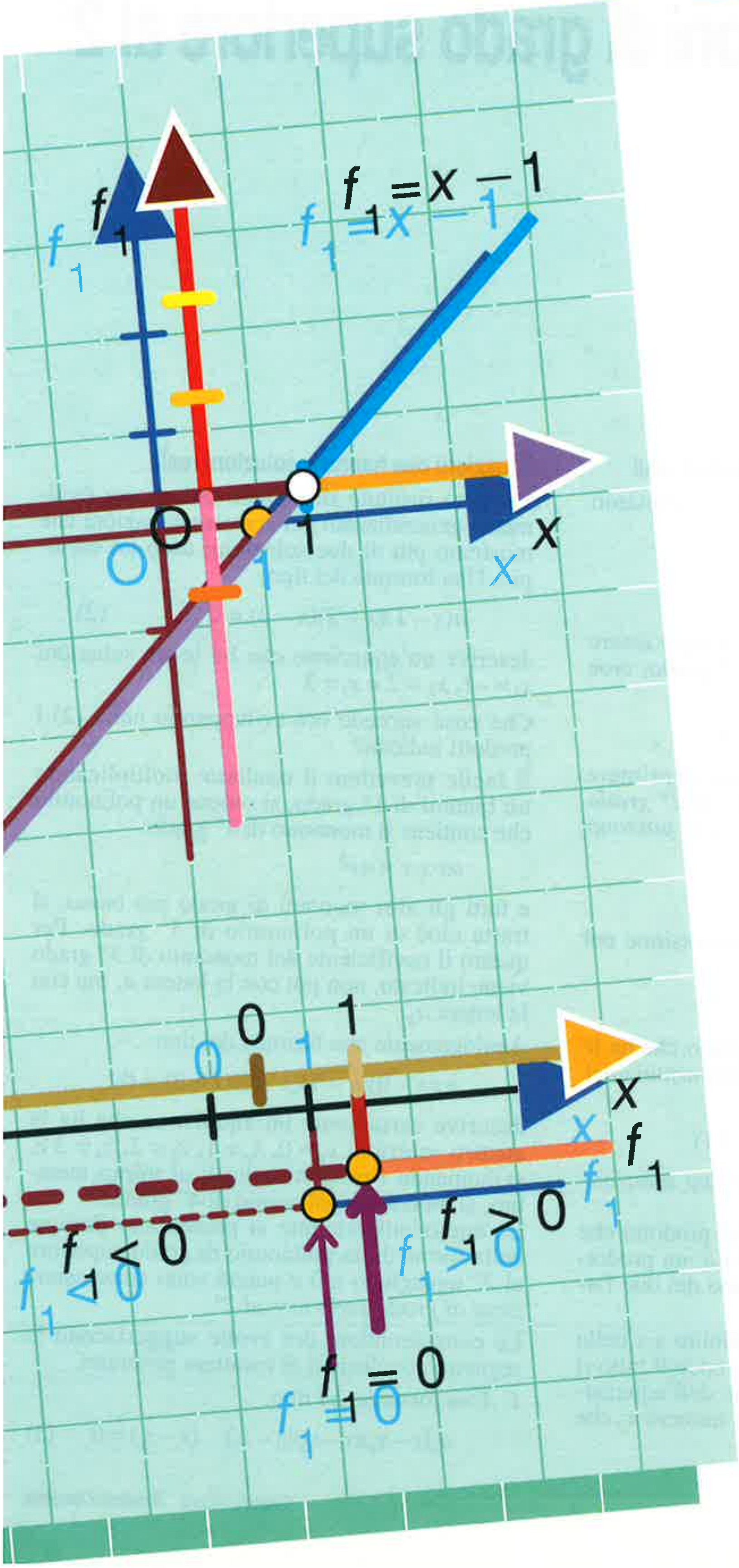
IL CALCOLO LETTERALE



1

Equazioni di grado superiore al 2°

Equazioni di 2° grado con due soluzioni reali

Nel capitolo settimo (paragrafo 5) abbiamo trovato i due seguenti risultati:

1. Un trinomio di 2° grado:

   $$ax^2 + bx + c$$

   con le radici reali x_1 e x_2, può sempre essere scomposto in due fattori di 1° grado, cioè vale la seguente identità:

   $$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

   Questo stesso risultato si può esprimere dicendo *che tutte le equazioni di 2° grado con due soluzioni reali* x_1 *e* x_2 *si possono scrivere nella forma*:

   $$a(x - x_1)(x - x_2) = 0$$

2. Viceversa, sviluppando un'espressione del tipo:

   $$a(x - x_1)(x - x_2)$$

   si ottiene un trinomio di 2° grado che ha le due radici reali x_1 e x_2, cioè *una formula del tipo*:

   $$a(x - x_1)(x - x_2) = 0 \qquad (1)$$

   descrive un'equazione con le due soluzioni x_1 *e* x_2.

   È la legge di annullamento del prodotto che garantisce quest'ultimo risultato: un prodotto vale 0, se vale 0 almeno uno dei due fattori.

   Perciò il numero x_1, che, sostituito a x nella (1), rende 0 il primo fattore, rende 0 tutto il prodotto e quindi è soluzione dell'equazione; altrettanto si può dire del numero x_2 che rende 0 il secondo fattore.

Equazioni che hanno *n* soluzioni reali

L'ultimo risultato richiamato può essere facilmente generalizzato per scrivere equazioni che mostrano più di due soluzioni; ecco un esempio. Una formula del tipo:

$$a(x - 1)(x - 2)(x - 3) = 0 \qquad (2)$$

descrive un'equazione che ha le tre soluzioni $x_1 = -1$, $x_2 = 2$ e $x_3 = 3$

Che cosa succede ora sviluppando nella (2) i prodotti indicati?

È facile prevedere il risultato: moltiplicando tre binomi di 1° grado, si ottiene un polinomio che contiene il monomio di 3° grado:

$$ax \cdot x \cdot x = ax^3$$

e tutti gli altri monomi di grado più basso; si tratta cioè di un polinomio di 3° grado. Per questo il coefficiente del monomio di 3° grado viene indicato, non più con la lettera a, ma con la lettera a_3.

Analogamente una formula del tipo:

$$a_4(x - 0)(x - 1)(x - 2)(x - 3) = 0$$

descrive certamente un'equazione che ha le quattro soluzioni $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, $x_4 = 3$ e, sviluppando i prodotti indicati al primo membro, si ottiene un polinomio di 4° grado.

Le equazioni ottenute si presentano dunque nella forma di un polinomio di grado superiore al 2° uguagliato a 0 e perciò sono dette *equazioni di grado superiore al 2°*.

Le considerazioni ora svolte suggeriscono le seguenti conclusioni di carattere generale:

1. *Una formula del tipo:*

   $$a_n(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)\ldots(x - x_n) = 0 \qquad (3)$$

descrive un'equazione che ha le n *radici reali* $x_1, x_2, \ldots, x_n$;

2. *Sviluppando nella formula (3) i prodotti indicati al primo membro, l'equazione assume la forma:*

$$a_n x^n + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0 \qquad (4)$$

in cui, al primo membro, si trova un polinomio di grado n, *ordinato secondo le potenze decrescenti di* x, *e si ha che:*

- *le lettere* $a_0, a_1, \ldots, a_n$ *indicano i coefficienti del polinomio;*
- *le lettere* $x^n, \ldots, x^2, x$ *indicano le potenze di* x.

3. *Un'equazione scritta nella forma di un polinomio di grado* n *uguagliato a 0 prende il nome di* equazione di ennesimo grado.

Nella tabella A si trova qualche altro esempio di questo tipo di equazioni.

Verifiche

Conoscenze

① Come si scrive un'equazione che ha n date soluzioni reali?

② Che cosa si intende col termine «equazione di ennesimo grado»?

Comprensione

① Spiegare perché un'equazione di 2° grado è una particolare equazione di grado n.

② Un'equazione di 1° grado è una particolare equazione di grado n?

Applicazioni

① Scrivere un'equazione che abbia le soluzioni seguenti:

$$x_1 = -2 \qquad x_2 = -1 \qquad x_3 = 1 \qquad x_4 = 2$$

Rispondere ai seguenti quesiti:

a. stabilire il grado dell'equazione;

b. scrivere un polinomio che abbia i numeri dati come radici.

Tabella A
Equazioni di ennesimo grado

Soluzioni	Equazioni
$x_1 = -5 \quad x_2 = 0 \quad x_3 = 2$	$[x - (-5)](x - 0)(x - 2) = 0$ ossia $(x + 5)x(x - 2) = 0$ da cui $\mathbf{x^3 + 3x^2 - 10x = 0}$
$x_1 = -5 \quad x_2 = 1 \quad x_3 = 2$	$(x + 5)(x - 1)(x - 2) = 0$ ossia $\mathbf{x^3 + 2x^2 - 13x + 10 = 0}$
$x_1 = -1 \quad x_2 = 0 \quad x_3 = \frac{1}{2} \quad x_4 = 1$	$2(x+1)(x-0)\left(x - \frac{1}{2}\right)(x-1) = 0$ ossia $\mathbf{2x^4 - x^3 - 2x^2 + x = 0}$
$x_1 = -\sqrt{3} \quad x_2 = -\sqrt{2} \quad x_3 = 0 \quad x_4 = \sqrt{2} \quad x_5 = \sqrt{3}$	$(x + \sqrt{3})(x + \sqrt{2})(x - 0)(x - \sqrt{2})(x - \sqrt{3}) = 0$ ossia $\mathbf{x^5 - 5x^3 + 6x = 0}$

Collegamento con i capitoli precedenti

① Che cosa si intende col termine «trinomio di 2° grado»?
(*Vedere il capitolo 7, p. 322*)

② Spiegare come si trova che, per un trinomio di 2° grado del tipo:

$$ax^2 + bx + c$$

con due radici reali x_1 e x_2, vale l'identità:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

(*Vedere il capitolo 7, p. 322*)

③ Confrontare i seguenti teoremi esaminati in questo paragrafo:

a. tutte le equazioni di 2° grado con le due soluzioni reali x_1 e x_2 si possono scrivere nella forma:

$$a(x - x_1)(x - x_2) = 0$$

b. una formula del tipo:

$$a(x - x_1)(x - x_2) = 0$$

descrive certamente un'equazione con due soluzioni reali x_1 e x_2.
Spiegare perché i due teoremi sono l'uno l'inverso dell'altro.
(*Vedere il capitolo 4, p. 153*)

Collegamenti con il primo volume

① Che cosa si intende con il termine «polinomio»?
(*Vedere il capitolo 6, p. 259*)

② Come si valuta il grado di un polinomio?
(*Vedere il capitolo 6, p. 259*)

③ Scrivere nella tabella B, accanto a ogni calcolo, la proprietà delle operazioni che è stata applicata.
(*Vedere il capitolo 6, p. 267*)

④ Sviluppare i prodotti indicati al primo membro delle seguenti equazioni, indicando le proprietà delle operazioni applicate.
(*Vedere il capitolo 6, p. 267*)

$$x(x + 5)(x - 2) = 0$$

$$2(x + 1)(x - 0)\left(x - \frac{1}{2}\right)(x - 1) = 0$$

⑤ In che cosa consiste la legge di annullamento del prodotto?
(*Vedere il capitolo 1, p. 14*)

Tabella B
Proprietà da applicare per calcolare il prodotto di polinomi

Calcolo	Proprietà
$(x + 5)[(x - 1)(x - 2)] = (x + 5)(x^2 - 3x + 2)$	
$(x + 5)(x^2 - 3x + 2) =$ $= x(x^2 - 3x + 2) + 5(x^2 - 3x + 2)$	
$x(x^2 - 3x + 2) + 5(x^2 - 3x + 2) =$ $= x^3 - 3x^2 + 2x + 5x^2 - 15x + 10$	
$x^3 - 3x^2 + 2x + 5x^2 - 15x + 10 =$ $= x^3 + 2x^2 - 13x + 10$	

2 Divisibilità di un polinomio per $(x-a)$

Nel paragrafo 1 si è arrivati alle seguenti conclusioni:

1. a partire da n numeri reali, si può *sempre* «costruire» un'equazione che ha quegli n numeri come soluzioni e l'equazione è scritta nella forma:

$$a_n(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\ldots(x-x_n)=0 \qquad (1)$$

2. l'equazione ottenuta si può *sempre* scrivere nella forma seguente:

$$a_nx^n+\ldots+a_2x^2+a_1x+a_0=0 \qquad (2)$$

che al primo membro presenta un polinomio con n radici reali.

Ci si chiede ora: che cosa si può dire del precedente procedimento, percorso in senso inverso? E cioè, un polinomio di grado n con n radici reali può sempre essere scomposto in fattori di 1° grado?

Dalla scomposizione in fattori di un numero intero alla scomposizione di un polinomio

Per scoprire come scomporre un polinomio in fattori conviene riprendere la scomposizione in fattori di un numero intero, esaminando un caso particolare. Per esempio, il numero 65 può essere fattorizzato percorrendo i seguenti passi:

1. *Si comincia col dividere 65 per 2* e si ottiene il quoziente 32, con resto 1, cioè:

   $65 : 2 = 32$ con il resto $R = 1$

   ossia:

   $65 = 2\cdot 32 + 1$

   Si conclude che *65 non è divisibile per 2*, dato che la divisione dà un resto $R = 1$.

2. *Si divide 65 per 3 e per 4* trovando che *65 non è divisibile per nessuno di questi numeri*, dato che la divisione dà un resto $R\neq 0$.

3. *Si divide 65 per 5* e si trova finalmente:

   $65 : 5 = 13$ con il resto $R = 0$

   perciò *65 è divisibile per 5* e viene scomposto in fattori nel modo seguente:

   $65 = 5\cdot 13$

Questo procedimento è però molto lungo e perciò abitualmente viene abbreviato valendosi di opportuni *criteri di divisibilità*; questi criteri permettono di *stabilire se un intero è divisibile per un altro senza eseguire la divisione*.

Ecco gli esempi più noti:

- un intero è divisibile per 2 se l'ultima cifra è pari;
- un intero è divisibile per 5 se l'ultima cifra è 5 o 0.

