Teorema di de l’Hôpital

Stefano Volpe, 2023

Derivate e limiti

Per arrivare alle derivate hai calcolato dei limiti

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x)$$

Con il teorema di de l'Hôpital studi il percorso inverso: applicare le derivate per calcolare dei limiti

Un esempio per riflettere

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - x^2 + 2x - 2}{x^2 - 1}$$

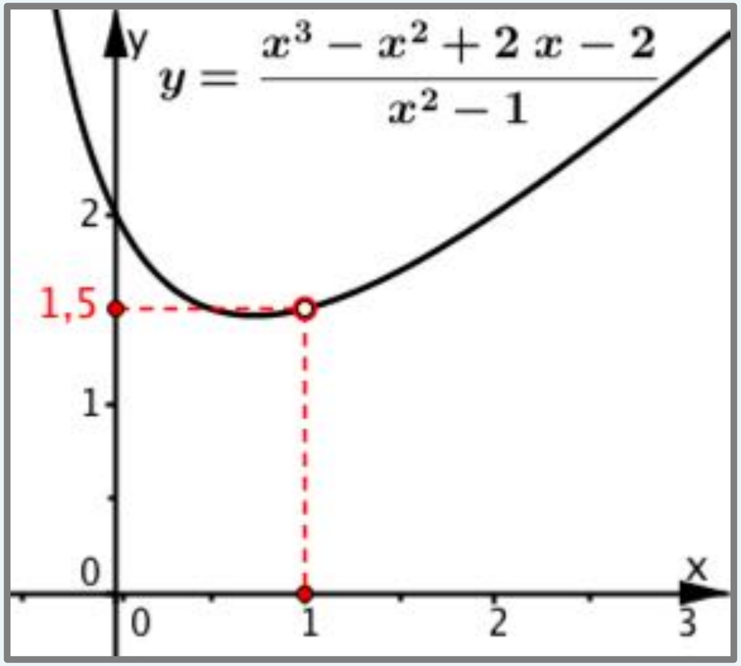
Il limite è una forma indeterminata del tipo 0/0.

$$\lim_{x \to 1} \frac{\overbrace{x^3 - x^2 + 2x - 2}^{\to 0}}{\underbrace{x^2 - 1}_{\to 0}}$$

Per avere un'idea del risultato, utilizzo un software che traccia grafici di funzione.

Grafico tracciato con un software

Ecco un arco di grafico della funzione in un intorno di 1.



Con l'aiuto del software trovo:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - x^2 + 2x - 2}{x^2 - 1} = \frac{3}{2} = 1{,}5$$

Calcoli con carta e penna

Valutare un limite con l'aiuto di un software ha i suoi vantaggi, ma non sempre è possibile.
Ecco allora un percorso verso i calcoli con carta e penna.

- **Per il limite di una forma indeterminata del tipo 0/0 è decisiva la rapidità di ogni funzione nell'avvicinarsi a zero.**
- **La derivata misura la rapidità di variazione di una funzione.**
- **Calcolo allora le derivate delle due funzioni e le confronto.**

$$\lim_{x\to1}\frac{x^3-x^2+2x-2}{x^2-1}$$

$$f(x)=x^3-x^2+2x-2 \Rightarrow f'(x)=3x^2-2x+2$$
$$g(x)=x^2-1 \Rightarrow g'(x)=2x$$

Come confrontare le due derivate f'(x) e g'(x)?

L'idea del teorema di de l'Hôpital

Calcolare il limite del rapporto delle due derivate

$$f(x) = x^3 - x^2 + 2x - 2 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 2x + 2$$

$$g(x) = x^2 - 1 \Rightarrow g'(x) = 2x$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to 1} \frac{3x^2 - 2x + 2}{2x} = \frac{3}{2} = \boxed{1{,}5}$$

È lo stesso risultato del limite iniziale

$$\lim_{x \to 1} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 1} \frac{x^3 - x^2 + 2x - 2}{x^2 - 1} = \frac{3}{2} = \boxed{1{,}5}$$

Risulta dunque $$\lim_{x \to 1} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 1} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Teorema di de l'Hôpital

Se due funzioni $y = f(x)$ e $y = g(x)$ soddisfano le seguenti ipotesi:

1. in un intorno di a, escluso al più a, sono derivabili e risulta $g'(x) \neq 0$;
2. $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$ [dove a è un numero o il simbolo ∞]
3. $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$ [dove ℓ è un numero o il simbolo ∞]

Allora risulta

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Il teorema stabilisce dunque: il risultato ottenuto nell'esempio vale per tutte le coppie di funzioni che soddisfano opportune ipotesi.

