Grafico di quozienti di polinomi. Esercizi

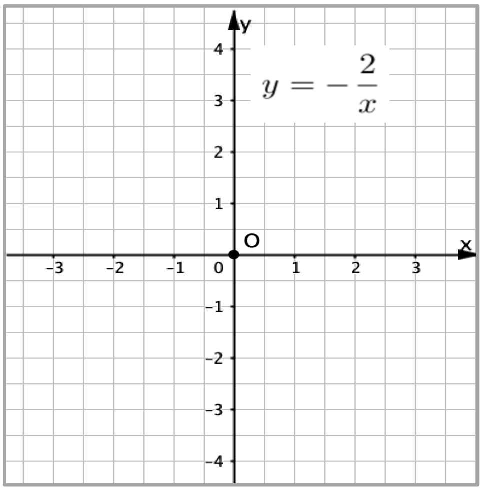
Funzione algebriche di 2°grado. Il grafico è un'iperbole

A. Quozienti di due binomi di 1°grado: l'iperbole ha asintoti perpendicolari

Esercizio guidato

Completa il procedimento per tracciare il grafico delle funzioni assegnate nell'esercizio 1.

1. **a**. $y=-\frac{2}{x}$ **b**. $y=\frac{x-5}{x-3}$



a. $\boldsymbol{y=-\frac{2}{x}}$

Il dominio è l'insieme R dei reali escluso……

Gli asintoti sono ………………

Il centro di simmetria è O(0,0).

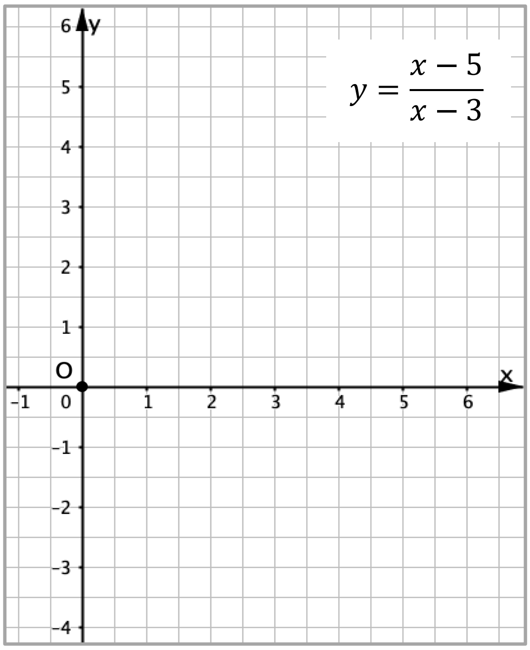
Riempi la tabella qui sotto.

$\boldsymbol{x}$	$\frac{1}{2}$	1	2
$\boldsymbol{y=-\frac{2}{x}}$			

Disegna nella figura a fianco un ramo dell'iperbole.

Completa il grafico con l'arco simmetrico rispetto ad O.

b. $\boldsymbol{y=\frac{x-5}{x-3}}$



Denominatore = ………..= 0 per x =……

Il dominio è l'insieme R dei reali escluso ……

Determina l'equazione dell'asintoto verticale.

$\lim\limits_{x\to\cdots}\frac{x-5}{x-3}=\cdots\Rightarrow$asintoto d'equazione ………

Determina l'equazione dell'asintoto orizzontale.

$\lim\limits_{x\to\cdots}\frac{x-5}{x-3}=\cdots\Rightarrow$asintoto d'equazione ………

Disegna nella figura a fianco gli asintoti.

Il centro di simmetria C è …………

Riempi la tabella qui sotto.

$\boldsymbol{x}$	$\frac{7}{2}$	4	5
$\boldsymbol{y=\frac{x-5}{x-3}}$			

Disegna nella figura a fianco un ramo dell'iperbole.

Completa il grafico con l'arco simmetrico rispetto a C.