Valendosi di questi criteri, si stabilisce subito, per esempio, che il numero 65 non è divisibile per 2, ma è divisibile per 5 e perciò si effettua direttamente la divisione per 5.

Un procedimento analogo si può seguire per scomporre un polinomio in fattori di 1° grado del tipo $(x-x_1)$, $(x-x_2)\ldots(x-x_n)$, in generale del tipo $(x-a)$:

1. si stabilisce un criterio di divisibilità del polinomio per un binomio del tipo $(x-a)$;
2. si effettua la divisione del polinomio per tutti i binomi che risultano suoi divisori.

Ecco allora il primo passo del procedimento, che verrà completato con un secondo passo nel paragrafo 3.

Criterio di divisibilità di un polinomio per un binomio del tipo (x–a)

Il polinomio assegnato viene indicato con il simbolo $P(x)$ per ricordare che è una funzione di x, cioè assume valori che variano al variare di x; un esempio può essere:

$$P(x) = 2x^3 - 11x^2 + 17x - 6$$

Effettuare la divisione di questo polinomio, per esempio per $(x - 1)$, vuol dire scrivere la seguente uguaglianza, *vera per qualunque valore di* x:

$$P(x) = (x - 1)Q(x) + R$$

dove $Q(x)$ indica il polinomio quoziente e R indica il resto.
L'ultima uguaglianza deve essere vera, in particolare, quando a x si sostituisce il numero 1, presente nel binomio $(x - 1)$. Si ha:

I membro $= P(1) = 2 \cdot 1^3 - 11 \cdot 1^2 + 17 \cdot 1 - 6 = \mathbf{2}$

II membro $= (1-1)Q(1) + R = 0 \cdot Q(1) + R = 0 + R = \boldsymbol{R}$

Si ottiene dunque:

$$R = 2$$

Si conclude che la divisione del polinomio $2x^3 - 11x^2 + 17x - 6$ per il binomio $(x - 1)$ dà come resto $R = 2$ e perciò il polinomio *non è divisibile* per $(x - 1)$.
Con lo stesso metodo si può controllare se il polinomio è divisibile per $(x - 2)$; ecco come si procede.

- Si scrive l'uguaglianza che deve essere vera per qualunque x:

$$P(x) = (x - 2)Q(x) + R$$

- Si valutano i due membri dell'uguaglianza sostituendo 2 a x; si ha:

I membro $= P(2) = 2 \cdot 2^3 - 11 \cdot 2^2 + 17 \cdot 2 - 6 = \mathbf{0}$

II membro $= (2 - 2)Q(2) + R = 0 \cdot Q(2) + R =$
$= 0 + R = \boldsymbol{R}$

- Si ottiene:

$$R = 0$$

Così si conclude che il polinomio

$$2x^3 - 11x^2 + 17x - 6$$

è divisibile per $(x - 2)$, dato che la divisione dà il resto $R = 0$.
Dunque, per stabilire che il polinomio è divisibile per $(x - 2)$, basta il seguente procedimento:

- calcolare $P(2)$, cioè il valore che assume il polinomio quando si sostituisce 2 a x;
- verificare che risulta $P(2) = 0$.

Il procedimento ora seguito può essere ripetuto a partire da qualunque polinomio $P(x)$ e dal binomio del tipo $(x - a)$, dove a indica un qualunque numero reale; si ha così il seguente ***criterio di divisibilità:*** *un polinomio* P(x) *è divisibile per* (x – a) *se risulta*:

$$P(a) = 0$$

ossia se il numero reale a *è una radice del polinomio*. Valendosi del connettivo di implicazione si può scrivere brevemente:

$$P(a) = 0 \Rightarrow P(x) = (x - a)\,Q\,(x)$$

Un criterio per selezionare le radici intere di un polinomio

Il criterio ottenuto fa nascere subito una domanda: come trovare le radici reali di un polinomio di grado n?
Nel caso dell'equazione di 2° grado scritta nella forma:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

le soluzioni si trovano con la formula risolutiva:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad (3)$$

Si potrebbe allora ricercare una formula risolutiva analoga alla (3) per risolvere anche le equazioni di grado superiore al 2°; questa ricerca è stata sviluppata soprattutto nel XVI secolo e ha condotto a trovare (vedi anche la scheda storica di p. 414):

- una formula risolutiva assai complicata per le equazioni di 3° grado;
- un metodo generale ancora più lungo e complicato per risolvere le equazioni di 4° grado.

Successive ricerche hanno poi dimostrato che non è possibile trovare una formula risolutiva per le equazioni di grado superiore al 4°.
Il criterio di divisibilità sembra dunque indicare un procedimento impraticabile: sostituire a x vari numeri reali per «indovinare» una radice del polinomio. Basta pensare agli infiniti numeri reali da provare per rimanere scoraggiati dall'impresa.
Ecco allora un criterio per selezionare i numeri da sostituire a x, limitandosi però ai numeri interi: *le radici intere di un polinomio a coefficienti interi si possono trovare solo fra i divisori del termine noto.*
E così, per esempio, nel polinomio:

$$P(x) = 2x^3 - 11x^2 + 17x - 6$$

il termine noto è –6 e i suoi divisori sono:

$$\pm 1 \qquad \pm 2 \qquad \pm 3 \qquad \pm 6$$

Quindi i numeri da sostituire a x sono soltanto otto; effettuando la sostituzione, si trova:

$$P(2) = 0 \qquad\qquad P(3) = 0$$

In corrispondenza degli altri sei numeri, invece, il polinomio assume valori diversi da 0.
Si conclude così che il polinomio ha due sole radici intere:

$$x_1 = 2 \qquad\qquad x_2 = 3$$

Perciò è inutile sostituire altri interi come 4 o 5, perché non sono divisori di -6 e dunque non possono essere radici del polinomio.

L'origine del criterio

Come si arriva a questo criterio di notevole utilità pratica?
È facile da capire, ragionando sul modo di generare un polinomio con n radici reali:
- si scrive:

$$a_n(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)\ldots(x - x_n)$$

- si sviluppano i prodotti indicati, ottenendo:

$$a_nx^n + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

Così il termine noto a_0 proviene da un prodotto del tipo:

$$a_n \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n$$

e perciò una radice intera deve essere un divisore del termine noto.
Nella scheda informativa di p. 392 si trova un criterio più generale per selezionare le radici razionali di un polinomio.

Sintesi dei criteri stabiliti

I risultati presentati in questo paragrafo possono essere sintetizzati nei due criteri seguenti:
1. *Un polinomio* P(x) *è divisibile per il binomio* (x – a) *solo se il numero reale* a *è una radice del polinomio;*
2. *Le radici intere di un polinomio* P(x) *a coefficienti interi si possono trovare solo fra i divisori del termine noto.*

Verifiche

Conoscenze

① Esporre il criterio di divisibilità di un polinomio $P(x)$ per un binomio del tipo $(x - a)$.

② Fra quali numeri si possono trovare le radici intere di un polinomio?

Comprensione

① Dimostrare il criterio di divisibilità di un polinomio $P(x)$ per un binomio del tipo $(x - a)$.

② Spiegare l'origine del criterio per selezionare le radici intere di un polinomio.

③ Esaminare il polinomio:

$$P(x) = x^3 + 4x + 3$$

Risolvere i seguenti quesiti:
a. verificare che risulta $P(-1) = 0$;
b. per quale binomio è divisibile il polinomio?

Applicazioni

① Esaminare i seguenti polinomi e scegliere quelli divisibili per il binomio $(x - 1)$ motivando la scelta:

$$x^3 + 2x^2 + x - 4 \qquad\qquad x^3 + 2x^2 - x - 4$$

$$3x^3 + 2x^2 - x - 4$$

② Esaminare il seguente polinomio:

$$P(x) = 3x^4 - x^3 + 4$$

Risolvere i seguenti quesiti:
a. elencare i numeri interi che possono essere radici del polinomio;
b. determinare le radici intere del polinomio.

Collegamento con i capitoli o i paragrafi precedenti

① Descrivere l'insieme dei numeri reali, portando qualche esempio di:
- numero intero;
- numero razionale, ma non intero;
- numero irrazionale, cioè reale ma non razionale.

(*Vedere il capitolo 2, paragrafo 1*)

② Esaminare i seguenti tre teoremi:

I. $P(a) = 0 \Rightarrow P(x) = (x - a)\,Q(x)$
II. $P(x) = (x - a)Q(x) \Rightarrow P(a) = 0$
III. $P(a) = 0 \Leftrightarrow P(x) = (x - a)Q(x)$

Risolvere i seguenti quesiti:
a. enunciare i tre teoremi;
(*Vedere il capitolo 4, paragrafo 3*)
b. spiegare perché il secondo teorema è l'inverso del primo;
(*Vedere il capitolo 4, paragrafo 3*)
c. dimostrare il primo e il secondo teorema;
(*Vedere il paragrafo 1*)
d. dimostrare il terzo teorema.
(*Vedere il capitolo 4, paragrafo 3*)

Le radici razionali di un polinomio

Un criterio per selezionare le radici razionali di un polinomio

Nel paragrafo 2 si è dato un criterio per selezionare le radici intere di un polinomio; ecco ora un criterio più generale che permette di selezionare i numeri da sostituire a x, considerando anche i numeri razionali: *le radici razionali di un polinomio a coefficienti interi si possono trovare solo fra le frazioni che hanno come numeratore un divisore del termine noto e come denominatore un divisore del coefficiente del monomio di grado massimo.*

Un'applicazione del criterio

Per afferrare meglio il criterio, che ha un enunciato piuttosto complicato, conviene vederne subito un'applicazione al polinomio:

$$P(x) = 2x^3 - 11x^2 + 17x - 6$$

Si ha che:

- il termine noto è -6 e i divisori di -6 sono:

$$1 \quad -1 \quad 2 \quad -2 \quad 3 \quad -3 \quad 6 \quad -6$$

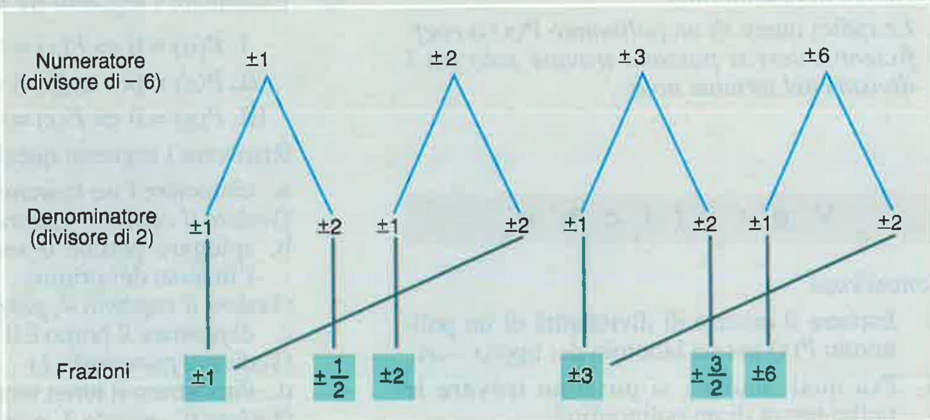
- il monomio di grado massimo è $2x^3$, con coefficiente 2, e i divisori di 2 sono:

$$1 \quad -1 \quad 2 \quad -2$$

- le frazioni che possono essere le radici razionali del polinomio sono dunque le seguenti (fig. 1):

$$\pm 1 \quad \pm\frac{1}{2} \quad \pm 2 \quad \pm 3 \quad \pm\frac{3}{2} \quad \pm 6$$

Figura 1
Come costruire le frazioni che possono essere radici razionali del polinomio



Si tratta dunque di soli 12 numeri razionali.

Provando a calcolare il valore che assume il polinomio in corrispondenza di questi numeri, si trova, come si è visto nel paragrafo 2:

$$P(2) = 0 \qquad P(3) = 0$$

e si trova anche:

$$P\left(\frac{1}{2}\right) = 0$$

Così si trova che il polinomio ha le tre radici razionali:

$$x_1 = \frac{1}{2} \qquad x_2 = 2 \qquad x_3 = 3$$

L'esempio ora esaminato conduce a esporre il criterio nel modo seguente:

- si scrivono i numeri razionali nella forma di frazioni $\frac{n}{d}$ ridotte ai minimi termini, cioè con n e d che sono due interi senza fattori comuni;
- si considera l'insieme F formato dalle frazioni $\frac{n}{d}$ che hanno n divisore del termine noto e d divisore del coefficiente del monomio di grado massimo;
- si scrive il criterio nella forma:

$$P\left(\frac{n}{d}\right) = 0 \Rightarrow \left(\frac{n}{d}\right) \in \mathrm{F}$$

Così si osserva subito che *non è vero il teorema inverso* e cioè *non è vero* che:

$$\frac{n}{d} \in \mathrm{F} \Rightarrow P\left(\frac{n}{d}\right) = 0$$

perché non è detto affatto che tutti i numeri dell'insieme F siano radici del polinomio. Nel polinomio esaminato prima si aveva, per esempio,

$$1 \in \mathrm{F}, \quad \text{ma} \quad \mathrm{P}(1) = 2$$

La dimostrazione del criterio

Per capire come si arriva al criterio appena esaminato conviene ragionare sempre sul polinomio:

$$P(x) = 2x^3 - 11x^2 + 17x - 6$$

seguendo una dimostrazione che ha carattere generale e può essere ripetuta a partire da qualunque altro polinomio.

1. Si parte dall'ipotesi:

$$P\left(\frac{n}{d}\right)=0 \qquad \text{ossia} \qquad 2\left(\frac{n}{d}\right)^3-11\left(\frac{n}{d}\right)^2+17\left(\frac{n}{d}\right)-6=0$$

e si sviluppano le potenze indicate, ottenendo:

$$2\cdot\frac{n^3}{d^3}-11\cdot\frac{n^2}{d^2}+17\cdot\frac{n}{d}-6=0$$

2. Si moltiplicano i due membri per d^3 e si ha:

$$2n^3-11n^2d+17nd^2-6d^3=0 \qquad (1)$$

3. Ecco ora il centro della dimostrazione: dall'uguaglianza (1) si esplicita $2n^3$, ottenendo:

$$2n^3=11n^2d-17nd^2+6d^3$$

da cui, raccogliendo al secondo membro il fattore comune d, si ha:

$$2n^3=d(11n^2-17nd+6d^2)$$

Quest'uguaglianza dice che d è un divisore del prodotto $2n^3$.
Ma d non può essere un divisore di n^3 (perché n e d non hanno fattori comuni), perciò d è un divisore di 2, che è il coefficiente del monomio di grado massimo.

