesso individuato dalle tangenti con le rette PO e OQ;

d. dimostra che il quadrilatero è un rombo;

e. determina, in gradi e primi sessagesimali, gli angoli del rombo.

Quesiti

1. Stabilisci quali fra le seguenti affermazioni sono vere (**V**) e quali false (***F***) per la la funzione rappresentata nella figura qui sotto.



a. La funzione non è derivabile nel punto B, perché la tangente è parallela all'asse delle x;__

b. La derivata della funzione nel punto B vale zero, perché la tangente è parallela all'asse delle x; __

c. La funzione non è derivabile nel punto A, perché la tangente è parallela all'asse delle y;__

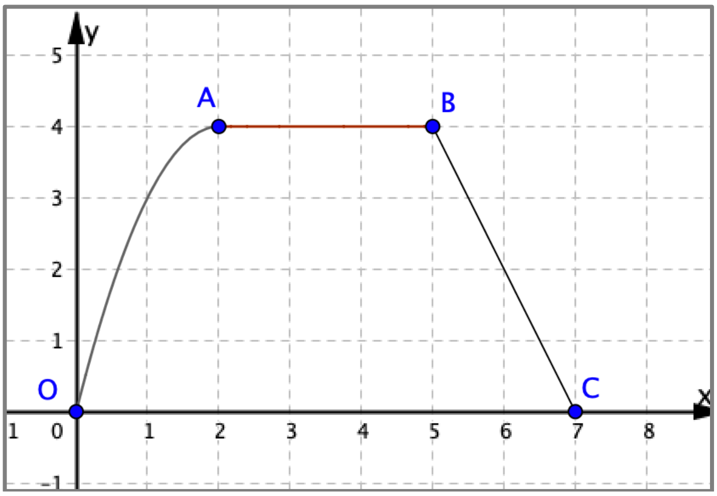
d. La derivata della funzione nel punto A vale zero, perché la tangente è parallela all'asse delle y. __

2. Determina il parametro k in modo che il grafico della funzione $f(x) = kx^3 - x + 4$ abbia nel punto di ascissa 1 la tangente parallela all'asse delle x.

3. Sono date le funzioni $f(x) = e^x$ e $g(x) = \ln(x)$. Fissata un'ascissa $a > 0$, considera le rette r ed s tangenti a f e g nei rispettivi punti di ascissa a e dimostra che esiste una sola ascissa a per la quale r ed s sono parallele.

4. Spiega perché hanno la stessa derivata le funzioni $f(x) = 4\ln(x)$ e $g(x) = \ln(3x^4)$.

5. È data la funzione $f(x)$ rappresentata nella figura qui sotto, dove trovi l'arco OA di parabola di equazione $y = -x^2 + 4x$ e i punti A(2, 4), B(5, 4), C(7, 0). Traccia il grafico della funzione $f'(x)$.



6. È data una funzione $y = f(x)$ e il suo punto P di ascissa $x = 2$, scegli qui sotto l'affermazione corretta

A. Se risulta $\lim_{h \to 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = 0$, la funzione non è derivabile nel punto P.

B. Se risulta $\lim_{h \to 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \infty$, la tangente alla curva nel punto P è parallela all'asse x.

C. Se risulta $\lim_{h \to 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \infty$, la funzione non è derivabile nel punto P.

D. Se risulta $\lim_{h \to 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = 0$, la tangente alla curva nel punto P è parallela all'asse y