Applicare il teorema di de l'Hôpital

A. Limite di un quoziente di polinomi

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 2x^2 - 3x + 6}{x^2 - 4x + 4}$$

A. Verifico le ipotesi

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - 3x + 6 \;\Rightarrow\; f'(x) = 3x^2 - 4x - 3$$

$$g(x) = x^2 - 4x + 4 \qquad \Rightarrow\; g'(x) = 2x - 4$$

1. Le due funzioni sono polinomi, perciò sono derivabili per ogni x reale e risulta $g'(x) = 0$ per $x = 2$, perciò risulta $g'(x) \neq 0$, ad esempio nell'intorno $[1 ; 3]$, escluso 2.

2. $\lim_{x \to 2}(x^3 - 2x^2 - 3x + 6) = \lim_{x \to 2}(x^2 - 4x + 4) = 0$

3. $\lim_{x \to 2} \frac{\overbrace{3x^2 - 4x - 3}^{\to 1}}{\underbrace{2x - 4}_{\to 0}} = \infty$

B. Applico il teorema e trovo

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 2x^2 - 3x + 6}{x^2 - 4x + 4} = \infty$$

Confronto fra due procedimenti

Lo stesso limite può essere calcolato con un procedimento algebrico che non richiede derivate, ma richiede di scomporre in fattori i due polinomi: poiché i due polinomi valgono 0 per x = 2, entrambi sono divisibili per il binomio (x – 2). Perciò risulta:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-2x^2-3x+6}{x^2-4x+4}=\lim_{x\to 2}\frac{(x^2-3)(x-2)}{(x-2)^2}=\lim_{x\to 2}\frac{\overbrace{x^2-3}^{\to 1}}{\underbrace{x-2}_{\to 0}}=\infty$$

La scelta del procedimento dipende anche dall'ambiente in cui ciascuno si sente più a suo agio: la scomposizione in fattori dei polinomi o le derivate.

Applicare il teorema di de l'Hôpital

B. Limite di un quoziente in cui non compaiono solo polinomi

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin x}$$

A. Verifico le ipotesi

$$f(x)=1-\cos x \Rightarrow f'(x)=\sin x$$

$$g(x)=\sin x \Rightarrow g'(x)=\cos x$$

1. Le due funzioni sono derivabili per ogni x reale e risulta $g'(x)=0$ nell'intorno di 0 per $x=\pm\pi/2$. Perciò risulta $g'(x)\neq 0$ ad esempio nell'intervallo [-1, 1].

2. $\lim_{x\to 0}(1-\cos x)=\lim_{x\to 0}\sin x=0$

3. $$\lim_{x\to 0}\frac{\overbrace{\sin x}^{\to 0}}{\underbrace{\cos x}_{\to 1}}=0$$

B. Applico il teorema e trovo

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin x}=0$$

Si può calcolare il risultato di questo limite solo con il teorema di de l'Hôpital

Il teorema di de l'Hôpital per forme indeterminate del tipo ∞/∞

Il teorema si estende alle forme indeterminate del tipo ∞/∞. In tal caso cambia l'ipotesi 2 nel modo seguente.

Se due funzioni $y = f(x)$ e $y = g(x)$ soddisfano le seguenti ipotesi:

1. in un intorno di a, escluso al più a, sono derivabili e risulta $g'(x) \neq 0$;
2. $\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = \infty \quad \text{[dove } a \text{ è un numero o il simbolo } \infty]}$
3. $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$ [dove ℓ è un numero o il simbolo ∞]

Allora risulta

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Applicare il teorema di de l'Hôpital

C. Limite di un quoziente di polinomi

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-4x+4}{x^3+2x}$$

A. Verifico le ipotesi

$$f(x)=x^2-4x+4 \Rightarrow f'(x)=2x-4$$

$$g(x)=x^3+2x \Rightarrow g'(x)=3x^2+2$$

1. Le due funzioni sono polinomi, perciò sono derivabili per ogni x reale e risulta $g'(x)\neq 0$ per ogni x reale.

2. $\lim_{x\to\infty}(x^2-4x+4)=\lim_{x\to\infty}(x^3+2x)=\infty$

3. $\lim_{x\to\infty} \frac{\overbrace{2x-4}^{\to\infty}}{\underbrace{3x^2+2}_{\to\infty}}$ Nuova forma indeterminata ∞/∞ per cui sono valide le ipotesi 1 e 2. Calcolo di nuovo il limite del rapporto delle derivate.

