Grafico e legge del moto armonico

Guarda un breve video per osservare **il *moto armonico***

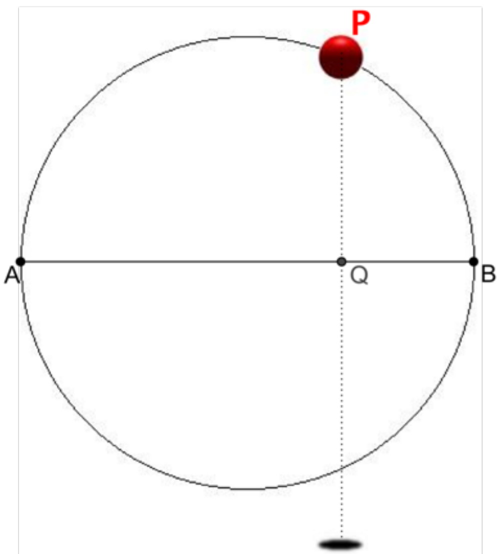
Anna Maria Miele, Treccani Scuola 2013

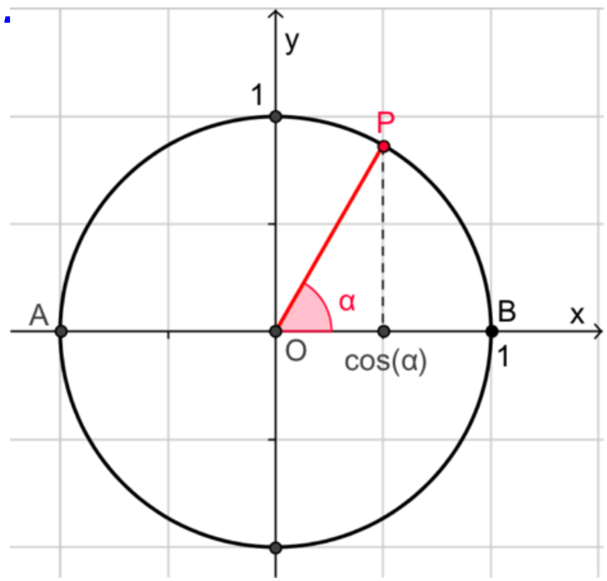
Il moto armonico

Come si spiega il grafico del moto armonico?

L'ombra della pallina che si muove di moto circolare uniforme, richiama una classica definizione:

il moto armonico è la proiezione di un moto circolare uniforme su un diametro della circonferenza.





Per proseguire, sono importanti due nozioni:

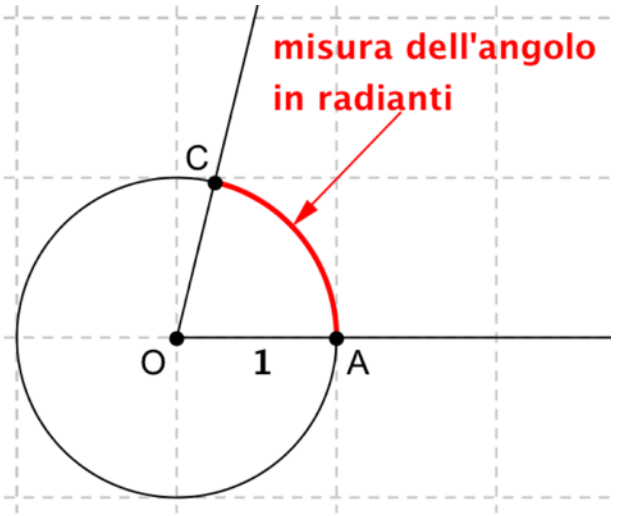
- in matematica, la misura di un angolo in radianti;
- in fisica, la velocità angolare di un moto circolare.

Misura di un angolo in radianti

Dato un angolo di vertice O, traccia una circonferenza di centro O, che interseca i lati dell'angolo in A e C. Si chiama *misura dell'angolo AOC in radianti* il rapporto fra la lunghezza L dell'arco AC e la lunghezza *r* del raggio.

Se r = 1, la lunghezza dell'arco è la misura in radianti dell'angolo.

L'animazione seguente illustra la relazione fra misura di un angolo in gradi e misura in radianti.



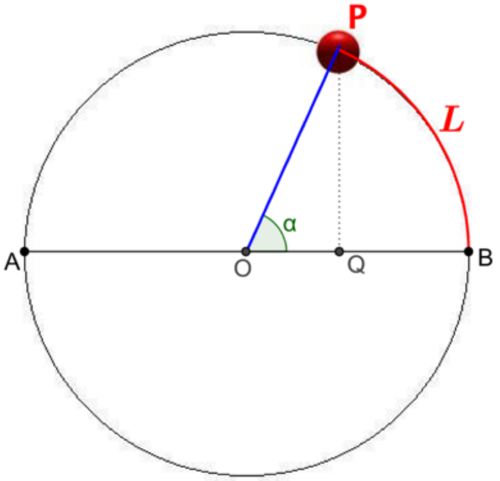
Misura di un angolo in radianti

Velocità angolare di un moto circolare uniforme

Per una pallina che si muove di *moto circolare uniforme si trova che:*
è costante il rapporto ω fra l'ampiezza α dell'angolo BOP e il tempo t impiegato da OP a spazzare l'angolo.

