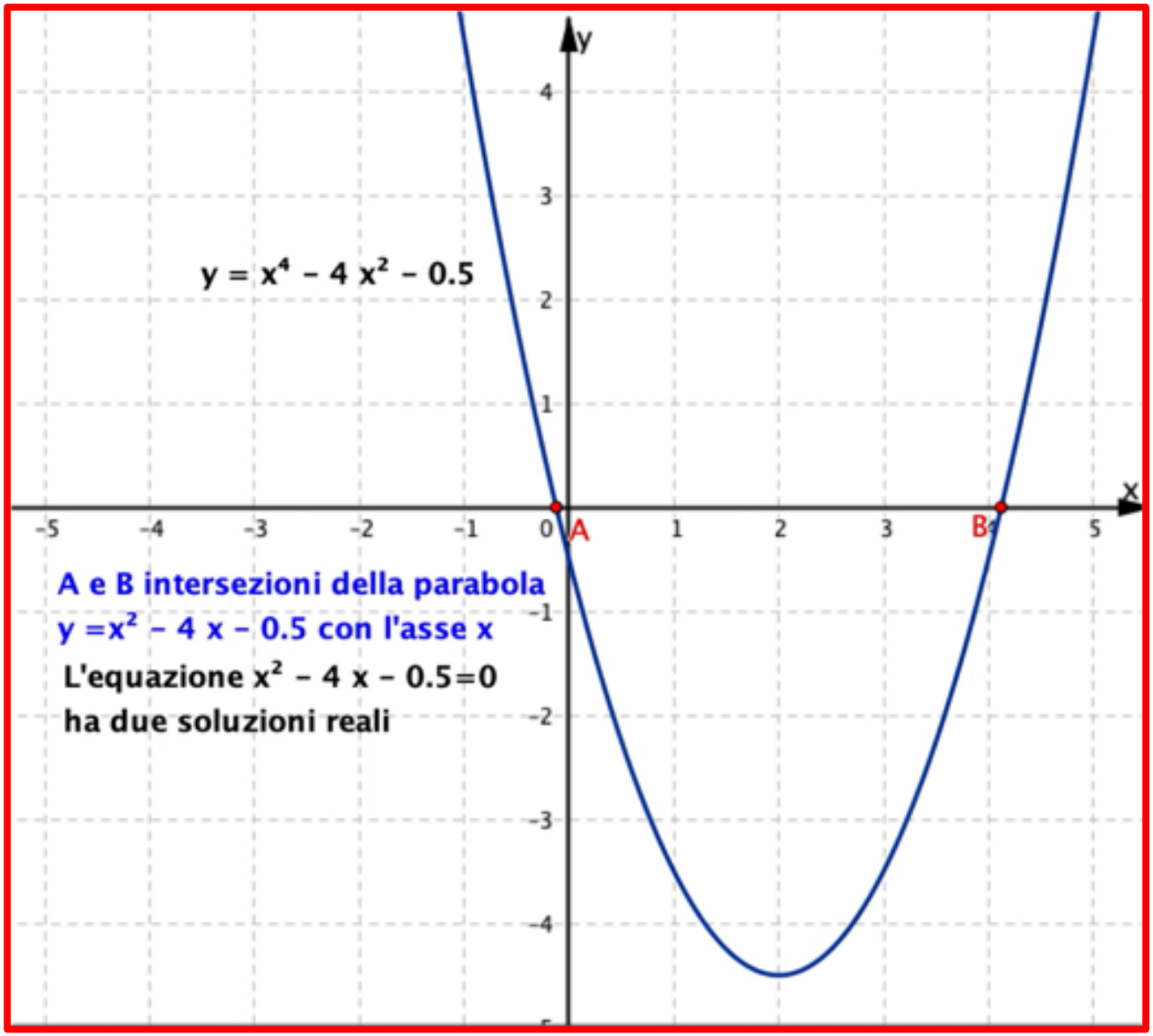
Oltre il 2º grado
Particolari equazioni polinomiali

Ricordare curve ed equazioni di 2º grado

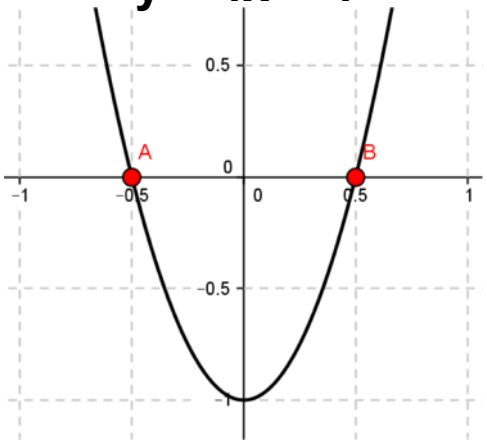
Video 1



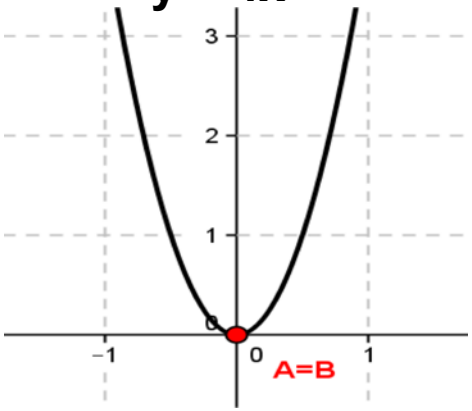
2° grado: intersezioni di parabole con asse x

Nel video osservo la posizione di una parabola rispetto all'asse x. Ritrovo tre casi possibili.

