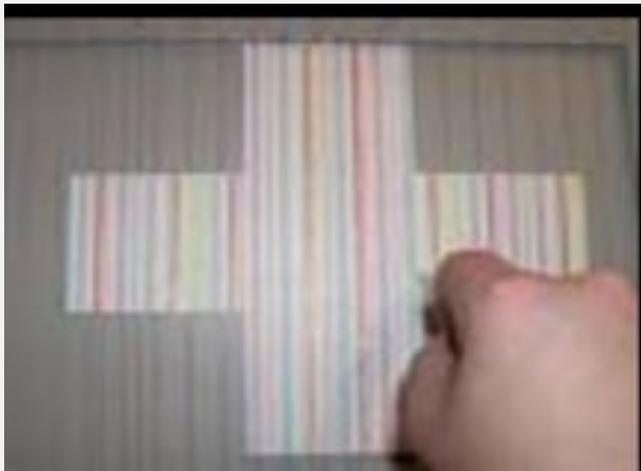


Problemi di ottimizzazione 1

Costruire una scatola

Per costruire una scatola uso un cartoncino quadrato. Ritaglio ai quattro vertici quattro quadratini uguali e ripiego le strisce ottenute.

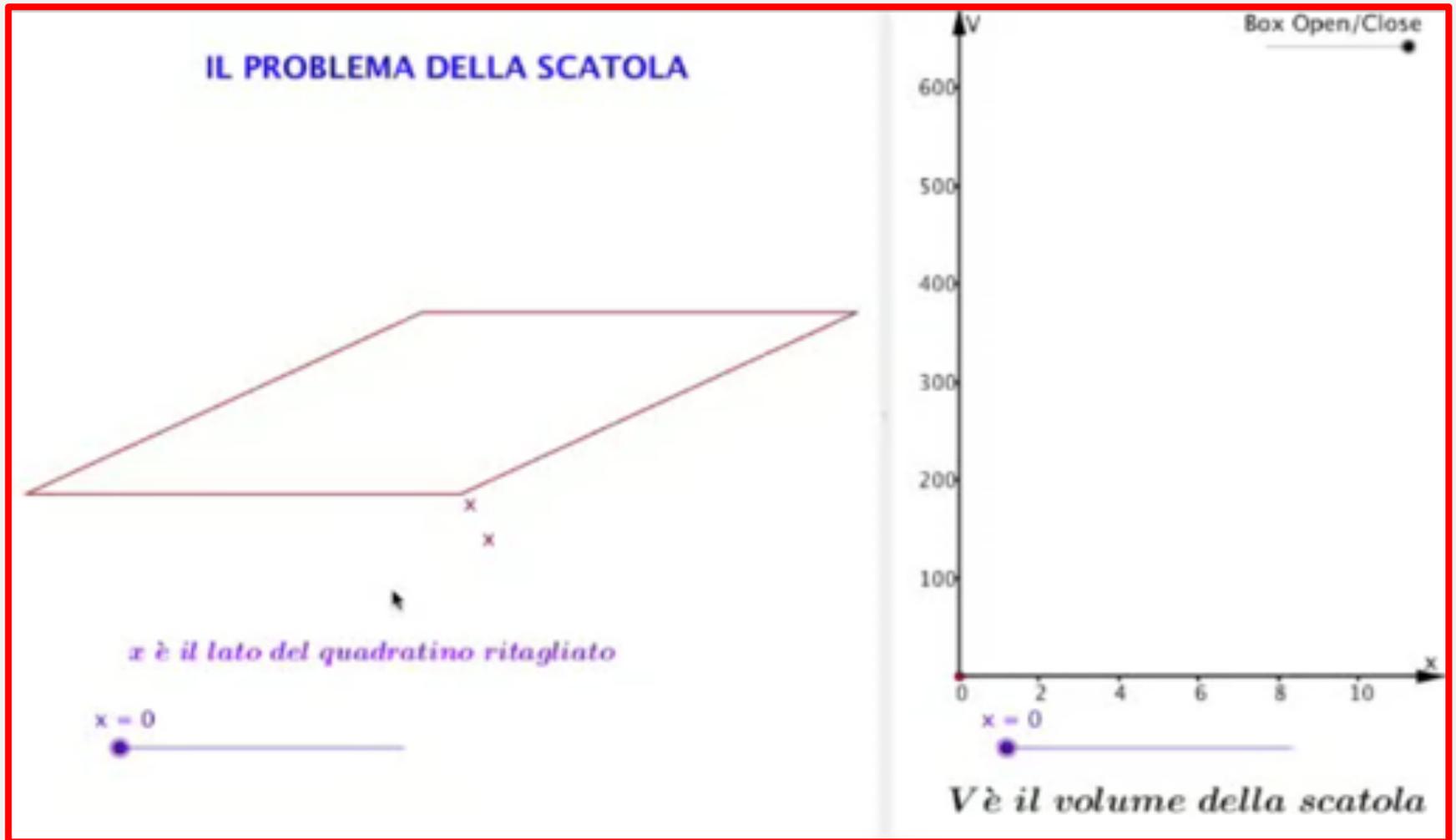


Il volume delle scatole

Per una produzione più ampia uso tanti cartoncini uguali, ma vario il lato del quadratino ritagliato. Varia il volume delle scatole?