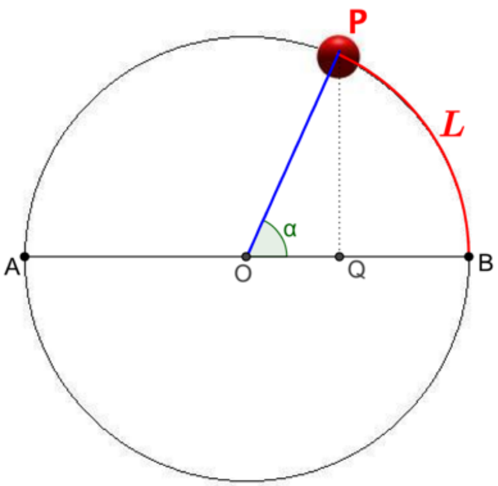
Se la circonferenza ha raggio r = 1, trovo:
L = misura α dell'angolo BOP in radianti.

$$\omega = \frac{\alpha}{t} \Rightarrow \alpha = \omega t$$



Velocità angolare di un moto circolare uniforme

Per una pallina che si muove di *moto circolare uniforme si trova che:*
è costante il rapporto ω fra l'ampiezza α dell'angolo BOP e il tempo t impiegato da OP a spazzare l'angolo.



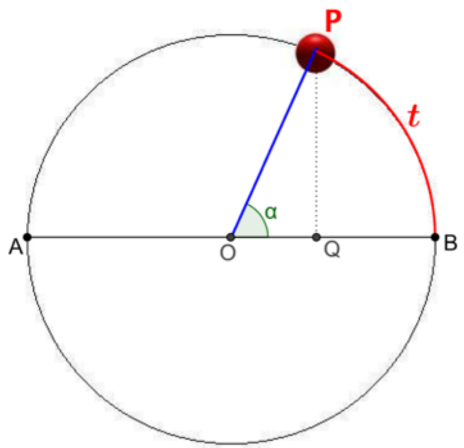
$$\omega = \frac{\alpha}{t} \Rightarrow \alpha = \omega t$$

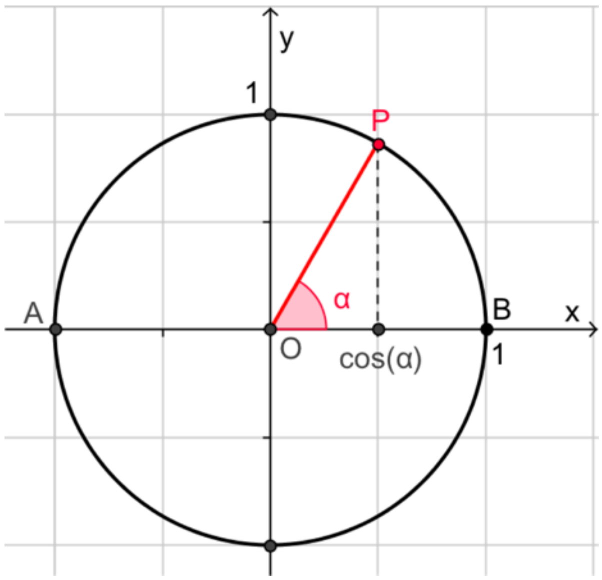
Se la circonferenza ha raggio r = 1, trovo:
L = misura α dell'angolo BOP in radianti.

Se ω = 1, trovo che:
OP spazza un angolo di 1 radiante ogni secondo.
P percorre l'intera circonferenza in un tempo T = 2π ≅ 6,28 secondi.
Q percorre sul diametro AB un'oscillazione completa nel tempo T.
T prende il nome di periodo.

La legge del moto armonico in un caso semplice

velocità angolare $\omega = 1$ **e** **raggio $r = 1$**





$\alpha = t$ **e** **L'ascissa *d* del punto Q è data da**
$d = \cos(\alpha)$

La posizione di Q varia al variare del tempo con la legge
$d = \cos(t)$

Come traccio il grafico di questa legge?

Attività1. Il grafico del moto armonico

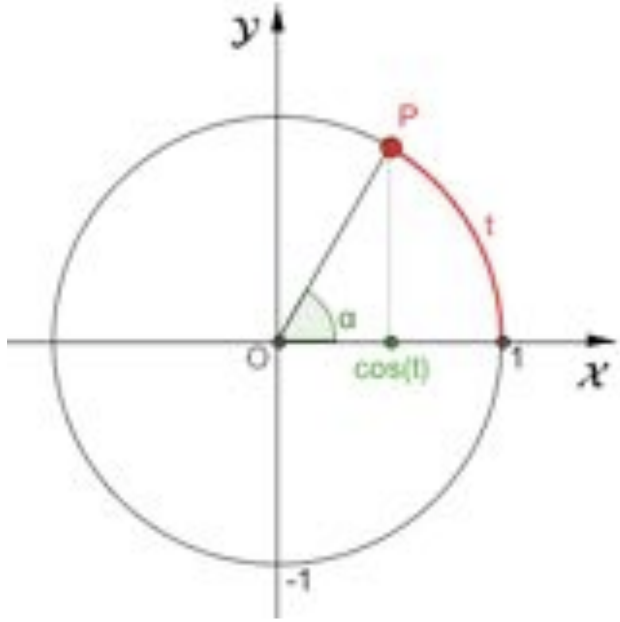
Completa la scheda 1 per tracciare il grafico del moto armonico