7. Dimostra che la derivata di una funzione pari è dispari e porta un esempio di funzione pari con la sua derivata.

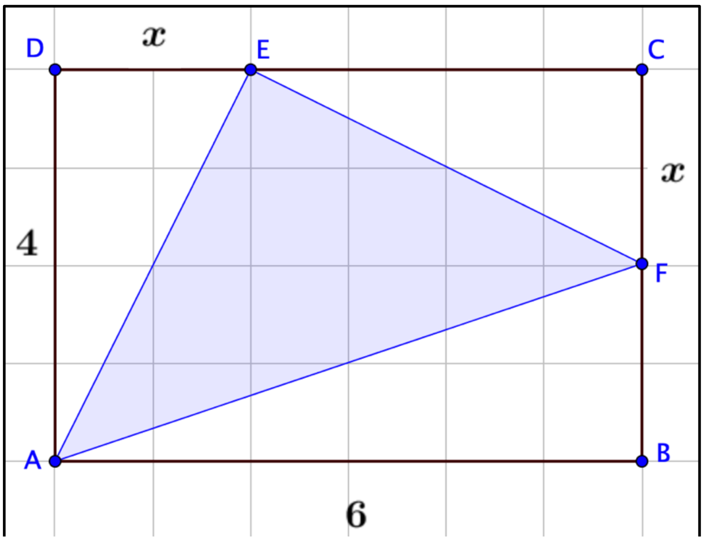
8. Un foglio di carta deve contenere: un'area di stampa di 50 cm^2, margini superiore e inferiore di 4 cm e margini laterali di 2 cm. Quali sono le dimensioni del foglio di carta di area minima che posso utilizzare?

PROPOSTA 2

Problema 1

Nella figura qui sotto un triangolo AEF è inscritto in un rettangolo ABCD con le dimensioni lunghe 4 cm e 6 cm. Al variare di x il punto E si muove lungo CD, mentre il punto F si muove lungo BC. Osserva come varia l'area S del triangolo AEF e rispondi ai seguenti quesiti:

1. Quanto vale l'area S se x vale 0?
2. Quanto vale l'area S se x vale 4?
3. Spiega perché l'area S, al variare di x è descritta dall'espressione $S = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 12$
4. Per quale valore di x ottengo l'area S minima?



Problema 2

È data la curva grafico della funzione

$$f(x) = \frac{2 + x^2}{x}$$

Risolvi seguenti quesiti:

a. traccia il grafico della curva;

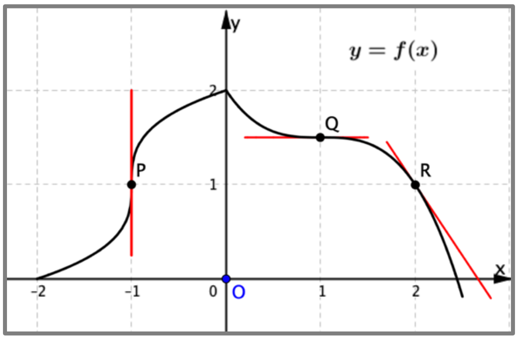
b. scrivi l'equazione della tangente ***t*** e della normale ***n*** alla curva nel suo punto P d'ascissa 2;

c. scrivi le equazioni delle rette ***t'*** e ***t"*** che sono tangenti alla curva ed hanno un'inclinazione di 135° e calcola le coordinate dei punti di contatto;

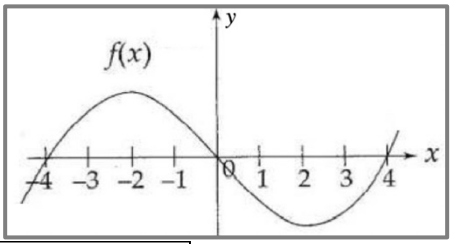
d. scrivi le equazioni delle rette t_1 e t_2 tangenti alla curva condotte dal punto **A**(4,0) e calcola le coordinate dei punti di contatto $\mathbf{T_1}$ e $\mathbf{T_2}$**;**

e. scrivi l'equazione della retta ***r*** che congiunge $\mathbf{T_1}$ con $\mathbf{T_2}$; disegna del triangolo determinato dalle rette ***r***, t_1 e t_2 e calcola le ampiezze dei suoi angoli.