‘Vedere’ il volume delle scatole

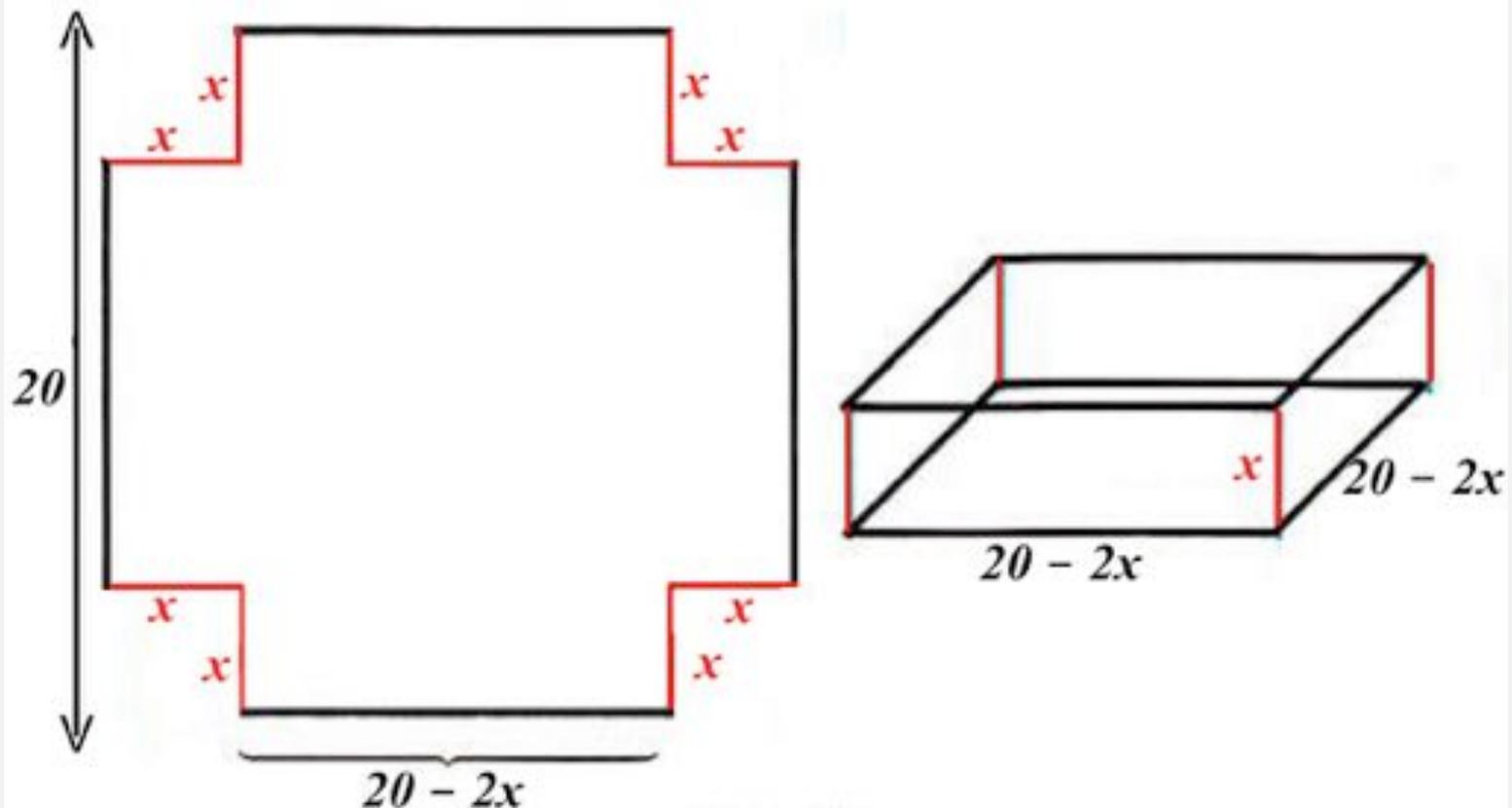


Video 1

**Come posso trovare la scatola
con volume massimo?**

Esprimo il volume y in funzione di x

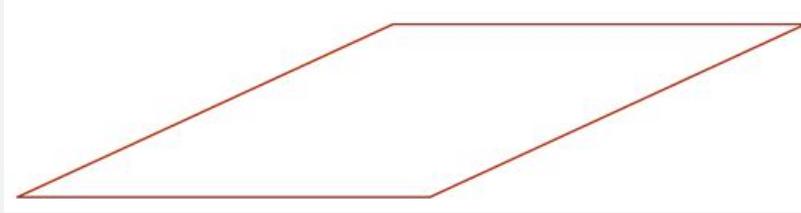
I fogli quadrati di cartoncino hanno il lato lungo 20cm



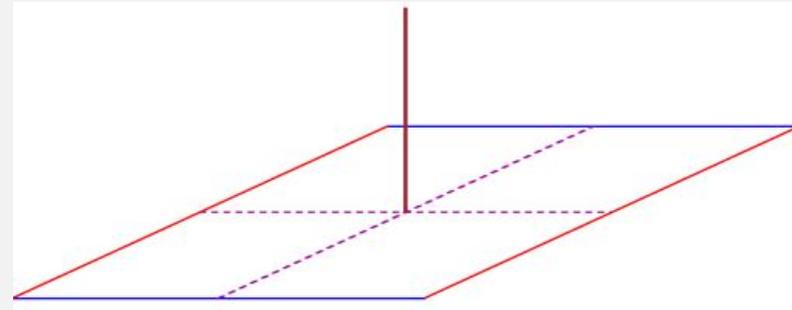
$$y = x(20 - 2x)^2$$

Casi limite e dominio della funzione

Casi limite



la scatola si schiaccia
sul quadrato di lato 20



la scatola diventa
'un filo' lungo 10

In entrambi i casi il volume y vale zero.

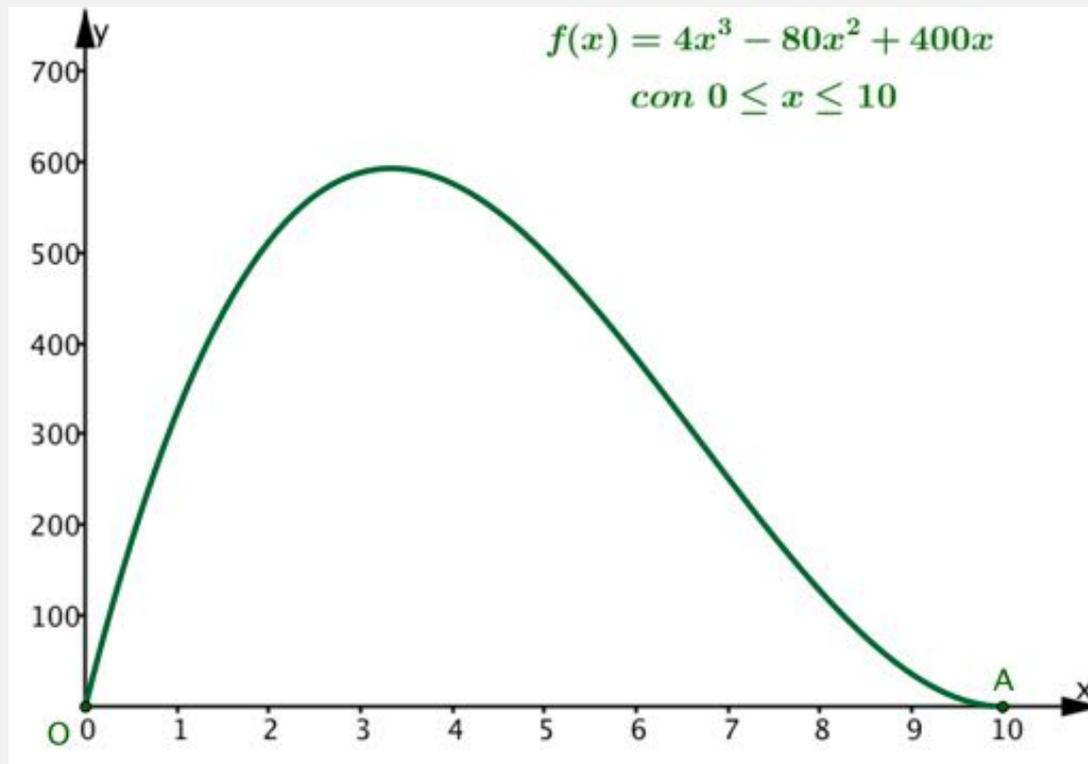
Dominio della funzione

Ottengo una scatola che ha volume $y \geq 0$ solo se scelgo x compresa fra 0 e 10, perciò il dominio della funzione è:

l'intervallo $[0, 10]$

Osservo il grafico della funzione

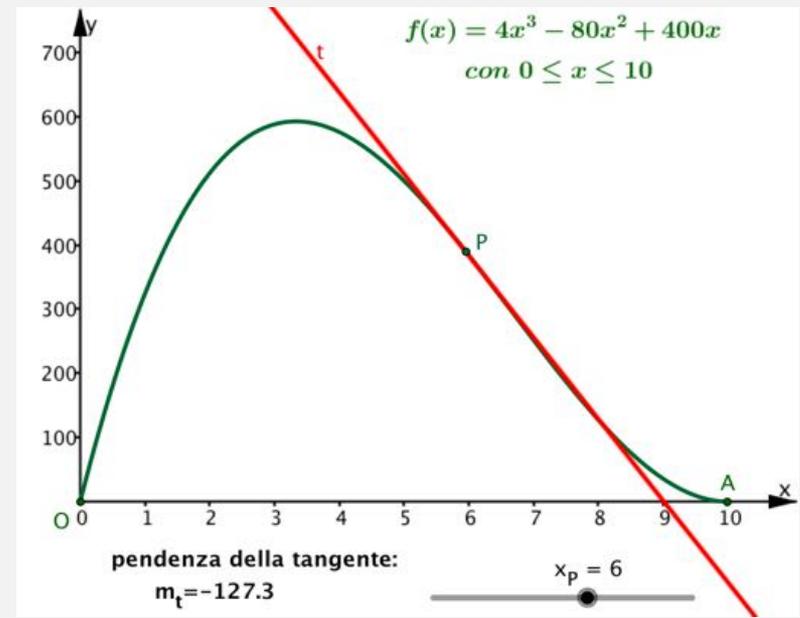
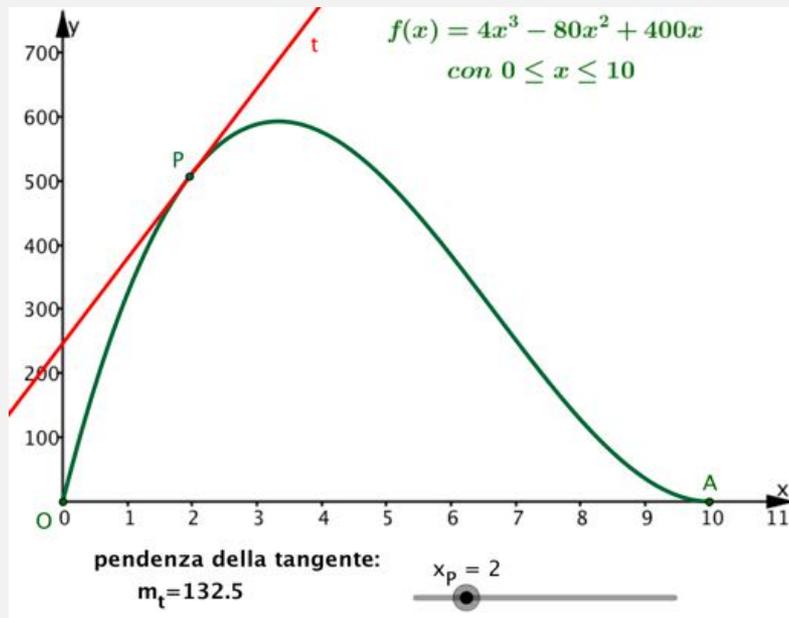
Il video ha mostrato il grafico di questa funzione



È un arco di curva che inizia in $O(0, 0)$, poi sale fino a un'ordinata massima vicina a 600 e quindi riscende fino ad $A(10, 0)$.

**Come trovo il punto con
ordinata massima?**

Osservo il grafico insieme alla retta tangente



Se m_t è positiva, P si trova su un arco crescente

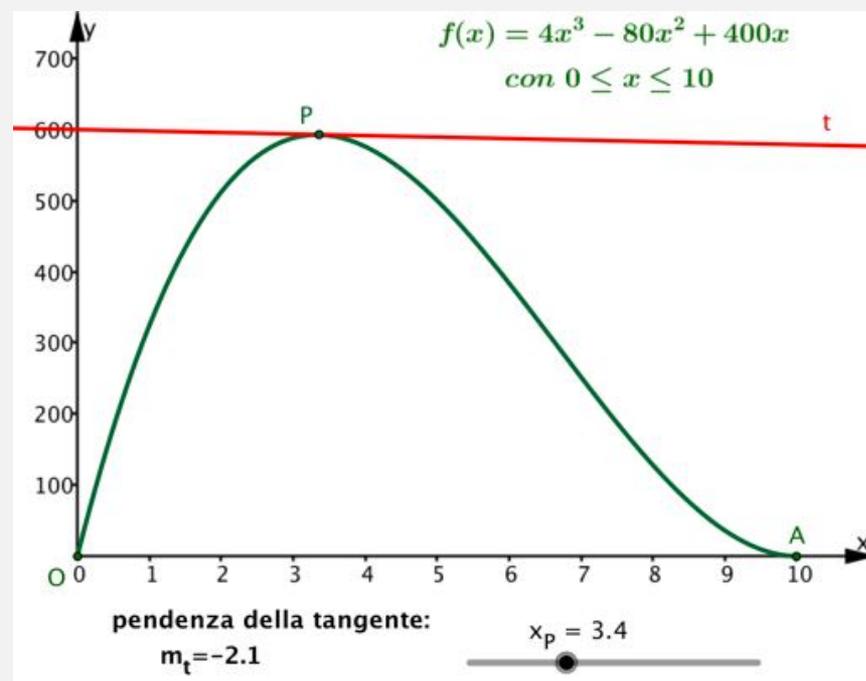
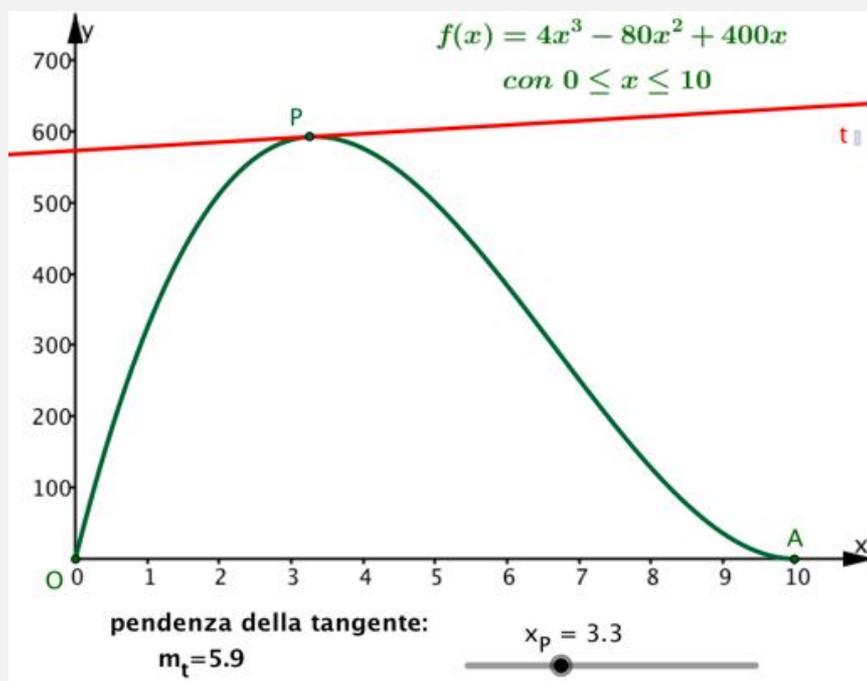
Se m_t è negativa, P si trova su un arco decrescente.

E raggiungo l'ordinata massima nel punto M in cui l'arco passa da crescente a decrescente e quindi m_t passa da positiva a negativa.

Mi aspetto di trovare nel punto M la pendenza $m_t = 0$.

Osservo il grafico insieme alla retta tangente

Ma con il solo il grafico non trovo il punto in cui $m_t = 0$.

