Funzioni e dominio di funzioni

Il concetto di ‘*funzione*’ si evolve nel tempo

A partire dal 1600 si diffonde il concetto di funzione e si cominciano a trovare varie definizioni che cambiano nel tempo.

Confrontiamo alcune definizioni importanti nella storia della matematica.

Curve, linee, … nasce un vocabolario

Cartesio e la geometria analitica (1637)

«Prendendo infinite diverse grandezze per la linea *x*, se ne troveranno altrettante infinite per la linea *y* e così si avrà un'infinità di diversi punti per mezzo dei quali si descrive la curva richiesta»

Cartesio

Newton

Newton, la fisica e l'analisi matematica (1676)

«Le curve sono descritte non dalla giustapposizione di parti, ma dal movimento continuo dei punti …»

Sistemazione rigorosa dell’analisi matematica

Cauchy (1857)

«Due quantità variabili reali si dicono funzioni una dell’altra quando variano simultaneamente in modo che il valore dell’una determini il valore dell’altra».

Weierstrass (1878)

«Se una quantità variabile reale, che diremo y, è legata ad un’altra quantità variabile reale x, in modo che, ad un certo valore di x, corrispondano uno o più valori determinati per y, si dirà che y è funzione di x nel senso più generale del vocabolo e si scriverà $y = f(x)$ »

Definizione di '*funzione*' più recente

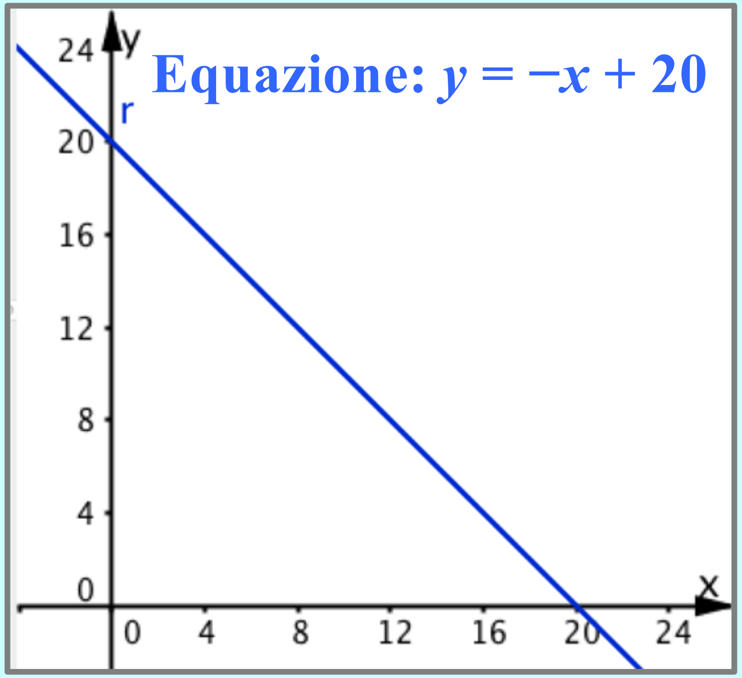
La definizione condivisa oggi dalla comunità scientifica internazionale

Si può intendere una *funzione* come una legge arbitraria che, ad ogni *x* appartenente ad un insieme *D* (detto *dominio* della funzione), fa corrispondere *una sola* *y* appartenente ad un insieme *C* (detto *codominio* della funzione)» *(Kolmogorov, 1974)*