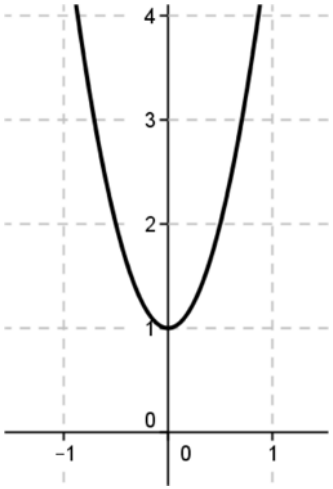
$y = 4x^2 - 1$



$y = 4x^2$



$y = 4x^2 + 1$



Asse x secante in A e B

L'equazione $4x^2 - 1 = 0$ ha 2 soluzioni reali

Asse x tangente in A

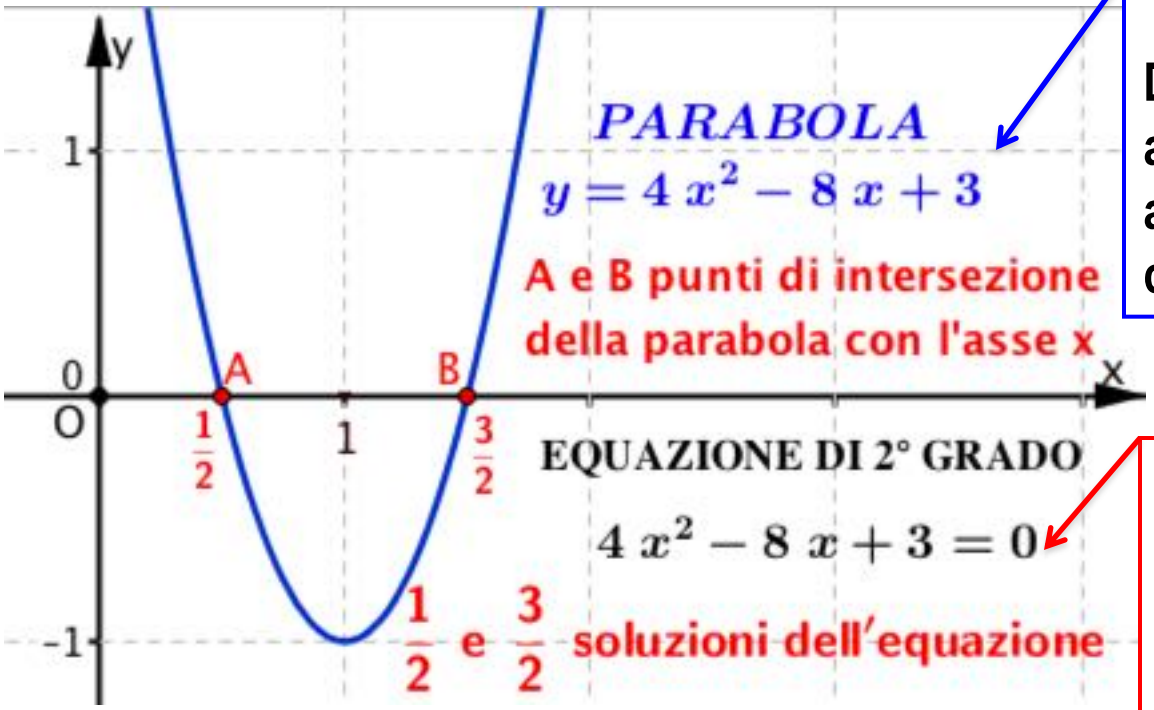
L'equazione $4x^2 = 0$ ha 2 soluzioni reali e coincidenti.

Asse x non incontra la curva

L'equazione $4x^2 + 1 = 0$ non ha soluzioni reali

Significati della parola ‘equazione’

La parola ‘equazione’: uguaglianza fra due espressioni in cui compaiono lettere e numeri



Equazione della parabola.
Diventa un’uguaglianza vera se alle variabili *x* e *y* sostituisco ascissa e ordinata di un punto P che percorre la parabola.

Equazione di secondo grado.
Diventa un’uguaglianza vera se all’incognita x sostituisco le ascisse dei punti di intersezione della parabola con l’asse x.

