Conosciamo meglio le equazioni di 2° grado

La formula risolutiva è indispensabile?

La formula risolutiva

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

può sembrare una ‘macchina universale’ per risolvere equazioni di 2° grado: basta inserire i coefficienti a, b, c per avere le soluzioni. Ma per alcune equazioni possiamo trovare procedimenti più veloci di soluzione.

Ecco alcuni casi di equazioni da risolvere con ‘scorciatoie’

Una ‘scorciatoia’ per risolvere equazioni

Legge di annullamento del prodotto

Un prodotto vale 0 solo se almeno uno dei suoi fattori vale 0.

$$xyz = 0 \Leftrightarrow \left\langle \begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{array} \right.$$

Attenzione!

La legge vale solo per il numero 0.

E NON vale per nessun altro numero.

Due procedimenti a confronto

Equazione $2\left(x-\frac{3}{2}\right)(x+5)=0$

Legge di annullamento del prodotto	Formula risolutiva
$2\left(x-\frac{3}{2}\right)(x+5)=0 \Leftrightarrow \left\langle \begin{array}{l} x-\frac{3}{2}=0 \Rightarrow x=\frac{3}{2} \\ x+5=0 \Rightarrow x=-5 \end{array}\right.$ **Attenzione!** **2≠0** **perciò deve essere 0 uno degli altri fattori** **POCHI CALCOLI** **Poche occasioni di ‘errori di distrazione’.** **Ma debbo ragionare mentre eseguo i calcoli.**	$2\left(x-\frac{3}{2}\right)(x+5)=0$ $\Updownarrow$ $2\left(x^2+5x-\frac{3}{2}x-\frac{15}{2}\right)=0$ $\Updownarrow$ $2\left(x^2+\frac{7}{2}x-\frac{15}{2}\right)=0$ $\Updownarrow$ $2x^2+7x-15=0$ $\Delta=7^2-4\cdot 2\cdot(-15)=49+120=169$ $x=\frac{-7\pm\sqrt{169}}{2\cdot 2} \Rightarrow \left\langle \begin{array}{l} x_1=\frac{-7-13}{4}=\frac{-20}{4}=-5 \\ x_2=\frac{-7+13}{4}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2} \end{array}\right.$

Due procedimenti a confronto

Equazione $2\left(x-\frac{3}{2}\right)(x+5)=0$

Legge di annullamento del prodotto	Formula risolutiva
$2\left(x-\frac{3}{2}\right)(x+5)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-\frac{3}{2}=0 \Rightarrow x=\frac{3}{2} \\ x+5=0 \Rightarrow x=-5 \end{cases}$ **Attenzione!** **2≠0** **perciò deve essere 0 uno degli altri fattori** **POCHI CALCOLI** **Poche occasioni di ‘errori di distrazione’.** **Ma debbo ragionare mentre eseguo i calcoli.**	$2\left(x-\frac{3}{2}\right)(x+5)=0$ $\Updownarrow$ $2\left(x^2+5x-\frac{3}{2}x-\frac{15}{2}\right)=0$ $\Updownarrow$ $2\left(x^2+\frac{7}{2}x-\frac{15}{2}\right)=0$ $\Updownarrow$ $2x^2+7x-15=0$ $\Delta=7^2-4\cdot2\cdot(-15)=49+120=169$ $x=\frac{-7\pm\sqrt{169}}{2\cdot2} \Rightarrow \begin{cases} x_1=\frac{-7-13}{4}=\frac{-20}{4}=-5 \\ x_2=\frac{-7+13}{4}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2} \end{cases}$

Due procedimenti a confronto

Equazione $5x^2 - 3x = 0$

Raccolgo il fattore comune x

Legge di annullamento del prodotto	Formula risolutiva
$5x^2 - 3x = 0$ $\Updownarrow$ $x(5x-3)=0 \Leftrightarrow \left\langle \begin{array}{l} x=0 \\ 5x-3=0 \Rightarrow x=\frac{3}{5} \end{array} \right.$	$5x^2 - 3x = 0 \quad a=5,\ b=-3,\ c=0$ $\Delta = (-3)^2 - 4\cdot 5\cdot 0 = 9-0 = 9$ $x = \frac{3\pm\sqrt{9}}{2\cdot 5} \Rightarrow \left\langle \begin{array}{l} x_1 = \frac{3-3}{10} = \frac{0}{10} = 0 \\ x_2 = \frac{3+3}{10} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} \end{array} \right.$

POCHI CALCOLI.
Poche occasioni di 'errori di distrazione'.
Ma debbo ragionare mentre eseguo i calcoli.

