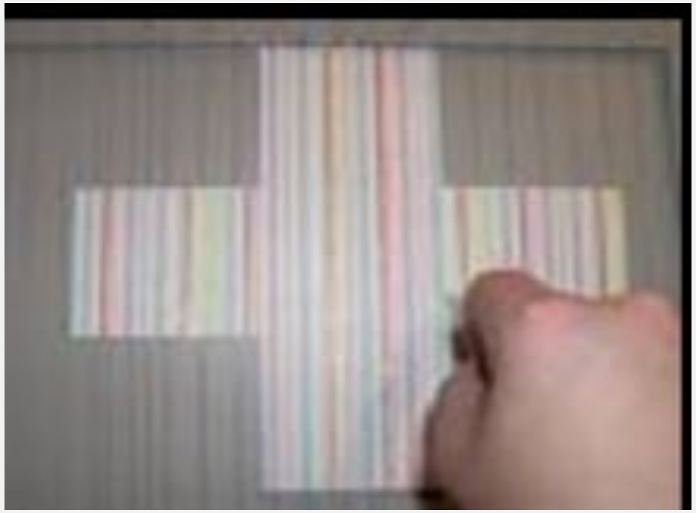
Problemi di ottimizzazione 1

Costruire una scatola

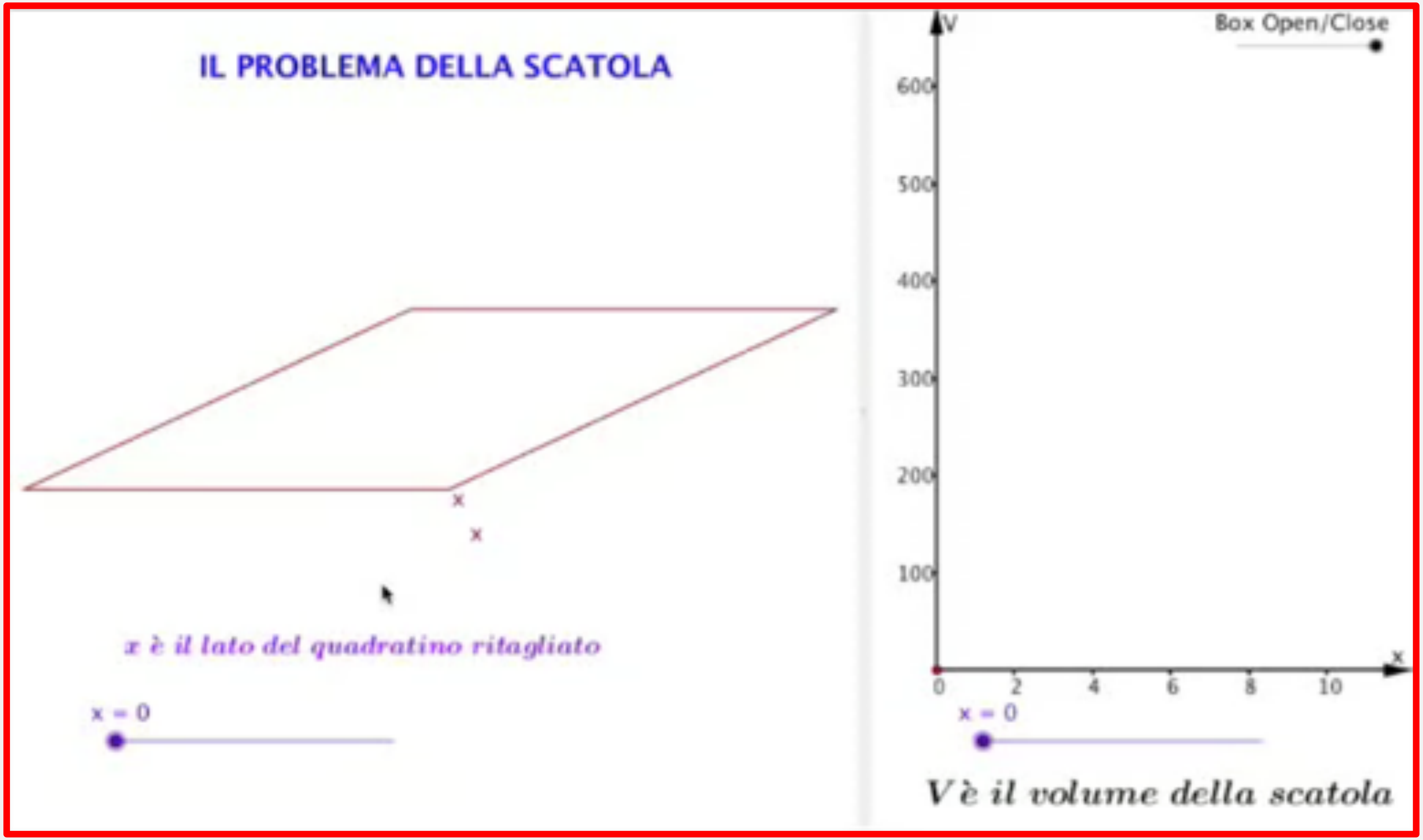
Per costruire una scatola uso un cartoncino quadrato. Ritaglio ai quattro vertici quattro quadratini uguali e ripiego le strisce ottenute.



Il volume delle scatole

Per una produzione più ampia uso tanti cartoncini uguali, ma vario il lato del quadratino ritagliato. Varia il volume delle scatole?

‘Vedere’ il volume delle scatole



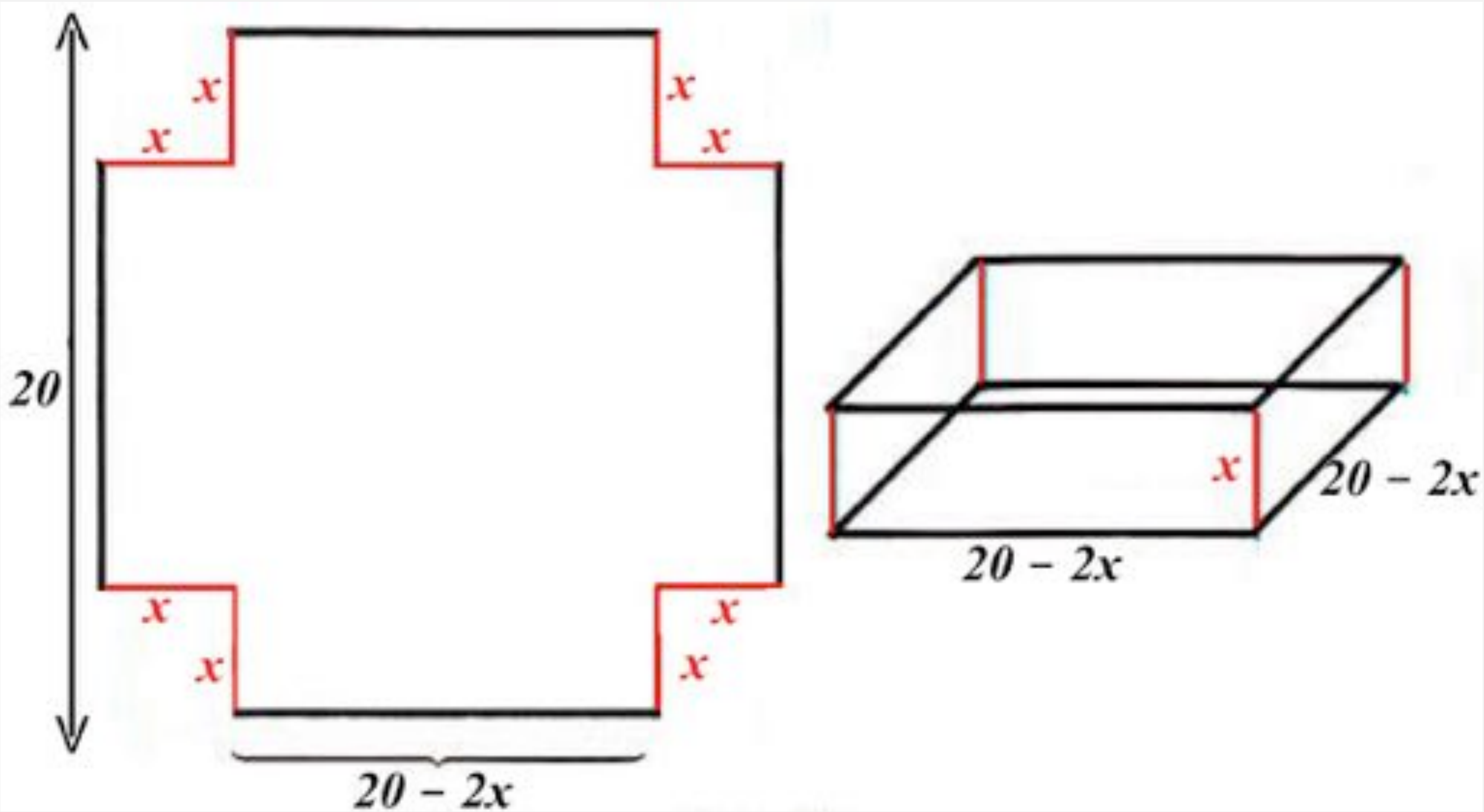
Video 1

Stefano Volpe, 2022

Come posso trovare la scatola con volume massimo?