4. Analogamente, dall'uguaglianza (1) si esplicita $6d^3$, ottenendo:

$$6d^3=2n^3-11n^2d+17nd^2$$

da cui:

$$6d^3=n(2n^2-11nd+17d^2)$$

e, per lo stesso motivo di prima, l'uguaglianza esprime il fatto che n è un divisore del termine noto 6.

5. Si conclude dunque che se un numero razionale è radice del polinomio, allora si trova certamente nell'insieme F.

Un caso particolare del criterio

Questo criterio contiene quello dato nel paragrafo 2 e questo perché nell'insieme F si trovano, in particolare, gli interi che sono divisori del solo termine noto: sono le frazioni del tipo $\frac{n}{d}$ che hanno come denominatore 1 o -1.

3

Divisione di polinomi

Per scomporre un polinomio in fattori – si è detto nel paragrafo 2 – si divide il polinomio per i binomi $(x - a)$ che sono suoi divisori. Per esempio, esaminando il polinomio:

$$P(x) = 2x^3 - 4x^2 - 2x + 4$$

si trova che risulta:

$$P(-1) = 0 \qquad P(1) = 0 \qquad P(2) = 0$$

cioè il polinomio ha le tre radici:

$$x_1 = -1 \qquad x_2 = 1 \qquad x_3 = 2$$

e perciò è divisibile per $(x + 1)$, per $(x - 1)$ e per $(x - 2)$.
Dunque, per scomporre in fattori il polinomio, bisogna dividerlo per i binomi $(x + 1)$, $(x - 1)$ e $(x - 2)$.
Ma come si effettua la divisione di due polinomi? Per dividere due polinomi si generalizza il procedimento per dividere due numeri interi richiamato qui sotto.

Il procedimento per dividere due numeri interi

Ecco un esempio di divisione fra due interi. Per eseguire la divisione

$$75 : 3$$

si procede nel modo seguente:

1. Si divide **7**, prima cifra del dividendo, per il divisore 3:
   $$\mathbf{7} : 3 = 2$$
2. Si moltiplica il quoziente 2 per il divisore 3:
   $$2 \cdot 3 = 6$$
3. Si sottrae 6, il numero ottenuto, da 7:
   $$7 - 6 = 1$$

Questi tre passi vengono abitualmente sintetizzati con lo schema seguente:

$$\begin{array}{r|l} 75 & 3 \\ \cline{2-2} \underline{6} & 2 \\ 1 & \end{array}$$

4. Si ripetono i primi tre passi, completando lo schema nel modo seguente:

$$\begin{array}{r|l} 75 & 3 \\ \cline{2-2} \underline{6} & 25 \\ \underline{15} & \\ \underline{15} & \\ 0 & \end{array}$$

Alla fine della divisione si trova dunque:

$$75 : 3 = 25$$

e quindi:

$$75 = 3 \cdot 25$$

Il procedimento per dividere due polinomi

Vediamo ora come si generalizza il procedimento di divisione fra due interi appena richiamato per eseguire la divisione fra due polinomi. Per effettuare la divisione

$$(2x^3 - 4x^2 - 2x + 4) : (x + 1)$$

si procede nel modo seguente:

1. Si divide il primo monomio $2x^3$ del dividendo per il primo monomio x del divisore:
   $$2x^3 : x = 2x^2$$
2. Si moltiplica il quoziente $2x^2$ per il divisore $(x + 1)$:
   $$2x^2(x + 1) = 2x^3 + 2x^2$$
3. Si sottrae il polinomio ottenuto dal dividendo:
   $$2x^3 - 4x^2 - 2x + 4 - (2x^3 + 2x^2) = -6x^2 - 2x + 4$$

Questi tre passi vengono abitualmente sintetizzati con lo schema seguente:

$$\begin{array}{r|l} \mathbf{2x^3} - 4x^2 - 2x + 4 & \boldsymbol{x + 1} \\ \cline{2-2} 2x^3 + 2x^2 & 2x^2 \\ \hline -6x^2 - 2x + 4 & \end{array}$$

4. Si ripetono i primi tre passi, completando lo schema nel modo seguente:

$$\begin{array}{r|l} \mathbf{2x^3} - 4x^2 - 2x + 4 & \boldsymbol{x + 1} \\ \cline{2-2} 2x^3 + 2x^2 & 2x^2 - 6x + 4 \\ \hline \mathbf{-6x^2} - 2x + 4 & \\ -6x^2 - 6x & \\ \hline \mathbf{4x} + 4 & \\ 4x + 4 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Alla fine della divisione si trova dunque:

$$(2x^3 - 4x^2 - 2x + 4) : (x + 1) = 2x^2 - 6x + 4$$

e quindi:

$$2x^3 - 4x^2 - 2x + 4 = (x + 1)(2x^2 - 6x + 4)$$

Un polinomio scomposto in fattori

Il trinomio $2x^2 - 6x + 4$ ottenuto prima ha le radici che valgono 1 e 2, perciò può essere a sua volta scomposto in fattori nel modo seguente:

$$2x^2 - 6x + 4 = 2(x - 1)(x - 2)$$

Si conclude che il polinomio dato si fattorizza nel modo seguente:

$$2x^3 - 4x^2 - 2x + 4 = 2(x + 1)(x - 1)(x - 2)$$

Si è così scomposto il polinomio nel prodotto di tre binomi di 1° grado del tipo $(x - a)$, con a che è sempre una radice del polinomio.

Fattorizzazione di un polinomio con *n* soluzioni reali

Ora si può finalmente rispondere a un quesito rimasto insoluto dal paragrafo 2: un polinomio con n radici reali può sempre essere scomposto in fattori di 1°grado?

L'esempio esaminato prima suggerisce una risposta di carattere generale: a partire da un polinomio $P(x)$ con n radici reali $x_1, x_2, \ldots, x_n$, si può sempre procedere nel modo seguente:

- si divide successivamente $P(x)$ per $(x - x_1)$, $(x - x_2)$, …, $(x - x_n)$;
- si fattorizza il polinomio scrivendo:

$$a_nx^n + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0 = \\ = a_n(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n)$$

Si estendono dunque ai polinomi di grado n i due teoremi richiamati nel paragrafo 1; si ha che:

1. *Un polinomio di grado* n:

$$a_nx^n + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

con n *radici reali* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *può sempre essere scomposto in* n *fattori di 1° grado, cioè vale la seguente identità:*

$$a_nx^n + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0 = \\ = a_n(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n)$$

2. Viceversa, *sviluppando un'espressione del tipo*:

$$a_n(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n)$$

si ottiene sempre un polinomio di grado n *con le* n *radici reali* $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Un polinomio di grado *n* ha al massimo *n* radici reali

I due teoremi ottenuti suggeriscono subito un'altra domanda: un polinomio di grado n ha sempre n radici reali?

E cioè, un'equazione di grado n ha sempre n soluzioni reali?

Già le equazioni di 2° grado hanno mostrato tanti esempi di risposta negativa a questa domanda: sono tante le equazioni senza soluzioni reali, come per esempio:

$$2x^2 + 3 = 0 \qquad x^2 + x + 1 = 0$$

Ci si aspetta quindi un comportamento analogo nelle equazioni di grado superiore al 2°; basta scrivere:

$$(x - 1)(2x^2 + 3) = 0 \quad \text{ossia} \quad 2x^3 - 2x^2 + 3x - 3 = 0$$

per avere un esempio di equazione di 3° grado con una sola soluzione reale.

E così l'equazione:

$$(2x^2 + 3)(x^2 + x + 1) = 0$$

ossia:

$$2x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 3x + 3 = 0$$

fornisce un esempio di equazione di 4° grado senza soluzioni reali.

Dunque, un'equazione di grado n può avere meno di n soluzioni reali (anche nessuna), ma certamente non può averne più di n.

Per esempio, un'equazione di 4° grado non può avere 5 soluzioni reali, perché, a partire da quelle 5 soluzioni, si costruiscono equazioni che sono tutte di 5° grado, non di 4°.

Si arriva dunque alla seguente conclusione: *un'equazione di grado* n *ha* ***al massimo*** n *soluzioni reali.*

Verifiche

Conoscenze

① Dividere il seguente polinomio:

$$2x^3 - 4x^2 - 2x + 4$$

per il seguente binomio:

$$(x - 2)$$

Descrivere il procedimento seguito; di che grado è il polinomio quoziente?

② Quante radici reali può avere al massimo un polinomio di grado n?

Comprensione

① Un'equazione di 3° grado ha sempre tre soluzioni reali?

② Un'equazione di 3° grado può avere quattro soluzioni reali?

③ Fra le seguenti frasi scegliere quella corretta motivando la scelta:

a. «Un'equazione di grado n ha sempre n soluzioni reali»;

b. «Un'equazione di grado n ha al massimo n soluzioni reali».

Applicazioni

① Portare un esempio di polinomio che ha 4 soluzioni reali; di che grado è il polinomio?

② Portare un esempio di polinomio di 4° grado che non ha soluzioni reali.

③ Esaminare il seguente polinomio:

$$x^3 - 1$$

Risolvere i seguenti quesiti:

a. verificare che il polinomio è divisibile per $(x - 1)$;

b. scomporre il polinomio in fattori di 1° o di 2° grado.

④ Esaminare il seguente polinomio:

$$x^4 - 2x^3 + 2x - 1$$

Risolvere i seguenti quesiti:

a. verificare che è divisibile per $(x + 1)$ e per $(x - 1)$;

b. scomporre il polinomio in fattori di 1° o di 2° grado.

Collegamenti con i capitoli precedenti

① Confrontare i seguenti teoremi esaminati in questo paragrafo:

a. Un polinomio di grado n:

$$a_n x^n + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

con n radici reali $x_1, x_2, \ldots, x_n$ può sempre essere scomposto in n fattori di 1° grado, cioè vale la seguente identità:

$$a_n x^n + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 =$$
$$a_n(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n)$$

b. Sviluppando un'espressione del tipo:

$$a_n(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n)$$

si ottiene sempre un polinomio di grado n con le n radici reali $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Spiegare perché i due teoremi sono l'uno l'inverso dell'altro.

(*Vedere il capitolo 4, paragrafo 3*)

La regola di Ruffini

Nel paragrafo 3 si è indicato il seguente procedimento per scomporre un polinomio $P(x)$ in fattori:

1. individuare un binomio $(x - a)$ per cui il polinomio sia divisibile;
2. effettuare la divisione fra $P(x) : (x - a)$ per individuare il quoziente $Q(x)$;
3. scrivere il polinomio scomposto in fattori nella forma:

$$P(x) = (x - a)Q(x)$$

Questo procedimento, che ha validità generale, può essere abbreviato esaminando la struttura che deve avere il quoziente $Q(x)$.

Il quoziente della divisione di un polinomio per un binomio del tipo $(x - a)$

Si può cominciare ad esaminare un caso particolare, che suggerisce delle conclusioni di carattere generale; è dato il polinomio:

$$P(x) = 2x^3 - 11x^2 + 17x - 6$$

e si è trovato che risulta:

$$P(3) = 0$$

e perciò il polinomio è divisibile per $(x-3)$.

Questo vuol dire che $P(x)$ si può scrivere nella forma:

$$P(x) = (x - 3)Q(x) \qquad (1)$$

dove $Q(x)$ è il polinomio quoziente da determinare con la divisione del polinomio $P(x)$ per $(x - 3)$.

Invece di effettuare la divisione, si può ragionare così:

1. $Q(x)(x - 3)$ deve essere un polinomio di 3° grado e perciò $Q(x)$ deve essere di 2° grado, cioè avere la forma:

   $$Q(x) = q_2x^2 + q_1x + q_0$$

   dove q_2, q_1 e q_0 sono tre coefficienti da determinare.

2. $Q(x)$ deve rendere vera l'uguaglianza (1) per ogni x, cioè:

   $$2x^3 - 11x^2 + 17x - 6 = (x - 3)(q_2x^2 + q_1x + q_0) \qquad (2)$$

3. Si sviluppa il secondo membro della (2) e si ottiene:

   $$(x - 3)(q_2x^2 + q_1x + q_0) = q_2x^3 + (q_1 - 3q_2)x^2 + (q_0 - 3q_1)x - 3q_0$$

   e quindi:

   $$2x^3 - 11x^2 + 17x - 6 = q_2x^3 + (q_1 - 3q_2)x^2 + (q_0 - 3q_1)x - 3q_0$$

4. Dire che l'uguaglianza ottenuta è vera per ogni x significa dire che i due polinomi hanno, ordinatamente, gli stessi coefficienti, e cioè:

$$\begin{cases} q_2 = 2 \\ q_1 - 3q_2 = -11 \\ q_0 - 3q_1 = 17 \\ -3q_0 = -6 \end{cases} \quad \text{da cui} \quad \begin{cases} q_2 = 2 \\ q_1 = -11 + 3q_2 \\ q_0 = 17 + 3q_1 \\ -6 + 3q_0 = 0 \end{cases}$$

5. Si ottiene così un sistema con tre incognite (q_2, q_1 e q_0) e quattro equazioni; il sistema è però particolarmente semplice da risolvere perché la prima equazione fornisce già l'incognita q_2 che, sostituita nella seconda equazione, permette di ricavare q_1 e quindi q_0 dalla terza equazione. Si ha dunque:

$$\begin{cases} q_2 = 2 \\ q_1 = -11 + 3 \cdot 2 = -5 \\ q_0 = 17 + 3(-5) = 2 \end{cases}$$

Ora occorre verificare che la soluzione ottenuta soddisfi anche l'ultima equazione:

$-6 + 3q_0 = 0$

Si trova:

$-6 + 3 \cdot 2 = 0$

e si conclude che il polinomio quoziente ha i coefficienti:

$q_2 = 2 \qquad q_1 = -5 \qquad q_0 = 2$

6. Si scrive il polinomio quoziente che è quindi:

$Q(x) = 2x^2 - 5x + 2$

La regola di Ruffini

Il procedimento ora esposto non è certo più breve della divisione di due polinomi, ma il sistema:

$$\begin{cases} q_2 = 2 \\ q_1 = -11 + 3q_2 \\ q_0 = 17 + 3q_1 \\ -6 + 3q_0 = 0 \end{cases}$$

mette in rilievo una notevole regolarità nella formazione dei coefficienti (q_2, q_1 e q_0) del polinomio quoziente $Q(x) = q_2x^2 + q_1x + q_0$ a partire da:

- i coefficienti (2, –11, 17 e –6) del polinomio dividendo $P(x)$
- la radice 3 del polinomio $P(x)$.

