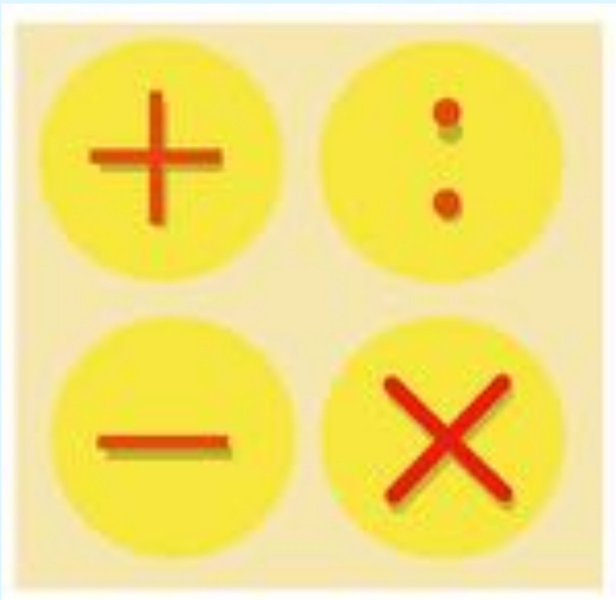
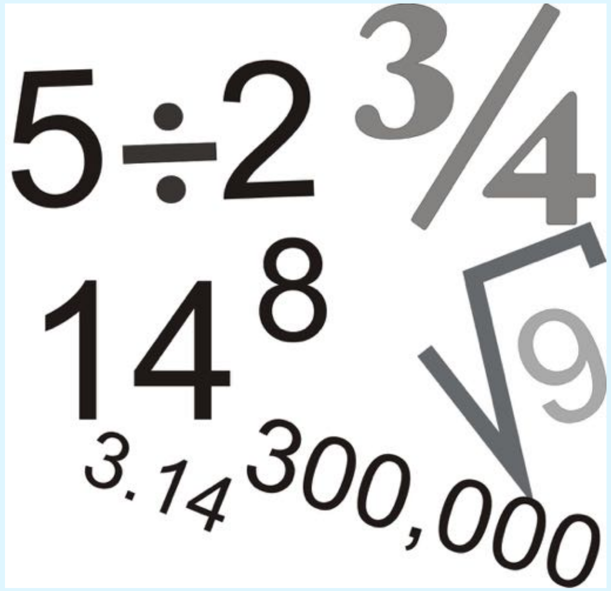
Algebra delle funzioni

Daniela Valenti, 2022

Le 4 operazioni con i numeri

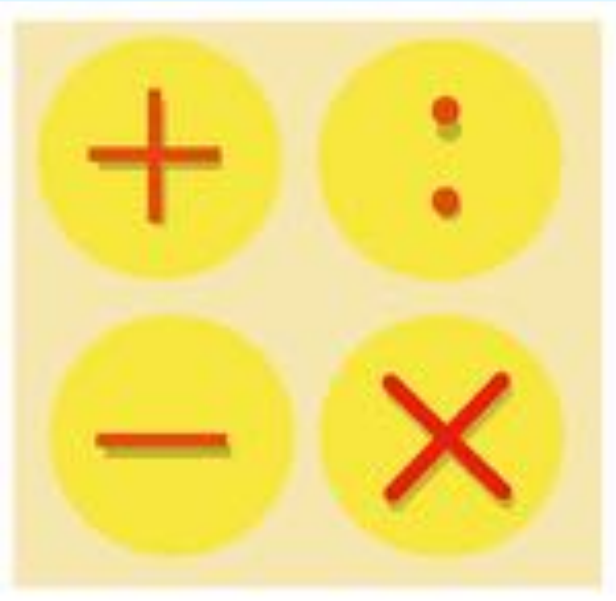
I primi passi nella matematica portano a ‘inventare’ i numeri e le quattro operazioni: addizione e sottrazione, moltiplicazione e divisione.
Sono passi suggeriti dalla realtà: contare, misurare, pagare merci, ...