Esprimo il volume y in funzione di x

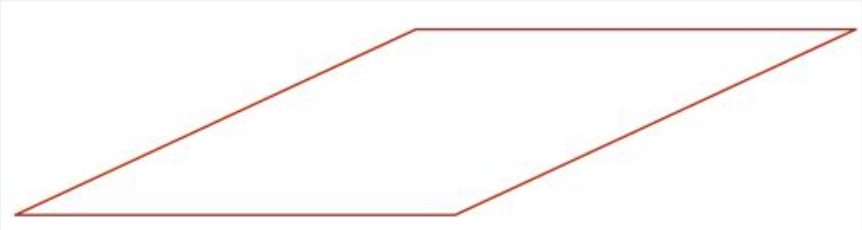
I fogli quadrati di cartoncino hanno il lato lungo 20cm



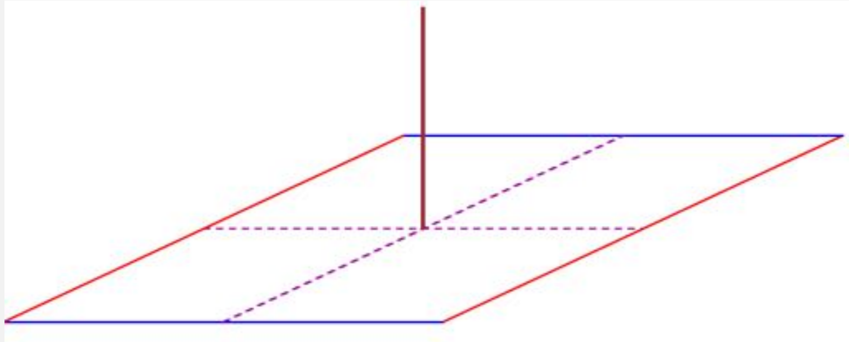
$$y = x(20 - 2x)^2$$

Casi limite e dominio della funzione

Casi limite



la scatola si schiaccia sul quadrato di lato 20



la scatola diventa 'un filo' lungo 10

In entrambi i casi il volume *y* vale zero.

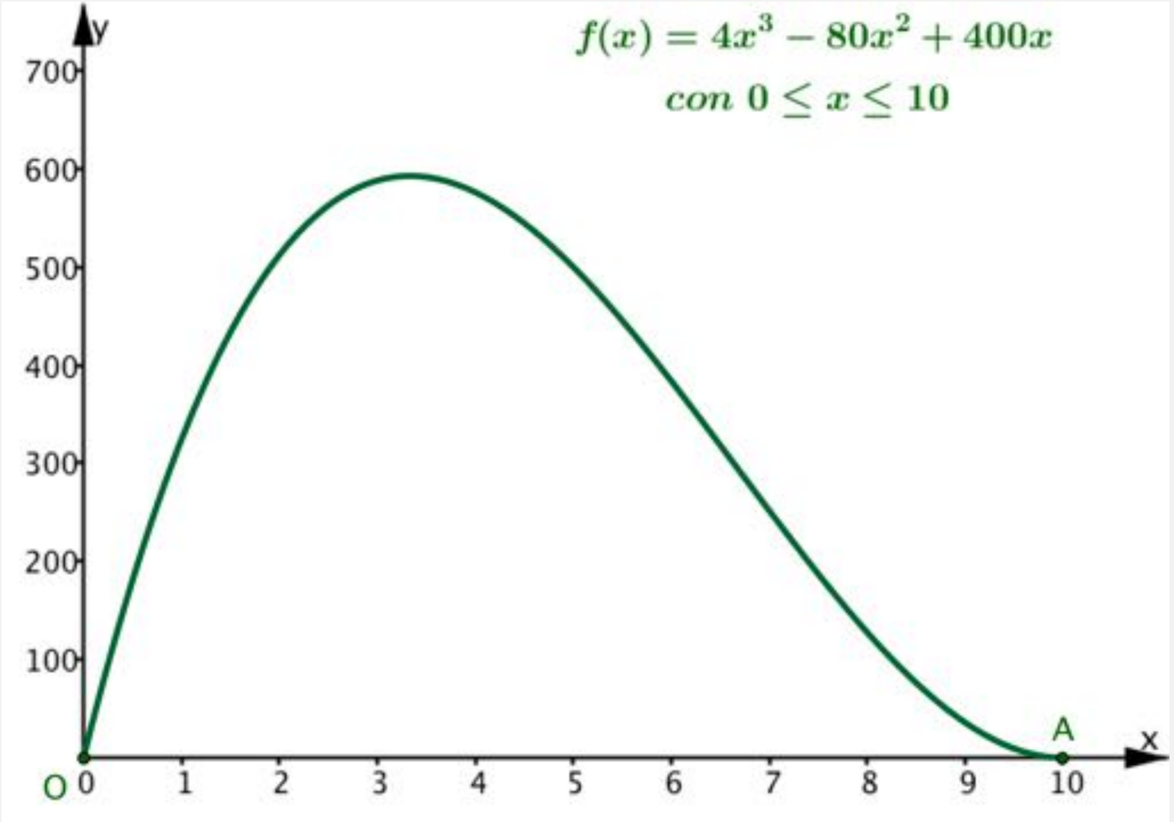
Dominio della funzione

Ottengo una scatola che ha volume $y \geq 0$ solo se scelgo x compresa fra 0 e 10, perciò il dominio della funzione è:

l'intervallo [0, 10]

Riflessioni sul grafico della funzione

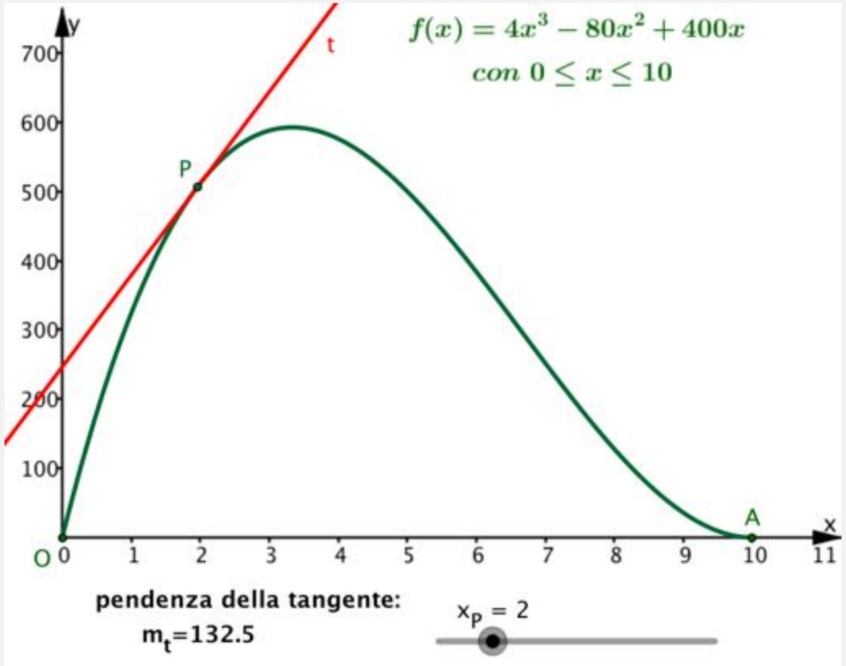
Il video ha mostrato il grafico di questa funzione

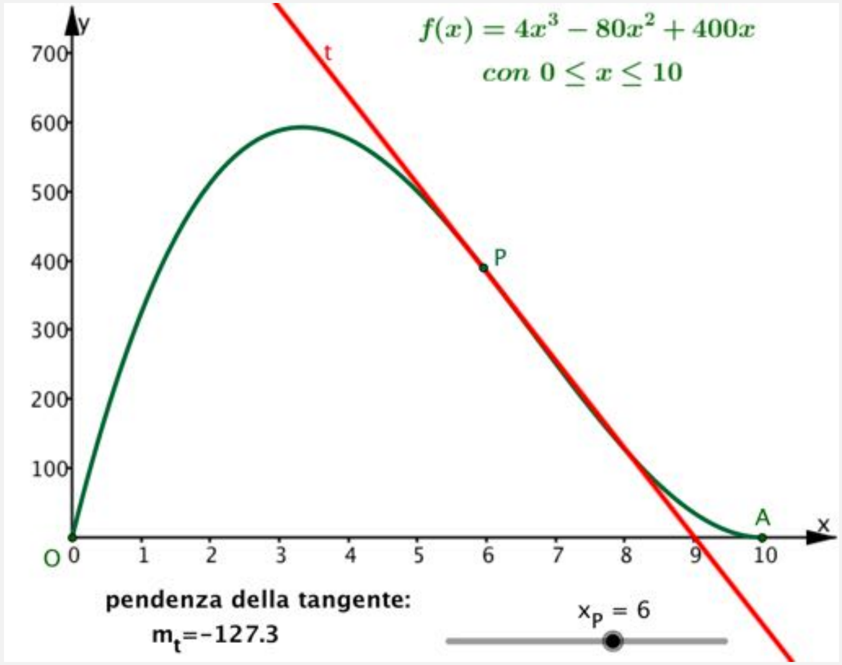


È un arco di curva che inizia in O(0, 0), poi sale fino a un'ordinata massima vicina a 600 e quindi riscende fino ad A(10, 0).

Come trovo il punto con ordinata massima?