Si trova infatti che $Q(x)$ è un polinomio di 2° grado i cui coefficienti si trovano nel seguente modo:

1. dalla prima equazione del sistema:

   $$q_2 = 2$$

   si ricava il primo coefficiente q_2 del polinomio $Q(x)$, che è uguale al primo coefficiente (2) di $P(x)$;
2. dalla seconda equazione:

   $$q_1 = -11 + 3q_2$$

   si ricava il secondo coefficiente q_1 di $Q(x)$, addizionando al secondo coefficiente (–11) di $P(x)$ il prodotto di q_2 per la radice 3;
3. dalla terza equazione:

   $$q_0 = 17 + 3q_1$$

   si ricava il terzo coefficiente con la stessa regola, cioè si aggiunge al terzo coefficiente (17) di $P(x)$ il prodotto di q_1 per la radice 3;
4. l'ultima equazione del sistema:

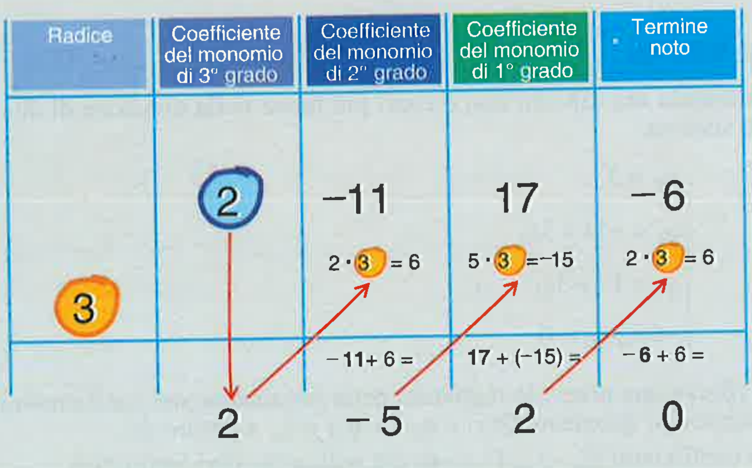
   $$-6 + 3q_0 = 0$$

   richiede di addizionare il termine noto (–6) di $P(x)$ al prodotto di q_0 per la radice 3, per verificare che la somma sia 0.

Ecco come questo procedimento può diventare più rapido disponendo i coefficienti di $P(x)$ e la radice 3 in uno schema grafico come quello di fig. 1 in cui compaiono:

- nella prima riga i coefficienti del polinomio $P(x)$, ordinato secondo le potenze decrescenti di x;
- più in basso, a sinistra, la radice 3;
- seguendo il procedimento indicato prima, si ottengono nell'ultima riga i coefficienti del polinomio $Q(x)$, ordinato secondo le potenze decrescenti di x.

Figura 1
La regola di Ruffini



Il procedimento appena indicato prende il nome di *regola di Ruffini*, dal nome del matematico italiano Paolo Ruffini (1765-1822), famoso per notevoli ricerche nel campo delle equazioni (vedi anche la scheda storica di p. 414).

La regola di Ruffini si può sempre applicare per calcolare i coefficienti del quoziente $Q(x)$, purché si tengano ben presenti tre avvertenze:

1. il divisore deve essere un binomio del tipo $(x - a)$;
2. i polinomi debbono essere tutti ordinati secondo le potenze decrescenti di x;
3. nello schema debbono essere scritti tutti i coefficienti di $P(x)$, anche quelli che valgono 0.

Regola di Ruffini e divisione dei polinomi a confronto

Vediamo ora due casi di scomposizione di polinomi in fattori per confrontare la regola di Ruffini con la divisione dei polinomi.

1. Scomporre in fattori il polinomio:

$$P(x) = x^3 - 1$$

Le radici intere del polinomio possono essere solo 1 e −1; si ha:

$$P(1) = 0 \qquad\qquad P(-1) = -2$$

si conclude che $P(x)$ ha una sola radice intera che vale 1 e perciò $P(x)$ è divisibile per $(x - 1)$.

Si deve ora calcolare il quoziente:

$$Q(x) = P(x) : (x - 1)$$

e si hanno a disposizione due procedimenti: la divisione dei polinomi e la regola di Ruffini.

A. Con la divisione dei polinomi si ha:

$$\begin{array}{r|l}
\mathbf{x^3 - 1} & \mathbf{x - 1} \\ \cline{2-2}
x^3 - x^2 & x^2 + x + 1 \\
\mathbf{x^2 - 1} & \\
x^2 - x & \\
\mathbf{x - 1} & \\
x - 1 & \\
\mathbf{0} &
\end{array}$$

B. Con la regola di Ruffini si procede nel modo seguente:

Radice	3° grado	2° grado	1° grado	Termine noto
	1	**0**	**0**	**−1**
1		1·1 = 1	1·1 = 1	1·1 = 1
		0 + 1 =	**0** + 1 =	**−1** + 1 = 0
	1	1	1	

Il polinomio di 2° grado che ha i coefficienti indicati è quindi:

$$Q(x) = x^2 + x + 1$$

In ambedue i casi si conclude che risulta:

$$x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$$

2. Scomporre in fattori il polinomio:

$$P(x) = x^5 - 2x^4 - 3x^3 + 6x^2 + 2x - 4$$

Le radici intere del polinomio possono essere:

$$\pm 1 \qquad \pm 2 \qquad \pm 4$$

e si ha:

$$P(-1) = 0 \qquad P(1) = 0 \qquad P(2) = 0$$

mentre in corrispondenza degli altri tre numeri il polinomio non vale 0. Si conclude che il polinomio di 5° grado $P(x)$ ha tre radici intere che valgono :

$$-1 \qquad 1 \qquad 2$$

Perciò $P(x)$ è divisibile per i seguenti binomi:

$$[x - (-1)] = (x + 1) \qquad (x - 1) \qquad (x - 2)$$

Dunque, il polinomio $P(x)$ può essere scritto nella forma seguente:

$$P(x) = (x + 1)(x - 1)(x - 2)Q(x) \qquad (1)$$

in cui resta da determinare $Q(x)$.

Ecco allora la divisione dei polinomi a confronto con la regola di Ruffini.

A. La divisione si può eseguire con qualunque coppia di polinomi, perciò si può procedere così:

- nella formula (1) si sviluppano i prodotti indicati, scrivendo:

$$P(x) = (x^3 - 2x^2 - x + 2)Q(x)$$

- si calcola $Q(x)$ con la divisione di polinomi e si ottiene:

$$\begin{array}{r|l}
x^5 - 2x^4 - 3x^3 + 6x^2 + 2x - 4 & x^3 - 2x^2 - x + 2 \\ \cline{2-2}
x^5 - 2x^4 \ \ - x^3 + 2x^2 \qquad\qquad & x^2 - 2 \\
\mathbf{-2x^3} + 4x^2 + 2x - 4 & \\
-2x^3 + 4x^2 + 2x - 4 & \\
\mathbf{0} &
\end{array}$$

- il polinomio $P(x)$ scomposto in fattori di 1° o 2° grado è dunque:

$$P(x) = (x + 1)(x - 1)(x - 2)(x^2 - 2)$$

B. La regola di Ruffini fornisce un procedimento decisamente più lungo, perché bisogna compilare tre schemi grafici successivi. Ecco come si procede:

I. Si calcola il quoziente della divisione di $P(x)$ per $(x + 1)$

	1	−2	−3	6	2	−4
−1		−1	3	0	−6	4
	1	−3	0	6	−4	0

Si ottiene un primo quoziente:

$$Q(x) = x^4 - 3x^3 + 0x^2 + 6x - 4$$

e quindi si ha:

$$P(x) = (x + 1)(x^4 - 3x^3 + 6x - 4)$$

II. Si calcola il quoziente della divisione di $Q(x)$ per $(x - 1)$

	1	−3	0	6	−4
+1		+1	−2	−2	4
	1	−2	−2	4	0

Si ottiene un secondo quoziente:

$$Q'(x) = x^3 - 2x^2 - 2x + 4$$

e quindi si ha:

$$P(x) = (x + 1)(x - 1)(x^3 - 2x^2 - 2x + 4)$$

III. Si calcola il quoziente della divisione di $Q'(x)$ per $(x - 2)$

	1	−2	−2	4
2		2	0	−4
	1	0	−2	0

Si ottiene l'ultimo quoziente:

$$Q''(x) = x^2 - 2$$

Si scrive il polinomio scomposto in fattori nella forma seguente:

$$P(x) = (x + 1)(x - 1)(x - 2)(x^2 - 2)$$

Si conclude che:

1. *La divisione fra due polinomi è un procedimento del tutto generale, mentre la regola di Ruffini si può applicare solo se il divisore è un binomio del tipo* (x − a);
2. *La regola di Ruffini richiede di imparare un procedimento che solo in alcuni casi rende i calcoli più brevi.*

4 Scomporre in fattori un polinomio

Le radici reali di un polinomio di grado n si cercano scomponendo il polinomio in fattori di 1° o 2° grado

Nei paragrafi precedenti si sono trovati i seguenti risultati:

a. un polinomio di grado n ha al massimo n radici reali, cioè un'equazione di grado n ha al massimo n soluzioni reali;

b. solo per le equazioni di 2° grado si trova una formula risolutiva facile da applicare.

La risoluzione delle equazioni di grado superiore al 2° offre dunque notevoli difficoltà e conduce a ricercare dei metodi semplici per risolvere almeno alcune equazioni.

Un metodo può essere ricavato da alcune equazioni esaminate finora.

Ecco un esempio su cui riflettere. L'equazione di 3° grado:

$$x^3 + 3x^2 - 10x = 0$$

può essere scritta in altra forma, perché nel polinomio al primo membro si può raccogliere il fattore comune x. Si ha:

$$x^3 + 3x^2 - 10x = x(x^2 + 3x - 10)$$

e quindi l'equazione può essere scritta nella forma:

$$x(x^2 + 3x - 10) = 0$$

In base al principio di annullamento del prodotto si è allora condotti a risolvere le due equazioni seguenti:

$$x = 0$$

$$x^2 + 3x - 10 = 0$$

Le due equazioni sono risolubili perché sono una di 1° e una di 2° grado.

Ecco allora *un procedimento per risolvere le equazioni di grado superiore al 2°: scomporre il polinomio al primo membro in fattori di 1° e 2° grado.*

Metodi per scomporre un polinomio in fattori

Da quanto si è detto in questo capitolo si può ricavare il seguente metodo per scomporre un polinomio in fattori:

1. Dividere il polinomio per binomi del tipo $(x - a)$, dove a è una radice del polinomio.

Questo metodo presuppone però di conoscere qualche radice reale del polinomio, cosa non sempre possibile. Perciò conviene richiamare anche altri procedimenti per scomporre un polinomio in fattori e cioè:

2. Raccogliere un fattore comune (vedi il primo volume, p. 264);
3. Valersi del prodotto notevole (vedi il primo volume, p. 266);
4. Valersi delle potenze di un binomio (vedi il primo volume, p. 269);
5. Valersi della scomposizione di un trinomio di 2° grado (vedi il capitolo settimo, p. 322, di questo volume).

Ecco qualche applicazione di questi metodi.

Fattorizzare un polinomio dividendolo per $(x - a)$

Il procedimento esposto nei paragrafi 2 e 3 di questo capitolo consiste nel percorrere i seguenti passi, a partire da un polinomio $P(x)$:

A. scoprire se si trova una radice a del polinomio, tenendo presente che le radici intere del polinomio si possono trovare solo fra i divisori del termine noto;

B. in caso affermativo, eseguire la divisione $P(x) : (x - a)$.

Ecco qualche esempio di applicazione di questo metodo.