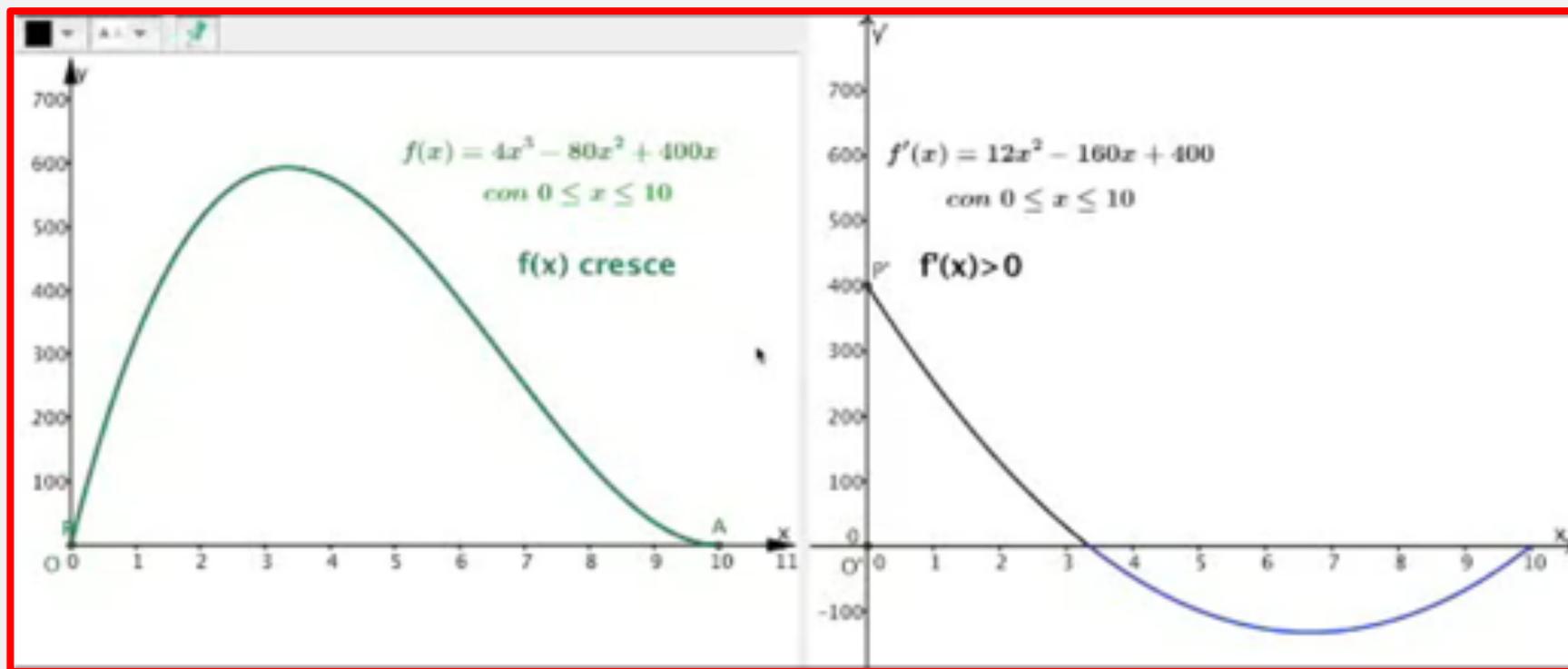


Pendenza della tangente e funzione derivata

Come risolvo il problema?

Esamino la funzione derivata che, per ogni ascissa, mostra la pendenza della tangente al grafico della funzione.

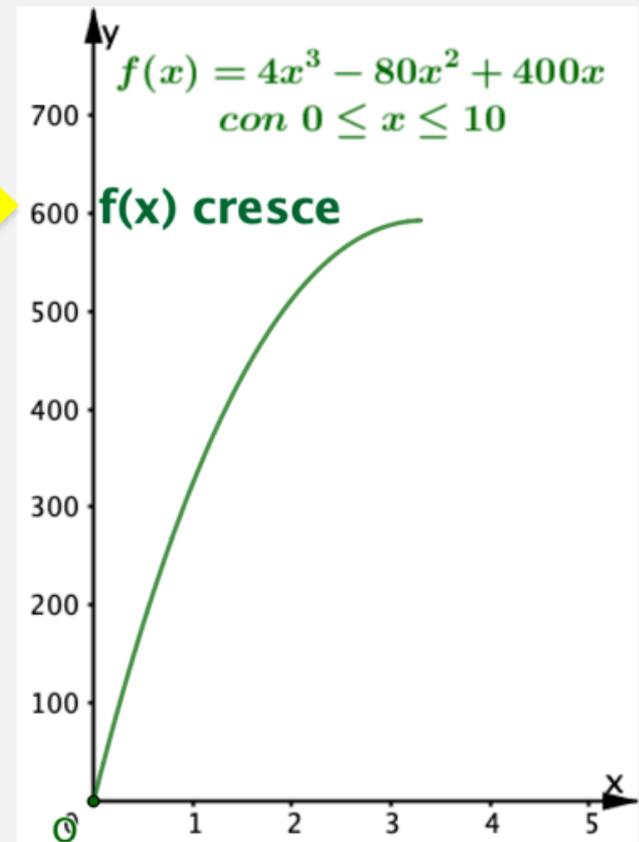
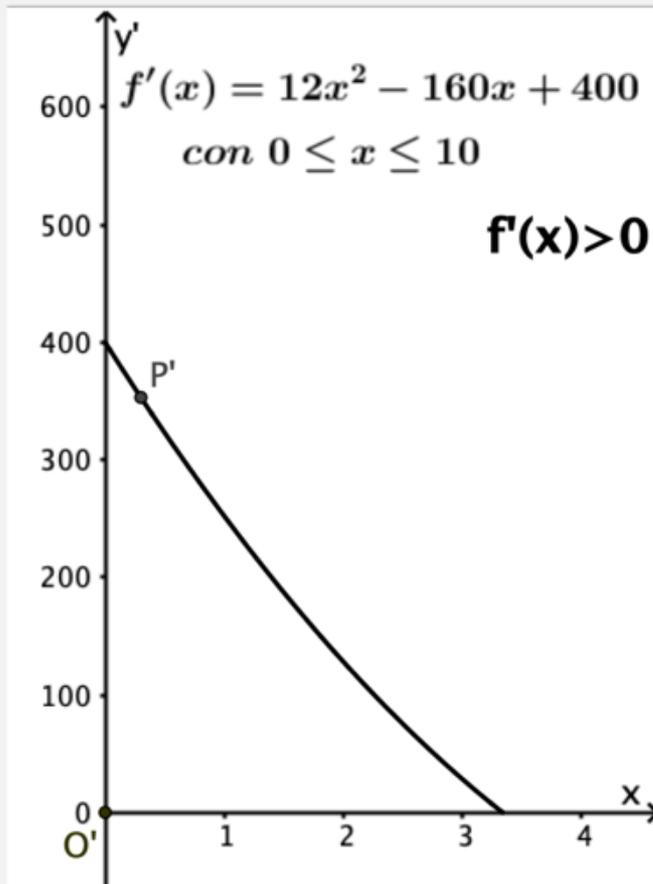
Pendenza della tangente e funzione derivata



Video 2

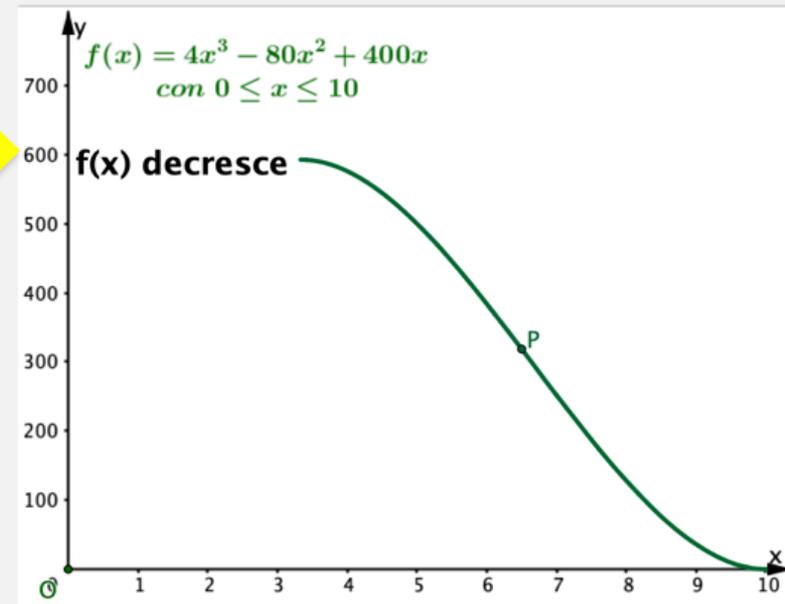
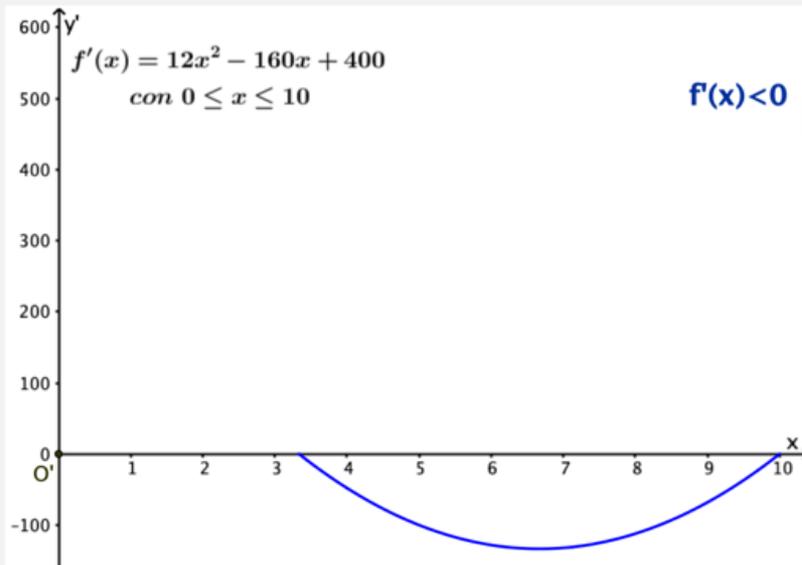
Segno di $f'(x)$ e crescita di $f(x)$