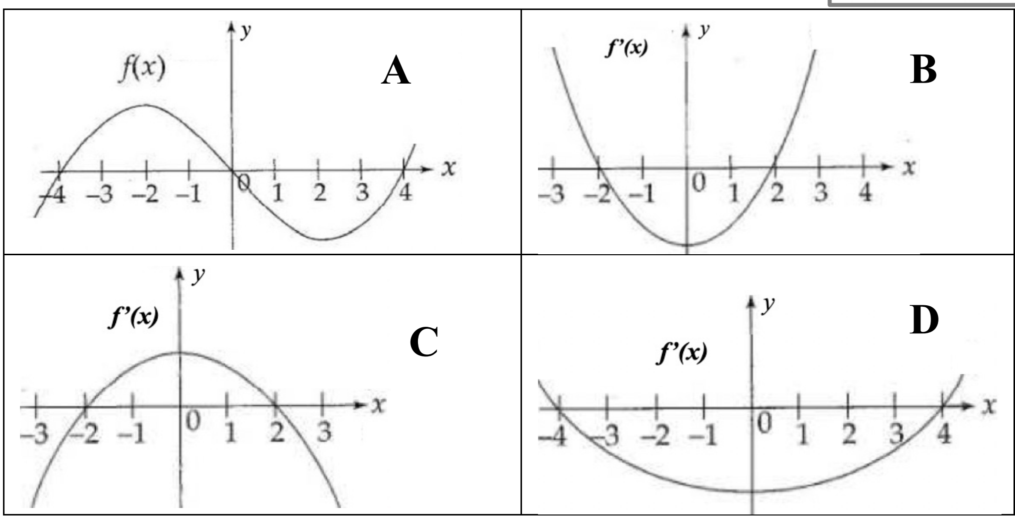
Quesiti



1. Esamina la funzione $y = f(x)$ rappresentata nella figura a fianco e scegli l'affermazione corretta.
   A. Nel punto P la derivata è positiva;
   B. Nel punto Q la funzione non è derivabile;
   C. Nel punto P la derivata vale zero;
   D. Nel punto R la derivata è negativa.
2. Dimostra che la derivata di una funzione dispari è pari e porta un esempio di funzione dispari con la sua derivata.
3. È data la funzione $f(x) = \log_b(x)$ e α è l'inclinazione della tangente al grafico della funzione nel suo punto di ascissa 1. Per quale valore della base b è $\alpha = 45°$? E per quale valore di b è $\alpha = 135°$?



4. La figura a fianco rappresenta il grafico di $f(x)$; quale dei grafici nelle figure qui sotto potrebbe essere il grafico di $f'(x)$? …….
   Motiva la tua risposta.



5. È data una funzione $y = f(x)$ e il suo punto P di ascissa $x = 3$, scegli qui sotto l'affermazione corretta
   A. Se risulta $\lim_{h\to 0} \frac{f(3+h)-f(3)}{h} = 1$, la tangente alla curva nel punto P è parallela alla retta d'equazione $y = x$.
   B. Se risulta $\lim_{h\to 0} \frac{f(2+h)-f(3)}{h} = \infty$, la tangente alla curva nel punto P è parallela all'asse x.
   C. Se risulta $\lim_{h\to 0} \frac{f(3+h)-f(3)}{h} = \pi$, la funzione non è derivabile nel punto P.
   D. Se risulta $\lim_{h\to 0} \frac{f(3+h)-f(3)}{h} = 0$, la tangente alla curva nel punto P è parallela all'asse y.

6. Un foglio di carta deve contenere: un'area di stampa di 80 cm^2, margini superiore e inferiore di 3 cm e margini laterali di 2 cm. Quali sono le dimensioni del foglio di carta di area minima che posso utilizzare?
7. Calcola la derivata della funzione $f(x) = arcsenx + arcosx$. Quali conclusioni puoi trarre per la $f(x)$?
8. Stabilisci per quale valore di k il grafico della funzione $f(x) = x^3 - 2x^2 + kx$ ha una sola tangente parallela alla retta d'equazione $y = -x$. Quante tangenti parallele all'asse delle x ha il grafico della funzione per il valore di k che hai ottenuto?