Riflessioni sul lavoro con la scheda

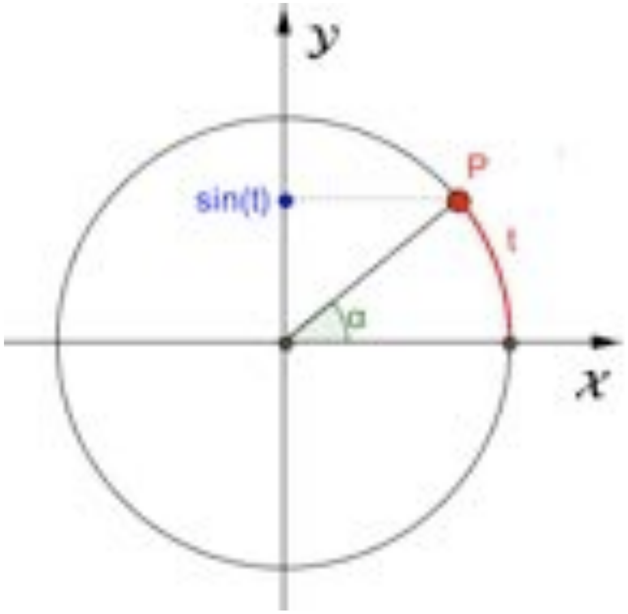
Che cosa hai trovato?

Il grafico del moto armonico in due casi

1. Proietto P su un diametro orizzontale



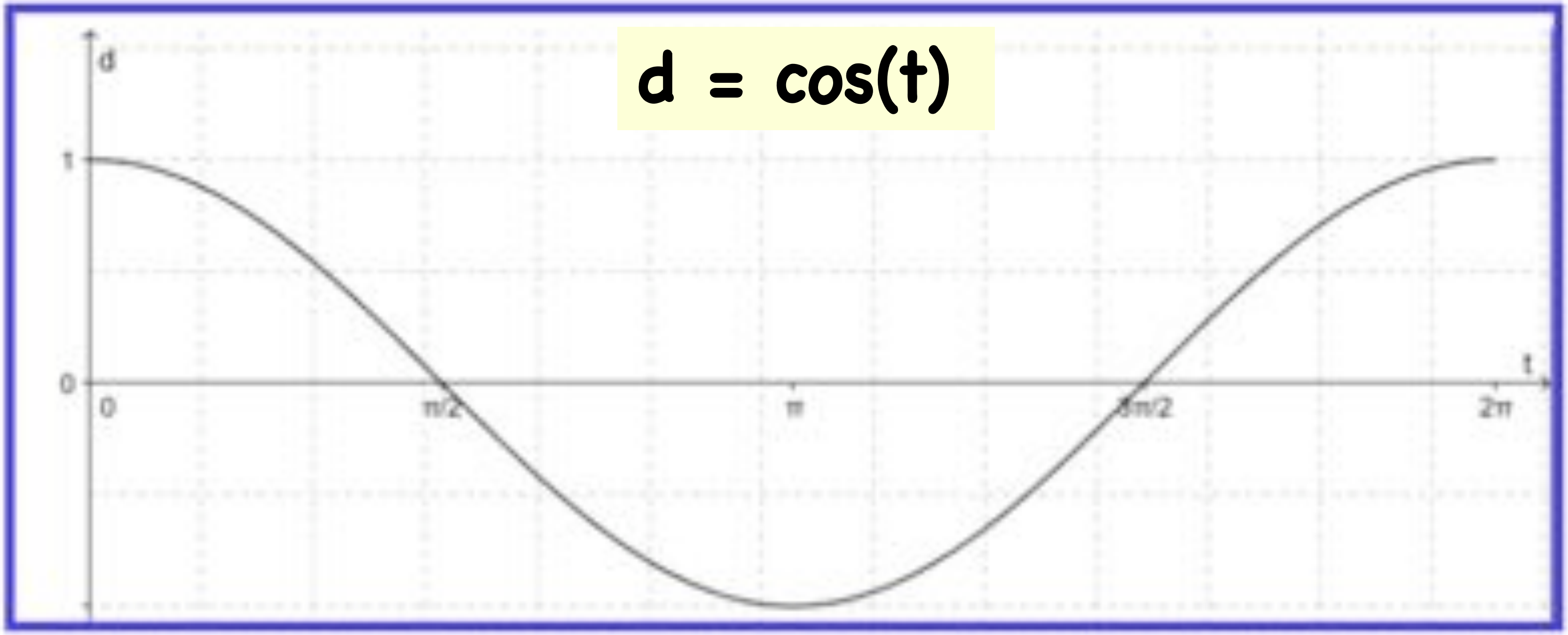
2. Proietto P su un diametro verticale



Anna Maria Miele, Treccani Scuola 2013

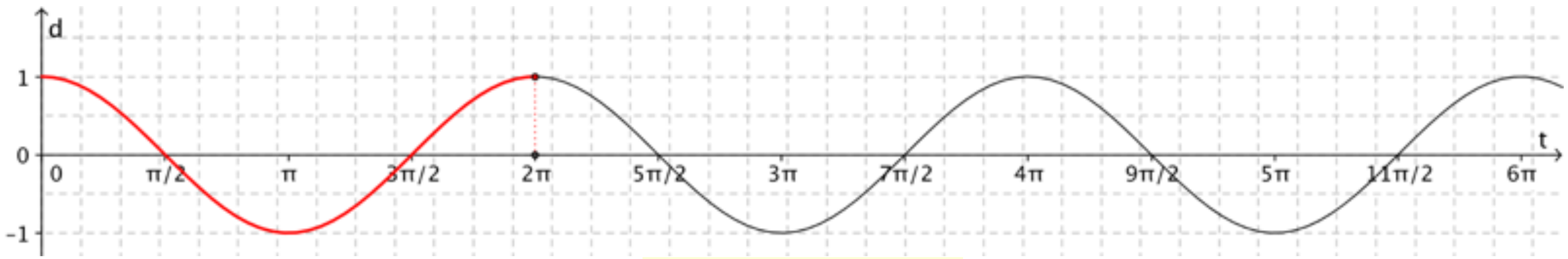
1° Grafico di moto armonico

t in gradi	0°	60°	90°	120°	180°	240°	270°	300°	360°
t in radianti	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	π	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{5}{3}\pi$	2π
cos(t)	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1