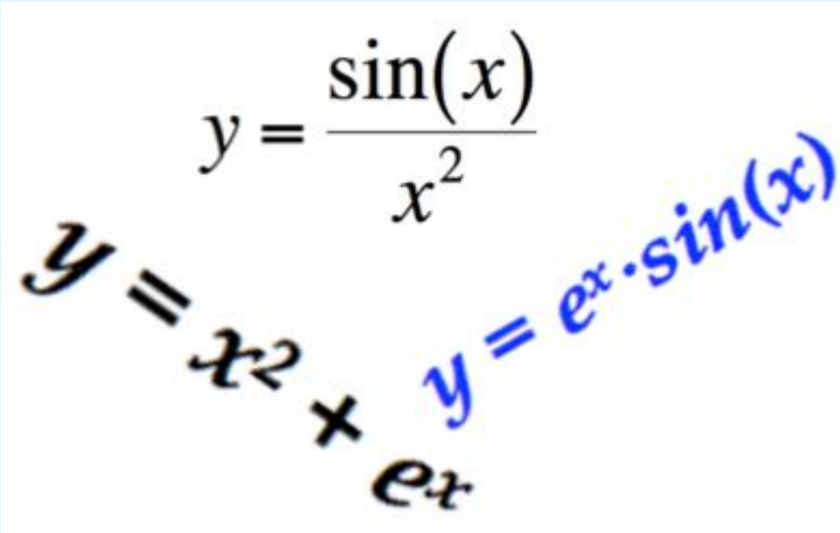




Le 4 operazioni con le funzioni

Ecco l'idea: applicare le quattro operazioni per costruire funzioni.
Così la matematica continua a crescere ...

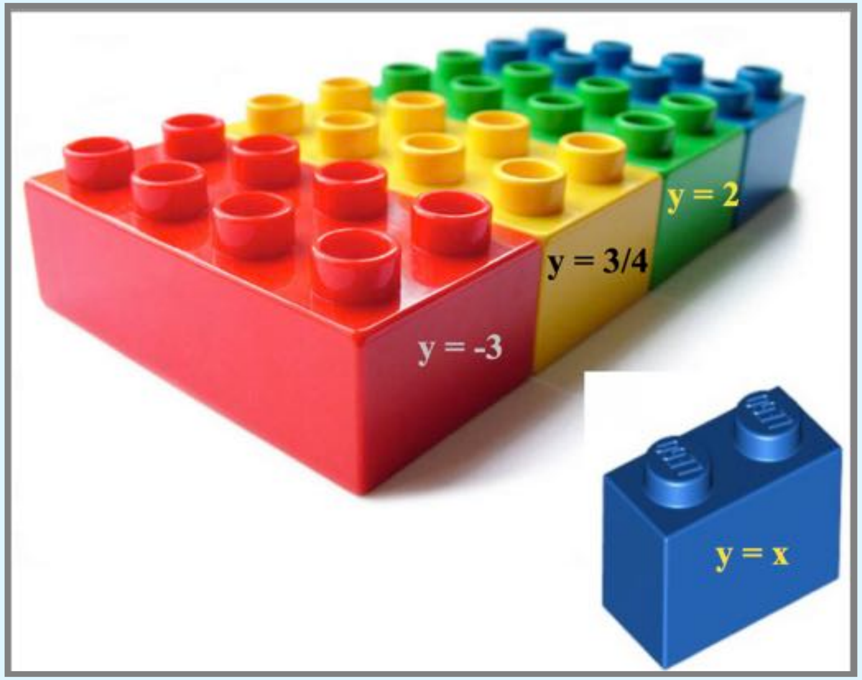




Daniela Valenti, 2022

Costruire funzioni

Posso costruire moltissime funzioni anche con pochi ‘mattoni elementari’.
Comincio con due soli tipi di ‘mattoni’:
- le funzioni del tipo y = k (con k numero reale):
- la funzione y = x.