Osservo il grafico insieme alla retta tangente





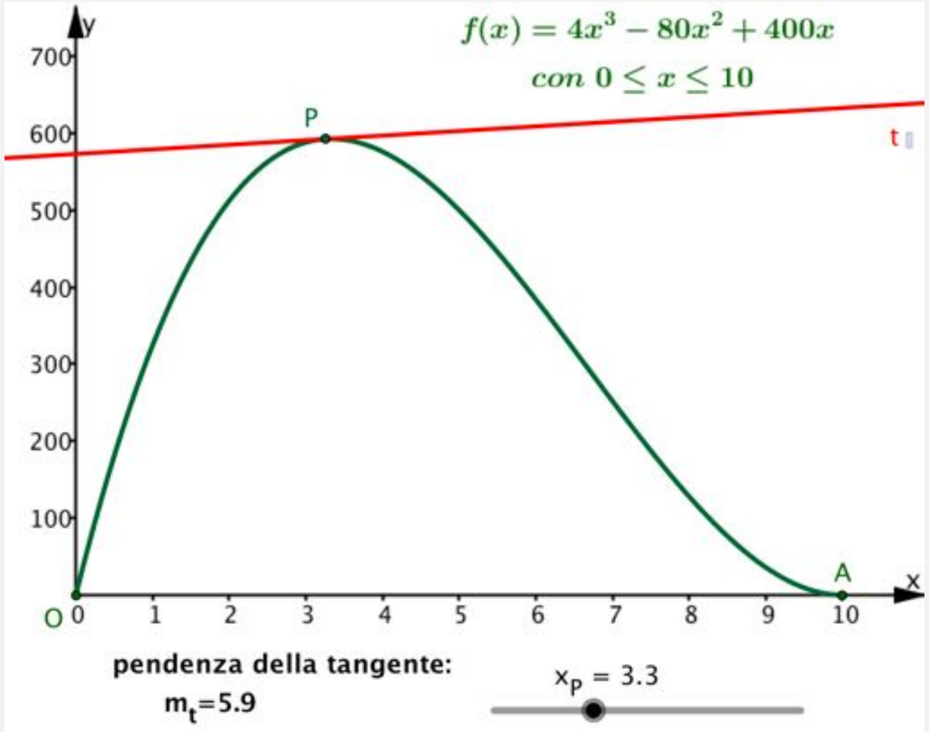
Se m_t è positiva, P si trova su un arco crescente

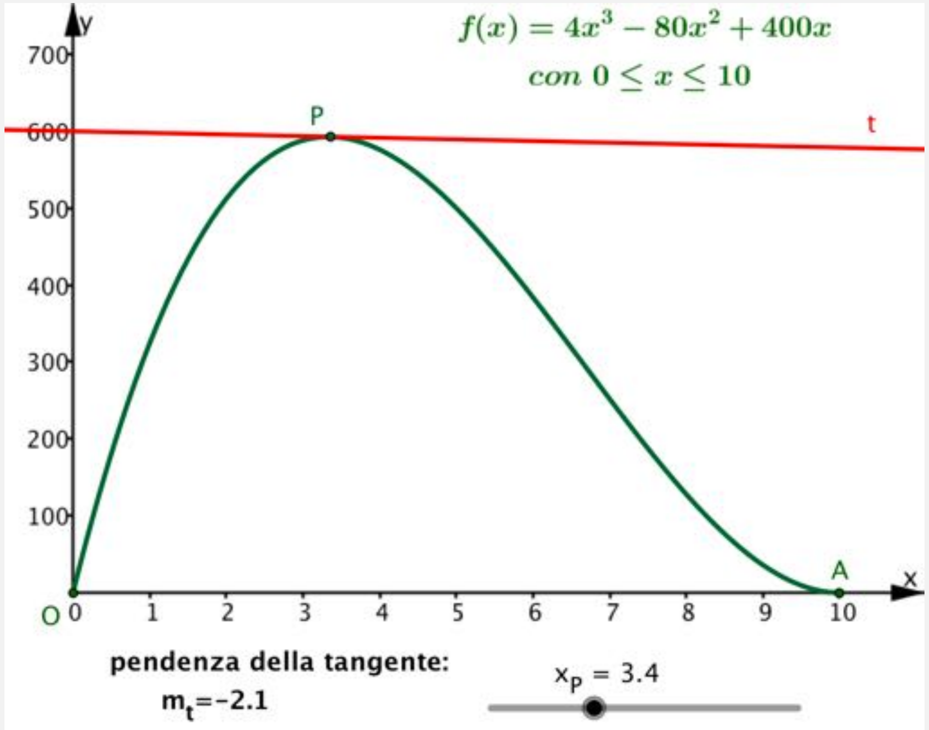
Se m_t è negativa, P si trova su un arco decrescente.

E raggiungo l'ordinata massima nel punto *M* in cui l'arco passa da crescente a decrescente e quindi m_t passa da positiva a negativa.
Mi aspetto di trovare nel punto M la pendenza m_t = 0.

Osservo il grafico insieme alla retta tangente

Ma con il solo il grafico non trovo il punto in cui $m_t = 0$.

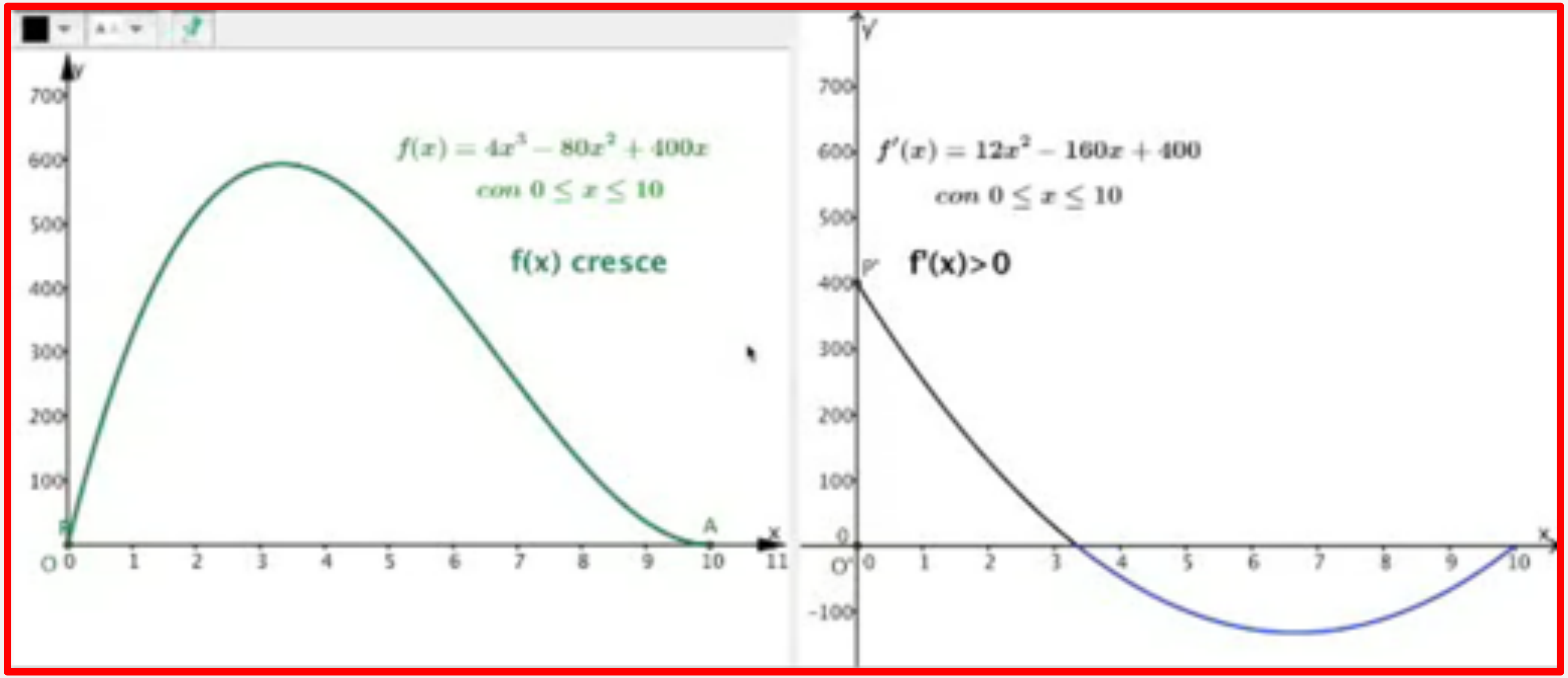




Pendenza della tangente e funzione derivata

Come risolvo il problema?
Esamino la funzione derivata che, per ogni ascissa, mostra la pendenza della tangente al grafico della funzione.