Conclusioni suggerite dal video



Segno di $f'(x)$ e decrescita di $f(x)$

Conclusioni suggerite dal video



Ecco come trovo x per avere la scatola di volume $f(x)$ massimo

1. Calcolo la derivata della funzione $f(x)$:

$$f'(x) = 12x^2 - 160x + 400 \quad \text{con } 0 \leq x \leq 10$$

2. Calcolo la x che rende zero la derivata, cioè risolvo l'equazione:

$$12x^2 - 160x + 400 = 0 \quad \text{con } 0 \leq x \leq 10$$

Per facilitare i calcoli osservo che risulta:

$$12x^2 - 160x + 400 = 4(3x^2 - 40x + 100)$$

Perciò basta risolvere l'equazione di 2° grado:

$$3x^2 - 40x + 100 = 0$$

Le soluzioni dell'equazione di 2^o grado

Risolvo l'equazione

$$3x^2 - 40x + 100 = 0$$

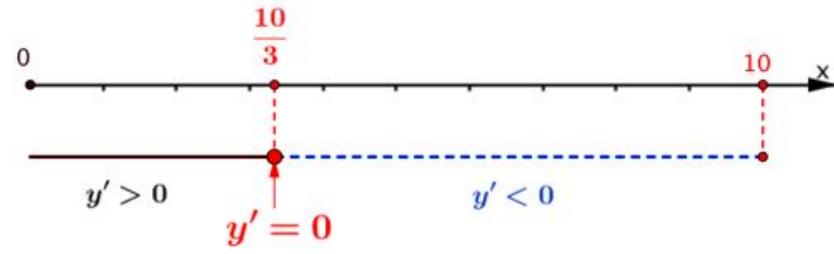
$$\Delta = 40^2 - 4 \cdot 3 \cdot 100 = 400$$

$$x = \frac{40 \pm \sqrt{400}}{6} = \begin{cases} \frac{40 - 20}{6} = \frac{20}{6} = \frac{10}{3} \\ \frac{40 + 20}{6} = \frac{60}{6} = 10 \end{cases}$$

Ed ecco come completo la ricerca del volume massimo

Segno di $f'(x)$ e grafico di $f(x)$

Segno della derivata



Segno di $f'(x)$

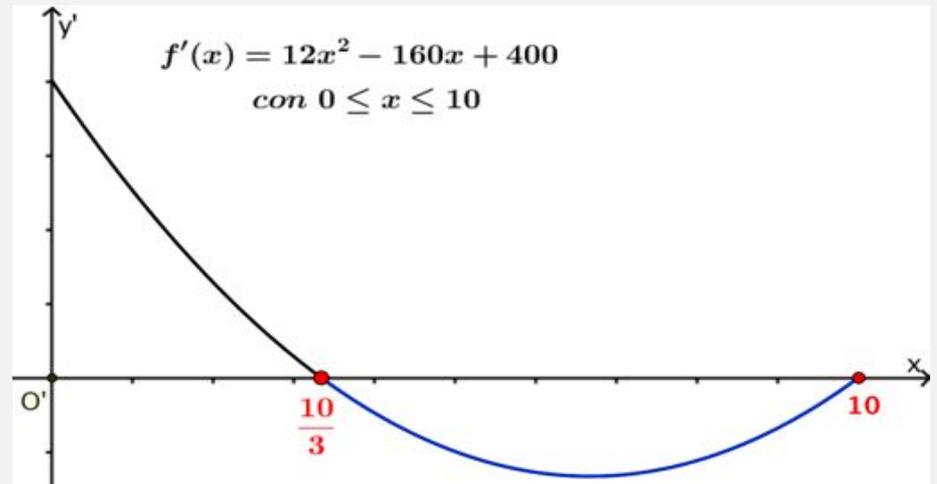
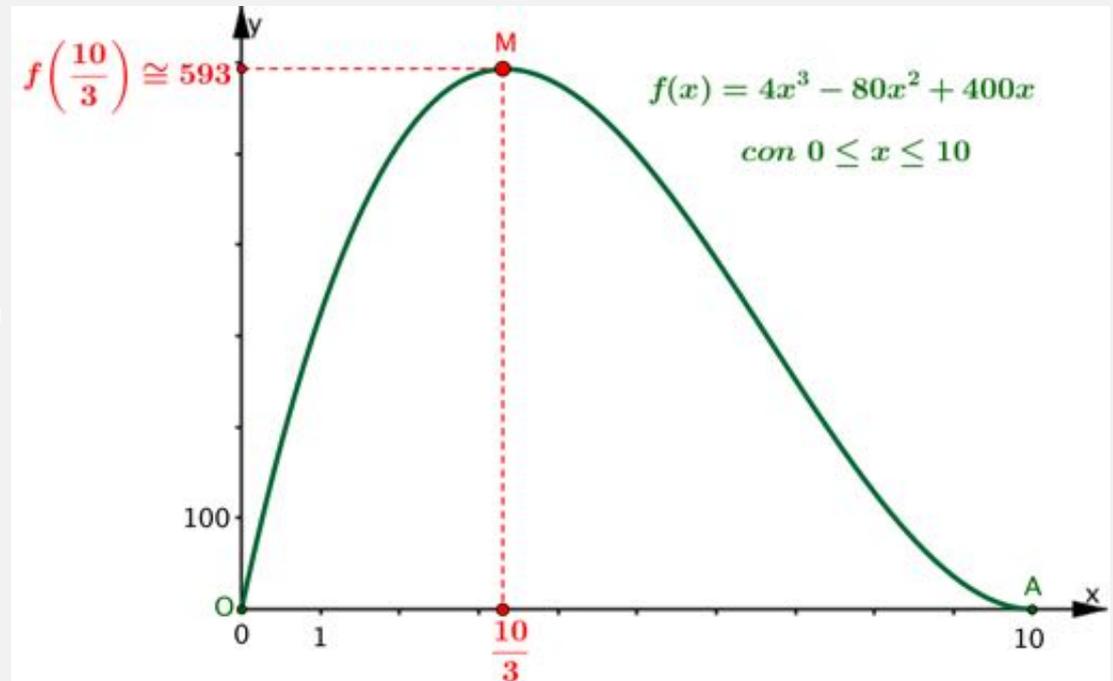
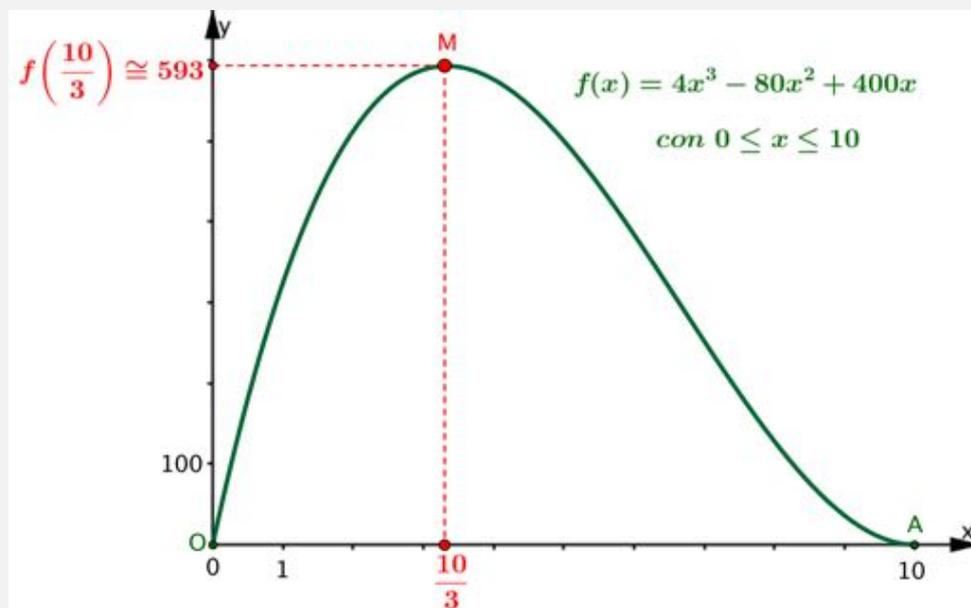
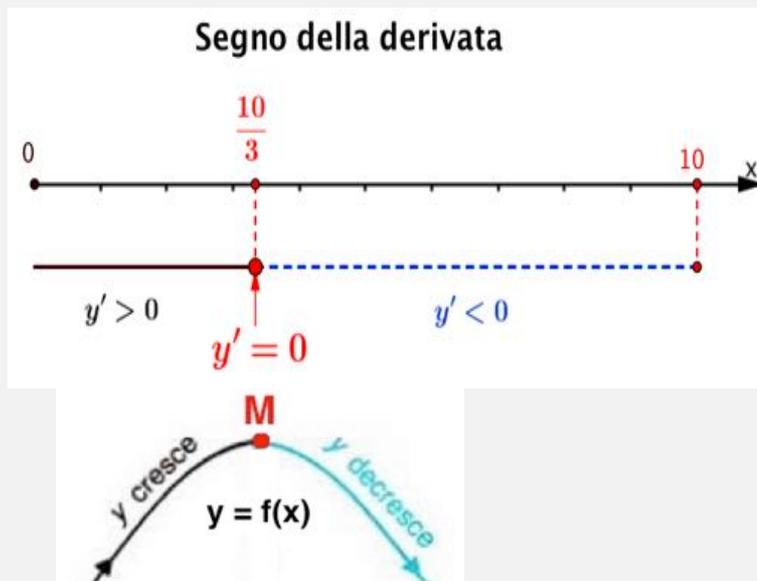