Il movimento continua

P continua a girare sulla circonferenza e la sua proiezione continua a oscillare sul diametro.



$$d = \cos(t)$$

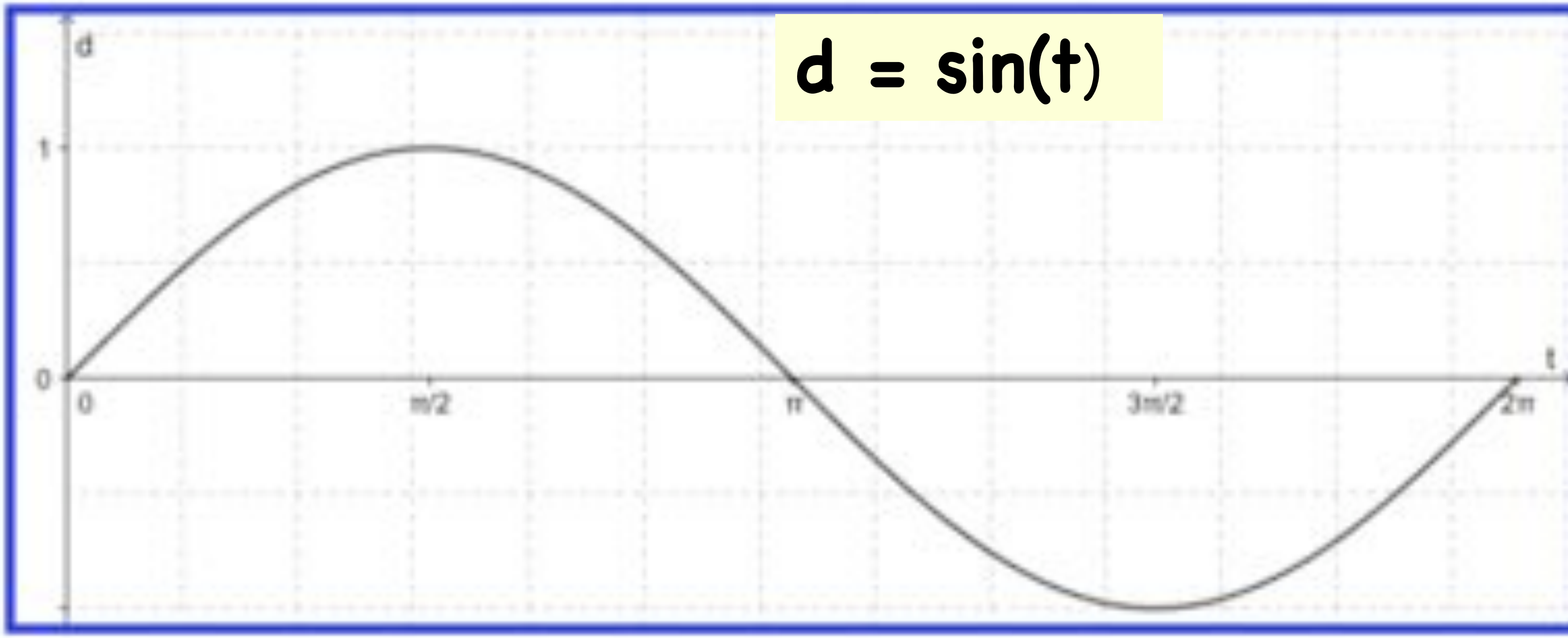
Per disegnare il grafico ripeto tante volte l'arco rosso, disegnato prima solo nell'intervallo [0; 2π], che è lungo 2π.

Ottengo un grafico periodico con <u>periodo 2π</u>.

Ritrovo sul grafico il periodo T= 2π suggerito dall'osservazione del moto armonico.

2° Grafico di moto armonico

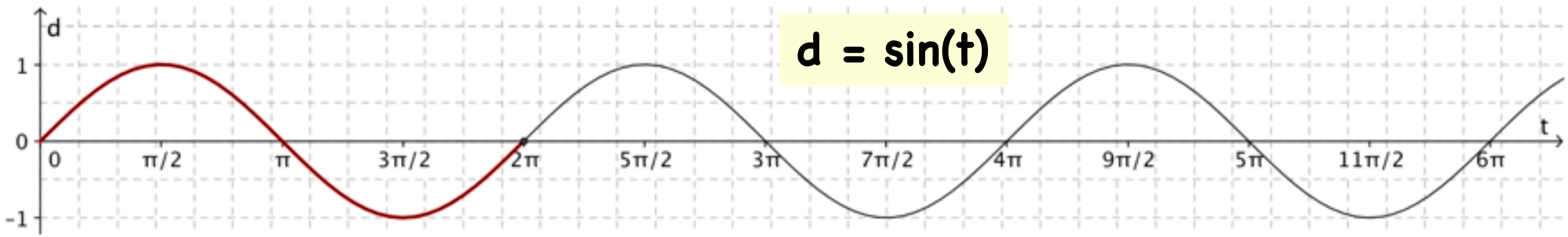
t in gradi	0°	30°	90°	150°	180°	210°	270°	330°	360°
t in radianti	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{11}{6}\pi$	2π
sin(t)	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0



Anna Maria Miele, Treccani Scuola 2013

Il movimento continua

P continua a girare sulla circonferenza e la sua proiezione continua a oscillare sul diametro.