$$\boxed{\lim_{x\to\infty} \frac{2}{\underbrace{6x}_{\to\infty}}=0}$$

B. Applico il teorema e trovo

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-4x+4}{x^3+2x}=0$$

Confronto fra due procedimenti

Lo stesso limite può essere calcolato con un procedimento algebrico senza derivate: divido numeratore e denominatore per la potenza di x di grado più elevato e calcolo il limite del quoziente ottenuto. Arrivo così ad una regola valida per tutti i quozienti di polinomi.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n}{b_0+b_1x+\ldots+b_mx^m} = \begin{cases} 0 & \text{se } n<m \\ \infty & \text{se } n>m \\ \dfrac{a_n}{b_m} & \text{se } n=m \end{cases}$$

Con questa regola scrivo subito $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x^2-4x+4}{x^3+2x} = 0$ $\quad$ **2 < 3**

Quest'ultimo procedimento è molto più rapido, specialmente se i due polinomi hanno grado elevato.

Applicare il teorema di de l'Hôpital

D. Limite di un quoziente in cui non compaiono solo polinomi

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^2}$$

A. Verifico le ipotesi

$$f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$$

$$g(x) = x^2 \Rightarrow g'(x) = 2x$$

1. Le due funzioni sono derivabili per ogni x reale e risulta $g'(x) = 0$ per $x = 0$. Perciò risulta $g'(x) \neq 0$ per ogni $x \neq 0$.

2. $\lim_{x \to +\infty} e^x = \lim_{x \to +\infty} x^2 = \infty$

3. $\lim_{x \to +\infty} \frac{\overbrace{e^x}^{\to\infty}}{\underbrace{2x}_{\to\infty}}$

Forma indeterminata ∞/∞ per cui sono valide le ipotesi 1 e 2. Calcolo il limite del rapporto delle derivate.

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} \frac{\overbrace{e^x}^{\to\infty}}{2} = \infty}$$

B. Applico il teorema e trovo

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^2} = \infty$$

Si può calcolare il risultato di questo limite solo con il teorema di de l'Hôpital.

Attività

Completa la scheda di lavoro per riflettere sul teorema appena presentato.

Revisione dell’attività

Limite 1, I e II quesito

I. Associa a ognuno dei seguenti limiti una delle frasi elencate sotto.

II. Calcola i limiti dati con il procedimento che ritieni più opportuno

Quesito I	**Quesito II**
Limite 1: $\lim_{x\to 3} \frac{\overbrace{x-3}^{\to 0}}{\underbrace{x^2-3x}_{\to 0}}$ $f(x) = x - 3 \Rightarrow f'(x) = 1$ $g(x) = x^2 - 3x \Rightarrow g'(x) = 2x - 3$ Le funzioni sono due polinomi, perciò sono derivabili per ogni x reale e risulta $g'(x) \neq 0$ per $x \neq 1{,}5$.	Per applicare il teorema di de l'Hôpital calcolo $\lim_{x\to 3} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 3} \frac{1}{2x - 3} = \frac{1}{3}$ Così trovo $\lim_{x\to 3} \frac{x-3}{x^2-3x} = \frac{1}{3}$

B. Le due funzioni rispettano tutte le ipotesi del teorema di de l'Hôpital.

Limite 4, I e II quesito

I. Associa a ognuno dei seguenti limiti una delle frasi elencate sotto.

II. Calcola i limiti dati con il procedimento che ritieni più opportuno

Quesito I	Quesito II
Limite 4: $\lim_{x\to 1} \dfrac{\overbrace{2\ln x}^{\to 0}}{\underbrace{x-1}_{\to 0}}$ $f(x) = 2\ln x \quad \Rightarrow f'(x) = \dfrac{2}{x}$ $g(x) = x-1 \quad \Rightarrow g'(x) = 1$ $f(x)$ è definito nell'insieme dei reali positivi e ivi derivabile. $g(x)$ è un binomio con $g'(x) \neq 0$ per qualunque x.	Per applicare il teorema di de l'Hôpital calcolo $\lim_{x\to 1} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 1} \dfrac{\frac{2}{x}}{1} = 2$ Così trovo $\lim_{x\to 1} \dfrac{2\ln x}{x-1} = 2$
B. Le due funzioni rispettano tutte le ipotesi del teorema di de l'Hôpital.	