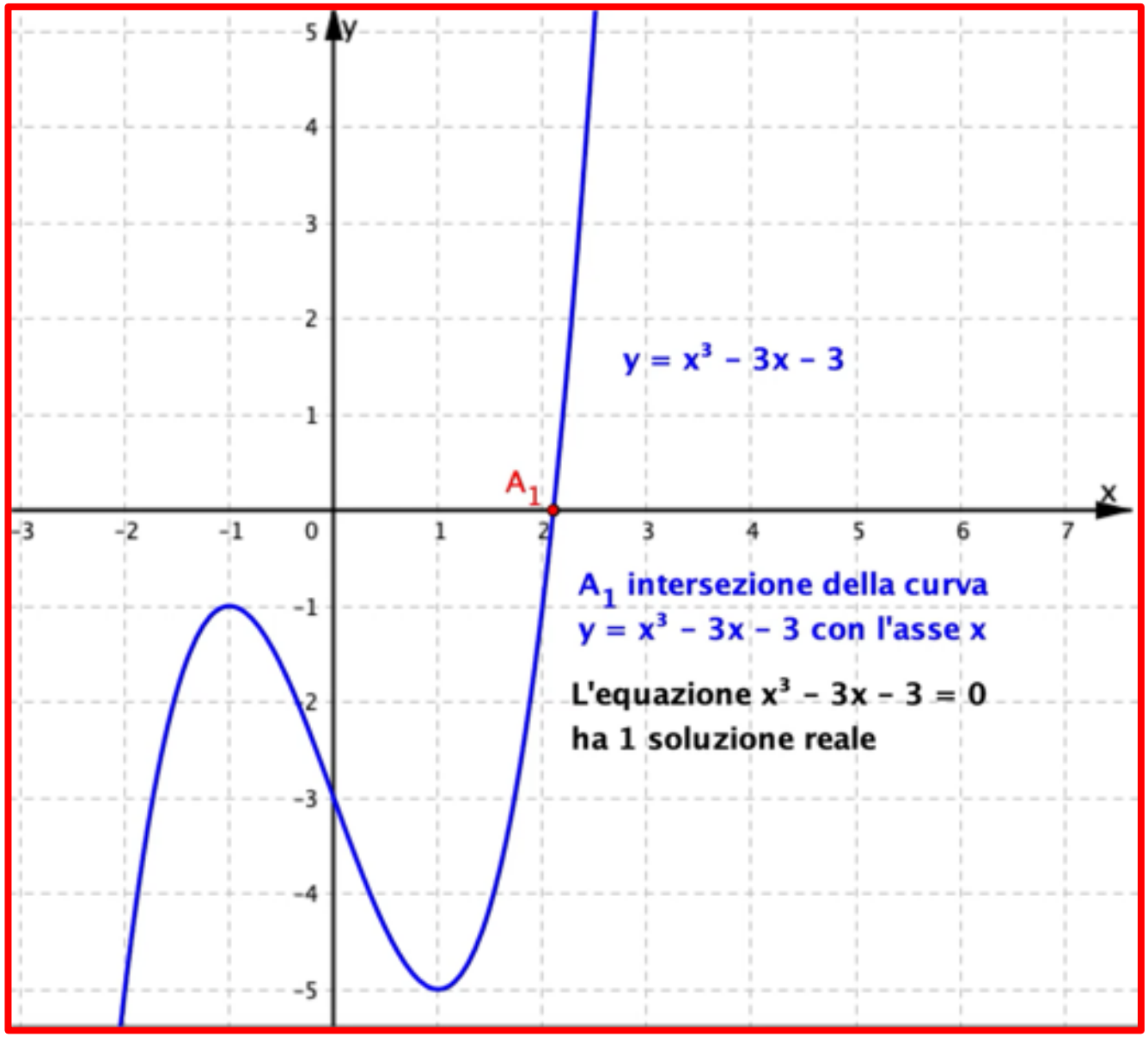
Osservare curve di 3^{O} grado

Nel prossimo video saranno nuove curve a scivolare sul piano per mostrare vari casi possibili.
Le curve sono il grafico, ad esempio di:
$y = x^3 - 3x$, $y = x^3 - 3x + 2$, …

Tutte le equazioni sono di 3^{O} grado.
Perciò spesso si dice che i grafici sono *curve di 3^{O} grado (o cubiche)*.

Osservare curve di 3° grado

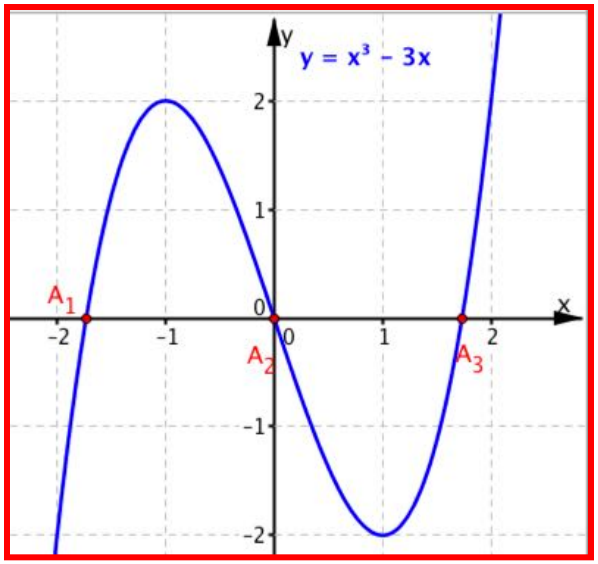
Video 2



Anna Maria Miele, 2020

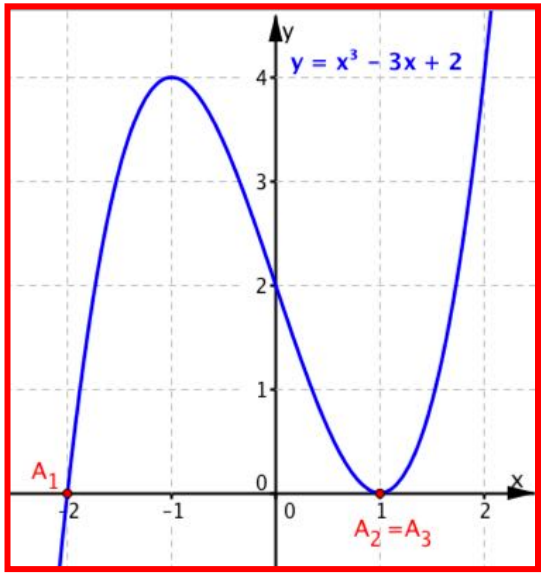
Equazioni di 3º grado

Ecco alcuni casi osservati nel video 2



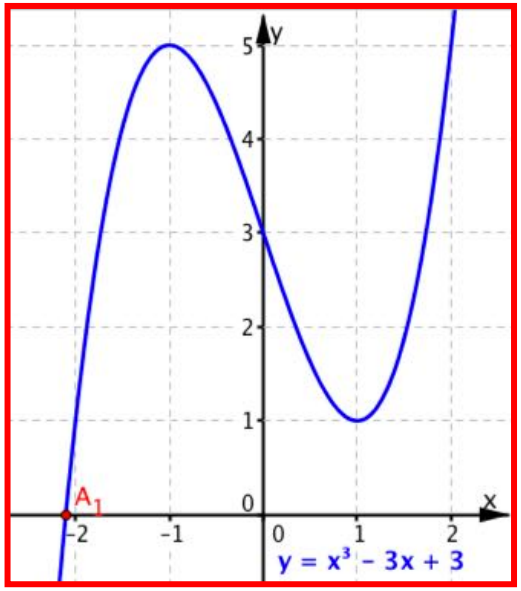
Asse x secante in A_1, A_2, A_3

L'equazione $x^3 - 3x = 0$ ha 3 soluzioni reali.