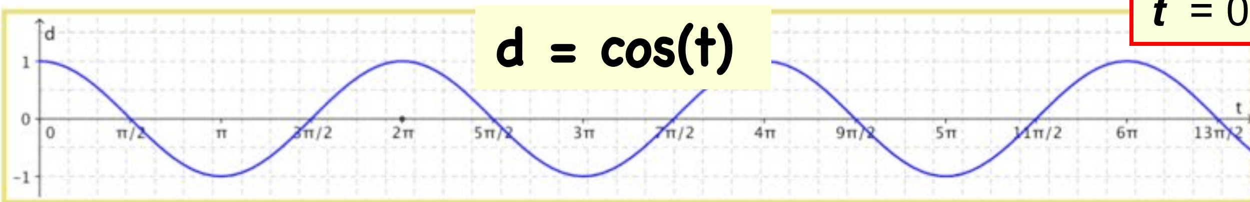


Per disegnare il grafico ripeto tante volte l'arco rosso, disegnato prima solo nell'intervallo [0; 2π], lungo 2π.

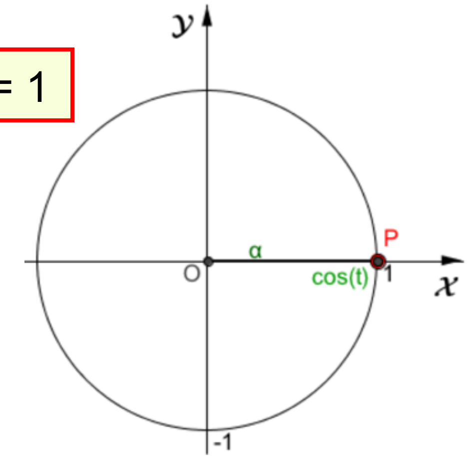
Anche questo grafico ha <u>periodo T = 2π</u>.

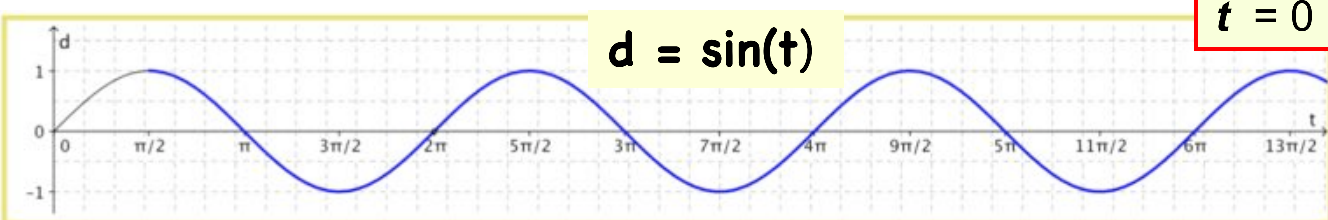
Così è spiegato il particolare andamento del grafico del moto armonico.

La legge del moto armonico

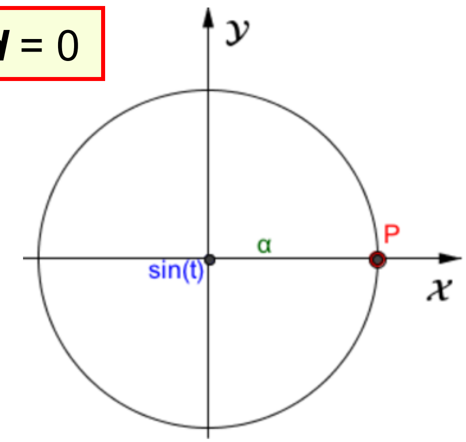


$t = 0 \quad d = 1$





$t = 0 \quad d = 0$



Le due curve hanno lo stesso andamento.
Legge del moto armonico
d = sin(t)