Grafico di $f(x)$



Segno di $f'(x)$ e massimo di $f(x)$



Ho così trovato la x per avere il volume massimo: è $\frac{10}{3}$.
E il volume massimo vale (in cm^3):

$$f\left(\frac{10}{3}\right) \cong 592,6$$

Risolvere un problema di massimo

Per risolvere il ‘problema della scatola’ ho percorso due tappe fondamentali:

- I. Tradurre il problema in una funzione $y = f(x)$ che lega il volume y da massimizzare ad una variabile x .
- II. Determinare il massimo della funzione $y = f(x)$.

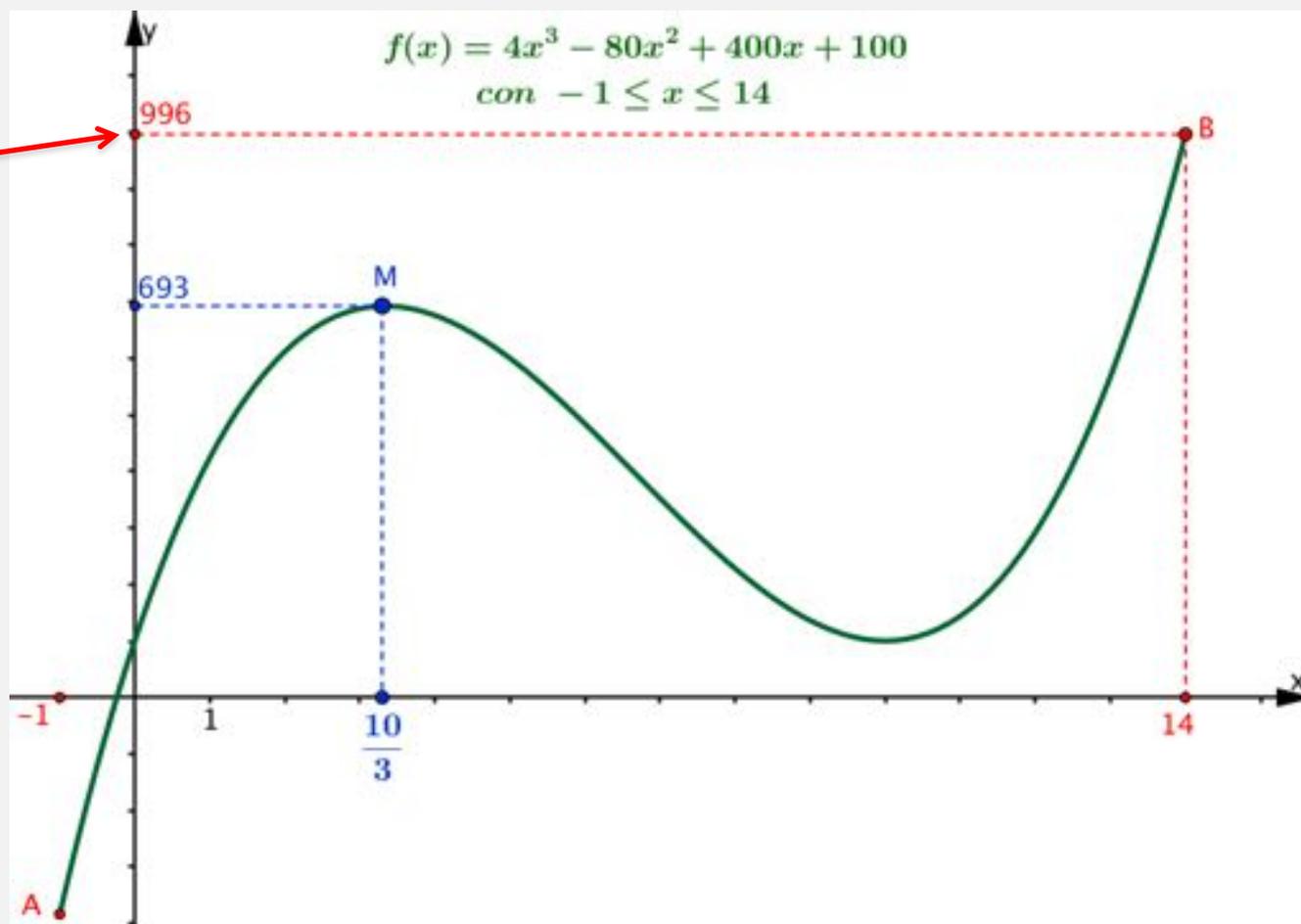
Mi allontano ora dal problema della scatola e rifletto sulla seconda tappa, per trovare un procedimento di carattere generale, a partire dalla seguente funzione:

$$f(x) = 4x^3 - 80x^2 + 400x + 100$$

definita nell'intervallo $[-1, 14]$

Massimo (assoluto) della funzione $y = f(x)$

È il più grande valore che assume y , quando x varia nel dominio dato.