Le equazioni incomplete

L'ultima equazione esaminata

$$5x^2 - 3x = 0$$

è di 2° grado, ma non presenta tutti i monomi della forma

$$ax^2 + bx + c = 0$$

L'equazione si dice *'incompleta'* e può rientrare nel caso generale: basta dire che c = 0.

Ecco gli altri casi di equazioni incomplete.

- Con b = 0 esempio $4x^2 - 9 = 0$

- Con b = c = 0 esempio $4x^2 = 0$

NO *a* = 0
perché l'equazione diventa di 1° grado

La prossima attività sarà dedicata alle equazioni incomplete e … non solo.

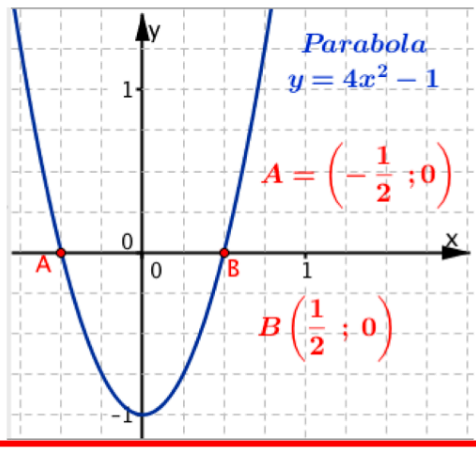
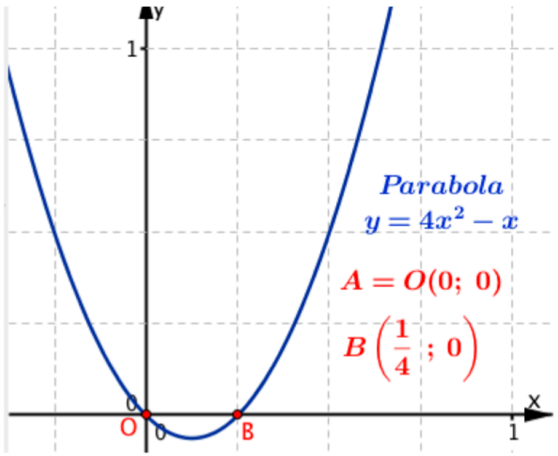
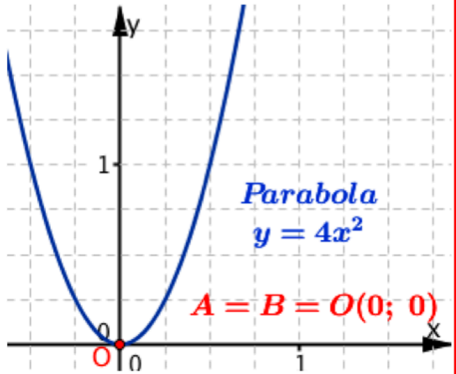
Attività : Equazioni incomplete e … altro

Completa la scheda di lavoro per

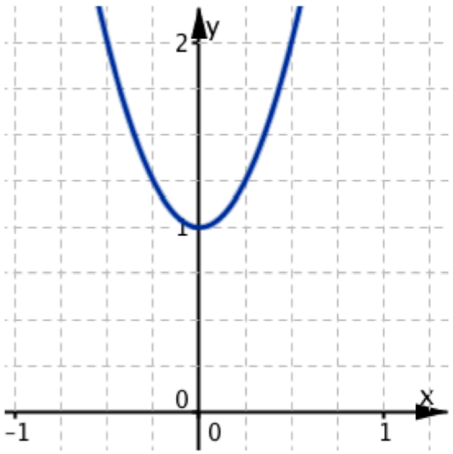
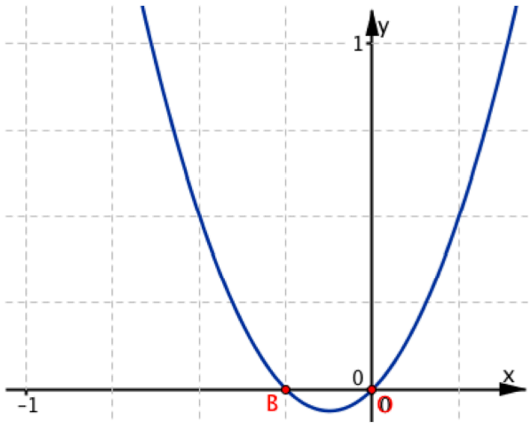
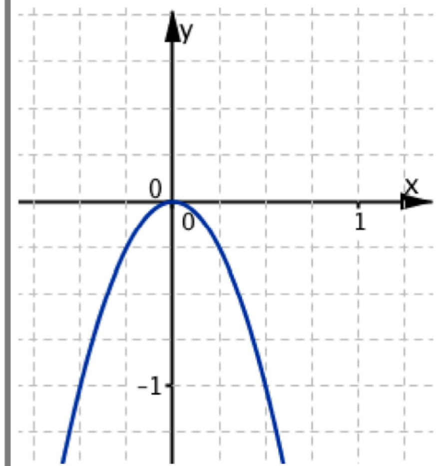
- **impadronirti di procedimenti rapidi per risolvere equazioni;**
- **scoprire proprietà delle equazioni.**