Le funzioni circolari

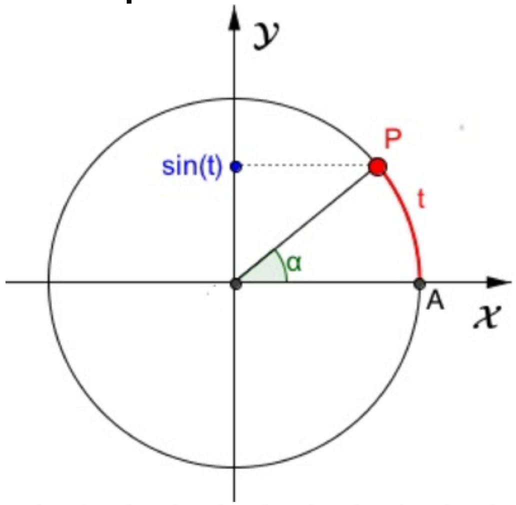
Dalla fisica alla matematica

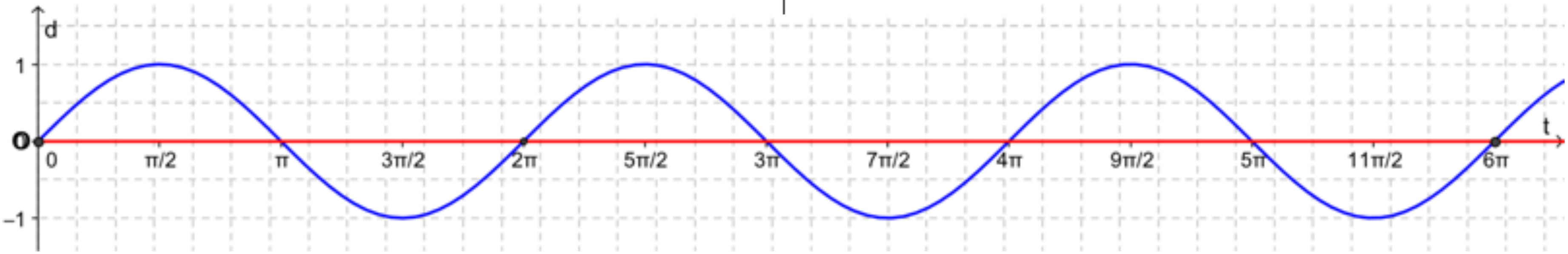
Anna Maria Miele, Treccani Scuola 2013

Riflessioni sul grafico di d = sin(t)

Osserva le figure qui sotto.

- ***Nella figura in alto*** trovi la lunghezza ***t*** dell'arco ***AP***, che si avvolge sulla circonferenza come un lungo filo, mentre ***P*** gira in verso antiorario;
- ***Nella figura in basso*** l'arco ***AP*** si distende sull'asse delle ascisse, a partire dall'origine ***O,*** nel verso positivo.

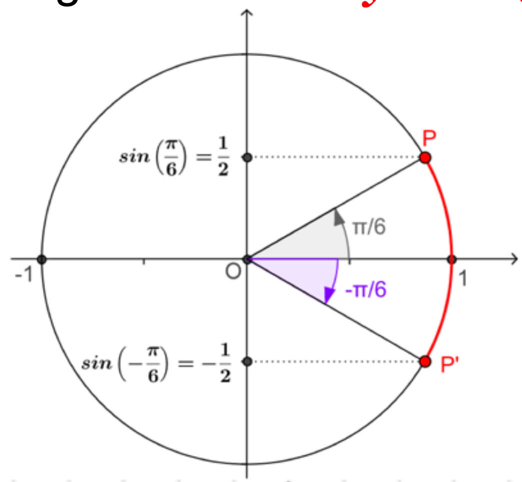




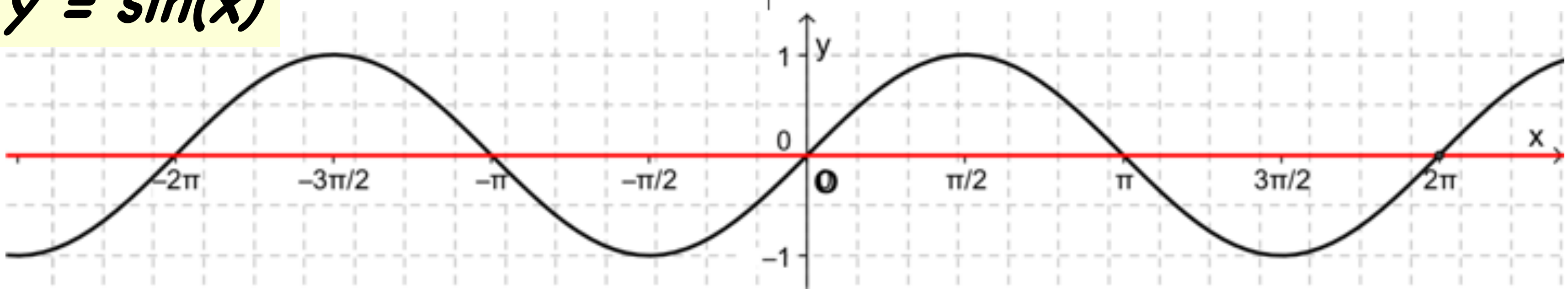
La funzione y = sin(x)

Ora non pensiamo più alla fisica e al tempo.

- ***Nella figura in alto P*** può girare anche in verso opposto (cioè orario)
- ***Nella figura in basso,*** per ricordare il cambiamento di verso, distendo l'arco ***AP*** sull'asse delle ascisse, a partire dall'origine ***O*** anche nel verso negativo e continuo il grafico. Così ottengo la funzione $y = \sin(x)$.



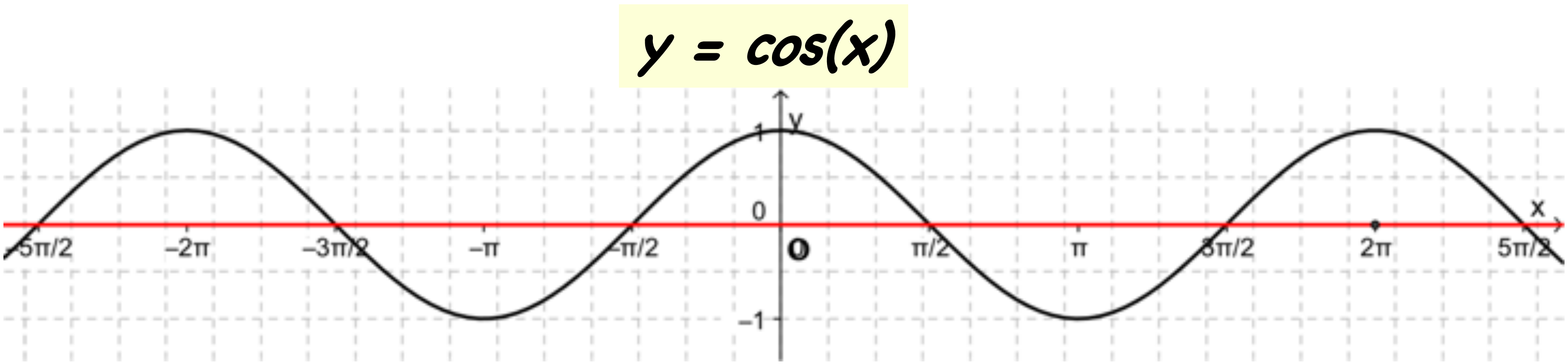
y = sin(x)



La curva prende il nome di sinusoide

La funzione y = cos (x)

In modo analogo tracciamo il grafico di $y = \cos(x)$.