PROPOSTA 3

Problema 1

Sono date le curve grafici delle funzioni

$$f(x) = x^2 \quad \text{e} \quad g(x) = \frac{1}{x}$$

Risolvi i seguenti quesiti:

a. traccia il grafico delle due curve;

b. verifica che le due curve si incontrano nel punto A(1, 1);

c. calcola l'ampiezza γ dell'angolo fra le due curve nel punto A;

d. scrivi le equazioni delle due tangenti in A e rappresentale, insieme al grafico delle curve;

e. determina l'equazione della retta tangente ***t*** ad $f(x)$ che ha un'inclinazione di 45°, precisa le coordinate del punto di contatto T e rappresenta la retta sul grafico.

Problema 2

È data la funzione $f(x) = x^3 - 1$. Risolvi i seguenti quesiti:

a. traccia il grafico della funzione;

b. scrivi le equazioni della tangente ***t*** e della normale ***n*** al grafico della funzione nel punto A d'ascissa 1; accompagna la risposta con un accurato grafico;

c. determina le coordinate dei punti T_1 e T_2 della curva in cui la tangente è parallela alla retta ***r*** d'equazione $y = \frac{3}{4}x$(T_1 è il punto di ascissa positiva), scrivi le equazioni delle rette t_1 e t_2 tangenti alla curva in tali punti e accompagna lo svolgimento del quesito con un accurato grafico;

d. determina le equazioni delle rette t_3 e t_4 che sono tangenti alla curva e passano per il punto $P\left(-\frac{2}{3};-1\right)$; indica con T_3 e T_4 i punti di contatto;

e. determina gli angoli triangolo P T_3 T_4 e accompagna le risposte con un accurato grafico;

Quesiti

1. Una coppia di numeri reali non negativi ha il prodotto che vale 15; in quale caso la somma dei numeri è minima?

2. Scrivi l'equazione della tangente ***t*** e della normale ***n*** al grafico della funzione $f(x) = \text{sen}(x)\cos(x)$ nel suo punto A di ascissa 0.

3. Determina il parametro ***k*** in modo che il grafico della funzione

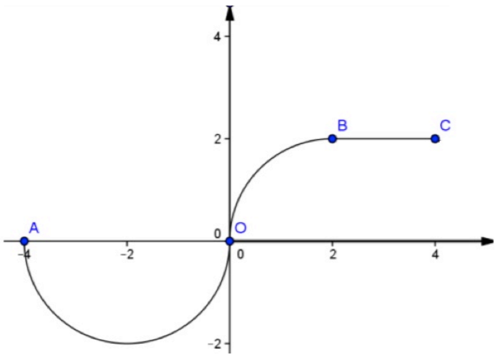
$$f(x) = \frac{x}{x-k}$$

abbia la retta tangente nel suo punto O(0,0) con un'inclinazione di $\frac{\pi}{6}$ radianti.

4. Dimostra che la derivata di una funzione periodica con periodo T è una funzione periodica con lo stesso periodo e porta un esempio di funzione periodica con la sua derivata.

5. La funzione $f(x)$ ha il grafico disegnato a lato, che passa per i punti A(–4, 0), O(0, 0), B(2, 2), C(4, 2) ed è formato da:
- la semicirconferenza di diametro AO;
- l'arco OB, quarto di circonferenza di raggio 2;
- il segmento BC.

Rispondi ai seguenti quesiti:



a. $f(x)$ è derivabile in A? SI NO

perché: ………………………………………………………………………

b. $f(x)$ è derivabile in O? SI NO

perché: ………………………………………………………………………

c. $f(x)$ è derivabile in B? SI NO

perché: ………………………………………………………………………

6. Se la funzione $f(x) - f(2x)$ ha derivata 6 in $x = 1$ e derivata 8 in $x = 2$, qual è la derivata di $f(x) - f(4x)$ in $x = 1$?