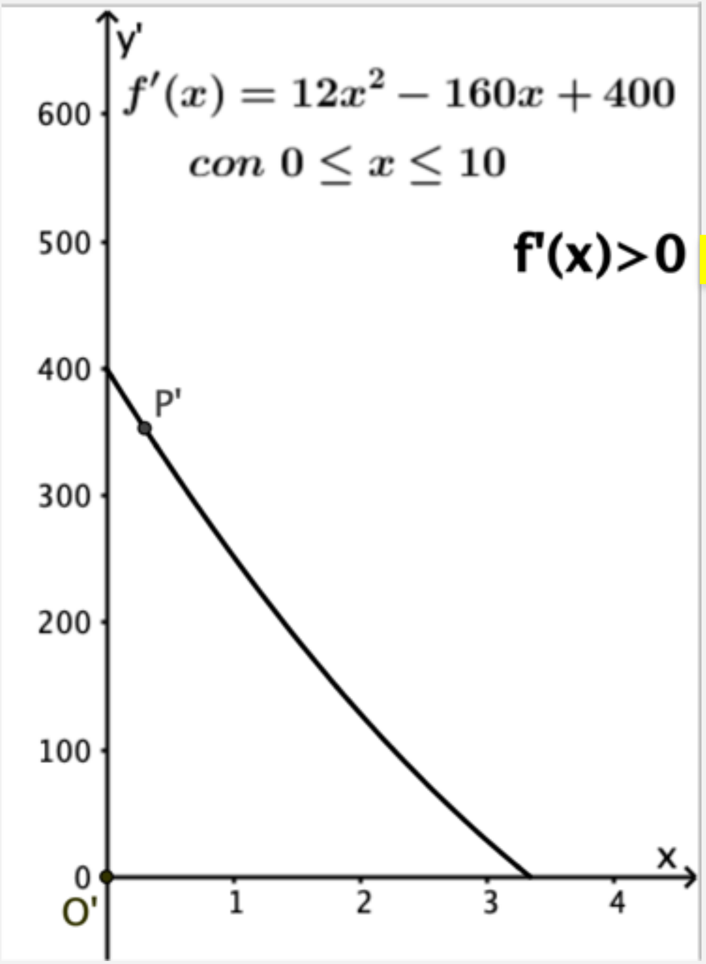
Pendenza della tangente e funzione derivata

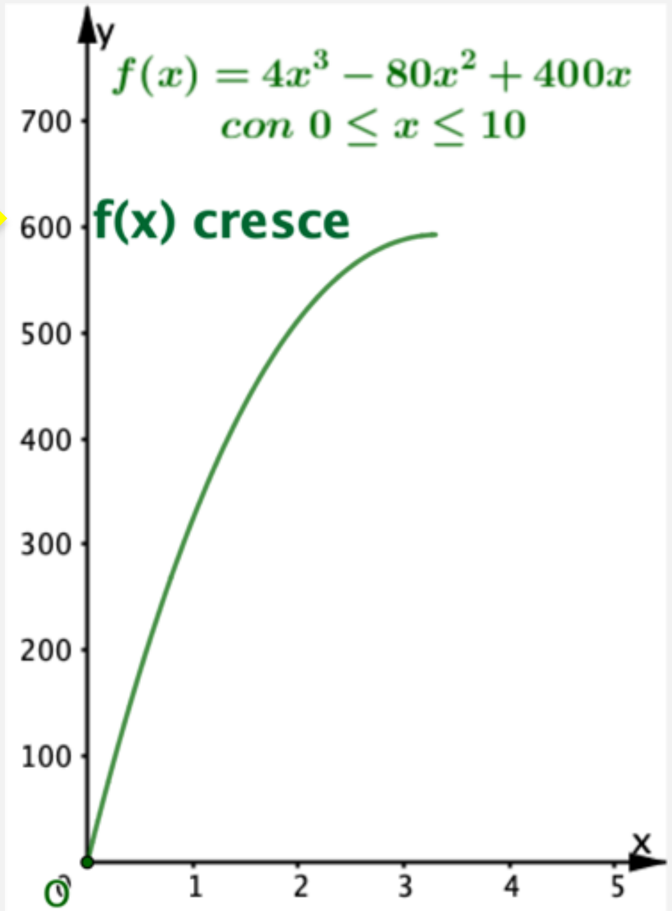


Video 2

Segno di f’(x) e crescita di f(x)

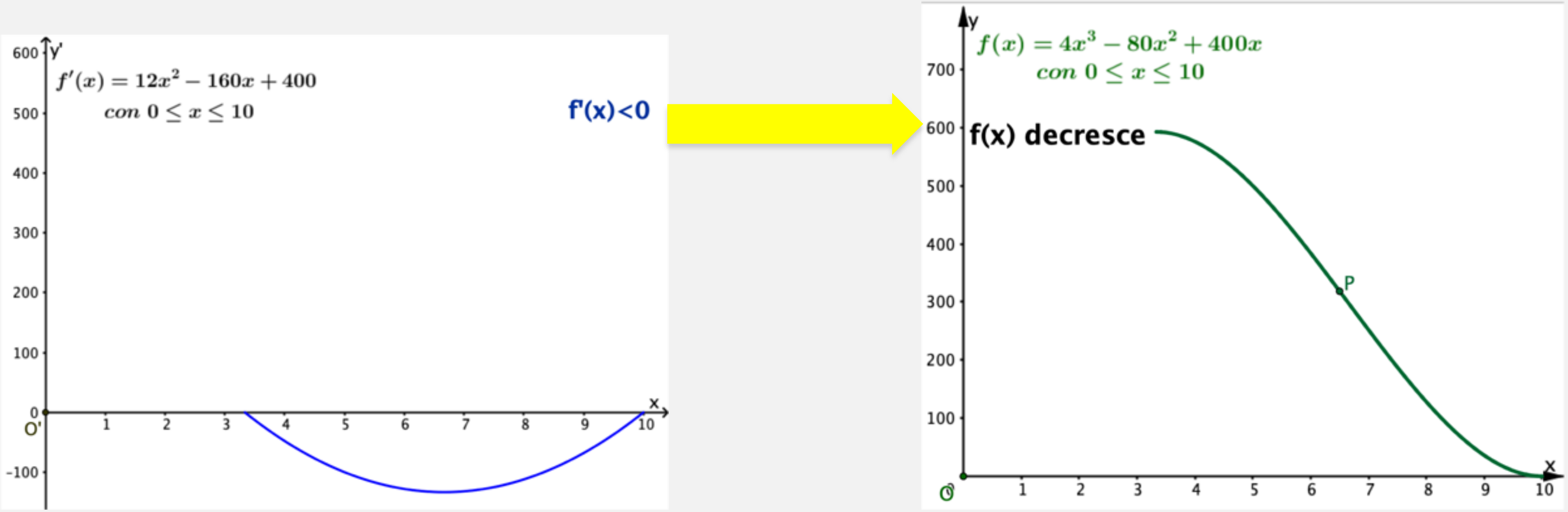
Conclusioni suggerite dal video





Segno di f’(x) e decrescita di f(x)

Conclusioni suggerite dal video



Ecco come trovo x per avere la scatola di volume f(x) massimo

1. **Calcolo la derivata della funzione f(x):**

$$f'(x) = 12x^2 - 160x + 400 \quad \text{con } 0 \leq x \leq 10$$

2. **Calcolo la *x* che rende zero la derivata, cioè risolvo l'equazione**

$$12x^2 - 160x + 400 = 0 \quad \text{con } 0 \leq x \leq 10$$

Per facilitare i calcoli osservo che risulta

$$12x^2 - 160x + 400 = 4(3x^2 - 40x + 100)$$

Perciò basta risolvere l'equazione di 2^0 grado

$$3x^2 - 40x + 100 = 0$$

Le soluzioni dell'equazione di 2° grado

Risolvo l'equazione

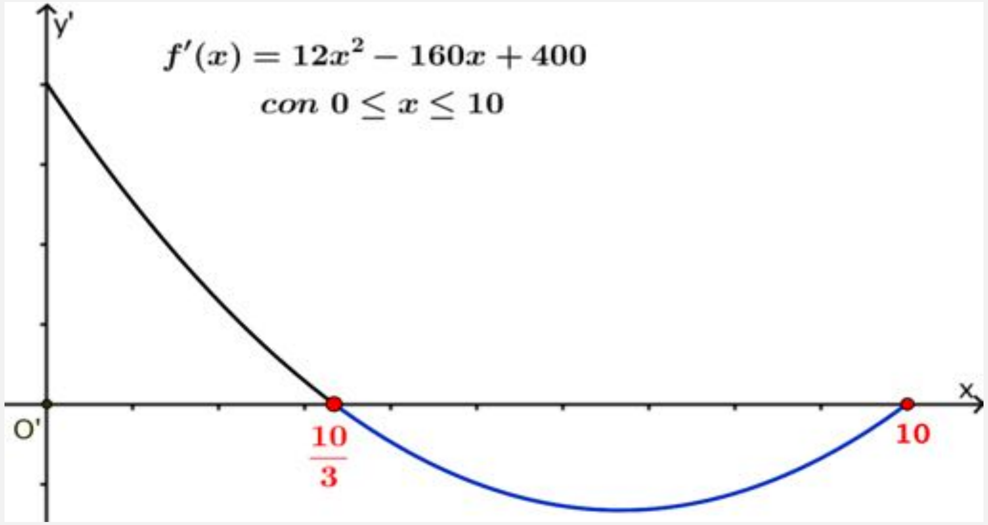
$$3x^2 - 40x + 100 = 0$$

$$\Delta = 40^2 - 4 \cdot 3 \cdot 100 = 400$$

$$x = \frac{40 \pm \sqrt{400}}{6} = \begin{cases} \dfrac{40-20}{6} = \dfrac{20}{6} = \dfrac{10}{3} \\ \dfrac{40+20}{6} = \dfrac{60}{6} = 10 \end{cases}$$