Il linguaggio delle funzioni

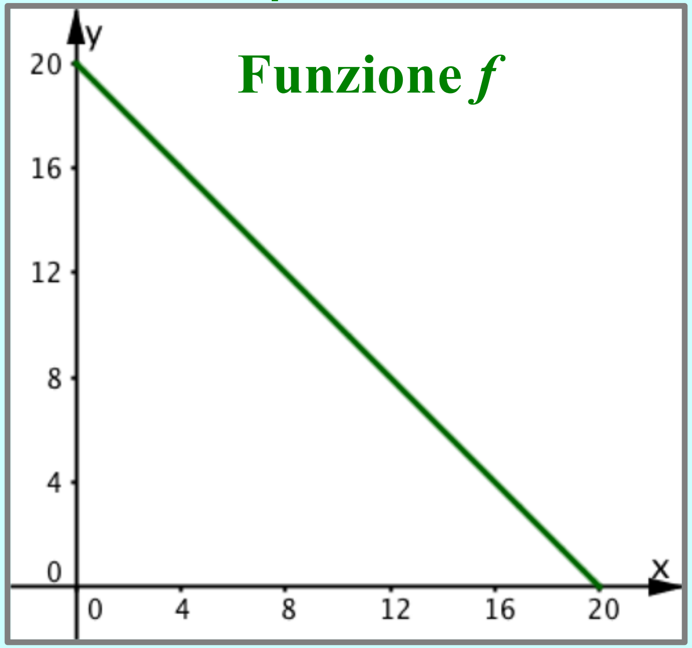
Con una sola formula posso creare più funzioni: basta modificare il dominio. Ecco un esempio.

Retta in geometria analitica



Dominio $\boldsymbol{D}$: insieme $\boldsymbol{R}$
Codominio $\boldsymbol{C}$: insieme $\boldsymbol{R}$
Legge: $y = -x + 20$

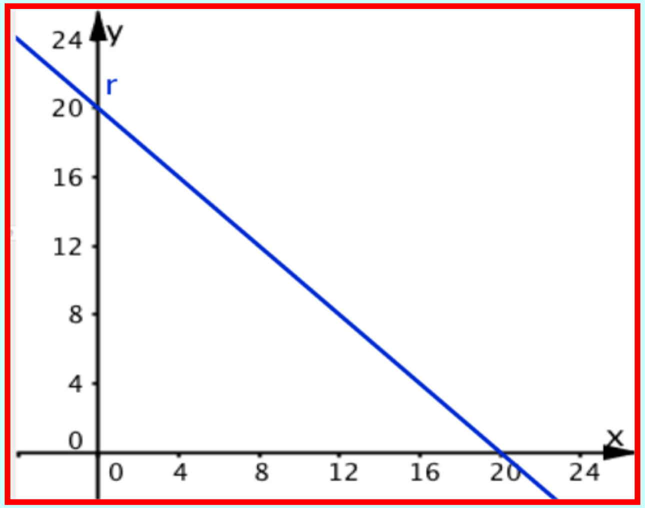
x e y lati di rettangoli con semiperimetro 20



Dominio $\boldsymbol{D}$: intervallo [0; 20]
Codominio $\boldsymbol{C}$: intervallo [0; 20]
Legge: $y = -x + 20$

Sono due funzioni diverse!

Geometria analitica, analisi e linguaggio delle funzioni



Retta di equazione: $y = -x + 20$

> Les fonctions simples que produisent les opérations de l'Algèbre et de la Trigonométrie [*voir* l'*Analyse algébrique*, Chapitre I (¹)] peuvent être réduites aux suivantes
>
> $$a+x,\quad a-x,\quad ax,\quad \frac{a}{x},\quad x^a,\quad A^x,\quad Lx,$$
> $$\sin x,\quad \cos x,\quad \mathrm{arc}\sin x,\quad \mathrm{arc}\cos x,$$

Cauchy, 1823

Non si parlava di '*Dominio*' all'epoca di Cartesio: l'equazione di una retta era data solo con una formula.
E anche Cauchy descriveva le funzioni dell'analisi matematica solo con una formula.

Come accordare i tanti risultati di geometria analitica e analisi matematica con il più recente concetto di funzione?

Un'idea, … tante parole

Una funzione data solo con una formula, ha 'Dominio e codominio sottintesi':

- **il dominio è l'insieme di tutti i numeri reali che, sostituiti ad x nella formula, producono un numero reale y;**
- **il codominio è l'insieme dei numeri reali.**

Per indicare il 'dominio sottinteso' si trovano nei testi vari vocaboli:

- ***campo di esistenza* della formula;**
- ***insieme di definizione* della funzione;**
- ***dominio naturale* della funzione; …**

E' anche molto diffuso il più semplice nome 'dominio', che trovate in queste lezioni.