7. Determina i parametri ***h*** e ***k*** in modo che la curva grafico della funzione

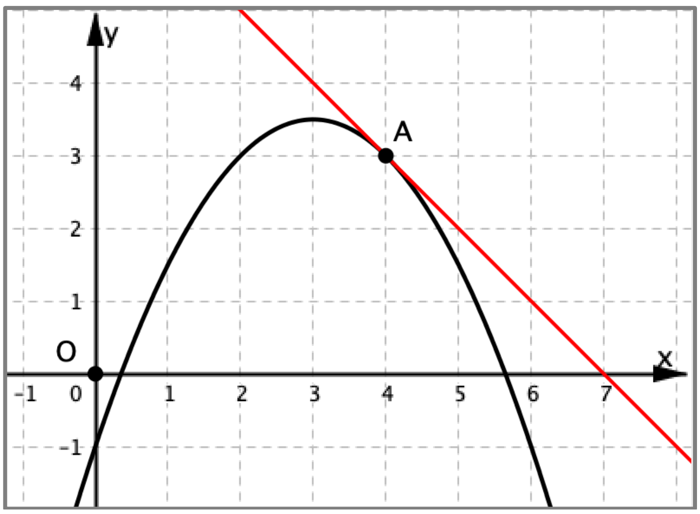
$$f(x) = \frac{hx + k}{x^2}$$

passi per il punto A(1, 3) e sia ivi tangente alla retta ***t*** d'equazione $y = -4x + 7$.

8. La figura qui sotto mostra il grafico della funzione $f(x)$ e della retta d'equazione $y = -x + 7$. La retta è tangente alla curva nel suo punto A di ascissa 4.
Rispondi ai seguenti quesiti:

a. quanto vale $f(4)$?_____

b. quanto vale la derivata di f in $x = 4$, cioè $f'(4)$?____



PROPOSTA 4

Problema 1

È data la funzione $f(x) = x^4 - 2x^3 - 1$. Risolvi i seguenti quesiti:

- **a.** traccia il grafico della funzione;
- **b.** scrivi l'equazione della tangente t_A al grafico nel suo punto A di ascissa 1 e rappresenta t_A nel grafico;
- **c.** determina le coordinate del punto B, ulteriore intersezione di t_A con la curva.
- **d.** determina le coordinate dei punti della curva che hanno la tangente parallela all'asse delle x;
- **e.** scrivi le equazioni delle tangenti nei punti determinati nel quesito precedente.

Problema 2

Sono date le curve grafici delle funzioni

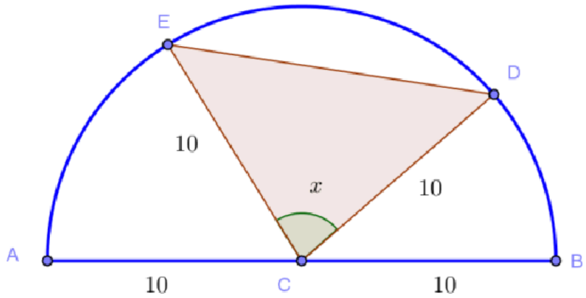
$$f(x) = 2x^3 + x^2 - 2x - 1 \quad \text{e} \quad g(x) = x^2 - x$$

Risolvi i seguenti quesiti:

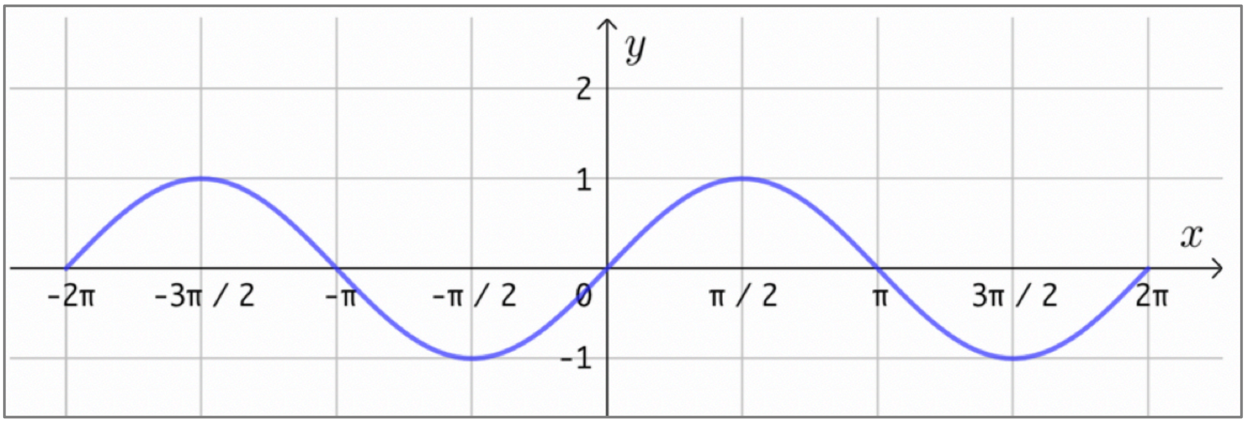
a. traccia il grafico delle due curve;
b. verifica che le due curve si incontrano nel punto A(1, 0);
c. calcola l'ampiezza γ dell'angolo fra le due curve in tale punto di intersezione;
d. scrivi le equazioni delle due tangenti in A e rappresentale, insieme al grafico delle curve;
e. calcola l'inclinazione della tangente al grafico di $f(x)$ nel punto di intersezione B con l'asse delle y.

Quesiti

1. Scegli un procedimento rapido per derivare la funzione $f(x) = \text{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right) + \cos^2\left(\frac{x}{2}\right)$
2. Spiega perché hanno la stessa derivata le funzioni $f(x) = \ln(x)$ e $g(x) = 3\ln\left(\sqrt[3]{x}\right)$.
3. Determina il parametro reale a in modo che i grafici di $y = x^2$ e $y = -x^2 + 4x - a$, risultino tangenti e stabilisci le coordinate del punto di tangenza.
4. Data la famiglia di funzioni $y = -x^3 + kx$, trova la funzione tangente nel suo punto di ascissa 1 ad una retta parallela alla retta $y = x$. Determina l'equazione della tangente.
5. Nella figura qui sotto il triangolo CDE è inscritto nel semicerchio con il raggio lungo 10 cm. Qual è l'area massima che può assumere il triangolo CDE?



6. Stabilisci quali fra le seguenti affermazioni sono vere (**V**) e quali false (**F**) per la funzione $y = \text{sen}(x)$ rappresentata qui sotto nell'intervallo $[-2\pi, 2\pi]$



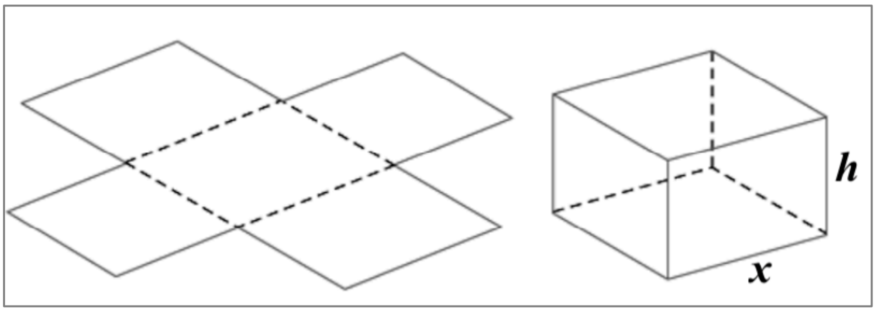
A. Nell'origine la tangente al grafico ha equazione $y = x$___

B. Nell'intervallo [4, 5] la funzione è positiva. ___

C. Nell'intervallo $[0, 2\pi]$ esistono punti in cui la tangente al grafico ha la pendenza $m = -0.5$ ___

D. Nell'intervallo $[0, \pi]$ la funzione è sempre crescente. ___

7. Una scatola aperta a base quadrata deve avere un volume di 550 cm^3; trova le dimensioni della scatola che può essere costruita con la minima quantità di cartone.



8. Determina il parametro b in modo che il grafico della funzione

$$f(x) = \frac{x}{x + 2b}$$

abbia la retta tangente nel suo punto O(0,0) con un'inclinazione di $\frac{\pi}{4}$ radianti.