

Equazioni di 2° grado. Problemi

PROBLEMI DI GEOMETRIA ANALITICA E PIANA

1. Sono date le parabole descritte dalle equazioni qui sotto:

$$A. y = -\frac{1}{2}x^2 + x \quad B. y = \frac{1}{2}x^2 - x \quad C. y = x^2 - 2x$$

A partire da ogni parabola risolvi i seguenti quesiti:

- Calcola le coordinate degli eventuali punti di intersezione con l'asse delle x .
 - Determina le coordinate del vertice V e traccia il grafico della parabola.
 - Rispondi alle seguenti domande e motiva ogni risposta:
 - le tre parabole hanno lo stesso grafico?
 - che cosa puoi dire delle intersezioni delle tre parabole con l'asse delle x ?
- le tre equazioni $D. -\frac{1}{2}x^2 + x = 0$ $E. \frac{1}{2}x^2 - x = 0$ $F. x^2 - 2x = 0$ hanno le stesse soluzioni?

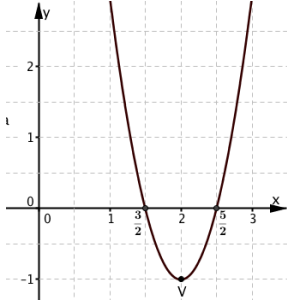
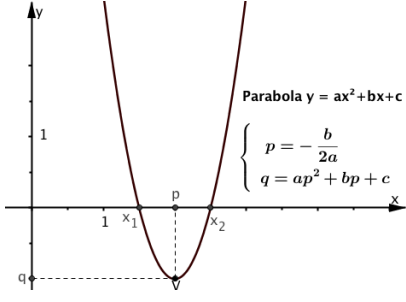
2. Sono date le parabole descritte dalle equazioni qui sotto:

$$A. y = -\frac{1}{4}x^2 + x - 1 \quad B. y = -\frac{1}{4}x^2 + x + 3 \quad C. y = -\frac{1}{4}x^2 + x - 2$$

A partire da ogni parabola risolvi i seguenti quesiti:

- Calcola le coordinate degli eventuali punti di intersezione con l'asse delle x .
- Puoi prevedere con i soli calcoli quale parabola è secante, quale tangente e quale esterna all'asse x ?
- Determina le coordinate del vertice V e traccia il grafico della parabola.

3. Completa la seguente tabella

| ESEMPIO NUMERICO | IN GENERALE |
|--|---|
| $4x^2 - 16x + 15 = 0$ | $ax^2 + bx + c = 0$ |
| L'equazione è collegata alla parabola qui sotto | |
| $y = 4x^2 - 16x + 15$ con vertice $V(2; -1)$ | $y = ax^2 + bx + c$ con vertice $V(p; q)$ |
|  |  |
| e quindi può essere scritta nella forma seguente | |
| $y = 4(x - 2)^2 - 1$ | $y = a(x - p)^2 + q$ |
| L'equazione $4x^2 - 16x + 15 = 0$ può essere scritta come $4(x - 2)^2 - 1 = 0$ da cui $(x - 2)^2 = \dots \Rightarrow x - 2 = \dots \Rightarrow x = \dots$ Quindi le due soluzioni sono: $x_1 = \dots - \dots = \dots$ $x_2 = \dots - \dots = \dots$ | L'equazione $ax^2 + bx + c = 0$ può essere scritta come $\dots = 0$ da cui $(x - p)^2 = \dots \Rightarrow x - p = \dots \Rightarrow x = \dots$ Quindi le due soluzioni sono: $x_1 = p - \sqrt{-\frac{q}{a}}$ $x_2 = p + \sqrt{-\frac{q}{a}}$ |

4. Di una parabola con l'asse di simmetria parallelo all'asse delle y sai che:

$$a = \frac{1}{2} \text{ e il vertice è } V(1; -2)$$

Risolvi i seguenti quesiti con i procedimenti che ti sembrano più rapidi, dopo aver risolto l'esercizio 3.

- Scrivi l'equazione della parabola e tracciane il grafico.
- Calcola le ascisse dei punti A e B di intersezione della parabola con l'asse delle x .

5. Dopo aver risolto l'esercizio 3, spiega perché sono vere le seguenti affermazioni relative a una parabola che ha vertice $V(p, q)$.