Costruire funzioni con l'addizione

$y = x$ + $y = 3$ → $y = x + 3$

$y = x$ + $y = -2$ → $y = x - 2$

$y = x$ + $y = \pi$ → $y = x + \pi$

Costruire funzioni con la moltiplicazione

$y = x$ ✖ $y = 3$ $\longrightarrow$ $y = 3x$

$y = x$ ✖ $y = x$ $\longrightarrow$ $y = x^2$

$y = x^2$ ✖ $y = x$ $\longrightarrow$ $y = x^3$

…

Costruire funzioni con addizione e moltiplicazione

$y = x^2$ × $y = 3$ → $y = 3x^2$

$y = 3x^2$ + $y = x - 2$ → $y = 3x^2 + x - 2$

$y = x^3$ + $y = 3x^2 + x - 2$

$$y = x^3 + 3x^2 + x - 2$$

POLINOMIO

Funzioni polinomiali

Si costruiscono a partire dalle funzioni $y=k$ e $y=x$ solo con ripetute addizioni e moltiplicazioni.
Sono tutte scritte con formule del tipo seguente:

$$\boxed{y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0}$$

dove

a_n , a_{n-1} , ... , a_2 , a_1 , a_0 sono numeri reali detti *coefficienti.*
n è un numero naturale detto *grado del polinomio.*

Un'osservazione

Posso sempre eseguire addizione e moltiplicazione fra numeri reali, perciò

Il dominio delle funzioni polinomiali è l'insieme R dei numeri reali

Daniela Valenti, 2022

Esempi di funzioni polinomiali

$$y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

$$y = x^3 + 3x^2 + x - 2$$

Grado: $n = 3$

Coefficienti:

$a_3 = 1$, $a_2 = 3$, $a_1 = 1$, $a_0 = -2$

$$y = 3x - 2$$

Funzione lineare

Grado: $n = 1$

Coefficienti: $a_1 = 3$, $a_0 = -2$

$$y = x^2 + 3x - 2$$

Funzione quadratica

Grado: $n = 2$

Coefficienti: $a_2 = 1$, $a_1 = 3$, $a_0 = -2$

Daniela Valenti, 2022

Costruire funzioni anche con la divisione

Ora parto dai polinomi e opero la divisione; ottengo *quozienti di polinomi*, cioè funzioni tutte scritte con formule del tipo seguente:

$$y = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0}$$

dove

a_{n} , $a_{\mathrm{n}-1}$, ... , a_2 , a_1 , a_0 e b_{m} , $a_{\mathrm{m}-1}$, ... , b_2 , b_1 , b_0

sono numeri reali detti *coefficienti.*

I quozienti di polinomi prendono anche il nome di *funzioni razionali fratte*

Esempi di funzioni razionali fratte

$$y = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0}$$

$$y = \frac{4x^2 - 2x + 5}{x^3 - 9x}$$

$$a_2 = 4\,,\; a_1 = -2 \;,\; a_0 = 5$$
$$b_3 = 1\,,\; b_2 = 0\,,\; b_1 = -9 \;,\; b_0 = 0$$

$$y = \frac{x^3 + 3x - 1}{2x - 4}$$

$$a_3 = 1\,,\; a_2 = 0\,,\; a_1 = 3 \;,\; a_0 = -1$$
$$b_1 = 2 \;,\; b_0 = -4$$

$$y = -\frac{3}{x}$$

$$a_0 = -3$$
$$b_1 = 1\,,\; b_0 = 0$$

$$y = \frac{4}{3x^2}$$

$$a_0 = 4$$
$$b_2 = 3\,,\; b_1 = b_0 = 0$$

Dominio di una funzione razionale fratta

Non posso dividere per 0; perciò debbo escludere dal dominio della funzione tutti i numeri per cui il denominatore vale 0

Esempi

$$\boxed{y = \frac{4x^2 - 2x + 5}{x^3 - 9x}}$$

Denominatore D = $x^3 - 9x = x(x^2 - 9) = 0$ per $x = 0$ o per $x = 3$ o per $x = -3$
Perciò dal dominio debbo escludere i numeri 0, 3 e – 3.

$$\boxed{y = \frac{4}{3x^2}}$$

Denominatore D = $3x^2 = 0$ per $x = 0$
Perciò dal dominio debbo escludere 0.