Ed ecco come completo la ricerca del volume massimo

Segno di $f'(x)$ e grafico di $f(x)$



Segno di $f'(x)$

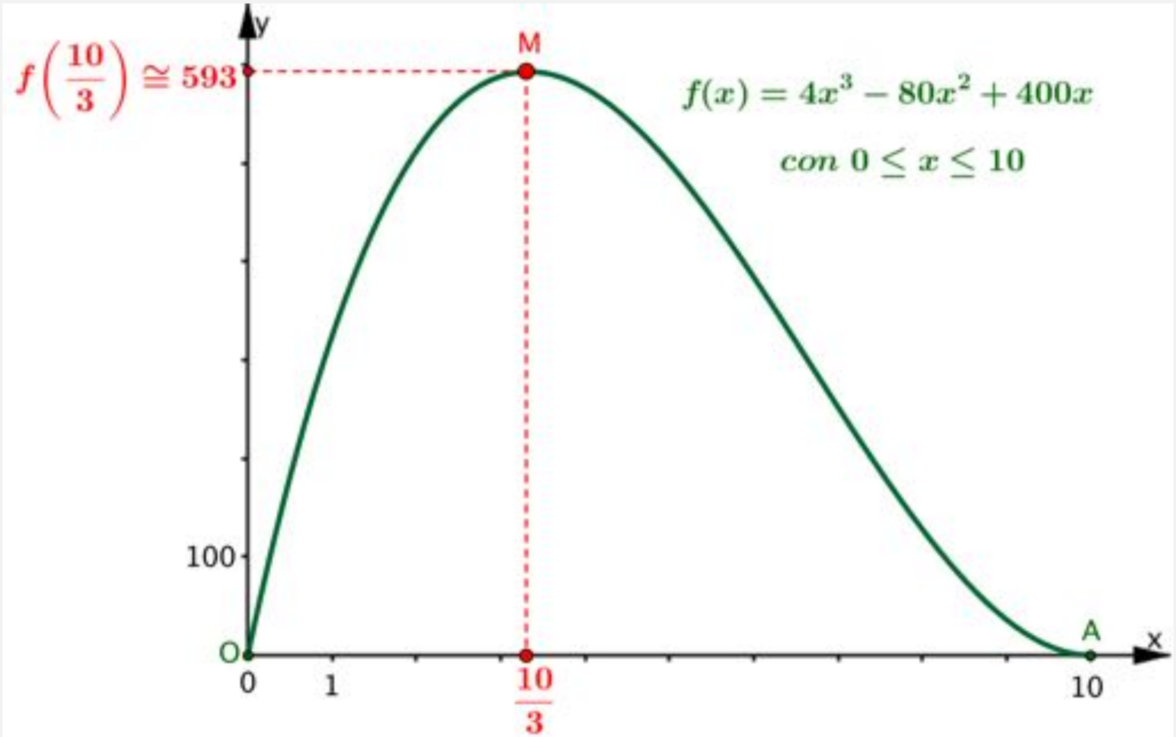
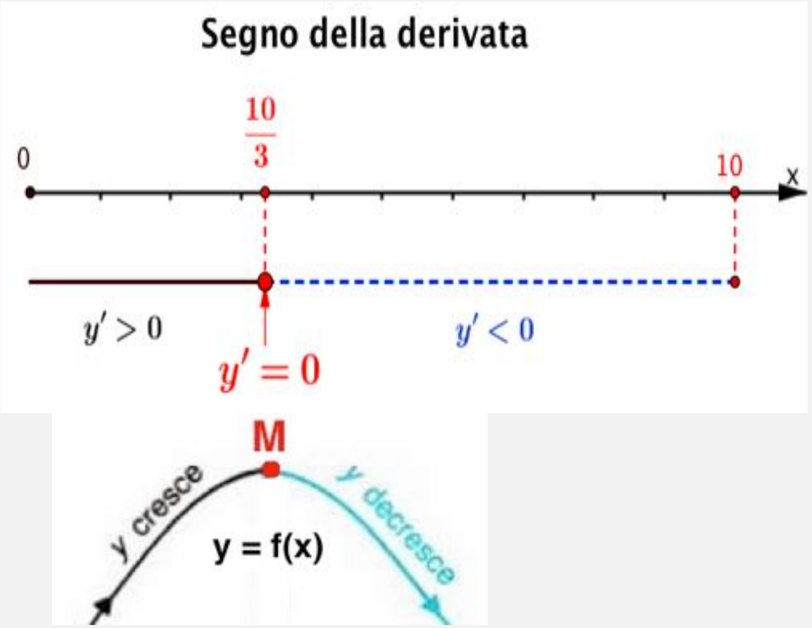
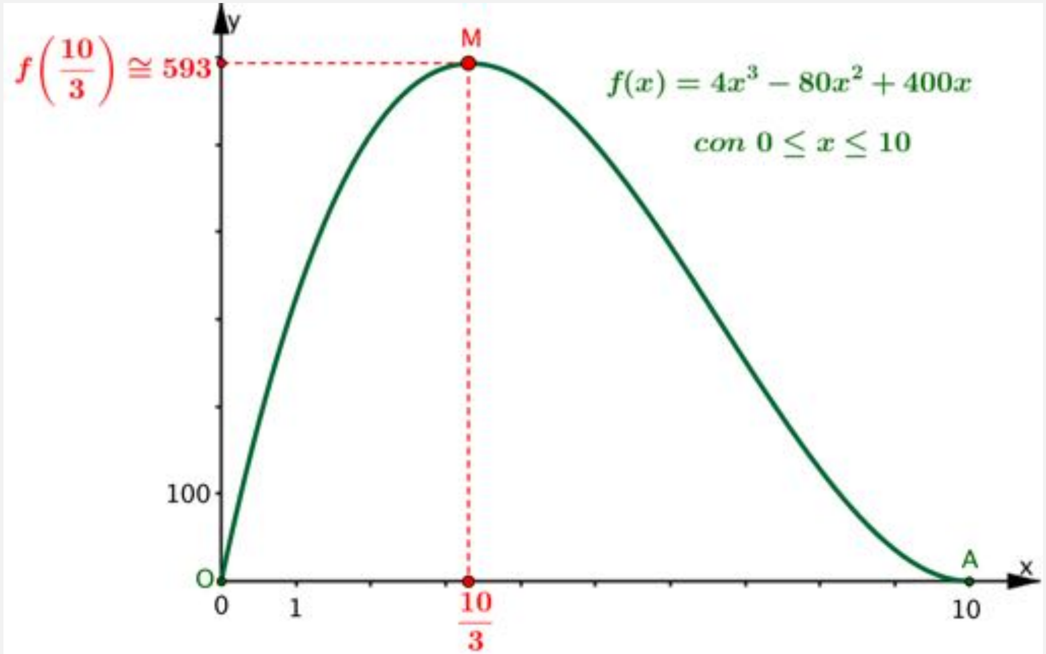


Grafico di $f(x)$

Segno di $f'(x)$ e massimo di $f(x)$





Ho così trovato la *x* per avere il volume massimo: è 10/3.
E il volume massimo vale (in cm^3)

$$f(10/3) \cong 592{,}6$$

Risolvere un problema di massimo

Per risolvere il 'problema della scatola' ho percorso due tappe fondamentali:

I. **Tradurre il problema in una funzione y = f(x) che lega il volume y da massimizzare ad una variabile x.**

II. **Determinare il massimo della funzione y = f(x).**

Mi allontano ora dal problema della scatola e rifletto sulla seconda tappa, per trovare un procedimento di carattere generale, a partire dalla seguente funzione:

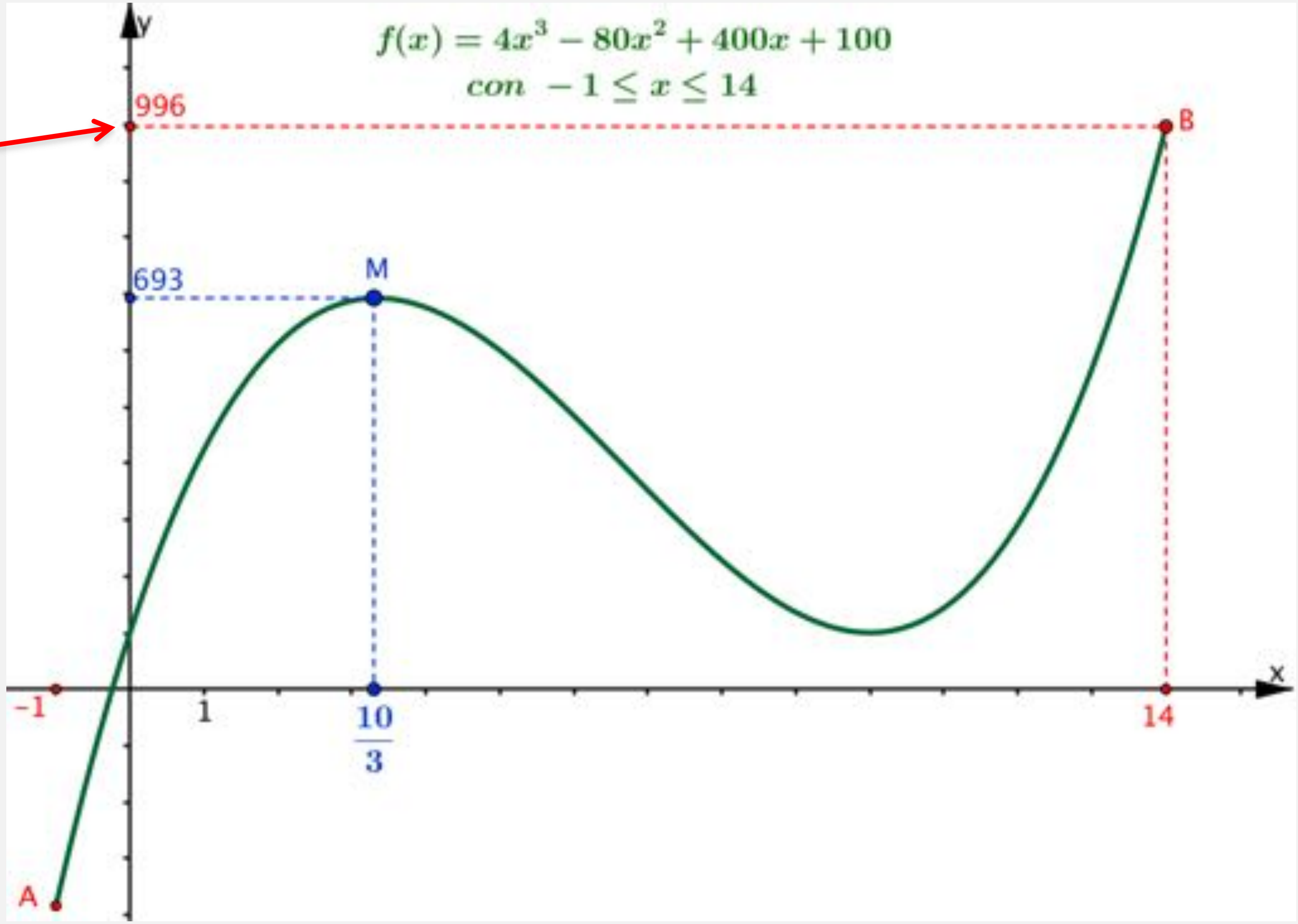
$$f(x) = 4x^3 - 80x^2 + 400x + 100$$

definita nell'intervallo [– 1, 14]