- La parabola non interseca l'asse delle x , se q ed a hanno segno concorde.
- La parabola interseca l'asse delle x , se q ed a hanno segno discorde
- La parabola è tangente all'asse delle x , se $q = 0$.

6. Dopo aver risolto l'esercizio 3, confronta le due formule per risolvere un'equazione di 2° grado riscritte qui sotto:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ con } \Delta = b^2 - 4ac \quad \text{e} \quad x = p \pm \sqrt{-\frac{q}{a}} \text{ con } p = -\frac{b}{2a}$$

e spiega perché si trova che l'ordinata q del vertice è legata a Δ dalla relazione $\Delta = -4aq$

7. È data la circonferenza di equazione $(x - 2)^2 + y^2 = 4$; risolvi i seguenti quesiti:

- Calcola le coordinate dei punti A e B di intersezione della circonferenza con l'asse delle x .
- Determina centro e raggio della circonferenza e tracciane il grafico.
- Spiega perché il segmento AB è un diametro della circonferenza.

8. È data la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 + 4x + 4 = 0$; risolvi i seguenti quesiti:

- Spiega perché la circonferenza è tangente all'asse della x nel punto T, con le coordinate da calcolare.
- Determina centro e raggio della circonferenza e tracciane il grafico.

9. La diagonale di un quadrato supera di 1 il lato. Determina il lato e la diagonale del quadrato.

10. In un rettangolo la base è il doppio dell'altezza e l'area è 32cm^2 . Determina le dimensioni del rettangolo.

11. In un rettangolo la base supera di 2cm l'altezza e l'area è 15 cm^2 . Determina le dimensioni del rettangolo.

12. *Il lato del decagono regolare e la sezione aurea*

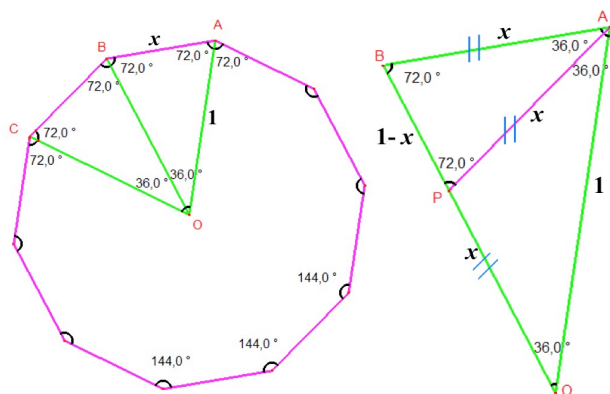
Basati sulle figure qui sotto per calcolare il lato x del decagono regolare inscritto in una circonferenza di raggio $r = 1$. Osserva che sono simili i triangoli ABO e ABP e completa il procedimento qui sotto:

I triangoli ABO e ABP hanno in proporzione i lati opposti agli angoli

Perciò scrivo $1 : x = x : \dots \Rightarrow x^2 = \dots \Rightarrow x^2 + \dots = 0$.

Risolvo l'equazione e trovo $\Delta = \dots x = \dots$, di cui accetto solo la soluzione positiva

$x_2 = \dots \cong \dots$



Si dice che il lato del decagono è la **sezione aurea** del raggio, famosa anche perché un rettangolo con i lati proporzionali a OB e OP è particolarmente piacevole a vedersi e quindi si trova in edifici, quadri e sculture fin dai tempi degli antichi Greci, come mostra efficacemente [il video](#).