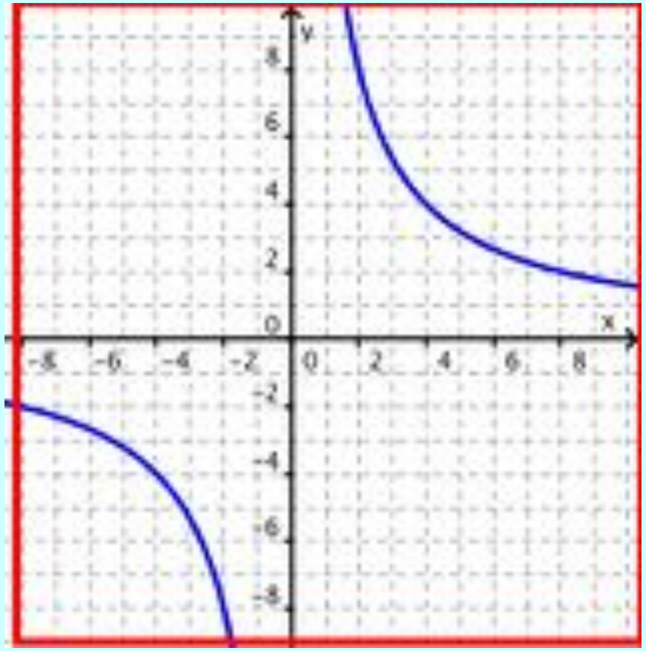
Esempi

Funzione data solo con la formula:

$$y = \frac{16}{x}$$

Non si può dividere per 0

Dominio: **insieme** $\boldsymbol{R_0}$ **dei numeri reali diversi da 0.**

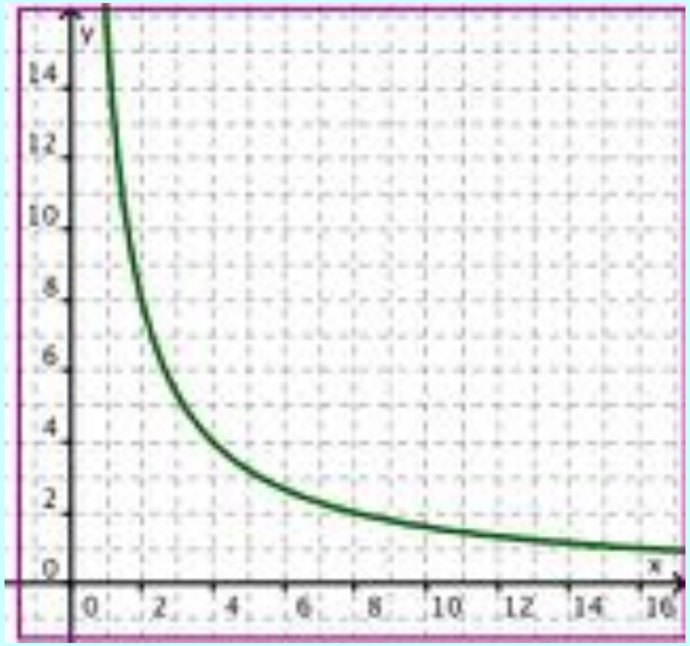


Funzione data con dominio, codominio e legge

Dominio: **insieme R_0^+ dei numeri reali positivi**

Codominio: **l'insieme R_0^+**

Legge: $y = \frac{16}{x}$



Esempi

Funzione data solo con la formula:

$$y = \sqrt{x}$$

Non trovo fra i numeri reali la radice quadrata di numeri negativi

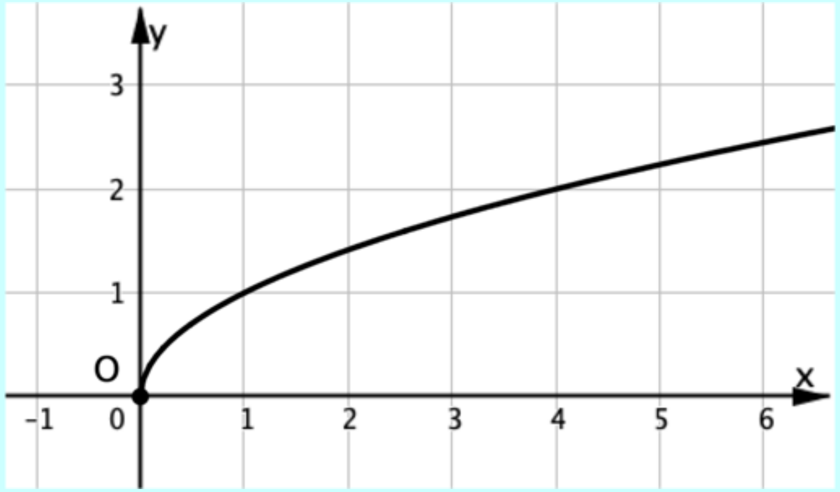
Dominio: **insieme *R*$^+$ dei numeri reali non negativi.**

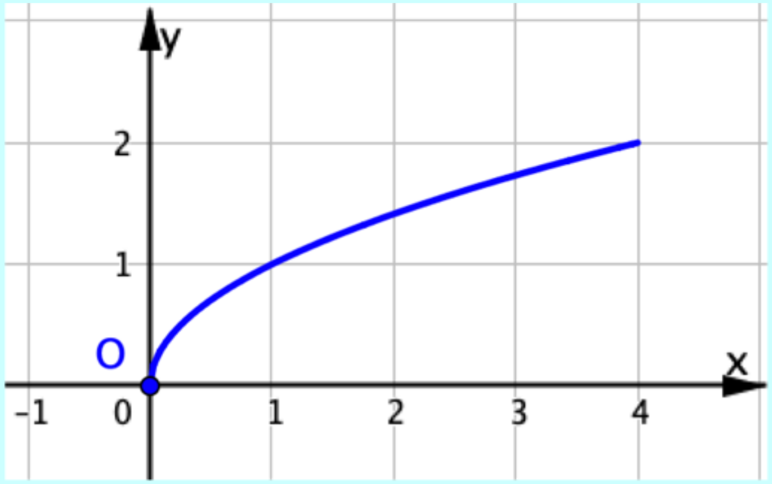
Funzione data con dominio, codominio e legge

Dominio: **l'intervallo [0, 4]**

Codominio: **l'intervallo [0, 2]**

Legge: $y = \sqrt{x}$





Determinare il dominio di una funzione data solo con una formula

Esamino due casi:

A. La funzione è algebrica.

La formula opera su *x* solo con le *operazioni algebriche* e cioè: addizione e sottrazione, moltiplicazione e divisione, elevazione a potenza ed estrazione di radice.

B. La funzione è trascendente.

La formula è composta anche con esponenziale, logaritmo e funzioni goniometriche.

A. Determinare il dominio di una funzione data solo con una formula algebrica

Basta applicare due regole richiamate negli esempi:

1. **Per tutte le funzioni del tipo $y = \frac{N}{D}$**
   debbo escludere dal dominio tutti i numeri reali per cui risulta D = 0.
   Questo conduce a risolvere equazioni.
2. **Per tutte le funzioni del tipo $y = \sqrt{N}$**
   il dominio è formato da tutti i numeri reali per cui risulta N ≥ 0.
   Questo conduce a risolvere disequazioni.

B. Determinare il dominio di una funzione composta anche con funzioni trascendenti

Bisogna aggiungere anche:

3. **Per tutte le funzioni del tipo $y = ln(N)$**
   il dominio è formato da tutti i i numeri reali per cui risulta N > 0.
4. **Per tutte le funzioni del tipo $y = tan(N)$ bisogna escludere dal dominio i numeri $\frac{\pi}{2} + k\,\pi$ (k intero)**
5. **Per tutte le funzioni del tipo $y = arcsen(N)$**
   il dominio è formato da tutti i numeri reali per cui risulta -1 ≤ N ≤ 1.