Massimo (assoluto) della funzione y = f(x)

È il più grande valore che assume y, quando x varia nel dominio dato.

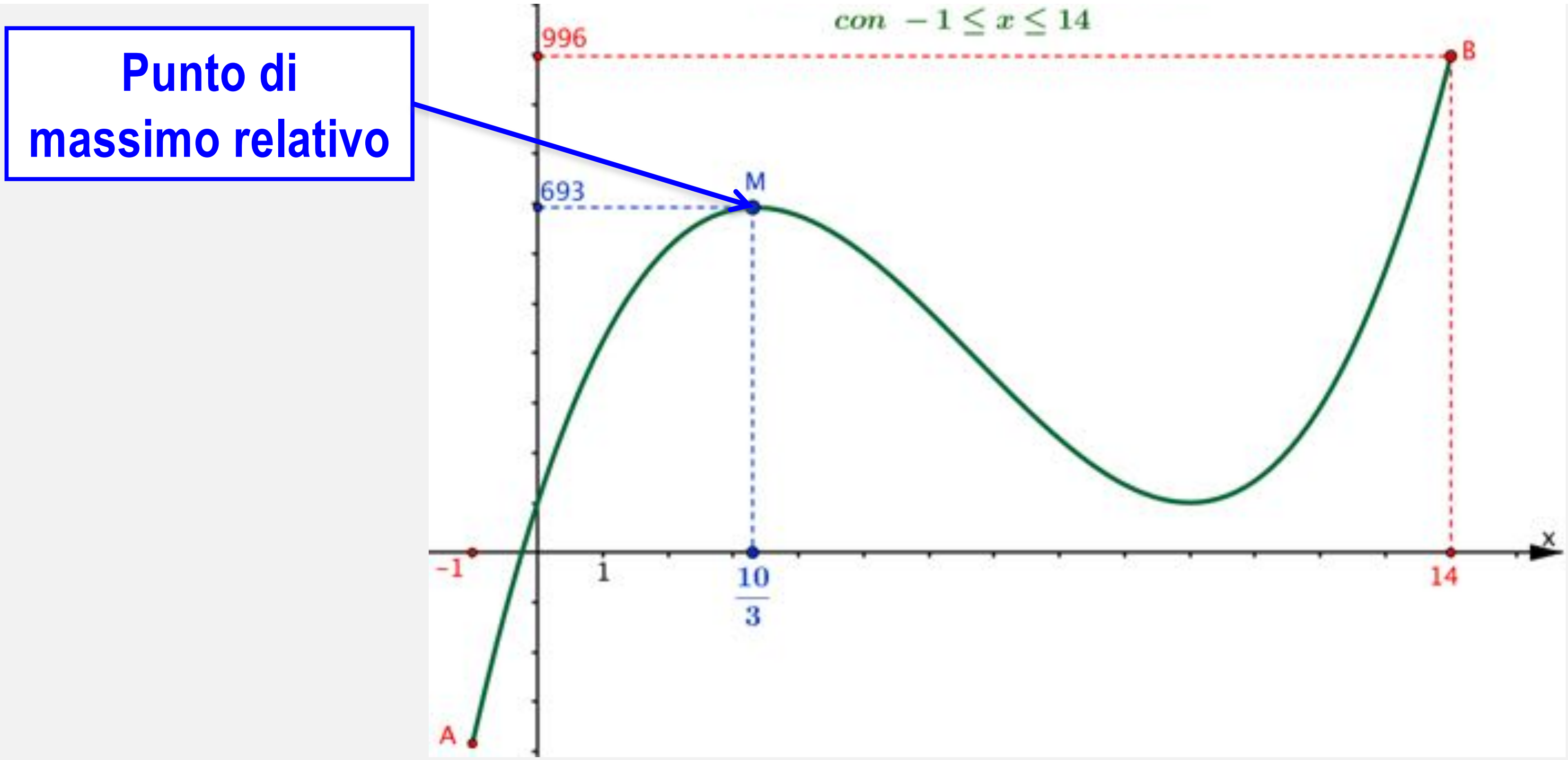
Massimo (assoluto)



Punto di massimo relativo della funzione y = f(x)

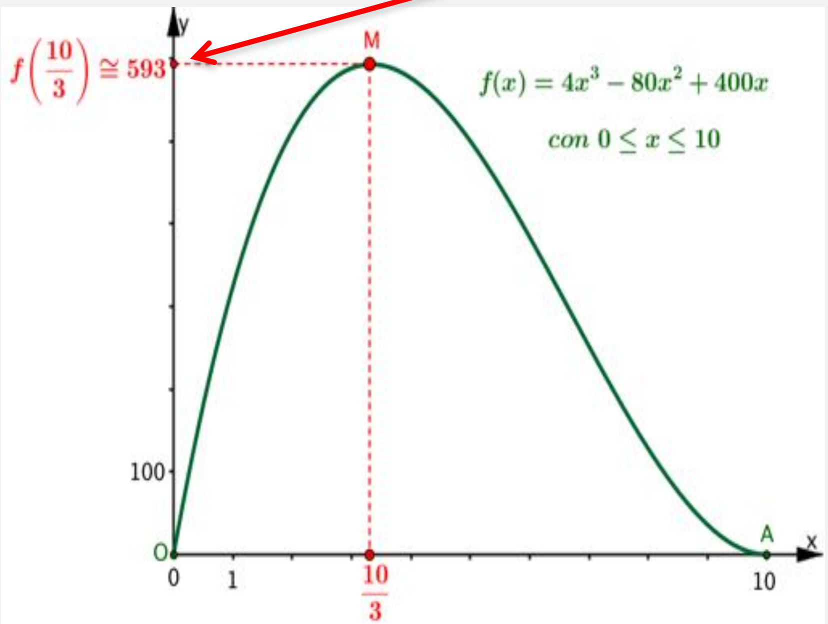
È il punto M di ascissa 10/3, in cui:

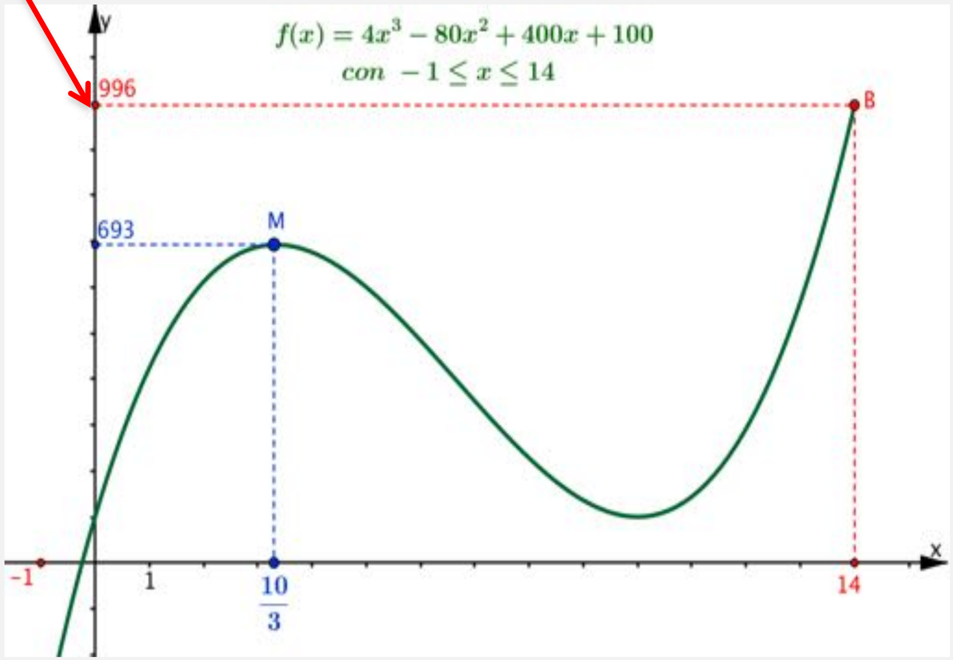
- **y ha il valore più grande rispetto ai punti vicini;**
- **f'(10/3) = 0 e il grafico passa da andamento crescente a decrescente**



Un confronto per riflettere

Massimo (assoluto)





Il massimo della funzione è l'ordinata del punto M, che è di massimo relativo

Il massimo della funzione è l'ordinata del punto B, che è uno degli estremi dell'arco dato.