La curva prende il nome di cosinusoide

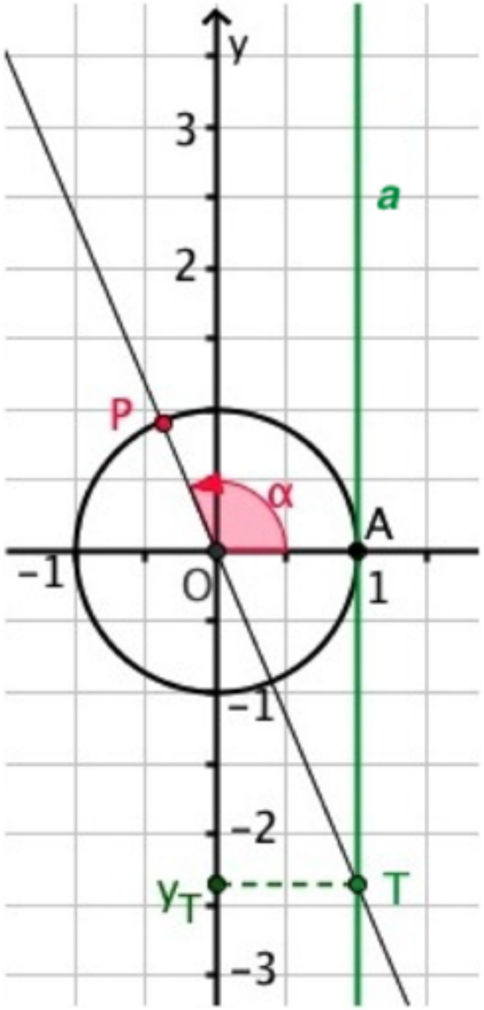
Attività 2

Completa la scheda 2 per lavorare con una terza funzione circolare

Che cosa hai trovato

- **Hai richiamato il procedimento per determinare tan(α);**
- **Hai tracciato il grafico di *y = tan(x)*;**
- **Hai riflettuto su varie domande suscitate dall'andamento 'insolito' di *y = tan(x)* .**

Procedimento per determinare tanα



a retta tangente alla circonferenza in A(1; 0)

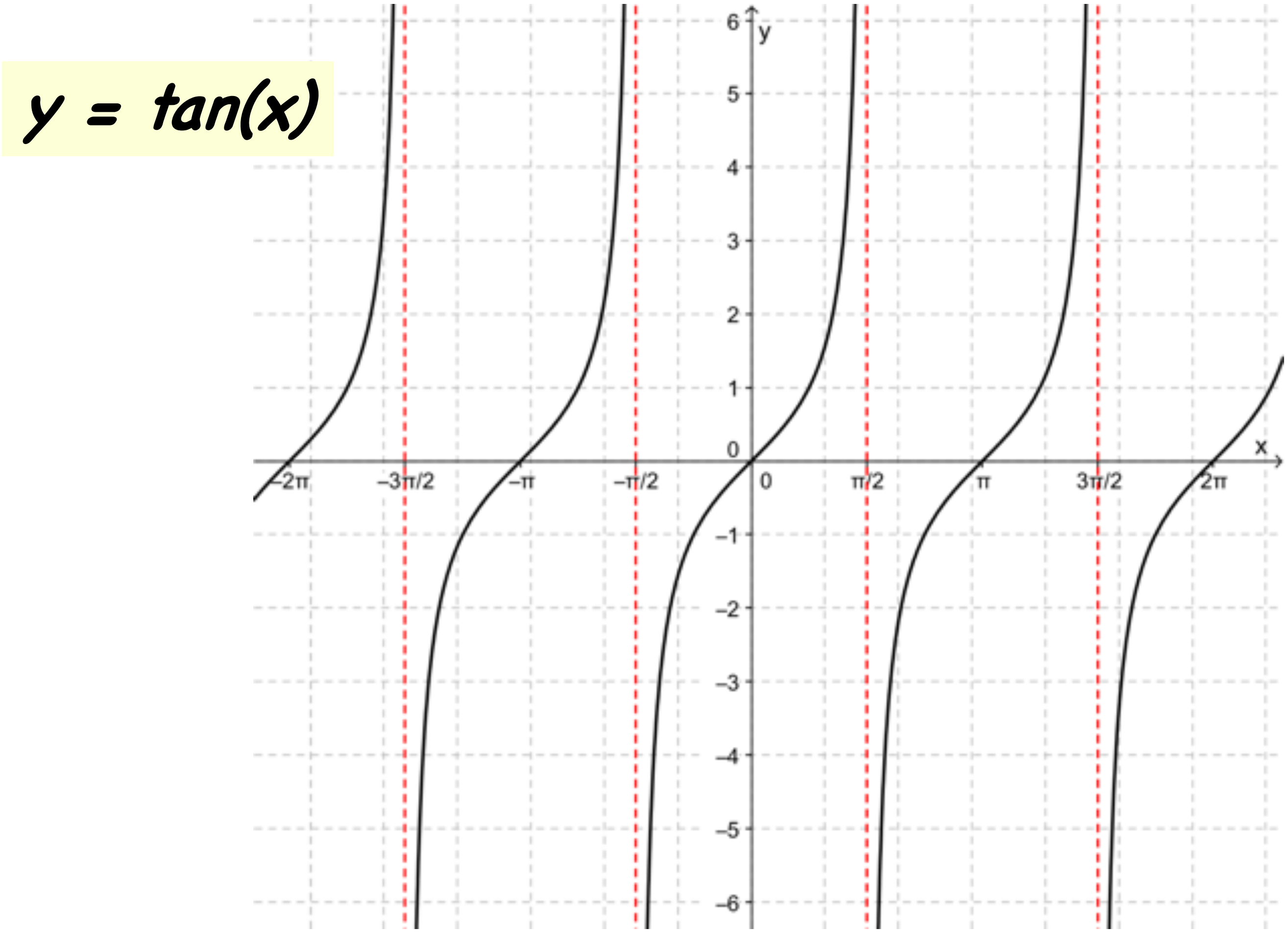
T punto di intersezione fra la retta a e la retta OP