Cosa hai trovato?

Risolvere equazioni incomplete

Equazione	$4x^2-1=0$	$4x^2-x=0$	$4x^2=0$
Coeff.=0	$b=0$	$c=0$	$b=c=0$
Risoluzione senza formula	$4x^2=1 \Rightarrow x^2=\frac{1}{4}$ $x=\pm\frac{1}{2}$ $x_1=-\frac{1}{2}$ oppure $x_2=-\frac{1}{2}$	$4x^2-x=0 \Rightarrow x(4x-1)=0$ $x=0$ oppure $4x-1=0$ $x_1=0$ oppure $x_2=\frac{1}{4}$	$4x^2=0 \Rightarrow x^2=0$ $x_1=x_2=0$
Grafico della parabola	 	 	

Risolvere equazioni incomplete

Equazione	$4x^2+1=0$	$4x^2+x=0$	$-4x^2=0$
Risoluzione senza formula	$4x^2=-1 \Rightarrow x^2=-\frac{1}{4}<0$ non ci sono soluzioni reali	$4x^2+x=0 \Rightarrow x(4x+1)=0$ $x=0$ oppure $4x+1=0$ $x_1=0$ oppure $x_2=-\frac{1}{4}$	$-4x^2=0 \Rightarrow x^2=0$ $x_1=x_2=0$
Grafico della parabola	**Parabola $y=4x^2+1$** 	**Parabola $y=4x^2+x$** 	**Parabola $y=-4x^2$** 

Relazioni tra soluzioni (x_1 e x_2) e coefficienti *(a, b, c)* di un' equazione di 2° grado

Soluzioni	*Equazione*	*Esegui la moltiplicazione al primo membro*	*Equazione del tipo* $ax^2 + bx + c = 0$
$x_1 = 1$ $x_2 = -3$	$(x-1)(x+3)=0$	$x^2 + 3x - x - 3 = 0$	$x^2 + 2x - 3 = 0$ $\Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 4 + 12 = \boxed{16}$
$x_1 = -1$ $x_2 = -2$	$(x+1)(x+2)=0$	$x^2 + 2x + x + 2 = 0$	$x^2 + 3x + 2 = 0$ $\Delta = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 9 - 8 = \boxed{1}$
$x_1 = \frac{1}{2}$ $x_2 = \frac{2}{3}$	$6\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{2}{3}\right) = 0$	$6\left(x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}\right) = 0$	$6x^2 - 7x + 2 = 0$ $\Delta = 49 - 4 \cdot 6 \cdot 2 = \boxed{1}$
$x_1 = 0$ $x_2 = 1$	$-4x(x-1) = 0$	$-4x^2 + 4x = 0$	Equazione con c=0 $\Delta = 16 - 4 \cdot (-4) \cdot 0 = \boxed{16}$
$x_1 = -\frac{1}{3}$ $x_2 = \frac{1}{3}$	$9\left(x - \frac{1}{3}\right)\left(x + \frac{1}{3}\right) = 0$	$9\left(x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}\right) = 0$	$9x^2 - 1 = 0$ Equazione con b=0 $\Delta = 0^2 - 4 \cdot 9 \cdot (-1) = \boxed{36}$