Cambia il dominio della funzione

Procedimento per determinare il massimo (assoluto) di una funzione $y = f(x)$, derivabile in un intervallo $[a, b]$

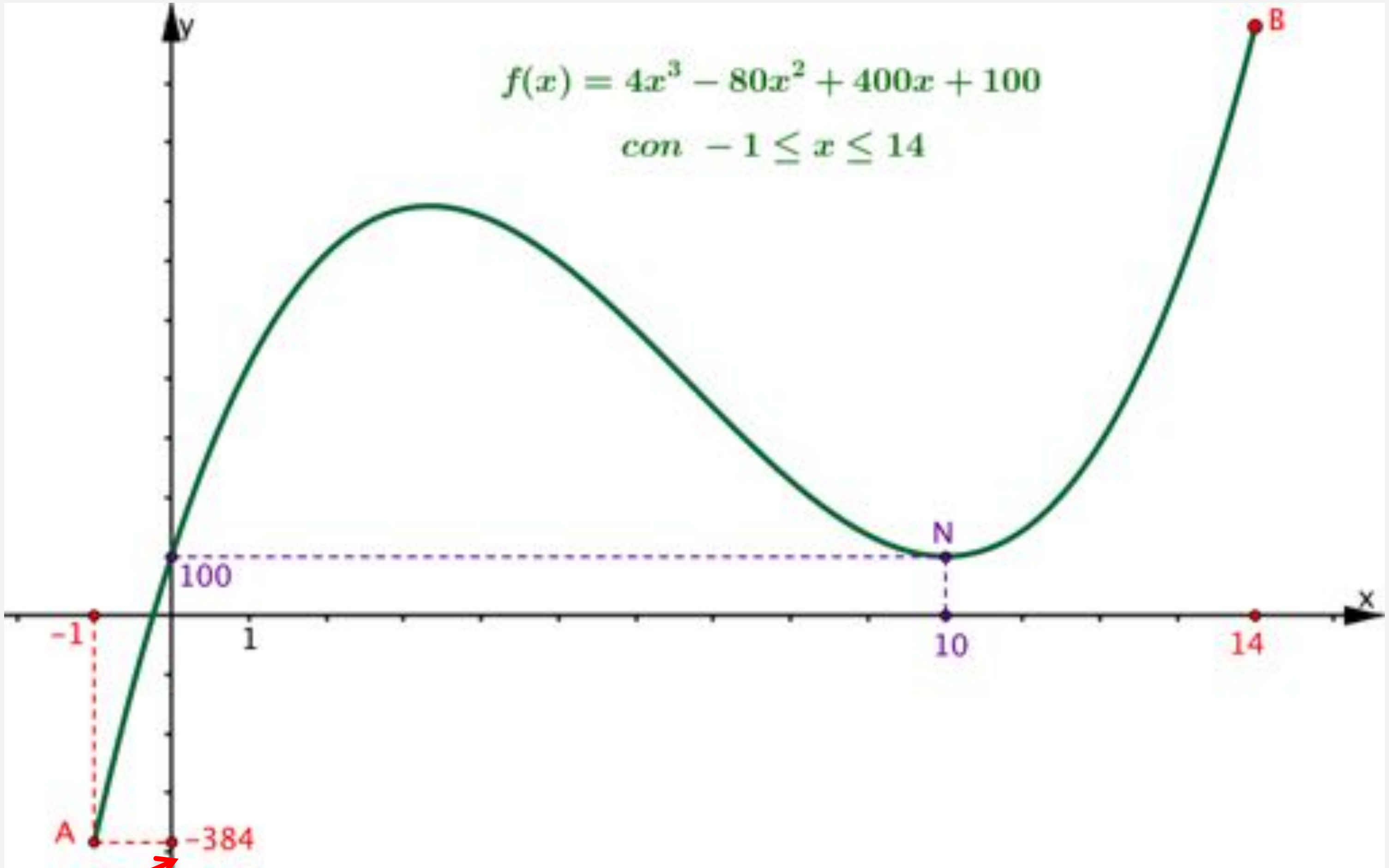
1. Calcolo la derivata $y' = f'(x)$.
2. Studio il segno di $f'(x)$ per individuare i punti di massimo relativo.
3. Calcolo $f(a)$, $f(b)$ e le ordinate dei punti di massimo relativo.
4. L’ordinata più grande è il massimo assoluto richiesto.

Stefano Volpe, 2022

In modo analogo procedo per determinare il minimo della funzione

Minimo (assoluto) della funzione y = f(x)

È il più piccolo valore che assume y, quando x varia nel dominio dato.

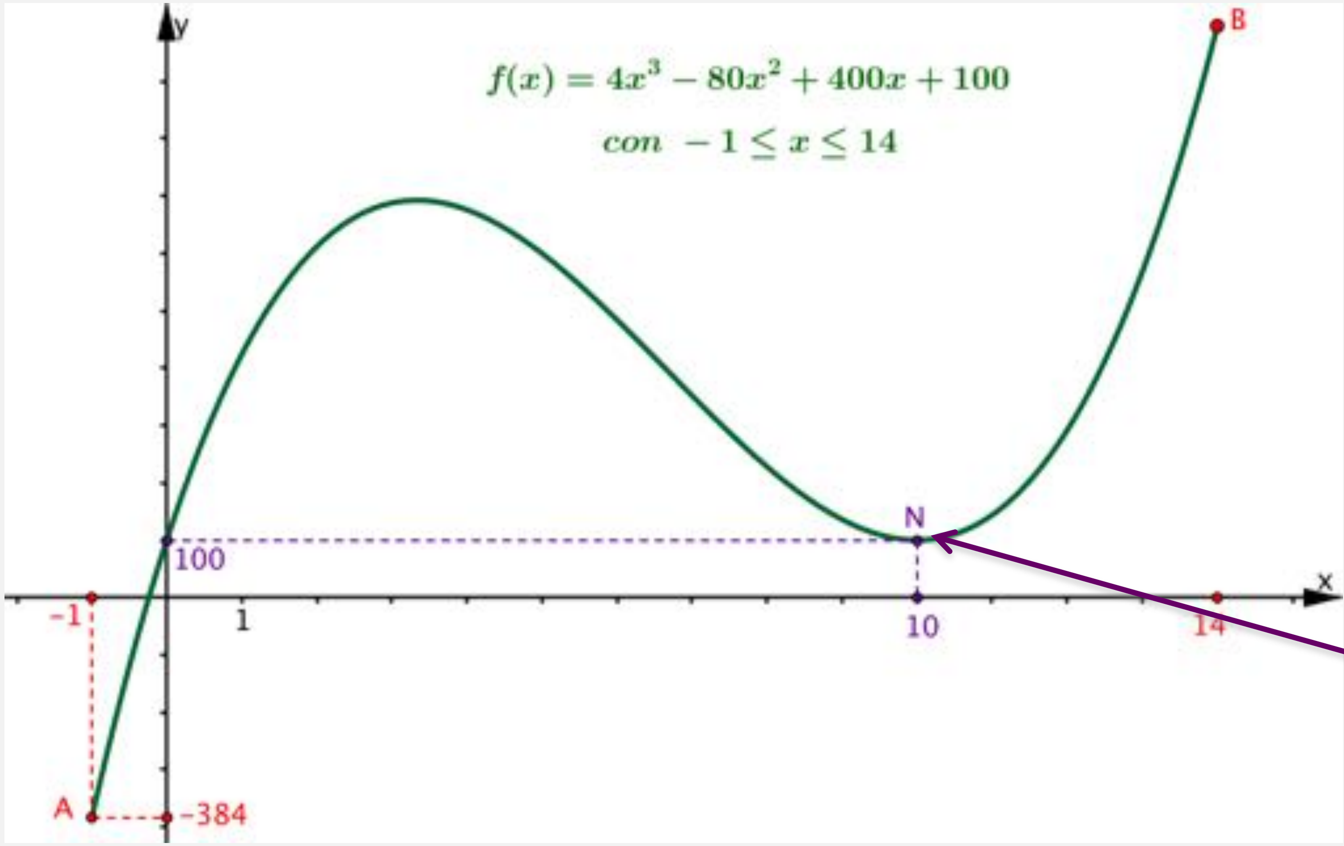


Minimo (assoluto)

Punto di minimo relativo della funzione y = f(x)

È il punto N di ascissa 10, in cui:

- **y ha il valore più piccolo rispetto ai punti vicini;**
- **risulta f'(10) = 0 e il grafico passa da andamento decrescente a crescente.**