1. Il polinomio:

$$P(x) = x^3 + 1$$

può avere come radici intere solo i numeri ± 1 e risulta:

$$P(1) = 2 \qquad P(-1) = 0$$

perciò il polinomio è divisibile solo per:

$$[x - (-1)] = x + 1$$

Effettuando la divisione dei polinomi si ottiene:

$$\begin{array}{r|l} \mathbf{x^3 + 1} & x + 1 \\ \cline{2-2} x^3 + x^2 & x^2 - x + 1 \\ \mathbf{-x^2 + 1} & \\ -x^2 - x & \\ \mathbf{x + 1} & \\ x + 1 & \\ \mathbf{0} & \end{array}$$

Si ha quindi:

$$x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1)$$

2. Un analogo procedimento si può seguire a partire dal polinomio:

$$P(x) = x^3 + 8$$

ottenendo:

$$x^3 + 8 = (x + 2)(x^2 - 2x + 4)$$

ossia:

$$x^3 + 2^3 = (x + 2)(x^2 - 2x + 2^2)$$

3. Ripetendo il procedimento, più in generale, a partire da un polinomio del tipo $x^3 + a^3$, si ottiene:

$$x^3 + a^3 = (x + a)(x^2 - ax + a^2)$$

Scomporre in fattori raccogliendo un fattore comune

Il procedimento per scomporre un polinomio in fattori raccogliendo un fattore comune è basato sulla *proprietà distributiva*, che può essere scritta nel modo seguente:

$$ab + ac = a(b + c)$$

Il procedimento, già richiamato per scomporre il polinomio $x^3 + 3x^2 - 10x$, consiste nel percorrere i seguenti passi:

A. scoprire se è presente un fattore comune,

B. in caso affermativo, raccogliere il fattore comune.

Ecco due esempi di applicazione:

$$7x^4 + 9x^3 - x^2 = 7x^2 \cdot \mathbf{x^2} + 9x \cdot \mathbf{x^2} - 1 \cdot \mathbf{x^2} =$$
$$= \mathbf{x^2}(7x^2 + 9x - 1)$$

$$x^3 + x^2 + 2x + 2 = x^2(\mathbf{x + 1}) + 2(\mathbf{x + 1}) =$$
$$= (x^2 + 2)(\mathbf{x + 1})$$

Scomporre un polinomio valendosi del prodotto notevole

Il prodotto notevole esposto nel primo volume (p. 266) può essere scritto nella forma seguente:

$$(a^2 - b^2) = (a + b)(a - b)$$

Questa formula suggerisce i seguenti passi per scomporre un polinomio in fattori:

A. scoprire se è presente la differenza di due quadrati (a^2 e b^2);

B. in caso affermativo, scrivere la somma delle basi (a e b) moltiplicata per la loro differenza.

Ecco qualche esempio di applicazione:

$$x^4 - 2 = (\mathbf{x^2})^2 - (\sqrt{\mathbf{2}})^2 = (\mathbf{x^2} + \sqrt{\mathbf{2}})(\mathbf{x^2} - \sqrt{\mathbf{2}});$$

$$3 - x^4 = (\sqrt{\mathbf{3}})^2 - (\mathbf{x^2})^2 = (\sqrt{\mathbf{3}} + \mathbf{x^2})(\sqrt{\mathbf{3}} - \mathbf{x^2})$$

Scomporre un polinomio valendosi delle potenze di un binomio

Le potenze di un binomio del tipo $(a + b)$ che più frequentemente ricorrono possono essere scritte nella forma seguente:

Quadrato di un binomio:
$a^2 + b^2 + 2ab = (a + b)^2$

Cubo di un binomio:
$a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2 = (a+b)^3$

I passi per scomporre in fattori un polinomio valendosi del quadrato di un binomio sono allora i seguenti:

A. scoprire se è presente la somma di due quadrati (a^2 e b^2) più il doppio prodotto delle basi ($2ab$);

B. scrivere la somma delle basi $(a + b)$ elevata al quadrato.

Ecco qualche esempio di applicazione:

$$x^4 + 1 + 2x^2 = (\mathbf{x^2})^2 + \mathbf{1}^2 + \mathbf{2 \cdot 1 \cdot x^2} = (\mathbf{x^2 + 1})^2$$
$$x^4 + 9 - 6x^2 = (\mathbf{x^2})^2 + (\mathbf{-3})^2 + \mathbf{2 \cdot (-3) \cdot x^2} =$$
$$= [x^2 + (-3)]^2 = (\mathbf{x^2 - 3})^2$$

Analogamente, per scomporre un polinomio in fattori valendosi del cubo di un binomio, si procede nel modo seguente:

A. scoprire se è presente la somma di due cubi (a^3 e b^3) più i corrispondenti tripli prodotti ($3a^2b + 3ab^2$);

B. scrivere la somma delle basi $(a + b)$ elevata al cubo.

Ecco due esempi di applicazione:

$$x^3 + 1 + 3x^2 + 3x = \mathbf{x^3 + 1^3 + 3 \cdot x^2 \cdot 1 + 3 \cdot x \cdot 1^2} = \mathbf{(x + 1)^3}$$

$$x^3 - 8 - 6x^2 + 12x = \mathbf{= x^3 + (-2)^3 + 3 \cdot (-2) \cdot x^2 + 3 \cdot (-2)^2 x = (x - 2)^3}$$

Scomporre in fattori un polinomio biquadratico

Un trinomio di 2° grado con le radici reali x_1 e x_2 si può scomporre in fattori scrivendo:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2) \qquad (1)$$

Questa scomposizione in fattori si può estendere a polinomi della forma seguente:

$$ax^4 + bx^2 + c = a(x^2)^2 + bx^2 + c \qquad (2)$$

che sono anche detti *polinomi biquadratici*.
Ecco un esempio di polinomio biquadratico:

$$2x^4 - 7x^2 + 3$$

che può essere scomposto in fattori con il seguente procedimento.

1. Per raccordarsi più facilmente al caso (1) si introduce un'altra lettera, per esempio z, data da:

   $$z = x^2 \qquad (3)$$

   in modo che risulta

   $$x^4 = (x^2)^2 = z^2$$

   e il polinomio dato assume la forma del seguente trinomio di 2° grado:

   $$2z^2 - 7z + 3 \qquad (4)$$

2. Si determinano le radici del trinomio di 2° grado, risolvendo la corrispondente equazione; si ha:

   $$2z^2 - 7z + 3 = 0$$

   con

   $$\Delta = 25 > 0$$

   Perciò l'equazione ha le soluzioni date da:

   $$z = \frac{7 \pm \sqrt{25}}{4} = \frac{7 \pm 5}{4}$$

   da cui:

   $$z_1 = \frac{1}{2} \qquad z_2 = 3$$

3. Dato che si sono ottenute due radici reali z_1 e z_2, si scompone in fattori il trinomio (4) scrivendo

   $$2z^2 - 7z + 3 = 2\left(z - \frac{1}{2}\right)(z - 3)$$

4. Si ricorda il significato di z indicato dalla (3) e si arriva alla scomposizione in fattori del polinomio biquadratico data da:

   $$2x^4 - 7x^2 + 3 = 2\left(x^2 - \frac{1}{2}\right)(x^2 - 3)$$

L'esempio ora esaminato suggerisce un procedimento di carattere generale da ripetere a partire da un polinomio biquadratico del tipo

$$ax^4 + bx^2 + c = a(x^2)^2 + bx^2 + c \qquad (2)$$

Il procedimento è basato sui passi seguenti:

1. Si introduce un'altra lettera, per esempio z, data da:

   $$z = x^2 \qquad (3)$$

   in modo da scrivere il polinomio (2) nella forma del seguente trinomio di 2° grado:

   $$az^2 + bz + c \qquad (5)$$

2. Si determinano le radici del trinomio di 2° grado, risolvendo la corrispondente equazione; si ha:

   $$az^2 + bz + c = 0$$

   con:

   $$\Delta = b^2 - 4ac$$

   Se risulta $\Delta > 0$, si ottengono le soluzioni reali z_1 e z_2 date da:

   $$z = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

3. Se si sono ottenute due radici reali z_1 e z_2, si scompone in fattori il trinomio (5) scrivendo:

   $$az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$$

4. Si ricorda il significato di z indicato dalla (3) e si arriva alla scomposizione in fattori del polinomio biquadratico data da:

   $$ax^4 + bx^2 + c = a(x^2 - z_1)(x^2 - z_2)$$

Verifiche

Conoscenze

① Spiegare il significato dei termini seguenti:

- «polinomio scomposto in fattori di 1° o 2° grado»;
- «polinomio biquadratico».

② Elencare i metodi, richiamati in questo paragrafo, per scomporre un polinomio in fattori.

Comprensione

① Spiegare perché la scomposizione di un polinomio in fattori è utile per risolvere le equazioni di grado superiore al 2°.

② Esaminare i seguenti polinomi e spiegare perché *non* si riescono a scomporre in fattori con i metodi esposti in questo paragrafo:

$x^4 + 1$

$x^4 + 2x^2 + 5$

Applicazioni

① Scomporre in fattori i seguenti polinomi, precisando il procedimento seguito.

$x^4 - 4x^3 + 3x^2$ $\qquad$ $x^4 - 4x^2 + 3$

② Scomporre in fattori i seguenti polinomi, precisando il procedimento seguito.

$x^4 - 4x^2 + 4$ $\qquad$ $x^4 - 4$

③ Scomporre in fattori i seguenti polinomi, precisando il procedimento seguito.

$x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ $\qquad$ $x^3 - 1$

④ Scomporre in fattori i seguenti polinomi, precisando il procedimento seguito.

$x^3 + 6x^2 + 12x + 8$ $\qquad$ $x^3 + 3x^2 + 6x + 8$

Collegamento con il primo volume

① Come si ricava il prodotto notevole richiamato in questo paragrafo?
(*Vedere p. 266*)

② Come si ricavano le potenze del binomio?
(*Vedere p. 269*)

5 Le radici multiple di un polinomio

Nella fattorizzazione di un numero può comparire più volte lo stesso fattore

Nei paragrafi 2 e 3 si è trovato che la scomposizione in fattori di un polinomio presenta molte analogie con la scomposizione in fattori di un numero intero. Ecco una situazione da esaminare per approfondire questa analogia: molti numeri interi, una volta scomposti in fattori, mostrano dei fattori che si presentano più volte. Un primo esempio può essere la scomposizione in fattori del numero 75, organizzata nel modo seguente:

1. si trova che 75 è divisibile per 5, si effettua la divisione per 5 e si trova:

$$75 : 5 = 15 \qquad \text{da cui} \qquad 75 = 5 \cdot 15 \qquad (1)$$

2. si trova che il quoziente 15 è ancora divisibile per 5, si effettua di nuovo la divisione per 5 e si trova:

$$15 : 5 = 3 \qquad \text{da cui} \qquad 15 = 5 \cdot 3 \qquad (2)$$

3. considerando insieme la (1) e la (2) si scrive:

$$75 = 5 \cdot 5 \cdot 3 = 5^2 \cdot 3$$

Si osserva dunque che nella scomposizione in fattori di 75 è presente due volte il fattore 5, perché è divisibile per 5 sia il numero 75 che il quoziente della divisione 75 : 5.

E così, scomponendo in fattori 875, si trova il fattore 5 ripetuto tre volte, cioè si trova:

$$875 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 = 5^3 \cdot 7$$

perché sono divisibili per 5:

- il numero 875
- il quoziente $q' = 875 : 5 = 175$
- il secondo quoziente $q'' = 175 : 5 = 35$

Nella fattorizzazione di un polinomio può comparire più volte lo stesso fattore

Anche scomponendo in fattori un polinomio si può trovare lo stesso fattore ripetuto più volte; ecco un esempio.

$$P(x) = x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 4x + 2$$

è divisibile per $(x - 1)$, dato che risulta:

$$P(1) = 0$$

Effettuando la divisione $P(x) : (x - 1)$ si ottiene il quoziente $Q(x)$ dato da:

$$Q(x) = x^3 - x^2 + 2x - 2$$

e quindi si scrive:

$$P(x) = (x - 1)Q(x) \qquad (3)$$

Ma $Q(x)$ è ancora divisibile per $(x - 1)$, dato che risulta:

$$Q(1) = 0$$

Calcolando poi la divisione $Q(x) : (x - 1)$, si ottiene:

$$Q(x) : (x - 1) = x^2 + 2$$

e quindi:

$$Q(x) = (x - 1)(x^2 + 2) \qquad (4)$$

Ora, il fattore $x^2 + 2$ è un trinomio di 2° grado senza radici reali, che non può essere scomposto in fattori; perciò il procedimento di fattorizzazione si ferma e, considerando la (3) e la (4), si scrive:

$$P(x) = (x - 1)(x - 1)(x^2 + 2)$$

ossia:

$$x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 4x + 2 = (x - 1)^2(x^2 + 2)$$

Radici multiple di un polinomio

Si è dunque trovato che nella fattorizzazione di:

$$P(x) = x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 4x + 2$$

è presente due volte il fattore $(x - 1)$, perché è divisibile per $(x - 1)$ sia il polinomio $P(x)$ che il quoziente $Q(x) = P(x) : (x - 1)$.
Questo vuol dire che risulta:

$$P(1) = 0 \qquad \text{e} \qquad Q(1) = 0$$

cioè che il numero 1 è radice sia del polinomio $P(x)$ che del quoziente $Q(x) = P(x) : (x - 1)$.
Si dice in tal caso che la radice $x_1 = 1$ deve essere contata due volte o anche che *è una radice doppia* per il polinomio $P(x)$.
E così, scomponendo in fattori il polinomio:

$$P(x) = x^5 - 3x^4 + 5x^3 - 7x^2 + 6x - 2$$

si trova il fattore $(x - 1)$ tre volte, cioè si ha:

$$x^5 - 3x^4 + 5x^3 - 7x^2 + 6x - 2 = (x - 1)^3 (x^2 + 2)$$

perché sono divisibili per $(x - 1)$:

- il polinomio $P(x)$
- il quoziente
  $Q'(x) = P(x) : (x - 1) = x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 4x + 2$
- il secondo quoziente $Q''(x) = Q'(x) : (x-1) = x^3 - x^2 + 2x - 2$

In tal caso si dice che la *radice multipla* $x_1 = 1$ deve essere contata 3 volte.
Gli esempi suggeriscono un risultato di carattere generale: quando nella fattorizzazione di un polinomio compare un fattore del tipo $(x-x_1)^m$, il polinomio ha la radice multipla $x = x_1$.
È chiaro allora come «costruire» un polinomio che presenta una radice x_1 multipla: basta inserire, fra i fattori che lo compongono, un'espressione del tipo $(x - x_1)^m$; così la radice x_1 deve essere contata m volte.
Ecco qualche altro esempio di polinomi con radici multiple.

$P(x) = (x - 3)^2 (x^2 + 1)$
ha la radice $x_1 = 3$ contata 2 volte

$P(x) = (x + 1)^3 (x^2 + 5)$
ha la radice $x_1 = -1$ contata 3 volte

$P(x) = (x + 1)^2 (x - 3)^2$
ha le radici $x_1 = -1$ e $x_2 = 3$ contate 2 volte

Verifiche

Conoscenze

① Spiegare il significato delle due frasi seguenti:
- «un polinomio $P(x)$ ha la radice x_1 contata due volte»;
- «un polinomio $P(x)$ ha la radice x_1 multipla».

Comprensione

① Un polinomio $P(x)$ ha la radice $x_1 = 3$ contata quattro volte; di quali polinomi è radice il numero 3?

② Un polinomio di 4° grado può avere una radice contata 5 volte?

Applicazioni

① Costruire un polinomio che abbia la radice $x_1 = 0$ contata tre volte e la radice $x_2 = 1$ contata due volte.

② Fra i seguenti due polinomi indicare quello che ha delle radici multiple, motivando adeguatamente la scelta.

$(x - 1)^2 (x + 1)^2$

$(x^2 - 1)(x^2 + 1)$

Collegamento con il paragrafo precedente

① Esaminare i seguenti due polinomi:

$(x + 1)^3$

$x^3 + 1$

Risolvere i seguenti quesiti:

a. scomporre i due polinomi in fattori;
b. spiegare perché solo nel primo polinomio la radice $x_1 = -1$ deve essere contata tre volte.