Asse x secante in A_1 e tangente in A_2

L'equazione $x^3 - 3x + 2 = 0$ ha 3 soluzioni reali, di cui 2 coincidenti.



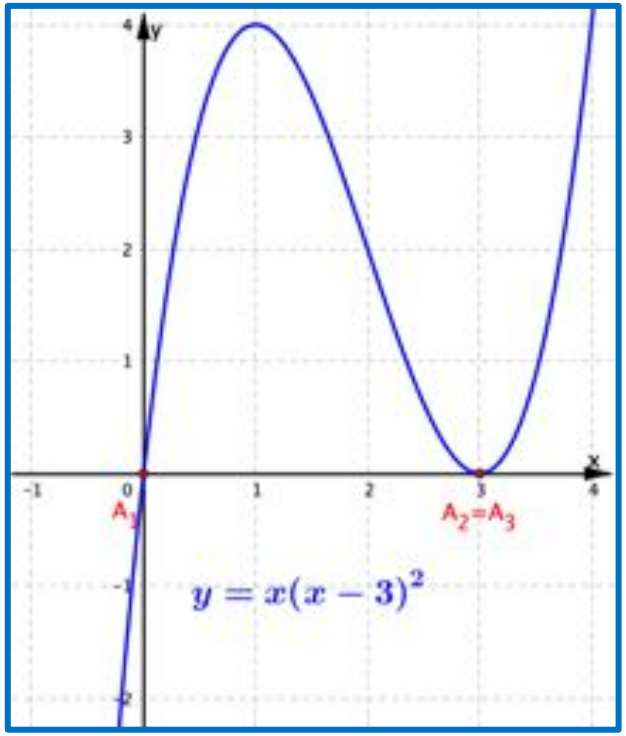
Asse x secante in A_1

L'equazione $x^3 - 3x + 3 = 0$ ha 1 soluzione reale.

Anna Maria Miele, Treccani Scuola 2014

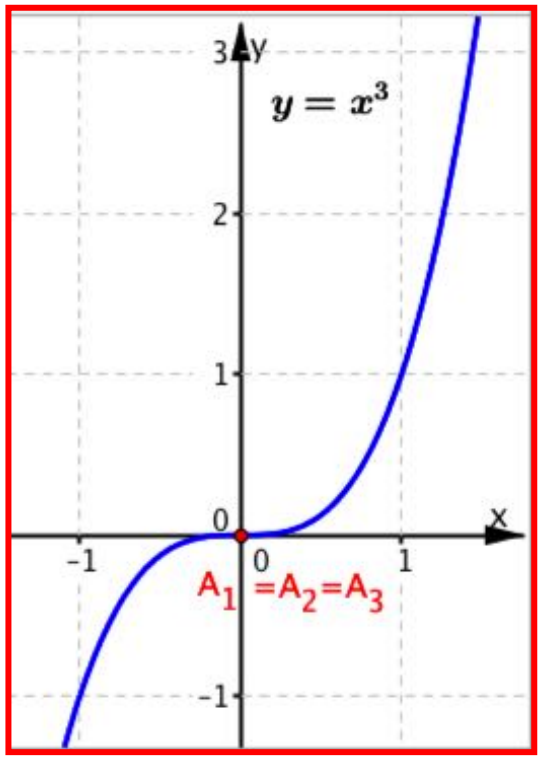
Particolare tangente a curva di 3° grado

Qui osservi una particolare tangente che ha 3 intersezioni coincidenti con una curva di 3° grado



Asse x secante in A_1 e tangente in A_2

L'equazione $x(x-2)^2 = 0$
ha 3 soluzioni reali, di cui 2 coincidenti.



Asse x tangente in A_1

L'equazione $x^3 = 0$
ha 3 soluzioni reali e coincidenti.