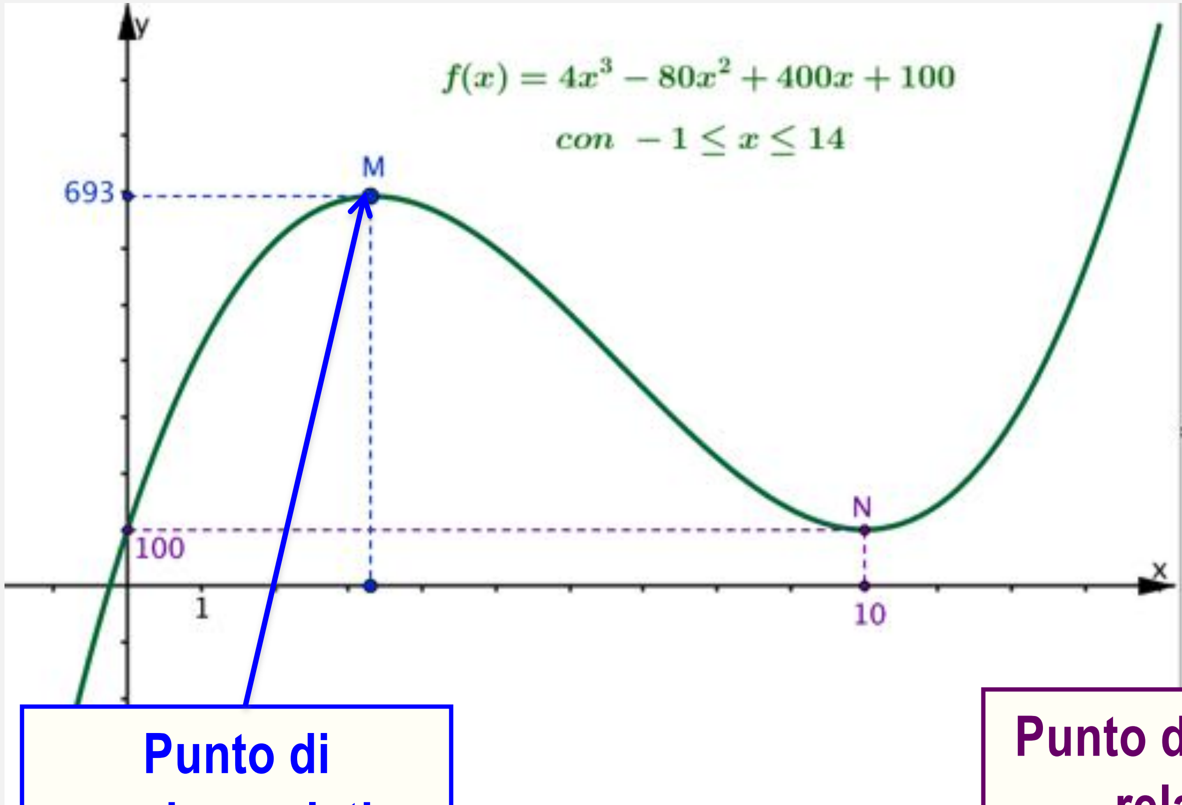
Punto di minimo relativo

Stefano Volpe, 2022

Procedimento per determinare il minimo (assoluto) di una funzione y = f(x), derivabile in un intervallo [a, b]

1. Calcolo la derivata y' = f'(x).
2. Studio il segno di f'(x) per individuare i punti di minimo relativo.
3. Calcolo f(a), f(b) e le ordinate dei punti di minimo relativo.
4. L'ordinata più piccola è il minimo assoluto richiesto.

Vocabolario matematico



Punto di massimo relativo

Punto di minimo relativo

Punti di estremo relativo

Attività

Completa la scheda di lavoro per risolvere un problema di minimo.

Riflessioni sul lavoro svolto

Quesito 1

Completa la soluzione del seguente problema

Una ditta produce scatole a base quadrata come quella nella figura a fianco. Una scatola deve avere un volume di 125cm^3; in quale caso produce la scatola con la minima quantità di cartone?

La scatola ha la forma di un parallelepipedo a base quadrata. La scatola prodotta con la minima quantità di cartone è quella con superficie totale S minima.

1. Indica sulla figura:
   - il lato di base che ha lunghezza variabile x
   - l'altezza, che ha lunghezza variabile h

Quesiti 2 e 3

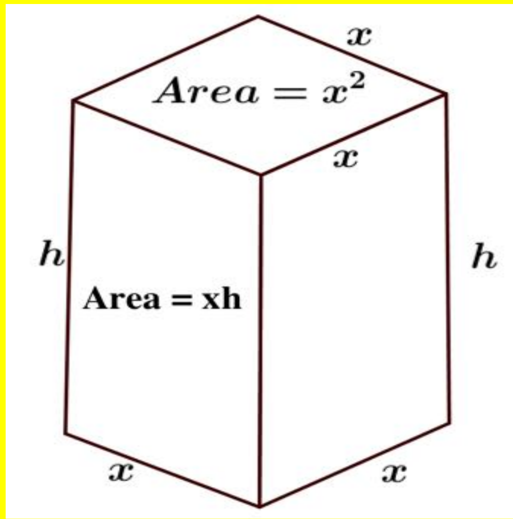
2. Spiega perché le seguenti formule esprimono il volume V e la superficie totale S del parallelepipedo in funzione di x ed h.

$V = x^2 h$ — $V =$ Area di base (x^2) × altezza (h)

$S = 2x^2 + 4xh$ — $S =$ Area di 2 basi + area di 4 rettangoli

3. Spiega perché, nel problema assegnato, V ed h sono legate dalla relazione $h = \dfrac{125}{x^2}$

$$\left.\begin{aligned} V &= x^2 h \\ V &= 125 \end{aligned}\right\} \Rightarrow 125 = x^2 h \Rightarrow h = \frac{125}{x^2}$$



Quesiti 4 e 5

4. Spiega perché, nel problema assegnato, la superficie totale y varia al variare di x con la legge

$$y = 2x^2 + \frac{500}{x}$$

$$\left.\begin{array}{l} V = 2x^2 + 4xh \\ h = \dfrac{125}{x^2} \end{array}\right\} \Rightarrow S = 2x^2 + 4\cancel{x} \cdot \frac{125}{x^{\cancel{2}}} = 2x^2 + \frac{500}{x}$$

5. Se pensi geometricamente al parallelepipedo, quali valori può assumere x? Tutti i numeri reali positivi

In simboli: $x > 0$ oppure $x \in R^+$

Indica il dominio della funzione ottenuta: R^+

Quesito 6

6. Spiega perché la derivata della funzione è

$$y' = 4\left(\frac{x^3 - 125}{x^2}\right)$$ con dominio R^+

Calcolo la derivata della funzione $y = 2x^2 + \frac{500}{x}$

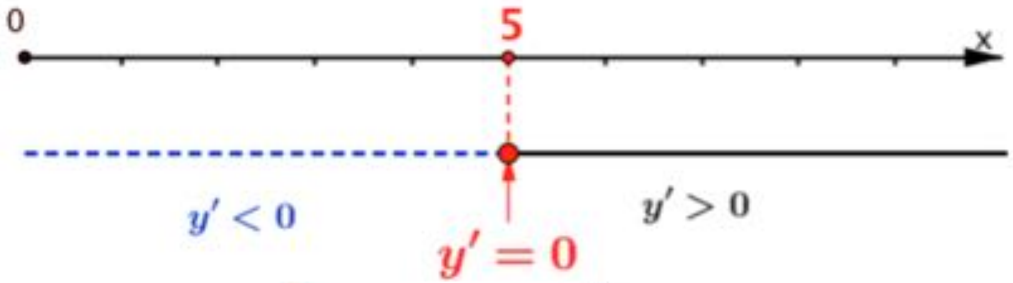
che avrà lo stesso dominio R^+ della funzione

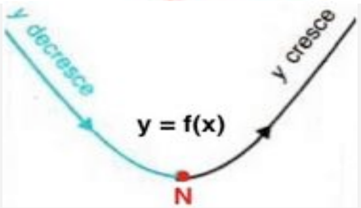
$$y' = 2 \cdot 2x + 500 \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 4x - \frac{500}{x^2} = \frac{4x^3 - 500}{x^2} = 4\left(\frac{x^3 - 125}{x^2}\right)$$

Quesiti 7, 8, 9 e 10

7. Quale fra i seguenti schemi rappresenta correttamente lo studio del segno di y'?

Schema C





$$y' = 4\left(\frac{x^3-125}{x^2}\right) = \frac{4\left(x^2+5x+25\right)}{x^2}(x-5)$$

con $x \in R^+$, ha lo stesso segno di $x-5$

8. Qual è lo spigolo x che rende minima la superficie totale? $x_{min} = 5$

9. Quanto vale l'altezza h che rende minima la superficie totale?

$h_{\min} = \frac{125}{5^2} = 5$ Il contenitore è il cubo con lo spigolo lungo 5cm.

10. Quanto vale (in cm²) la superficie minima? $S_{\min} = 6 \cdot 5^2 = 150$

Generalizzare il problema

La ditta produce scatole con volumi diversi e ha bisogno di costruire, per ogni volume V, la scatola con la minima quantità di cartone. Come risolvi questo problema?

Sostituisco la lettera V al numero 125 e ripeto il procedimento.

Ottengo la funzione $y = 2x^2 + \dfrac{4V}{x}$ con dominio R^+

La derivata è $y' = 4\left(\dfrac{x^3 - V}{x^2}\right)$ con dominio R^+

La scatola con superficie totale minima è il cubo con lo spigolo lungo (in centimetri) $\sqrt[3]{V}$.

Attenzione!
La lettera V indica il volume, che rimane costante in questo procedimento.

Ottimizzazione oggi

Problemi di ottimizzazione sono oggi studiati nei più vari settori. Ecco qualche esempio:

- **massimizzare i guadagni e minimizzare i costi in economia, sia aziendale che nazionale e internazionale;**
- **ottimizzare la distribuzione di ripetitori, antenne, centrali elettriche, pozzi petroliferi, ... in ingegneria;...**

Medaglia Fields per la matematica 2018

Studi per ottimizzare i trasporti

Alessio Figalli
Roma 1984

Premio Abel 2019

Studi su superfici minime

Karen Uhlenbeck
USA 1942