② Esaminare i seguenti due polinomi:

$(x - 1)^4$

$x^4 - 1$

Risolvere i seguenti quesiti:

a. scomporre i due polinomi in fattori;
b. spiegare perché solo nel primo polinomio la radice $x_1 = 1$ deve essere contata quattro volte.

Risolvere equazioni di grado superiore al 2°

Nel paragrafo 4 è indicato il metodo per risolvere le equazioni di grado superiore al 2°: scomporre il polinomio al primo membro in fattori di 1° e 2° grado.
Sono quindi descritti cinque metodi per scomporre in fattori un polinomio. Questi metodi permettono di risolvere alcune categorie di equazioni che vengono esaminate in questa «Attività».

A. Equazioni di cui si individua una soluzione

Attività 1

Risolvere l'equazione:

$$x^3 + 1 = 0$$

L'equazione ha la soluzione intera $x_1 = \ldots\ldots$
Scomponendo in fattori il polinomio al primo membro, si ha poi:

$$x^3 + 1 = (\ldots\ldots)\ (\ldots\ldots\ldots\ldots)$$

Quindi l'equazione diventa:

$$(x + 1)\ (x^2 - x + 1) = 0$$

Si è condotti così a risolvere le seguenti due equazioni:

$x + 1 = 0$ *che dà la soluzione* $x_1 = -1$

$x^2 - x + 1 = 0$ *che dà* $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{\ldots\ldots}}{2}$ *e perciò non ha* ....

Si conclude che l'equazione ha la sola soluzione reale $x_1 = -1$.

Attività 2

Risolvere l'equazione:

$$x^3 + 8 = 0$$

B. Equazioni in cui si individua un fattore comune

Attività 3

Risolvere l'equazione:

$$x^3 + x^2 + 2x^2 + 2 = 0$$

Scomponendo in fattori il polinomio al primo membro, si ha:

$$x^3 + x^2 + 2x + 2 = (\ldots\ldots\ldots\ldots)(\ldots\ldots\ldots\ldots)$$

Quindi l'equazione diventa:

$$(x + 1)(x^2 + 2) = 0$$

Si è condotti così a risolvere le seguenti due equazioni:

$x + 1 = 0$ *ossia* $x = -1$ *che ha la soluzione* ....

$x^2 + 2 = 0$ *ossia* $x^2 = -2$ *che non ha* ....

Si conclude che l'equazione ha la soluzione $x = -1$.

Attività 4

Risolvere l'equazione:

$$x^3 - x^2 + 2x - 2 = 0$$

C. Equazioni in cui si individua un prodotto notevole

Attività 5

Risolvere l'equazione:

$$x^4 - 2 = 0$$

Scomponendo in fattori il polinomio al primo membro, si ha:

$$x^4 - 2 = (\ldots\ldots\ldots\ldots)(\ldots\ldots\ldots\ldots)$$

Quindi l'equazione diventa:

$$(x^2 + \sqrt{2})(x^2 - \sqrt{2}) = 0$$

Si è condotti così a risolvere le seguenti due equazioni:

$x^2 + \sqrt{2} = 0$ *ossia* $x^2 = -\sqrt{2}$ *che non ha* ....

$x^2 - \sqrt{2} = 0$ *ossia* $x^2 = \sqrt{2}$ *da cui* $x = \pm$ ....

Si conclude che l'equazione ha due sole soluzioni reali:

$$x_1 = -\sqrt[4]{2} \qquad x_2 = \sqrt[4]{2}$$

Attività 6

Risolvere l'equazione:

$$x^4 - 5 = 0$$

D. Equazioni in cui si individua la potenza di un binomio

Attività 7

Risolvere l'equazione:

$$x^3 + 1 + 3x^2 + 3x = 0$$

Scomponendo in fattori il polinomio al primo membro, si ha:

$$x^3 + 1 + 3x^2 + 3x = (\ldots\ldots\ldots\ldots)^3$$

Quindi l'equazione diventa:

$$(x + 1)^3 = 0 \qquad (1)$$

Si è condotti così a risolvere la seguente equazione:

$$x + 1 = 0 \quad \textit{che dà} \qquad x = -1$$

Ma la scomposizione in fattori (1) fa capire che la soluzione ottenuta deve essere contata tre volte e perciò l'equazione ha le tre soluzioni coincidenti:

$$x_1 = x_2 = x_3 = -1$$

Attività 8

Risolvere l'equazione:

$$x^3 - 8 - 6x^2 + 12x = 0$$

E. Equazioni biquadratiche

Attività 9

Si tratta di equazioni ottenute uguagliando a 0 un polinomio biquadratico. Risolvere la seguente equazione:

$$2x^4 - 7x^2 + 3 = 0$$

Scomponendo in fattori il polinomio al primo membro, si ha:

$$2x^4 - 7x^2 + 3 = 2(\ldots\ldots\ldots\ldots)(\ldots\ldots\ldots\ldots)$$

Quindi l'equazione diventa:

$$2\left(x^2 - \frac{1}{2}\right)\left(x^2 - 3\right) = 0$$

Si è condotti così a risolvere le seguenti equazioni:

$$x^2 - \frac{1}{2} = 0 \quad \textit{ossia} \quad x^2 = \frac{1}{2} \quad \textit{che dà} \qquad x = \pm\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x^2 - 3 = 0 \quad \textit{ossia} \quad x^2 = 3 \quad \textit{che dà} \qquad x = \pm\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Si conclude che l'equazione ha le quattro soluzioni reali:

$$x_1 = -\sqrt{3} \qquad x_2 = -\sqrt{\frac{1}{2}} \qquad x_3 = \sqrt{\frac{1}{2}} \qquad x_4 = \sqrt{3}$$

Attività 10

Risolvere l'equazione:

$$x^4 + 3x^2 - 10 = 0$$

F. Equazioni trinomie

Il procedimento che utilizza la scomposizione in fattori del trinomio di 2° grado può essere generalizzato alle equazioni del tipo:

$$ax^{2n} + bx^n + c = 0 \qquad (2)$$

Infatti, introducendo la lettera:

$$z = x^n$$

il polinomio al primo membro diventa del tipo:

$$az^2 + bz + c$$

Se allora il trinomio di 2° grado ha le radici reali z_1 e z_2, si ha:

$$az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$$

e quindi l'equazione (2) diventa:

$$a(x^n - z_1)(x^n - z_2) = 0$$

Si è così ricondotti a risolvere due equazioni di grado più basso.

Attività 11

Risolvere l'equazione:

$$x^6 + 9x^3 + 8 = 0$$

L'equazione è trinomia perché si può scrivere nella forma:

$$(x^3)^2 + 9x^3 + 8 = 0$$

Introducendo la lettera:

$$z = \dots\dots\dots$$

si è condotti a risolvere l'equazione:

$$z^2 + 9z + 8 = 0$$

che dà le soluzioni:

$$z = \frac{-9 \pm \dots\dots\dots}{2} = \dots\dots\dots\dots\dots$$

da cui:

$$z_1 = -8 \qquad z_2 = -1$$

Si ha allora:

$$z^2 + 9z + 8 = \dots\dots\dots\dots\dots$$

e quindi:

$$x^6 + 9x^3 + 8 = (\dots\dots\dots\dots\dots)\,(\dots\dots\dots\dots\dots)$$

L'equazione diventa dunque:

$$(x^3 + 8)(x^3 + 1) = 0$$

Si è condotti così a risolvere le seguenti equazioni di 3° grado:

$$(x^3 + 8) = 0 \;\; \textit{ossia} \;\; (x + 2)(x^2 - 2x + 4) = 0 \;\; \textit{che dà} \;\; x_1 = -2$$

$$(x^3 + 1) = 0 \;\; \textit{ossia} \;\; (x + 1)(x^2 - x + 1) = 0 \;\; \textit{che dà} \;\; x_2 = -1$$

Si conclude che l'equazione ha solo due soluzioni reali:

$$x_1 = -2, \qquad x_2 = -1$$

Attività 12

Risolvere l'equazione:

$$2x^8 - 7x^4 + 3 = 0$$

Equazioni e formule risolutive

Le equazioni nell'antica Grecia

Abbiamo visto nel primo volume (pp. 240-243) che solo intorno al Cinquecento fu introdotto il calcolo letterale; così, per millenni, le equazioni che traducevano i più vari problemi furono espresse in forma discorsiva o in forma geometrica.

Queste forme non simboliche rendevano difficile anche la risoluzione delle equazioni di 1° grado, e portavano a procedimenti molto laboriosi quando un problema conduceva a equazioni di 2° grado o di grado più elevato.

Per avere un'idea di queste difficoltà basta riprendere dagli *Elementi* di Euclide (scritti intorno al 300 a.C.) il procedimento per scrivere e risolvere quella che con il calcolo letterale diventa un'equazione di 2° grado.

Euclide propone un problema di questo tipo: «Applicare al segmento AD = 2 un rettangolo FGKD equivalente al quadrato di lato AD ed eccedente per un quadrato».

Con la fig. 1*a* si riesce a orientarsi, anche se con fatica, in questo problema: indicata con x la lunghezza di AF, si costruisce il «quadrato eccedente» AFGH, che ha area x^2; si prolunga GH, fino ad incontrare DC in K e si disegna il rettangolo FGKD. Questo rettangolo, che ha l'area S data da (fig. 1*b*):

$$S = x^2 + 2 \cdot x$$

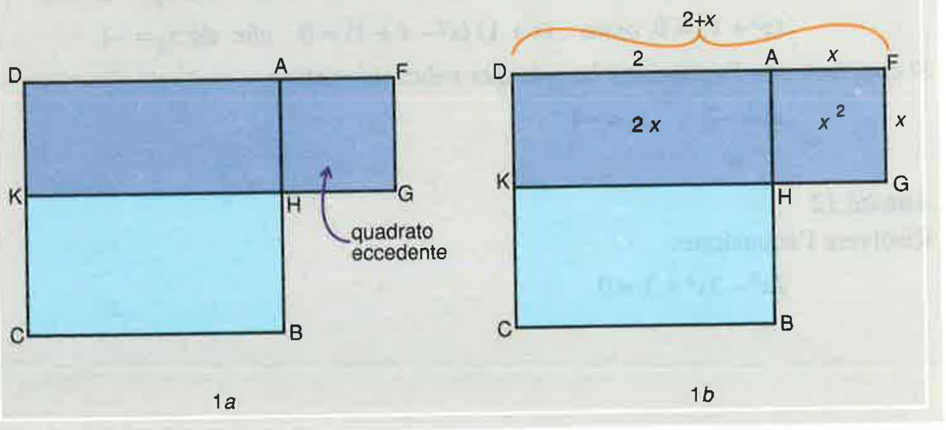
deve essere equivalente al quadrato di lato 2 e perciò deve risultare:

$$S = 4$$

Il problema si traduce dunque, nel linguaggio dell'algebra, con la frase: risolvere l'equazione:

$$x^2 + 2 \cdot x = 4 \text{ ossia } \quad x^2 + 2x - 4 = 0$$

Figura 1
Un problema posto da Euclide



A questo punto noi siamo abituati a risolvere l'equazione con la formula risolutiva, trovando le due soluzioni:

$$x_1 = -1 - \sqrt{5} \qquad x_2 = -1 + \sqrt{5}$$

Di queste soluzioni solo la seconda, che è positiva, risolve il problema.

Ecco invece come procedeva Euclide per risolvere il problema con la sola geometria (fig. 2*a*):

- disegnava il quadrato ABCD con il lato AD lungo 2;
- dimezzava il segmento AD con il punto E;
- costruiva il segmento EB;
- prolungava DA fino al punto F in modo che risultasse EF = EB;
- completava il quadrato AFGH;
- prolungava GH fino ad incontrare DC in K, disegnando così il rettangolo richiesto.

La fig. 2*b* mostra che, in questo modo, si arriva a costruire proprio il segmento:

$$AF = \sqrt{5} - 1$$

Con procedimenti geometrici di questo tipo si risolvevano problemi anche molto complicati, che però non avevano generalmente alcuna utilità pratica: la matematica era per gli antichi greci soprattutto pura indagine intellettuale e lo scopo era quello di formare il pensiero logico.

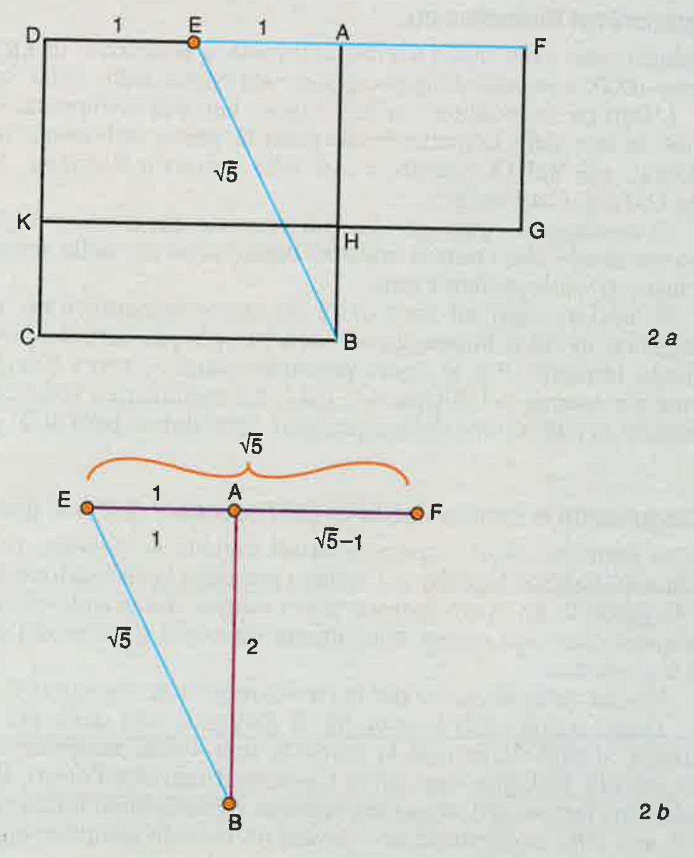


Figura 2
La risoluzione geometrica del problema di Euclide

Le equazioni nella matematica islamica

Tutt'altra mentalità sembra emergere dalle opere dei matematici arabi intorno al IX secolo d.C.