Studia il grafico dei quozienti di polinomi assegnati negli esercizi da 2 a 9

2. $y=\frac{-3}{x}$ $\quad y=\frac{2x-3}{x}$

3. $y=\frac{2}{x+1}$ $\quad y=\frac{3x+5}{x+1}$

4. $y=\frac{-1}{x-2}$ $\quad y=\frac{5-3x}{x-2}$

5. $y=\frac{5}{2x+4}$ $\quad y=\frac{1-x}{2x+4}$

6. $y=\frac{4}{1-2x}$ $\quad y=\frac{5-2x}{1-2x}$

7. $y=\frac{3}{x-2}$ $\quad y=\frac{x+1}{x-2}$

8. $y=\frac{1}{4x-2}$ $\quad y=\frac{3x-1}{2x+1}$

9. $y=\frac{4}{1-2x}$ $\quad y=\frac{3x}{3x-2}$

B. Quoziente di un polinomio di 2° diviso uno di 1°grado. L'iperbole non ha asintoti perpendicolari

Esercizio guidato

Completa il procedimento per tracciare il grafico della funzione data nell'esercizio 10

10. $y = \frac{x^2+4}{x}$

a. *Prime caratteristiche della funzione*
- Il dominio è l'insieme R dei reali escluso …….
- Determina il grado della funzione:

  $xy = \dots\dots\dots\dots \Rightarrow \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots = 0$

  Funzione algebrica di …. grado.

b. *Asintoti*
- Determina l'equazione dell'asintoto verticale

  $\lim_{x\to\cdots} \frac{x^2+4}{x} = \cdots \Rightarrow$asintoto d'equazione ………
- Determina l'equazione dell'asintoto d'equazione $y = mx + q$

  $\lim_{x\to\cdots} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\cdots} \frac{x^2+4}{x^2} = \cdots \Rightarrow m = \dots$

  $\lim_{x\to\cdots} [f(x) - mx] = \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots = \cdots \Rightarrow q = \dots$

  Asintoto d'equazione $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

  Disegna gli asintoti nel piano cartesiano qui sotto a destra.

  Il centro di simmetria è ………..

c. *Segno di* $y = \frac{x^2+4}{x}$

  y ha lo stesso segno di x perché ……………….

d. *Calcola y' e studiane il segno*

  Conviene applicare la proprietà distributiva e scrivere:

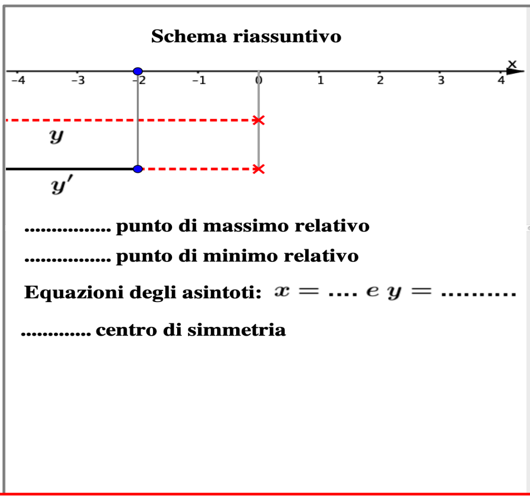
  $y = x + \frac{4}{x}$ e calcolare $y' = 1 - \frac{4}{\cdots} = \frac{\cdots\cdots\cdots}{x^2}$

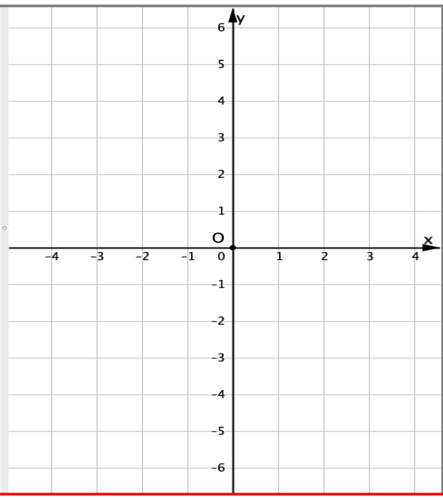
  y' ha lo stesso segno del numeratore perché ……………….

e. *Completa lo schema qui sotto a sinistra per riassumere tutte le informazioni.*

f. *Calcola le coordinate dei punti notevoli, in cui valgono zero f(x) o f'(x)*

g. *Traccia il grafico della funzione nella figura qui sotto a destra.*





Studia il grafico dei quozienti di polinomi assegnati negli esercizi da 11 a 18.