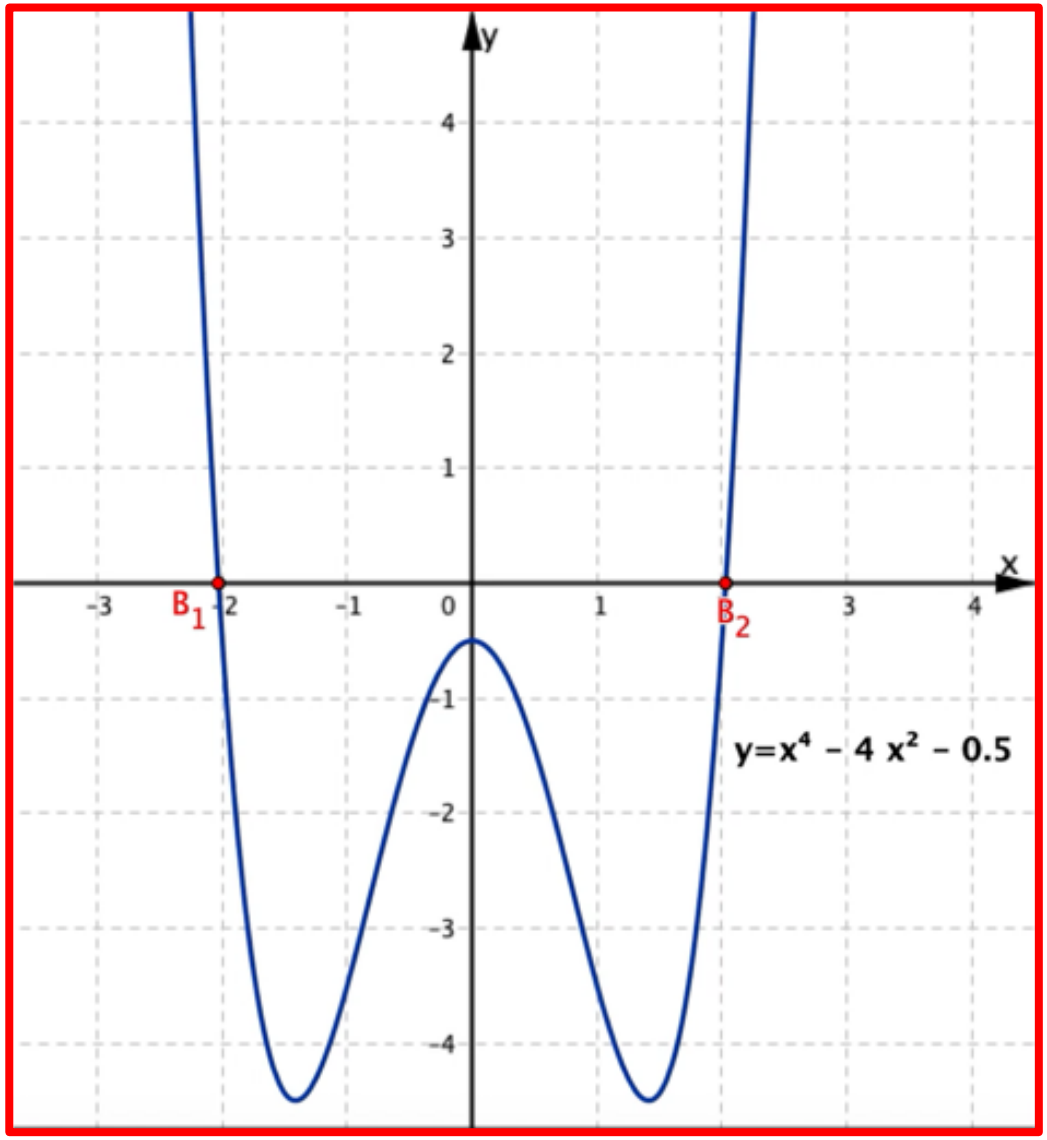
Anna Maria Miele, Treccani Scuola 2014

Osservare curve di 4^{O} grado

E che cosa trovo se passo ad osservare curve di 4^{O} grado in movimento?

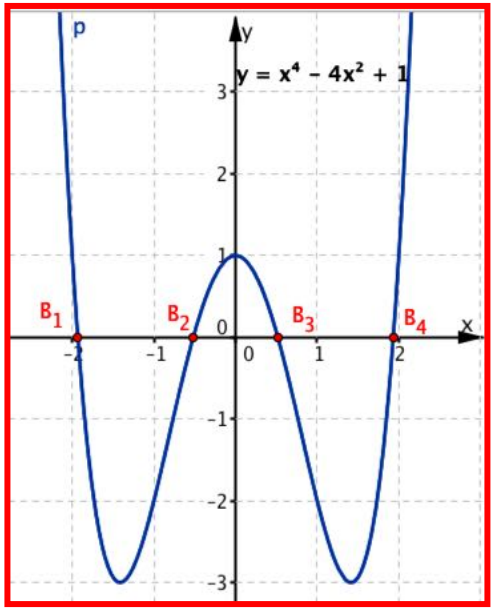
Un video per osservare curve di 4^{O} grado

Video 3



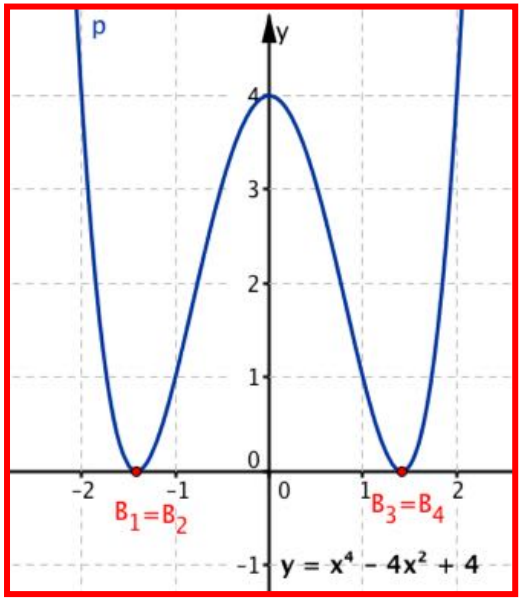
4° grado: intersezioni di curve con asse x

Nel video osservo la posizione di alcune curve di 4° grado rispetto all'asse x. Ecco alcuni esempi.