In uno dei libri più famosi di quell'epoca, intitolato *Al-jabr* (da cui la parola «algebra»), il suo autore, al-Khuwarizmi, dice di aver scritto il libro perché era stato invitato «...a comporre una breve opera sul calcolo per mezzo di complementazione e di riduzione, limitandosi a quegli aspetti più facili e più utili della matematica di cui ci si serve costantemente nei casi di eredità, donazioni, distruzioni, sentenze, commerci e in tutti gli altri affari umani».

Non si sa quale sia esattamente il significato dei termini qui tradotti con «complementazione e riduzione», ma si ipotizza che si riferisca a due metodi utili per risolvere le equazioni di 1° grado: trasportare termini da un membro all'altro e sommare i termini simili.

Nel libro di al-Khuwarizmi si risolvono le equazioni senza valersi delle lettere x e x^2, ma parlando invece di «radici» e «quadrati». Eppure vi si trova la risoluzione di sei tipi di equazioni di 2° grado, risoluzione che consiste sempre nella «ricetta» per trovare le soluzioni.

Dopo la risoluzione delle equazioni, l'*Algebra* presenta però un'affermazione di tutt'altro tono: «Abbiamo detto abbastanza per quanto riguarda i sei tipi di equazioni. Ora però è necessario dimostrare geometricamente la verità di quei medesimi problemi che abbiamo spiegato con i numeri».

Questo passo ricorda lo spirito greco e suggerisce un'immagine di una cultura araba molto viva, che non è solo pratica, ma piuttosto sintesi di vari interessi e attività.

Le equazioni nel Rinascimento

La cultura così viva dell'Oriente comincia a penetrare in Occidente intorno all'anno 1000, a seguito della precedente invasione araba della Spagna.

L'Europa, a contatto con una cultura ben più sviluppata, sembra scuotersi e, come in una gara impaziente, sorgono le prime università: a Salerno (per la medicina), già nel IX secolo, e nel XIII secolo a Bologna, Napoli, Padova, Parigi, Oxford, Cambridge...

Si studiano le opere greche che vengono tramandate dagli arabi, si vuole conoscere quello che i popoli orientali hanno prodotto nelle scienze, nelle lettere, nelle arti e si vuole andare avanti.

Si assiste così ad un fiorire di opere matematiche, centrate spesso sull'algebra, in cui il linguaggio diventa sempre più sintetico, evolvendosi verso il calcolo letterale. Fra le opere più interessanti si trova l'*Arithmetica integra* (Aritmetica intera) pubblicata nel 1544 dal matematico tedesco Michael Stifel, che espone la risoluzione delle equazioni, fermandosi però al 2° grado.

Nel Cinquecento le formule risolutive delle equazioni di 3° e 4° grado

Solo un anno più tardi l'opera di Stifel diventa sorpassata, perché nel 1545 il matematico italiano Gerolamo Cardano pubblica la risoluzione delle equazioni di 3° e 4° grado in un'opera famosa: l'*Ars magna* (La grande arte). Tanto famosa è stata quest'opera da essere considerata da molti l'inizio del periodo moderno della matematica.

Perché tanto interesse per la risoluzione delle equazioni?

Dagli archivi dell'Università di Bologna, una delle più grandi e famose d'Europa, si può ricostruire la storia di una «sfida matematica»: Scipione Del Ferro, Nicolò Tartaglia, Gerolamo Cardano, Ludovico Ferrari, Raffaele Bombelli e molti altri famosi professori universitari o intellettuali a essi collegati «si sfidano» in una lotta intellettuale per trovare un metodo semplice e generale per risolvere le equazioni di 3° e 4° grado.

Ognuno lavora indipendentemente dagli altri, ognuno vuole tenere la scoperta per sé, perché scoprire un risultato importante vuol dire ottenere un posto più alto all'università.

E così la scoperta delle formule risolutive delle equazioni di 3° e 4° grado viene contesa fra Cardano, che le pubblica, Tartaglia e Del Ferro, che forse l'avevano scoperte per primi o riprese da fonti più antiche.

Si tratta di formule che offrono notevoli difficoltà; basta esaminare il caso delle equazioni di 3° grado per rendersene conto.

Le prime equazioni di 3° grado per cui si è trovata una formula risolutiva erano quelle del tipo

$$x^3 + px + q = 0 \qquad (1)$$

Le soluzioni di queste equazioni sono date dalla formula

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} - \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

Successivamente si è trovato che tutte le equazioni del tipo

$$x^3 + bx^2 + cx + d = 0 \qquad (2)$$

si possono ricondurre alla forma (1) introducendo una nuova incognita z, data da:

$$z = x + \frac{b}{3}$$

Nell'Ottocento il teorema di Abel-Ruffini

Comunque, la scoperta delle formule si diffonde e stimola nuove ricerche sulle equazioni 5° grado o di grado superiore per trovare anche in questi casi una formula risolutiva, cioè una formula che esprima le radici di un'equazione polinomia in termini di operazioni algebriche da effettuare sui coefficienti del polinomio.

Le ricerche continuano senza risultato per più di due secoli e vengono finalmente concluse da un «teorema negativo», pubblicato nel 1824 dal matematico norvegese Niels Abel: non ci può essere una formula risolutiva per trovare le radici di un'equazione di grado superiore al 4°.

Questo teorema prende il nome di «teorema di Abel-Ruffini», perché il matematico italiano Paolo Ruffini ne aveva già dato una dimostrazione nel 1799, ma questa dimostrazione non era stata considerata del tutto soddisfacente ed era passata inosservata.

La dimostrazione dell'impossibilità della soluzione dell'equazione generale di grado superiore al 4°, uno dei più famosi teoremi della matematica, fu presentata da Abel quando aveva appena diciannove anni.

È bene chiarire subito però che il teorema di Abel-Ruffini non afferma l'impossibilità di risolvere le equazioni di grado superiore al 4°, ma solo l'impossibilità di esprimere le soluzioni con una formula risolutiva generale del tipo di quella valida per le equazioni di 2° grado.

6 Le frazioni algebriche

Frazioni algebriche

Più volte nel corso di questo capitolo sono emerse analogie fra gli interi e i polinomi; gli esempi più evidenti sono dati dalla divisione fra due polinomi e dalla scomposizione in fattori di un polinomio: questi due casi sembrano un'estensione della divisione fra due interi o della scomposizione in fattori di un numero intero.
Ecco un'altra analogia: con gli interi «si costruiscono» le frazioni e con i polinomi si «costruiscono» le *frazioni algebriche*.
L'esempio contenuto nella tabella A mette a confronto numeri interi e polinomi per chiarire meglio l'idea.
Si trova dunque che le frazioni algebriche vengono introdotte come quoziente di due polinomi che non sono divisibili fra loro.
Nelle tabelle B e C sono confrontate le frazioni algebriche con le frazioni numeriche per scoprire altre analogie.

Tabella A
Confronto tra numeri interi e polinomi

Numeri interi	Polinomi
8 è divisibile per 2 e si scrive: $8 : 2 = 4$	$(x^2 - 1)$ è divisibile per $(x - 1)$ e si scrive: $(x^2 - 1) : (x - 1) = x + 1$
7 *non* è divisibile per 2 e si scrive: $7 : 2 = \frac{7}{2}$	$(x^2 - 2)$ *non* è divisibile per $(x - 1)$ e si scrive: $(x^2 - 2) : (x - 1) = \frac{x^2 - 2}{x - 1}$
$\frac{7}{2}$ è una frazione	$\frac{x^2 - 2}{x - 1}$ è una frazione algebrica
Non si può dividere per 0, perciò *non si può scrivere* la frazione: $\frac{7}{0}$	Non si può dividere per 0, perciò *la frazione algebrica* $\frac{x^2 - 2}{\boldsymbol{x - 1}}$ *non ha significato* se risulta: $x - 1 = 0$ ossia $x = 1$

Tabella B
Confronto tra frazioni numeriche e frazioni algebriche

Frazioni numeriche	Frazioni algebriche
Moltiplicando o dividendo i due termini di una frazione per uno stesso intero *diverso da 0* si ottiene una frazione equivalente; si scrive, per esempio: $$\frac{3}{2}=\frac{3\cdot5}{2\cdot5}=\frac{15}{10}$$	Moltiplicando o dividendo i due termini di una frazione algebrica per una stessa espressione *diversa da 0* si ottiene una frazione equivalente; si scrive, per esempio: $$\frac{x^2-2}{x+1}=\frac{x(x^2-2)}{x(x-1)}=\frac{x^3-2x}{x^2-x}$$ **purché sia $x \neq 0$**
Una frazione che ha i due termini senza fattori comuni si dice *ridotta ai minimi termini.*	Una frazione algebrica che ha i due termini senza fattori comuni si dice *ridotta ai minimi termini.*
Anche gli interi si possono scrivere come frazioni; per esempio: $$4=\frac{8}{2}$$	Anche i polinomi si possono scrivere come frazioni algebriche; per esempio: $$x+1=\frac{x^2-1}{x-1} \quad \text{per } x \neq 1$$

Tabella C
La riduzione ai minimi termini in una frazione numerica e in una frazione algebrica

Frazione numerica	Frazione algebrica
$$\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{D}}=\frac{42}{30}$$	$$\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{D}}=\frac{x^2-x}{x^3+x}$$
A. Si scompongono i due termini in fattori primi; si ha: $$42=3\cdot2\cdot7$$ $$30=3\cdot2\cdot5$$	A. Si scompongono i due termini in fattori primi; si ha $$x^2-x=x\,(x-1)$$ $$x^3+x=x\,(x^2+1)$$
B. Si dividono numeratore e denominatore per tutti i fattori comuni; si scrive: $$\frac{42}{30}=\frac{3\cdot2\cdot7}{3\cdot2\cdot5}=\frac{7}{5}$$	B. Si dividono numeratore e denominatore per tutti i fattori comuni diversi da 0; si scrive: $$\frac{x^2-x}{x^3+x}=\frac{x(x-1)}{x(x^2+1)}=\frac{x-1}{x^2+1} \quad \text{per } x\neq 0$$

Si conclude dunque che:

- *una frazione algebrica è una frazione che ha per termini due polinomi;*
- *una frazione algebrica* $\frac{N}{D}$ *perde significato in corrispondenza dei numeri, che sostituiti a* x, *rendono uguale a* 0 *il denominatore* D.

A partire dalle frazioni algebriche si possono ripetere tutte le operazioni eseguite sulle frazioni e cioè:

1. ridurre ai minimi termini una frazione;
2. moltiplicare due frazioni;
3. dividere due frazioni;
4. elevare a potenza una frazione;
5. addizionare o sottrarre due frazioni;
6. semplificare espressioni frazionarie.

Ecco un rapido panorama di questi procedimenti, esaminati attraverso semplici esempi.

Ridurre ai minimi termini una frazione algebrica

L'analogia con le frazioni numeriche suggerisce il procedimento da seguire per ridurre ai minimi termini una frazione algebrica.
Ma è opportuno esaminare attentamente l'ultima uguaglianza ottenuta nella tabella C e cioè:

$$\frac{x^2-x}{x^3+x}=\frac{x-1}{x^2+1}$$

scrivendola nella forma seguente:

$$\frac{x}{x}\cdot\frac{x-1}{x^2+1}=\frac{x-1}{x^2+1} \qquad (1)$$

Così si capisce meglio che cosa succede sostituendo 0 a x; si ha:

I membro $=\frac{0}{0}\cdot(-1)$ senza significato

II membro $=-1$

Dunque, sostituendo 0 a x, il primo membro non è uguale al secondo e perciò *l'uguaglianza* (1) *è falsa.*
Si ottiene questo risultato perché, al primo membro, si deve eseguire l'operazione:

$\frac{0}{0}$ che è senza significato

Ma l'inconveniente si incontra solo sostituendo 0 a x, dato che risulta invece:

$\frac{x}{x}=1$ per qualunque $x \neq 0$

Proprio per questo si scrive:

$$\frac{x}{x}\cdot\frac{x-1}{x^2+1}=1\cdot\frac{x-1}{x^2+1}=\frac{x-1}{x^2+1}$$

per qualunque $x \neq 0$

Moltiplicazione di frazioni algebriche

Il procedimento per moltiplicare due frazioni è ben noto: si moltiplicano i numeratori fra loro e i denominatori fra loro.
La stessa regola si estende alle frazioni algebriche. Così si ha, per esempio:

$$\frac{2x+1}{x-1}\cdot\frac{2x-1}{x+1}=$$
$$=\frac{(2x+1)(2x-1)}{(x+1)(x-1)}=$$
$$=\frac{4x^2-1}{x^2-1}$$

Divisione di frazioni algebriche

Per dividere due frazioni algebriche si estende la regola della divisione di due frazioni: si moltiplica la prima frazione per il reciproco della seconda.

Così si ha, per esempio:

$$\frac{2x}{x+2}:\frac{x+2}{3x^2}=\frac{2x}{x+2}\cdot\frac{3x^2}{x+2}=$$
$$=\frac{2x\cdot 3x^2}{(x+2)(x+2)}=\frac{6x^3}{(x+2)^2}$$

L'operazione di divisione tra frazioni algebriche si esprime talvolta con la linea di frazione; in tal caso si scrive:

$$\frac{\frac{2x}{x+2}}{\frac{x+2}{3x^2}}=\frac{2x}{x+2}\cdot\frac{3x^2}{x+2}=$$
$$=\frac{2x\cdot 3x^2}{(x+2)(x+2)}=\frac{6x^3}{(x+2)^2}$$

Potenza di una frazione algebrica

Per l'elevazione a potenza conviene tenere presenti le proprietà delle potenze e, in particolare:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Così si ha, per esempio:

$$\left(\frac{x-1}{x^2+2}\right)^3 = \frac{(x-1)^3}{(x^2+2)^3}$$

Volendo sviluppare l'ultima espressione, bisogna tenere anche presenti le regole per sviluppare la potenza di un binomio.