Limite 2, I e II quesito

I. Associa a ognuno dei seguenti limiti una delle frasi elencate sotto.

II. Calcola i limiti dati con il procedimento che ritieni più opportuno

Quesito I	**Quesito II**
Limite 2: $\lim_{x\to 3}\frac{\overbrace{x-3}^{\to 0}}{\underbrace{x^2+3x}_{\to 18}}=0$ **NON è una forma indeterminata** $f(x)=x-3 \quad \Rightarrow f'(x)=1$ $g(x)=x^2+3x \Rightarrow g'(x)=2x+3$ $\lim_{x\to 3}(x-3)=0$ ma $\lim_{x\to 3}\left(x^2+3x\right)=18$ **Manca l'ipotesi 2; non posso applicare il teorema di de l'Hôpital.**	**Che cosa succede se 'mi distraggo' e applico il teorema di de l'Hôpital?** Calcolo $\lim_{x\to 3}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to 3}\frac{1}{2x+3}=\frac{1}{9}$ E ottengo $\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{x^2+3x}=\frac{1}{9}$ **Così perdo tempo per svolgere calcoli inutili E ottengo il risultato sbagliato.**
B. Le due funzioni NON rispettano tutte le ipotesi del teorema di de l'Hôpital.	

Limite 3, I e II quesito

I. Associa a ognuno dei seguenti limiti una delle frasi elencate sotto.

II. Calcola i limiti dati con il procedimento che ritieni più opportuno

Quesito I	Quesito II
Limite 3: $\lim_{x\to 0}\frac{\overbrace{\cos x}^{\to 1}}{\underbrace{x}_{\to 0}}=\infty$ **NON è una forma indeterminata** $f(x)=\cos x \Rightarrow f'(x)=-\sin x$ $g(x)=x \Rightarrow g'(x)=1$ $\lim_{x\to 0} x=0$ ma $\lim_{x\to 0}\cos x=1$ **Manca l'ipotesi 2; non posso applicare il teorema di de l'Hôpital.**	**Che cosa succede se 'mi distraggo' e applico il teorema di de l'Hôpital?** Calcolo $\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{1}=0$ E ottengo $\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{x}=0$ **Così perdo tempo per svolgere calcoli inutili E ottengo il risultato sbagliato.**

B. Le due funzioni NON rispettano tutte le ipotesi del teorema di de l'Hôpital.

III quesito, parti *a* e *b*

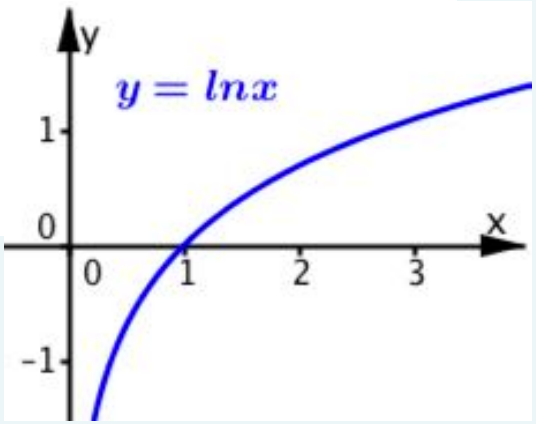
III. Calcola, se è possibile, i seguenti limiti con il procedimento che ritieni più opportuno

a. $\lim_{x\to\infty} \frac{\overbrace{5x^4+x^3-2}^{\to\infty}}{\underbrace{2x^4-3x^2+x}_{\to\infty}} = \frac{5}{2}$ quoziente di polinomi di uguale grado

Potrei applicare il teorema di de l'Hôpital, ma dovrei applicare più volte il teorema e quindi svolgere calcoli molto più lunghi.

b. $\lim_{x\to-\infty} \frac{\ln x}{x}$

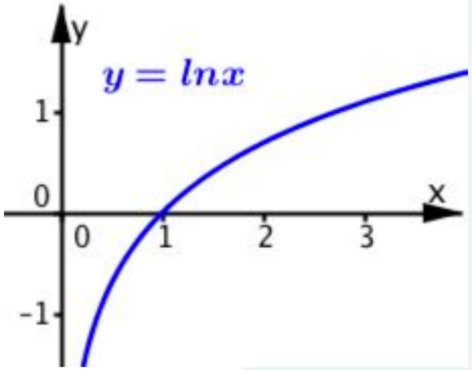
Limite che non posso calcolare, perché $y = \ln x$ è definito nell'insieme dei reali positivi, perciò non ne posso calcolare il limite per $x\to-\infty$.