PROBLEMI VARI

- 13.** Deposito in banca un capitale di 12 000 €. Alla scadenza del primo anno deposito sullo stesso conto il capitale con gli interessi maturati. Alla scadenza del secondo anno ritiro la somma di 12 854,7 euro. Completa il procedimento qui sotto per calcolare il tasso di interesse x dato dalla banca.
- Alla fine del primo anno ho un capitale $C_1 = 12\,000 + 12\,000x = 12\,000(1 + \dots)$
 - Alla fine del secondo anno ho un capitale $C_2 = C_1 + C_1x = C_1(1 + \dots) = 12\,000(1 + \dots)^2$
- Otengo l'equazione $12\,000(1 + \dots)^2 = 12\,854,7$
Divido i due membri per 12 000 e ottengo $(1 + \dots)^2 = \dots \Rightarrow 1 + \dots = \pm \dots$
Da cui $x = \dots$. Infine, accetto solo la soluzione positiva e trovo $x \cong \dots = \dots\%$
- 14.** Deposito in banca un capitale di 25000 € a un tasso di interesse annuo x . Alla scadenza del primo anno deposito sullo stesso conto il capitale e gli interessi maturati, così la banca aumenta il tasso di interesse dello 0,5%. Alla fine di due anni ritiro la somma di 26291,10 €. Completa il procedimento qui sotto per calcolare i tassi di interesse dati dalla banca in questi due anni.
- Alla fine del 1° anno il capitale è $C_1 = 25\,000 + 25\,000x = 25\,000(1 + \dots)$
 - Alla fine del 2° anno il capitale è $C_2 = C_1 + C_1(x + 0,05) = C_1(\dots + \dots) = 25\,000(1 + \dots)(\dots + \dots)$
- Otengo l'equazione $25\,000(1 + \dots)(\dots + \dots) = 26\,291,10$
Divido i due membri per 25 000 e ottengo $(1 + \dots)(\dots + \dots) = \dots \Rightarrow x^2 + \dots = 0$
Risolvere l'equazione e trovo $\Delta = \dots$ $x = \dots$, di cui accetto solo la soluzione positiva
 $x_2 = \dots \cong \dots \cong \dots\%$, che dà l'interesse alla fine del 1° anno.
L'interesse alla fine del 2° anno è $x_2 + \dots \cong \dots \cong \dots\%$.

PROBLEMI DI FISICA

- 15.** Lo spazio di frenata d (in metri) di un'automobile su una strada bagnata è legato alla velocità v (in chilometri all'ora) dalla legge $d = 0,01v^2$. La polizia sul luogo di un incidente rileva uno spazio di frenata lungo 25 metri. Qual era la velocità dell'automobile al momento della frenata?
- 16.** Un sasso viene lasciato cadere dall'alto di una torre nelle vicinanze della Terra. Trascura la resistenza dell'aria per risolvere i seguenti quesiti:
- spiega perché il sasso si allontana dal punto di inizio caduta seguendo la legge $s = 5t^2$ e precisa il significato delle lettere s, t .
 - calcola quanto tempo impiega il sasso per scendere di 20 metri.
- 17.** Un sasso viene lanciato nelle vicinanze della Terra con una velocità iniziale verticale verso l'alto di 8 m/s. Trascura la resistenza dell'aria per risolvere i seguenti quesiti:
- spiega perché il sasso si allontana dal punto di lancio seguendo la legge $s = -5t^2 + 8t$ e precisa il significato delle lettere s, t .
 - calcola quanto tempo impiega il sasso a ripassare per il punto di lancio.
- 18.** Un sasso viene lanciato nelle vicinanze della Terra con una velocità iniziale verticale verso il basso di 10 m/s. Trascura la resistenza dell'aria per risolvere i seguenti quesiti:
- spiega perché il sasso si allontana dal punto di lancio seguendo la legge $s = 5t^2 + 10t$ e precisa il significato delle lettere s, t .
 - calcola quanto tempo impiega il sasso percorrere 15 m.
- 19. Profondità di un canyon**
Lascio cadere un sasso dal bordo del canyon e dopo 8 secondi mi arriva il rumore dell'impatto col fondo. Quanto tempo impiega il sasso a raggiungere il fondo? Quanto è profondo il canyon?
Completa la risoluzione del problema.
Il sasso si muove in caduta libera dal bordo al fondo del canyon e percorre la distanza y in un tempo x (che non so). Legge del moto $s = 5t^2 \Rightarrow \dots = 5x^2$
Il suono parte dal fondo del canyon e percorre la stessa distanza y in un tempo $8 - x$ per arrivare al mio orecchio. Legge del moto $s = 340t \Rightarrow \dots = 340(8 - x)$
Nel tempo x ho che $5x^2 = 340(8 - x) \Rightarrow 5x^2 + \dots = 0$. Divido i due membri per 5 e ottengo $x^2 + \dots = 0$ da cui $\Delta = \dots$ $x = \dots$ e accetto la soluzione positiva $x_2 \cong \dots$
L'altezza y del pozzo è data da $y = 5 \dots \cong \dots$