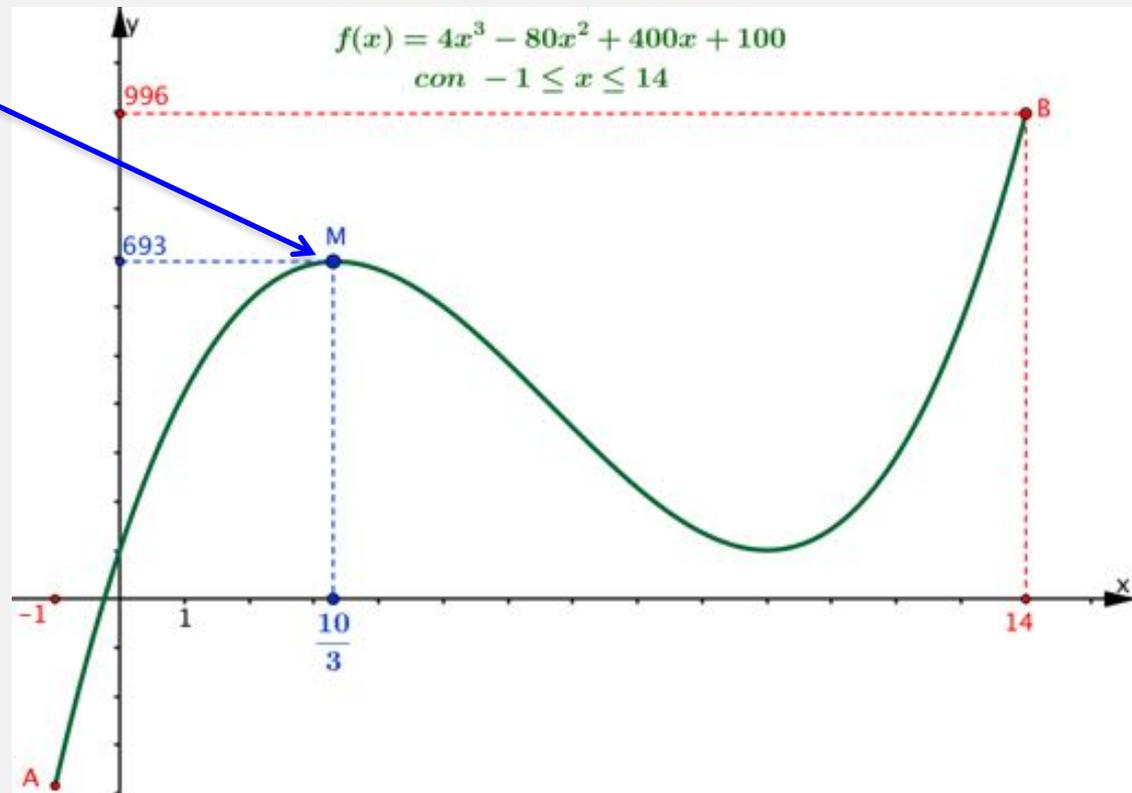
Massimo
(assoluto)

Punto di massimo relativo della funzione $y = f(x)$

È il punto M di ascissa $10/3$, in cui:

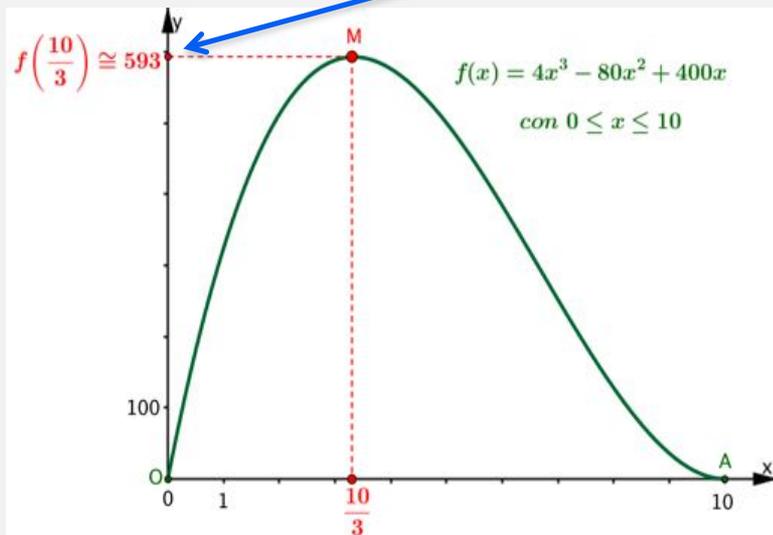
- y ha il valore più grande rispetto ai punti vicini;
- $f'(10/3) = 0$ e il grafico passa da andamento crescente a decrescente

Punto di
massimo relativo

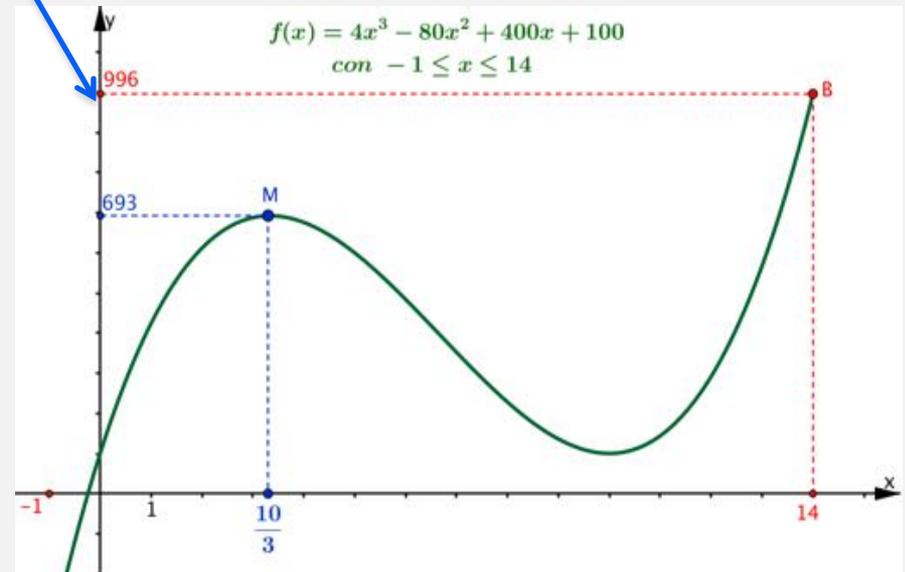


Un confronto per riflettere

Massimo
(assoluto)



Il massimo della funzione è l'ordinata del punto M, che è di massimo relativo



Il massimo della funzione è l'ordinata del punto B, che è uno degli estremi dell'arco dato.