III quesito, parte *c*

III. Calcola, se è possibile, i seguenti limiti con il procedimento che ritieni più opportuno

c. $\lim_{x\to 0^+} \frac{[\ln x]^{\to -\infty}}{\left[\frac{1}{x}\right]^{\to +\infty}} = 0$ Applico il teorema di de l'Hôpital



$$\left.\begin{aligned} f(x) &= \ln x \to f'(x) = \frac{1}{x} \\ g(x) &= \frac{1}{x} \to g'(x) = -\frac{1}{x^2} \end{aligned}\right\} \lim_{x\to 0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+}(-x) = 0$$

IV quesito

IV. Il teorema di de l'Hôpital si può applicare anche per risolvere altre forme indeterminate riconducibili con opportuni calcoli ad una delle forme 0/0 oppure ∞/∞. Ecco due esempi.

- A partire da $\lim_{x \to 0^+} x \ln x$ rispondi ai seguenti quesiti:
  - In quale forma indeterminata si presenta il limite? Del tipo $0 \cdot \infty$
  - Puoi indicare un procedimento per ricondurre il limite ad uno dei limiti del quesito **III**?

$$\lim_{x \to 0^+} x \ln x = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}}$$

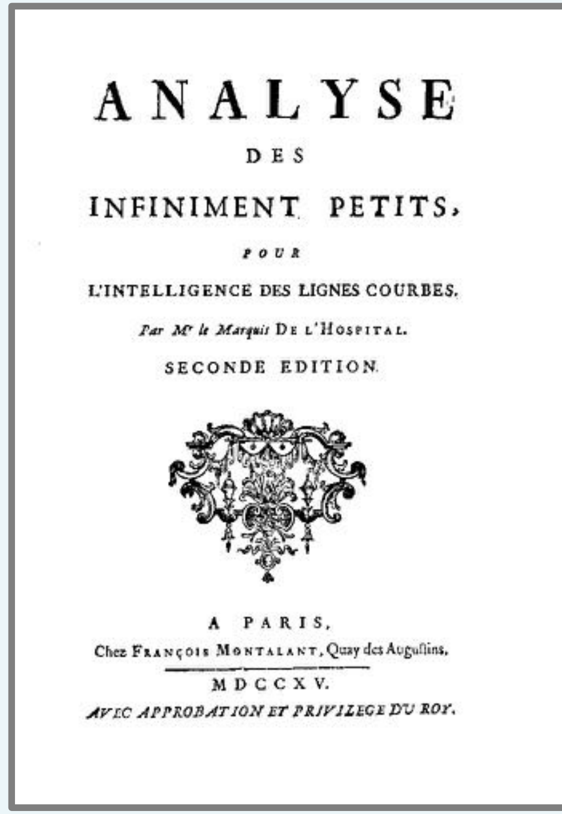
- A partire da $\lim_{x \to 0}\left(\frac{1}{\sin x} - \frac{\cos x}{\sin x}\right)$ rispondi ai seguenti quesiti:
  - In quale forma indeterminata si presenta il limite? Del tipo $\infty - \infty$.
  - Puoi indicare un procedimento per ricondurre il limite ad uno dei limiti trattati a lezione

$$\lim_{x \to 0}\left(\frac{1}{\sin x} - \frac{\cos x}{\sin x}\right) = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x}$$

Uno sguardo alla storia

Guillaume de l'Hôpital

Francia 1661 - 1704



ANALYSE
DES
INFINIMENT PETITS,
POUR
L'INTELLIGENCE DES LIGNES COURBES.
Par M^r le Marquis DE L'HOSPITAL.
SECONDE EDITION.

A PARIS,
Chez FRANÇOIS MONTALANT, Quay des Augustins,
MDCCXV.
AVEC APPROBATION ET PRIVILEGE DU ROY.

Autore, nel 1796, del primo manuale di calcolo differenziale stampato.

Teorema di de l’Hôpital o di Bernoulli?

Guillaume de l’Hôpital

Francia 1661 - 1704

Johann Bernoulli

Svizzera 1667 - 1748

Solo nel 1950 la corrispondenza fra i due matematici ha portato a stabilire che il teorema era stato formulato per la prima volta da Bernoulli, maestro di de l’Hôpital.