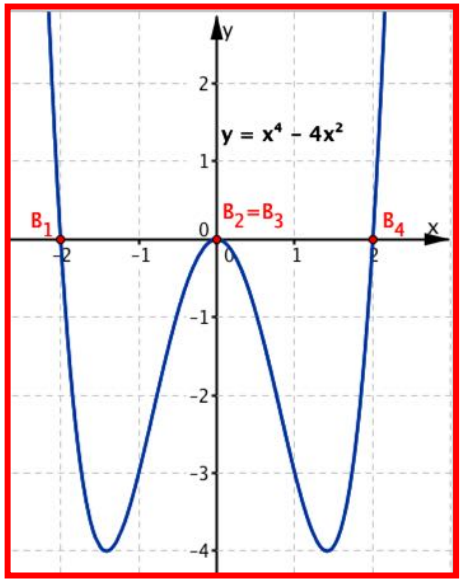
Asse x secante in B_1, B_2, B_3, B_4

L'equazione $x^4 - 4x^2 + 1 = 0$ ha 4 soluzioni reali.



Asse x tangente in B_1 e B_3

L'equazione $x^4 - 4x^2 + 4 = 0$ ha 2 coppie di soluzioni reali e coincidenti.

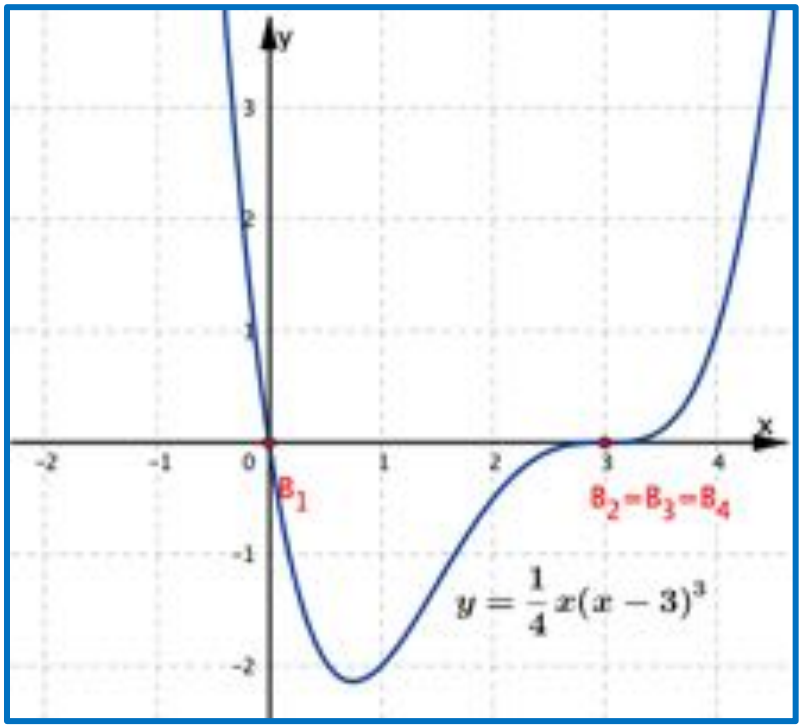


Asse x tangente in B_2, secante in B_1 e B_4

L'equazione $x^4 - 4x^2 = 0$ Ha 4 soluzioni reali, di cui 2 coincidenti.

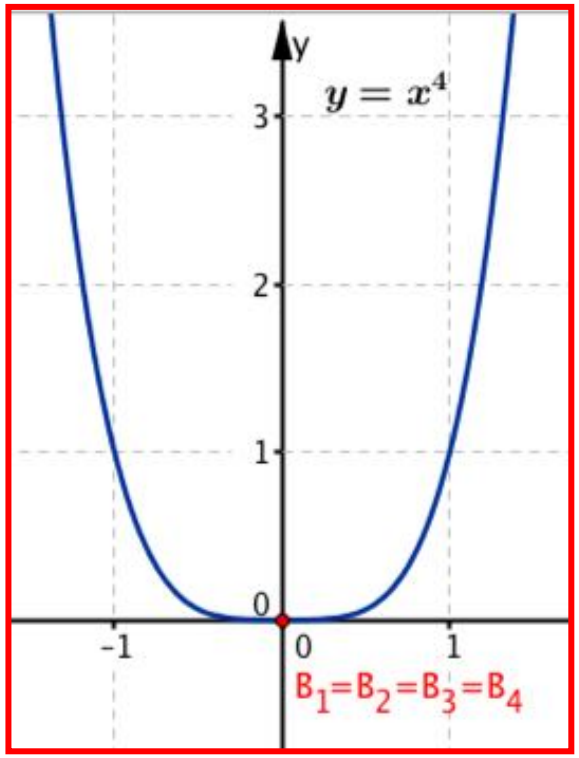
Particolare tangente a curva di 4^O grado

Qui osservi una particolare tangente che ha 4 intersezioni coincidenti con una curva di 4^O grado



Asse x secante in B_1 e tangente in B_2

L'equazione $x(x-2)^3 = 0$
ha 4 soluzioni reali, di cui 3 coincidenti.



Asse x tangente in B_1

L'equazione $x^4 = 0$
ha 4 soluzioni reali e coincidenti.

Anna Maria Miele, Treccani Scuola 2020

Una sintesi delle osservazioni

Grado	Esempi			Numero massimo di soluzioni
2°	$4x^2 - 1 = 0$	$4x^2 = 0$	$4x^2 + 1 = 0$	2
3°	$x^3 - 3x = 0$ $x(x-2)^2 = 0$	$x^3 - 3x + 2 = 0$ $x^3 = 0$	$x^3 - 3x + 2 = 0$	3
4°	$x^4 - 4x^2 + 1 = 0$ $x(x-2)^3 = 0$	$x^4 - 4x^2 + 4 = 0$ $x^4 = 0$	$x^4 - 4x^2 = 0$	4

Posso prevedere:

- un'equazione di 5° grado ha, al massimo, 5 soluzioni reali;

…

- un'equazione di grado *n* ha, al massimo, *n* soluzioni reali.