Cambia il dominio della funzione

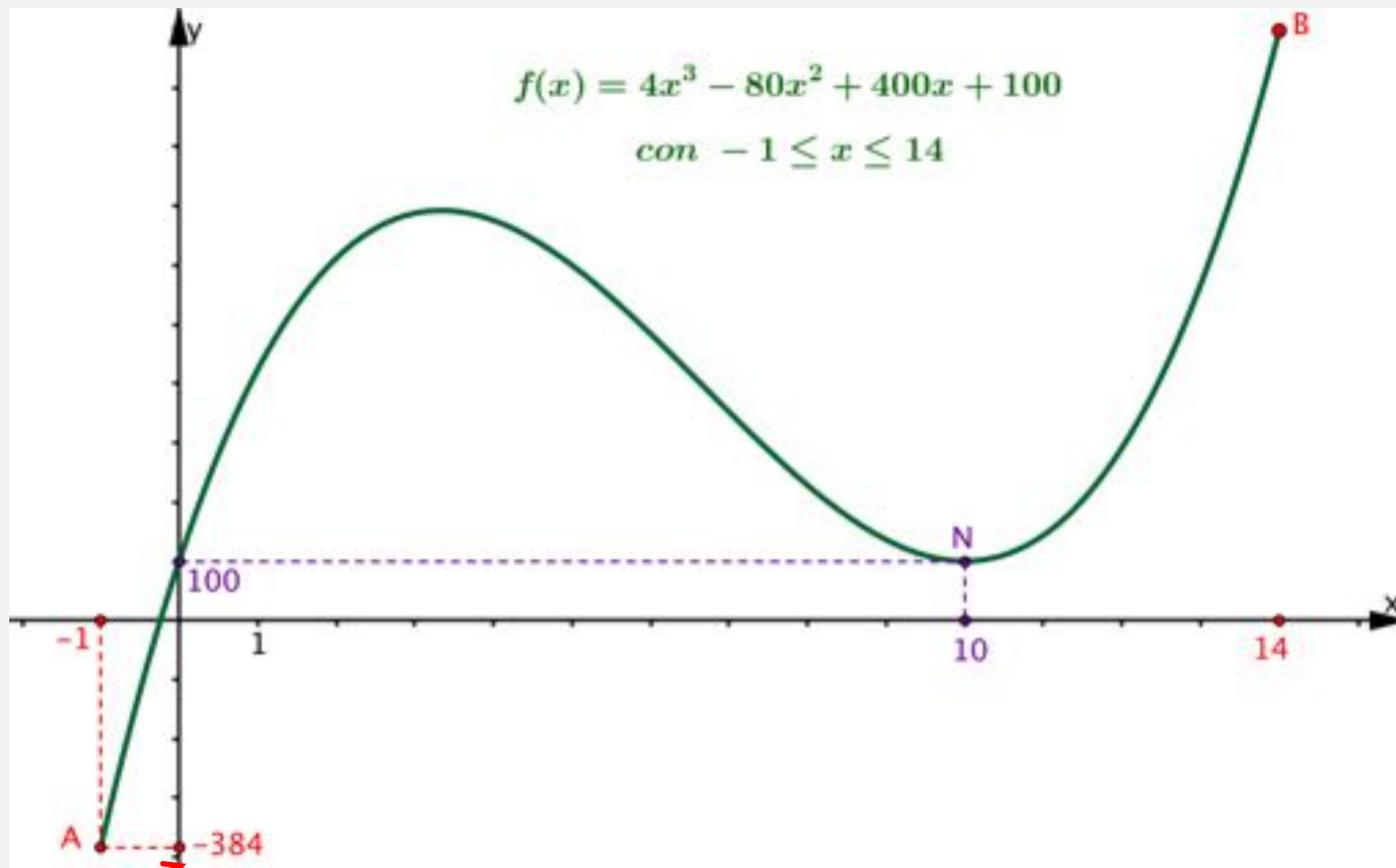
Procedimento per determinare il massimo (assoluto) di una funzione $y = f(x)$, derivabile in un intervallo $[a, b]$

1. Calcolo la derivata $y' = f'(x)$.
2. Studio il segno di $f'(x)$ per individuare i punti di massimo relativo.
3. Calcolo $f(a)$, $f(b)$ e le ordinate dei punti di massimo relativo.
4. L'ordinata più grande è il massimo assoluto richiesto.

**In modo analogo procedo per
determinare il minimo della funzione**

Minimo (assoluto) della funzione $y = f(x)$

È il più piccolo valore che assume y , quando x varia nel dominio dato.

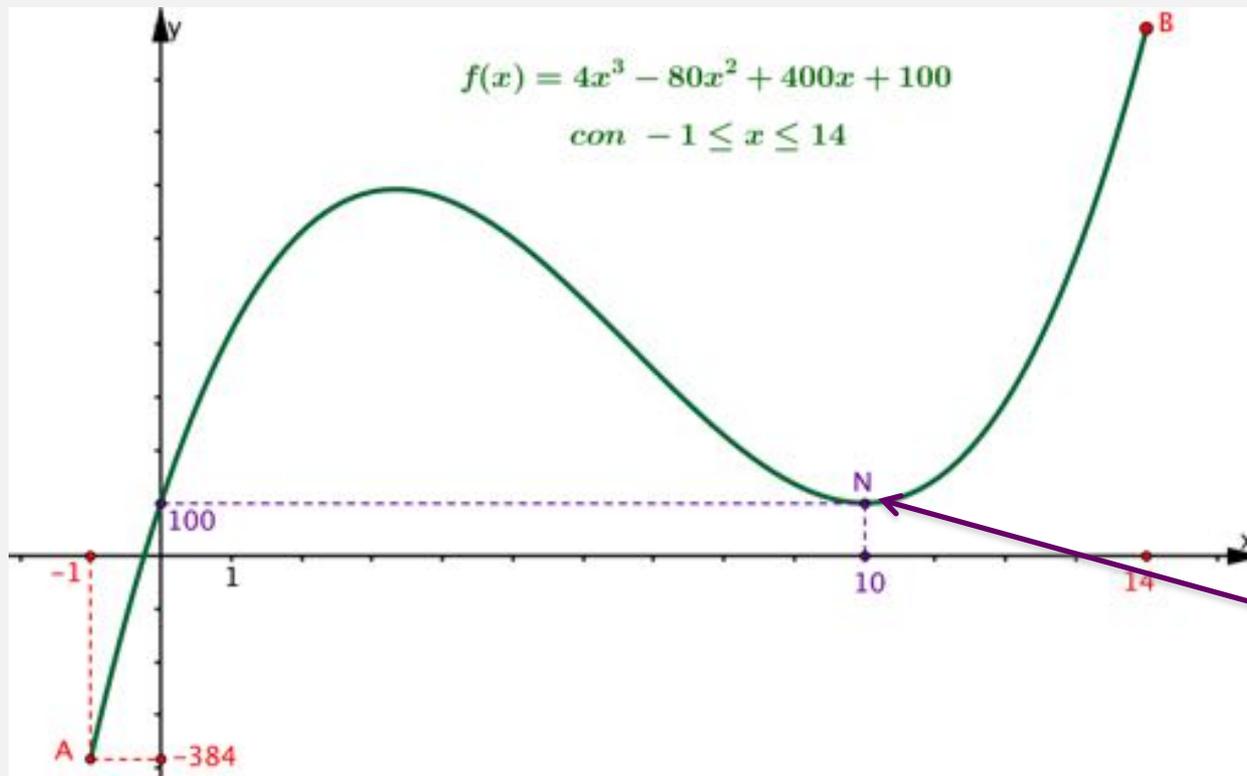


**Minimo
(assoluto)**

Punto di minimo relativo della funzione $y = f(x)$

È il punto N di ascissa 10, in cui:

- y ha il valore più piccolo rispetto ai punti vicini;
- risulta $f'(10) = 0$ e il grafico passa da andamento decrescente a crescente.



Punto di minimo
relativo

Procedimento per determinare il minimo (assoluto) di una funzione $y = f(x)$, derivabile in un intervallo $[a, b]$

1. Calcolo la derivata $y' = f'(x)$.
2. Studio il segno di $f'(x)$ per individuare i punti di minimo relativo.
3. Calcolo $f(a)$, $f(b)$ e le ordinate dei punti di minimo relativo.
4. L'ordinata più piccola è il minimo assoluto richiesto.

Vocabolario matematico