11. $y = \frac{x^2+1}{x}$

12. $y = \frac{2x^2+x+2}{x}$

13. $y = \frac{x^2+2x+4}{2x}$

14. $y = \frac{x^2-9}{3x}$

15. $y = \frac{1-x^2}{x}$

16. $y = \frac{x^2-5x+4}{2x}$

17. $y = \frac{x^2-2x+1}{x}$

18. $y = \frac{x^2-4x+4}{2x}$

Esercizio guidato

Completa il procedimento per tracciare il grafico della funzione data nell'esercizio 19

19. $y = \frac{x^2}{x+1}$

a. *Prime caratteristiche della funzione*
- Denominatore = …………= 0 per x = ……
- Il dominio è l'insieme R dei reali escluso …….
- Determina il grado della funzione:

  $(x + 1)y = \dots\dots\dots \Rightarrow \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots = 0$

  Funzione algebrica di …. grado.

b. *Asintoti*
- Determina l'equazione dell'asintoto verticale

  $\lim_{x\to\cdots} \frac{x^2}{x+1} = \cdots \Rightarrow$asintoto d'equazione ………
- Determina l'equazione dell'asintoto d'equazione $y = mx + q$

  $\lim_{x\to\cdots} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\cdots} \frac{\cdots\cdots}{x+1} = \cdots \Rightarrow m = \dots$

  $\lim_{x\to\cdots} [f(x) - mx] = \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots = \cdots \Rightarrow q = \dots$

  Asintoto d'equazione ⋯⋯⋯⋯⋯

c. *Segno di* $y = \frac{x^2}{x+1}$

   y ha lo stesso segno di $x + 1$ perché ……………….

d. *Calcola y' e studiane il segno*

   Per calcolare la derivata applico la regola di derivazione del quoziente:

   $$y = \frac{N}{D} \Rightarrow y' = \frac{N'D - ND'}{D^2}$$

   $$y = \frac{x^2}{x+1} \Rightarrow y' = \frac{\cdots\cdots\cdots}{(x+1)^2}$$

   y' ha lo stesso segno del numeratore perché ………………

e. *Organizza lo schema per riassumere tutte le informazioni.*

f. *Calcola le coordinate dei punti notevoli, in cui valgono zero f(x) o f'(x)*

g. *Traccia il grafico degli asintoti e trova il centro C di simmetria*

h. *Traccia il grafico della funzione.*

Studia il grafico dei quozienti di polinomi assegnati negli esercizi da 20 a 31.

20. $y = \frac{x^2-9}{x-1}$

21. $y = \frac{x^2-2x-8}{x-1}$

26. $y = \frac{x^2-4x}{2x+1}$

27. $y = \frac{x^2-7x+10}{x-1}$

22. $y = \frac{x^2-8x+19}{x-5}$

23. $y = \frac{x^2-2x+2}{x-1}$

24. $y = \frac{x^2-2x+1}{2-x}$

25. $y = \frac{5-x^2}{6-2x}$

28. $y = \frac{x^2+3}{x+1}$

29. $y = \frac{x^2-4x}{1-x}$

30. $y = \frac{x^2-5x+4}{x-5}$

31. $y = \frac{x^2-4x+4}{2x+2}$

Funzioni algebriche di grado superiore al secondo

Esercizio guidato

Completa il procedimento per tracciare il grafico della funzione data nell'esercizio 32

32. $y = \frac{8}{x^2+4}$ grafico noto con il nome di 'curva di Gaetana Agnesi'

a. *Prime caratteristiche della funzione*

- Denominatore = ………… > 0 per ……… ……
- Il dominio è ………………………..
- Determina il grado della funzione:
  $(x^2 + 4)y =$ ………….$\Rightarrow$ ………………… = 0
  Funzione algebrica di …. grado.
- La funzione è pari o dispari? ………………

b. *Asintoti*

- Il grafico non può avere un asintoto verticale perché…………………
- Determina l'equazione dell'asintoto d'equazione $y = mx + q$
  $\lim\limits_{x\to\cdots} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\cdots} \frac{1}{\cdots\cdots} = \cdots \Rightarrow m = \ldots$
  $\lim\limits_{x\to\cdots} [f(x) - mx] = \cdots\cdots\cdots\cdots = \cdots \Rightarrow q = \ldots$
  Il grafico ha un solo asintoto d'equazione $\cdots\cdots\cdots$

c. *Segno di* $y = \frac{8}{x^2+4}$

$y > 0$ per qualunque x reale perché ………………

d. *Calcola y' e studiane il segno*

Per calcolare la derivata applico la regola di derivazione della funzione reciproca:

$$y = \frac{N}{D} \Rightarrow y' = \frac{N'D - ND'}{D^2}$$

$$y = \frac{8}{x^2+4} \Rightarrow y' = \frac{\cdots\cdots}{(x^2+4)^2}$$

y' ha lo stesso segno del numeratore perché ………………

e. *Calcola y'' e studiane il segno*

Applico di nuovo la regola di derivazione della funzione reciproca:

$y'' =$ …………………………………

y'' ha lo stesso segno del numeratore perché ………………

f. *Organizza lo schema per riassumere tutte le informazioni.*

g. *Calcola le coordinate dei punti notevoli, in cui valgono zero f'(x) o f''(x)*

h. *Indica sul piano cartesiano l'asintoto*

i. *Traccia il grafico della funzione e indica i punti di massimo o minimo relativo e i flessi.*

Studia il grafico dei quozienti di polinomi assegnati negli esercizi da 33 a 44.

33. $y = \frac{2}{1-x^2}$

34. $y = \frac{3x^2-3x+1}{x^2}$

35. $y = \frac{x^3-3x^2+4}{x^2}$

36. $y = \frac{x^3+4}{x^2}$

37. $y = \frac{x^3+2}{x}$

38. $y = \frac{1+x}{x^2}$

39. $y = \frac{x}{x^2-1}$

40. $y = \frac{x^2+1}{x^2-1}$

41. $y = \frac{x^2}{x^2-4x+4}$

42. $y = \frac{x^2+x-1}{x^2-1}$

43. $y = \frac{x}{(x^2-1)^2}$

44. $y = \frac{x^2-5x+4}{x^2-5x+6}$

Problemi

45. È data la funzione $f(x) = \frac{8}{4+x^2}$. Risolvi i seguenti quesiti.

a. Studia il grafico della funzione e traccia la curva $\mathcal{C}$.
b. Scrivi le equazioni delle tangenti a $\mathcal{C}$ nei punti P(–2, 1) e Q(2, 1).
c. Disegna il quadrilatero convesso determinato dalle due tangenti e dalle rette OP e OQ e dimostra che il quadrilatero è un rombo.
d. Determina le misure degli angoli del rombo in gradi sessagesimali.

46. È data la funzione $f(x) = \frac{x}{(1-x^2)^2}$. Risolvi i seguenti quesiti.

a. Studia l'andamento della funzione e determina in particolare, gli asintoti, la simmetria e il flesso F
b. Traccia il grafico della funzione.
c. Scrivi l'equazione della retta tangente al grafico in F.

47. Determina i parametri h e k, in modo che la curva d'equazione $y = \frac{hx+k}{x^2}$ passi per il punto A(1, 3) e abbia in A come tangente la retta d'equazione $y = -4x + 7$. Traccia il grafico della curva ottenuta e della sua tangente in A.

48. È data la funzione $f(x) = \frac{(k-1)x^3+kx^2-3}{x-1}$, dove k può assumere qualunque valore reale. Risolvi i seguenti quesiti.

a. Scegli k in modo che f non abbia asintoti.
b. Scegli k in modo che f abbia un asintoto obliquo.
c. Motiva le risposte e rappresenta nei due casi i grafici delle funzioni ottenute.

49. Una funzione è espressa nella forma $f(x) = \frac{p(x)}{x^2+k}$, dove k è un numero reale e $p(x)$ un polinomio. Il grafico di $f(x)$ interseca l'asse x nei punti di ascisse 0 e 12/5 ed ha come asintoti le rette di equazioni $x = 3$, $x = -3$ e $y = 5$. Determina i punti di massimo e minimo relativi della funzione f.

50. È data la funzione $f(x) = \frac{x^2+2px+q}{x^2+1}$, dove p e q sono parametri reali, con p che non può assumere il valore zero. Risolvi i seguenti quesiti.

a. Mostra che, per qualunque valore dei parametri p e q, trovi sul grafico della funzione due punti dove la tangente è parallela all'asse delle x e il prodotto delle ascisse di questi due punti vale –1.

b. Determina p e q in modo che il grafico della funzione abbia:
- la tangente parallela all'asse x nel punto di ascissa 2;
- la tangente perpendicolare alla retta $y = -\frac{1}{3}x$ nel punto di ascissa 1.

c. Disegna il grafico della funzione ottenuta con $p = 4$ e $q = -5$, determinandone i punti di massimo e minimo relativo ed eventuali asintoti. Lo studio di eventuali flessi è facoltativo.