Due domande sulle equazioni

1. **In quale forma si scrive un'equazione di grado superiore al 2°?**
2. **Come si risolve un'equazione di grado superiore al 2°?**

Ragioniamo a partire da quello che sappiamo sulle equazioni di 2° grado

Forma e risoluzione di un'equazione

Grado	Esempi	Procedimento risolutivo *Principio di annullamento del prodotto*
2°	$2(x+1)(x-3)=0$ $4(x-3)^2=0$	$x+1=0 \Rightarrow x_1=-1$ oppure $x-3=0 \Rightarrow x_2=3$ $(x-3)^2=0 \Rightarrow x-3=0$ due volte $\Rightarrow x_1=x_2=3$
3°	$4(x+1)(x-3)\left(x-\frac{1}{2}\right)=0$ $\frac{1}{2}(x+1)(x-3)^2=0$	$x+1=0 \Rightarrow x_1=-1$, $x-3=0 \Rightarrow x_2=3$, $x-\frac{1}{2}=0 \Rightarrow x_3=\frac{1}{2}$ $x+1=0 \Rightarrow x_1=-1$, $(x-3)^2=0 \Rightarrow x_2=x_3=3$
4°	$2x^2(x+1)(x-3)=0$	$x^2=0 \Rightarrow x_1=x_2=0$, $x+1=0 \Rightarrow x_3=-1$, $x-3=0 \Rightarrow x_4=3$

Una prima conclusione: se al primo membro trovo il prodotto di fattori di 1° o 2° grado, risolvo l'equazione con il principio di annullamento del prodotto.

Attività

Completa la scheda di lavoro per risolvere particolari equazioni di grado superiore al 2°.

Cosa hai trovato?

Equazioni risolte con il principio di annullamento del prodotto

Equazione	Risoluzione
$4x(x-1)(x-3)=0$	$x(x-3)(x-1)=0 \Rightarrow \begin{cases} x_1=0 \\ x-3=0 \Rightarrow x_2=3 \\ x-1=0 \Rightarrow x_3=1 \end{cases}$
$3\left(x-\frac{2}{3}\right)(x+2)(x+1)=0$	$3\left(x-\frac{2}{3}\right)(x+2)(x+1)=0 \Rightarrow \begin{cases} x-\frac{2}{3}=0 \Rightarrow x_1=\frac{2}{3} \\ x+2=0 \Rightarrow x_2=-2 \\ x+1=0 \Rightarrow x_3=-1 \end{cases}$
$-5x(x+1)(x-3)(x+4)=0$	$-5x(x+1)(x-3)(x+4)=0 \Rightarrow \begin{cases} -5x=0 \Rightarrow x_1=0 \\ x+1=0 \Rightarrow x_2=-1 \\ x-3=0 \Rightarrow x_3=3 \\ x+4=0 \Rightarrow x_4=-4 \end{cases}$
$(x^2-4)(x^2+4)=0$	$(x^2-4)(x^2+4)=0 \Rightarrow \begin{cases} x^2-4=0 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow \begin{cases} x_1=-2 \\ x_2=2 \end{cases} \\ x^2+4=0 \Rightarrow x^2=-4 \Rightarrow \textit{nessuna soluzione reale} \end{cases}$

Equazioni che hanno date soluzioni

Soluzioni	Equazione	Eseguite moltiplicazioni al primo membro	Equazione ottenuta
$x_1 = 4$ $x_2 = 2$ $x_3 = 0$	$3(x-4)(x-2)x = 0$	$3\,(x^2 - 6x + 8)\,x = 0$	$3x^3 - 18x^2 + 24x = 0$
$x_1 = -2$ $x_2 = -1$ $x_3 = 0$	$2(x+2)(x+1)x = 0$	$2(x^2 + 3x + 2)x = 0$	$2x^3 + 6x^2 + 4x = 0$
$x_1 = \frac{1}{2}$ $x_2 = \frac{2}{3}$ $x_3 = 1$ $x_4 = -1$	$6\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{2}{3}\right)(x-1)(x+1) = 0$	$6\left(x^2 - \frac{7}{6}x + \frac{1}{3}\right)(x^2 - 1) = 0$	$6x^4 - 7x^3 - 4x^2 + 7x - 2 = 0$
$x_1 = x_2 = 0,$ $x_3 = x_4 = 3$	$x^2(x-3)^2 = 0$	$x^2(x^2 - 6x + 9) = 0$	$x^4 - 6x^3 + 9x^2 = 0$

Descrivere equazioni di 2° e 3° grado

Equazione	I membro sviluppato	Calcolo del termine di grado massimo	Calcolo del termine noto
$a(x-x_1)(x-x_2)=0$	$ax^2+bx+c=0$	$a\cdot x\cdot x=ax^2$	$a\cdot(-x_1)\cdot(-x_2)=c$
$a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)=0$	$ax^3+bx^2+cx+d=0$	$a\cdot x\cdot x\cdot x=ax^3$	$a\cdot(-x_1)\cdot(-x_2)\cdot(-x_3)=d$

Una scrittura usata a partire dalle equazioni di 3° grado

$$a_3(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)=0 \Leftrightarrow a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0=0$$

Esempio

$$2(x+3)(x-3)(x-4)=0 \Leftrightarrow 2x^3-8x^2-18x+72=0$$

$$x_1=-3,\ x_2=3,\ x_3=4,\ a_3=2,\ a_2=-8,\ a_1=-18,\ a_0=72$$

Le soluzioni -3, 3 e 4 sono divisori del termine noto 72

Attenzione ai simboli

Simbolo	Significato
x^3	$x \cdot x \cdot x$
x_3	terza soluzione
a^3	$a \cdot a \cdot a$
a_3	coefficiente di x^3