Relazioni tra soluzioni (x_1 e x_2) e coefficienti (*a, b, c*) di un' equazione di 2° grado

IN GENERALE			
Soluzioni	***Equazione***	***Esegui i calcoli al primo membro***	***Equazione del tipo*** $ax^2 + bx + c = 0$
x_1 e x_2 *numeri reali*	$a(x - x_1)(x - x_2) = 0$	$a(x^2 - x_2x - x_1x + x_1x_2) = 0$	$ax^2 - a(x_1 + x_2)x + ax_1 \cdot x_2 = 0$ $b = - a(x_1 + x_2)$ $c = ax_1 \cdot x_2$ $\Delta = a^2(x_1 + x_2)^2 - 4\,a^2\,x_1 \cdot x_2$ $= a^2(x_1 - x_2)^2$ **> 0 sempre**
$x_1 = x_2$	$a(x - x_1)^2 = 0$	$a(x^2 - 2x_1x + x_1^{\,2}) = 0$	$ax^2 - 2ax_1x + ax_1^{\,2} = 0$ $b = 2ax_1$ $c = ax_1^{\,2}$ $\Delta = 4\,a^2\,x_1^{\,2} - 4\,a^2\,x_1^{\,2} = 0$ **sempre**
ESEMPIO			
$x_1 = x_2 = 3$	$(x - 3)^2 = 0$ $2(x - 3)^2 = 0$	$x^2 - 2 \cdot 3x + 3^2 = 0$	$x^2 - 6x + 9 = 0$ $\Delta = 6^2 - 4 \cdot 9 = 0$ $2x^2 - 12x + 18 = 0$ $\Delta = 12^2 - 4 \cdot 36 = 0$

Quadrato di un binomio
$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Relazioni tra soluzioni (x_1 e x_2) e coefficienti (a, b, c) di un' equazione di 2° grado

3. Risolvi le seguenti equazioni con il procedimento che ti sembra più rapido:

$-4(x-5)^2=0 \Rightarrow (x-5)^2=0 \Rightarrow x_1=x_2=5$

$3(x+7)^2=0 \Rightarrow [x-(-7)]^2=0 \Rightarrow x_1=x_2=-7$

Equazione $ax^2+bx+c=0$	***Soluzioni***	***Equazione*** $a(x-x_1)(x-x_2)=0$
$x^2-7x+10=0$	$\Delta=49-40=9$ $x=\frac{7\pm 3}{2}\quad x_1=2,\ x_2=5$	$(x-2)(x-5)=0$
$9x^2+6x+1=0$	$\Delta=36-36=0$ $x_1=x_2=\frac{-6}{18}=-\frac{1}{3}$	$9\left(x+\frac{1}{3}\right)^2=0$
$x^2-1=0$	$x^2=1 \Rightarrow x=\pm 1$	$(x-1)(x+1)=0$
$x^2-2x+1=0$	$x_1=x_2=1$	$(x-1)^2=0$

Riflessioni sul lavoro svolto

Equazioni e identità

Tante uguaglianze scritte in algebra.
Ecco alcuni esempi per riflettere

$$A.\ (x-3)^2 = x^2 - 6x + 9$$

Quadrato del binomio
Identità, cioè uguaglianza vera per qualunque numero reale *x*.

$$B.\ (x-3)^2 = 0$$

Equazione, cioè uguaglianza vera solo per alcuni numeri reali *x* da determinare.

Equazioni equivalenti

$$C.\ x^2 - 6x + 9 = 0$$

Equazioni equivalenti

Due equazioni equivalenti hanno le stesse soluzioni.

Altri procedimenti per ottenere equazioni equivalenti

Addiziono o sottraggo ai due membri la stessa espressione

$$2x^2 - 3x = -1$$

Addiziono 1 ai due membri

$$2x^2 - 3x + 1 = 0$$

$$5x^2 = x$$

Sottraggo x ai due membri

$$5x^2 - x = 0$$

Equazioni equivalenti

Altri procedimenti per ottenere equazioni equivalenti

Moltiplico o divido i due membri per lo stesso numero diverso da 0

$$4x^2 + 34x - 38 = 0$$

Divido i due membri per 2

$$2x^2 + 17x - 19 = 0$$

$$5x^2 = x$$

~~Divido i due membri per x~~

NO

$$5x = 1$$

Perdo la soluzione $x = 0$