$$\boxed{\tan\alpha = y_T}$$

Prime osservazioni sull'andamento di tanα

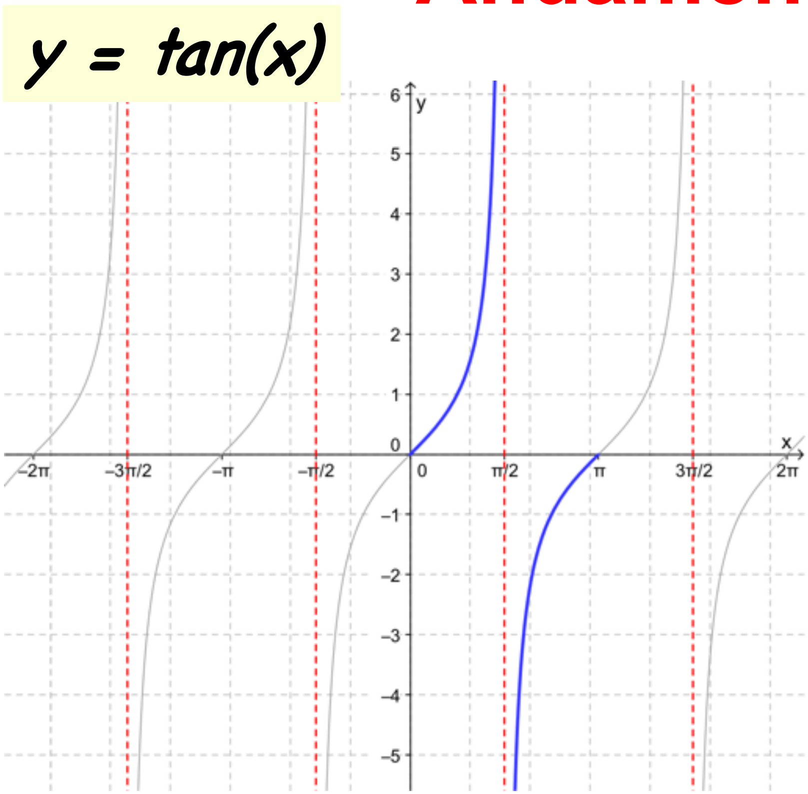
Angolo α	Punto T	tanα
0°	T ≡ A(1;0)	$\tan\alpha = y_T$ $\tan\alpha = 0$
0°< α < 90°	*T* percorre la semiretta tangente, al disopra dell'asse *x* e si allontana sempre più verso l'alto, mentre l'angolo acuto **α** si avvicina a 90°.	Cresce da 0 verso numeri positivi sempre più grandi, mentre l'angolo acuto **α** si avvicina a 90°.
90°	*T* non esiste perché la retta ***OP*** si sovrappone all'asse ***y***, che è parallelo ad ***a***.	***tan90° non esiste***
90°< α < 180°	*T* 'salta' sulla semiretta tangente, al disotto dell'asse ***x*** e parte da posizioni molto lontane in basso, mentre l'angolo ottuso **α** è molto vicino a 90°.	Parte da numeri negativi molto piccoli, mentre l'angolo ottuso **α** è molto vicino a 90° e poi cresce verso 0.
180°	T ≡ A(1;0)	$\tan\alpha = y_T$ $\tan\alpha = 0$
180°< α < 360°	*T* ripercorre le stesse posizioni occupate nel caso 0° ≤ α ≤ 180° e perciò tanα ripete lo stesso andamento. In particolare, ***non esiste tan270°***.	

Il grafico di y = tan(x)



La curva prende il nome di *tangentoide*

Andamento di *y* = tan(*x*)



Il periodo è π

Nel grafico si ripete uno stesso arco, come l'arco blu disegnato nell'intervallo [0, π], lungo π.

In corrispondenza all'ascissa π/2

Non esiste un punto della tangentoide con ascissa π/2, perciò la curva non incontra la retta d'equazione x = π/2.

Un punto della curva passa da sinistra a destra dell'ascissa π/2

Prima dell'ascissa π/2, il punto sale sempre più in alto,

In corrispondenza dell'ascissa π/2, il punto 'scompare'

Appena superata l'ascissa π/2, il punto 'riappare' dal basso.