Attenzione ai termini matematici

72 , 3, -3, 4 numeri interi

$72 : 3 = 24 \Leftrightarrow 3$ è divisore di 72

$72 : (-3) = -24 \Leftrightarrow -3$ è divisore di 72

$72 : 4 = 18 \Leftrightarrow 4$ è divisore di 72

} 3, - 3 e 4 sono divisori di 72

Descrivere un'equazione polinomiale

Gli esempi conducono a generalizzare il procedimento: per scrivere equazioni di grado *n* con *n* soluzioni reali $x_1, x_2, \ldots, x_n$ moltiplico tra loro *n* binomi di primo grado

$$a_n (x-x_1)(x-x_2) \ldots (x-x_{n-1}) (x-x_n) = 0$$

Se al 1° membro eseguo le moltiplicazioni indicate ottengo un polinomio di grado *n*

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$$

L'equazione prende il nome di EQUAZIONE POLINOMIALE.
I coefficienti dell'incognita x sono: $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$.
Le soluzioni $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sono divisori del temine noto a_0.

Equazioni e formule risolutive

Conosco la formula risolutiva per le equazioni di 2º grado

Equazione di 2° grado	Formula risolutiva
$ax^2 + bx + c = 0$	$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ con $\Delta = b^2 - 4ac$
ESEMPIO	
$x^2 - 3x - 4 = 0$ $a = 1 \ , \ b = -3 \ , c = -4$	$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4) = 9 + 16 = 25$ $x = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{3-5}{2} = -1 \\ x_2 = \frac{3+5}{2} = 4 \end{cases}$

Posso trovare una formula risolutiva anche per tutte le equazioni di grado superiore al 2º?

Uno sguardo alla storia

Metà del 1500 in Italia.

Formule risolutive per equazioni di III e IV grado.

Non si studiano oggi nelle scuole secondarie.

HIERONYMI CAR
DANI, PRÆSTANTISSIMI MATHE
MATICI, PHILOSOPHI, AC MEDICI,
ARTIS MAGNÆ,
SIVE DE REGVLIS ALGEBRAICIS,
Lib. unus. Qui & totius operis de Arithmetica, quod
OPVS PERFECTVM
inscripsit, est in ordine Decimus.

Libro pubblicato da Gerolamo Cardano nel 1545

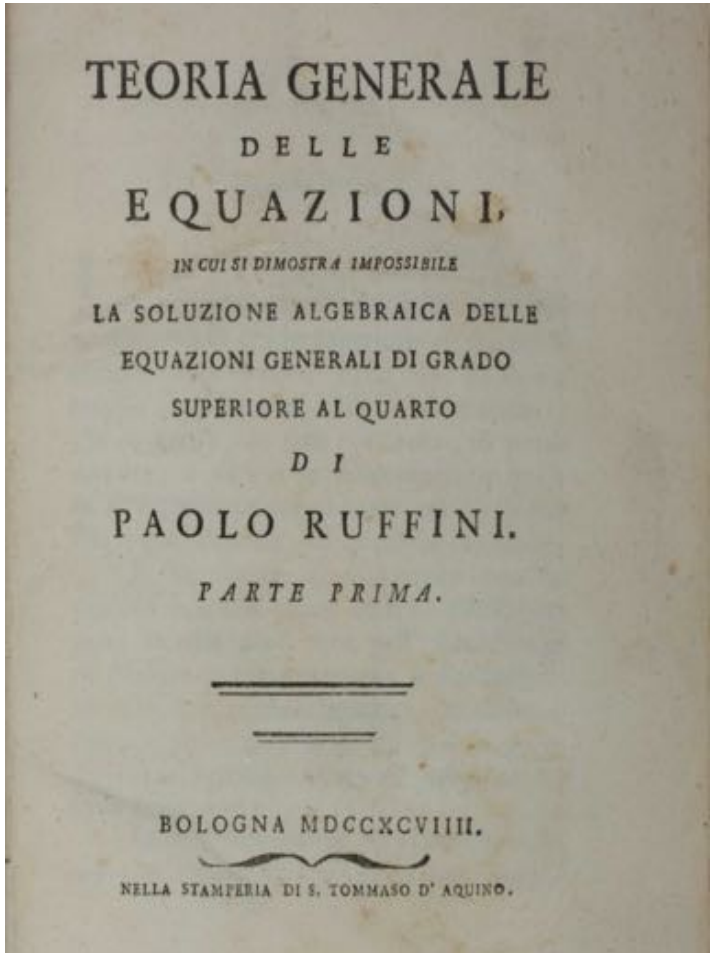
Uno sguardo alla storia

Secoli di tentativi dei matematici per trovare le formule risolutive di tutte le equazioni di quinto, sesto, … grado.

Fine 1700 – Inizio 1800

Teorema, pubblicato da Ruffini, con dimostrazione più generale di Abel:

È impossibile trovare la formula risolutiva per equazioni di grado superiore al 4°



TEORIA GENERALE
DELLE
EQUAZIONI,
IN CUI SI DIMOSTRA IMPOSSIBILE
LA SOLUZIONE ALGEBRAICA DELLE
EQUAZIONI GENERALI DI GRADO
SUPERIORE AL QUARTO
DI
PAOLO RUFFINI.
PARTE PRIMA.

BOLOGNA MDCCXCVIIII.
NELLA STAMPERIA DI S. TOMMASO D' AQUINO.

Come si risolvono TUTTE le equazioni di grado superiore al 2^{O}?

La prossima lezione sarà dedicata a cercare risposte a questa domanda