Addizione e sottrazione di frazioni algebriche

La somma di frazioni algebriche si ottiene seguendo un procedimento analogo a quello applicato per addizionare più frazioni; tale procedimento sarà dunque basato sui seguenti passi:

a. si scompongono in fattori i denominatori;
b. si calcola il minimo comune multiplo dei denominatori, cioè il prodotto dei fattori comuni e non comuni, presi ciascuno con il massimo esponente (per brevità, tale minimo comune multiplo viene spesso indicato con la sigla m.c.m.);
c. a ogni frazione si sostituisce una frazione equivalente, che ha per denominatore il m.c.m. prima determinato, procedendo nel modo seguente:
   I. si divide il m.c.m. per il denominatore;
   II. il risultato si moltiplica per il numeratore;
d. si sommano le frazioni, che hanno tutte lo stesso denominatore.

Ecco un esempio che illustra il procedimento ora descritto.

$$\frac{x+2}{x^2+25+10x} + \frac{2x-1}{x^2-25}$$

a. $x^2 + 25 + 10x = (x+5)^2$

$x^2 - 25 = (x+5)(x-5)$

b. m.c.m.= $(x+5)^2(x-5)$

c. • per la frazione:

$$\frac{x+2}{x^2+25+10x} = \frac{x+2}{(x+5)^2}$$

I. $[(x+5)^2(x-5)] : (x+5)^2 = x-5$

II. $$\frac{x+2}{(x+5)^2} = \frac{(x+2)(x-5)}{(x+5)^2(x-5)} = \frac{x^2-3x-10}{(x+5)^2(x-5)}$$

c. • per la frazione:

$$\frac{2x-1}{x^2-25} = \frac{2x-1}{(x+5)(x-5)}$$

I. $[(x+5)^2(x-5)] : [(x+5)(x-5)] = x+5$

II. $$\frac{2x-1}{(x+5)(x-5)} = \frac{(2x-1)(x+5)}{(x+5)^2(x-5)} = \frac{2x^2+9x-5}{(x+5)^2(x-5)}$$

d. $$\frac{x+2}{x^2+25+10x} + \frac{2x-1}{x^2-25} = \frac{x^2-3x-10+2x^2+9x-5}{(x+5)^2(x-5)}$$

Eseguendo le addizioni indicate al numeratore, si ottiene infine:

$$\frac{x+2}{x^2+25+10x} + \frac{2x-1}{x^2-25} = \frac{3x^2+6x-15}{(x+5)^2(x-5)}$$

Per eseguire invece la sottrazione di due frazioni algebriche basta addizionare alla prima l'opposta della seconda.

Semplificare espressioni con frazioni algebriche

Per semplificare un'espressione in cui compaiono più operazioni diverse da svolgere anche con frazioni algebriche, si seguono le indicazioni già date per svolgere le espressioni numeriche, e cioè:

1. si svolgono le operazioni racchiuse fra parentesi;
2. in assenza di parentesi si segue la priorità delle operazioni;
3. si controlla che la frazione sia ridotta ai minimi termini.

Ecco un esempio. Scrivere nella forma più sintetica l'espressione:

$$\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x^2-3x+2}\right)^2\cdot\left(x+\frac{4}{x}-4\right)$$

1. Si eseguono le addizioni racchiuse fra parentesi e si trova:

$$\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x^2-3x+2}\right)^2\cdot\left(x+\frac{4}{x}-4\right)=$$

$$=\left(\frac{x-1}{(x-1)(x-2)}\right)^2\cdot\frac{x^2+4-4x}{x}$$

2. Si esegue l'elevazione al quadrato e si trova:

$$\left(\frac{x-1}{(x-1)(x-2)}\right)^2\cdot\frac{x^2+4-4x}{x}=$$

$$=\frac{(x-1)^2}{(x-1)^2(x-2)^2}\cdot\frac{x^2+4-4x}{x}$$

3. Si esegue la moltiplicazione e si trova:

$$\frac{(x-1)^2}{(x-1)^2(x-2)^2}\cdot\frac{x^2+4-4x}{x}=$$

$$=\frac{(x-1)^2(x^2+4-4x)}{x(x-1)^2(x-2)^2}$$

4. Si riduce la frazione ai minimi termini, osservando che il numeratore può essere scomposto ancora in fattori ottenendo:

$$(x-1)^2(x^2+4-4x)=(x-1)^2(x-2)^2$$

e quindi risulta:

$$\frac{(x-1)^2(x^2+4-4x)}{x(x-1)^2(x-2)^2}=$$

$$=\frac{\mathbf{(x-1)^2(x-2)^2}}{\mathbf{x(x-1)^2(x-2)^2}}=\frac{1}{x}$$

per $x\neq 1$ e $x\neq 2$

In definitiva si ottiene:

$$\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x^2-3x+2}\right)^2\cdot\left(x+\frac{4}{x}-4\right)=\frac{1}{x}$$

per $x\neq 1$ e $x\neq 2$

Verifiche

Conoscenze

① Spiegare il significato del termine «frazione algebrica».

② Come si riconosce una frazione algebrica ridotta ai minimi termini?

Comprensione

① Esaminare le seguenti frazioni algebriche:

$$\frac{x^2-x}{x^2-1}\qquad\qquad \frac{x}{x+1}$$

Risolvere i seguenti quesiti, spiegando i ragionamenti seguiti:

a. spiegare perché sostituendo 1 a x la prima frazione perde significato, mentre ciò non avviene nella seconda frazione;

b. c'è qualche altro numero che fa perdere significato alla prima o alla seconda frazione?

② Dire che cosa bisogna aggiungere alla seguente uguaglianza per renderla corretta:

$$\frac{x^2-x}{x^2-1}=\frac{x}{x+1}$$

Applicazioni

① Sviluppare le seguenti due espressioni:

$$\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2+\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2$$

$$\left(\frac{x-1}{x+1}+\frac{x+1}{x-1}\right)^2$$

Nelle due espressioni le parentesi sono disposte diversamente; quale conseguenza ha questo fatto nello sviluppo dei calcoli?

② Sviluppare le seguenti due espressioni:

$$\frac{(x-1)^2}{x+1}\cdot\frac{(x+1)^2}{x-1}$$

$$\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2\cdot\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2$$

Nelle due espressioni le parentesi sono disposte diversamente; quale conseguenza ha questo fatto nello sviluppo dei calcoli?

Risolvere equazioni fratte

Equazioni fratte

Prendono il nome di *equazioni fratte* le equazioni che si possono scrivere nella forma di una frazione algebrica uguagliata a 0.

Per risolvere questo tipo di equazioni basta tenere presenti le seguenti nozioni relative alla divisione fra numeri reali:

1. *non si può dividere per 0,* cioè:

   $\dfrac{n}{0}$ non ha significato

2. risulta:

   $\dfrac{0}{d} = 0$ per qualunque $d \neq 0$

Due esempi di equazioni fratte risolte indicheranno il procedimento da seguire.

Primo esempio

$$\frac{x-2}{x-1} = 0$$

Per risolvere l'equazione, si procede nel modo seguente:

A. Si determinano i numeri che, sostituiti a x, rendono 0 il numeratore n, in modo che la frazione assuma il valore $\dfrac{0}{d}$; nel caso assegnato si ha:

$n = x - 2$

e perciò si deve risolvere l'equazione:

$x - 2 = 0$ che ha la soluzione $x = 2$

B. Si verifica che la soluzione ottenuta, sostituita a x, mantenga il denominatore d diverso da 0; nel caso assegnato si ha:

$d = x - 1$ e, sostituendo 2 a x, si ottiene: $d = 2 - 1 = 1 \neq 0$

C. Si conclude che $x = 2$ è la soluzione dell'equazione fratta.

Attività 1

Risolvere l'equazione:

$$\frac{3x+2}{4x-3}=0$$

A. *Il numeratore della frazione è:*

n =................

perciò si risolve l'equazione:

................= 0 *da cui* *x* =................

B. *Si verifica che* ...., *sostituito a x, mantenga il denominatore* .... *Nel caso assegnato si ha:*

d =................

Sostituendo .... a *x si ha:*

d =................

C. *Si conclude che* $x=-\frac{2}{3}$ *è* ....

Secondo esempio

$$\frac{2x+3}{x-1}=\frac{x^2-x-2}{x^2-1}$$

Bisogna prima di tutto portare l'equazione nella forma di un'unica frazione algebrica uguagliata a 0. Per questo si procede così:

a. si aggiunge ai due membri l'opposto di $\frac{x^2-x-2}{x^2-1}$, ossia si «sposta» il secondo membro, dopo averlo cambiato di segno; si ha:

$$\frac{2x+3}{x-1}-\frac{x^2-x-2}{x^2-1}=0$$

b. si esegue la differenza indicata e si ottiene:

$$\frac{(2x+3)(x+1)}{(x-1)(x+1)}-\frac{x^2-x-2}{(x-1)(x+1)}=0$$

e infine:

$$\frac{x^2+6x+5}{(x+1)(x-1)}=0 \qquad (1)$$

A questo punto si può procedere con la risoluzione seguendo il metodo indicato prima; si ha che:

A. I numeri che rendono 0 il numeratore si trovano risolvendo l'equazione

$x^2+6x+5=0$

che ha le soluzioni date dalla formula ridotta (vedi il capitolo settimo, pp. 312-313); si ha:

$x = -3 \pm \sqrt{9-5}$ ossia $x_1 = -5$ $x_2 = -1$

B. Il denominatore della frazione è:

$d = (x - 1)(x + 1)$

e si ottiene:

- per $x = -5$

$d = (-5 - 1)(-5 + 1) = 24 \neq 0$

- per $x = -1$

$d = (-1 - 1)(-1 + 1) = 0$

C. Si conclude che l'equazione fratta ha la sola soluzione $x = -5$.

A questo stesso risultato si poteva arrivare più brevemente, a partire dalla (1), osservando che *la frazione algebrica al primo membro non è ridotta ai minimi termini*, dato che risulta:

$$\frac{x^2+6x+5}{(x+1)(x-1)} = \frac{(\mathbf{x+1})(x+5)}{(\mathbf{x+1})(x-1)} = \frac{(x+5)}{(x-1)} \qquad \text{per} \qquad x \neq -1$$

Così si è condotti a risolvere l'equazione più semplice:

$$\frac{(x+5)}{(x-1)} = 0$$

di cui si trova immediatamente la soluzione $x = -5$.

Attività 2

Risolvere l'equazione:

$$\frac{3+x^2}{1-x^2} = \frac{2}{1-x}$$

a. *Si aggiunge ai due membri* ....; *si ha:*

...............–...............= 0

b. *Si esegue la differenza indicata:*

$$\frac{\dots\dots\dots}{(1-x)(1+x)} - \frac{\dots\dots\dots}{(1-x)(1+x)} = 0$$

e infine:

$$\frac{\dots\dots\dots}{(1-x)(1+x)} = 0 \qquad (2)$$

Si procede con la risoluzione.

1. *Si risolve l'equazione ottenuta uguagliando il numeratore a 0; si ha:*

   ....= 0

   che ha le soluzioni date da:

   $x =$..............

   Si ottiene:

   $x_1 = x_2 =$ ....

2. *Si calcola il valore che assume il denominatore in corrispondenza della soluzione; si ha:*

   per $x =$ .... $d =$ ....

3. *Si conclude che l'equazione assegnata non ha soluzioni.*

Che cosa si ottiene riducendo ai minimi termini la frazione al primo membro della (2)?

Si ottiene:

$$\frac{\text{..................}}{(1-x)(1+x)} = \frac{1-x}{1+x} \qquad \text{per } x \neq 1 \qquad (3)$$

Risolvendo allora l'equazione:

$$\frac{1-x}{1+x} = 0$$

si ottiene la soluzione x=1, *che però non si può accettare perché la riduzione ai minimi termini* (3) *non è valida per* x=1.

Attività 3

Risolvere l'equazione:

$$\frac{3x}{x^2-9} = 1 + \frac{x}{2x-6}$$

Si arriva a risolvere l'equazione:

$$\frac{-3x^2+3x+18}{2(x-3)(x+3)} = 0$$

che ha la sola soluzione x = –2.

Il segno di un polinomio e di un quoziente di polinomi

Il segno di un polinomio

Le considerazioni svolte nel capitolo settimo (paragrafi 6 e 7) a proposito del segno del trinomio di 2° grado possono essere utilizzate per studiare il segno di un polinomio del tipo:

$$P(x) = a_n x^n + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

cioè per determinare i valori di x per cui risulta:

$$P(x) = 0 \qquad P(x) > 0 \qquad P(x) < 0$$

Un esempio numerico

Ecco un esempio numerico su cui riflettere: studiare il segno di

$$P(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$$

Per determinare i valori di x per cui risulta:

$$P(x) = 0 \quad \text{cioè} \quad \text{per risolvere l'equazione} \quad x^3 - x^2 - 4x + 4 = 0$$

si deve scomporre in fattori il polinomio, per esempio scrivendolo nella forma:

$$P(x) = x^2(x-1) - 4(x-1)$$

e quindi:

$$P(x) = (x-1)(x^2-4) \qquad (1)$$

Aver scomposto il polinomio in fattori conduce a studiarne il segno riprendendo procedimenti già noti; basta ricordare che un prodotto

$$P = f_1 \cdot f_2$$

ha il segno che dipende solo dal segno dei due fattori f_1 e f_2 nel modo seguente:

- si ha $P = 0$ se risulta $f_1 = 0$ o $f_2 = 0$;
- si ha $P > 0$ solo se f_1 e f_2 hanno lo stesso segno;
- si ha $P < 0$ solo se f_1 e f_2 hanno segno opposto.

Ecco allora come si procede.

1. Si studia il segno del binomio di 1° grado $f_1 = x - 1$ che ha la radice $x = 1$ ed il segno rappresentato in fig. 1.
2. Si studia il segno del trinomio di 2° grado $f_2 = x^2 - 4$ che ha le radici reali $x = \pm 2$ ed il segno rappresentato in fig. 2.
3. Si riuniscono i due schemi grafici delle figure 1 e 2 in un unico schema (fig. 3), dal quale si «legge» il segno del polinomio P nel modo seguente:
   - i due fattori hanno lo stesso segno quando x varia nell'intervallo $-2 < x < 1$ o nella semiretta $x > 2$; si ha dunque:

Figura 1
Il segno del binomio $f_1 = x - 1$

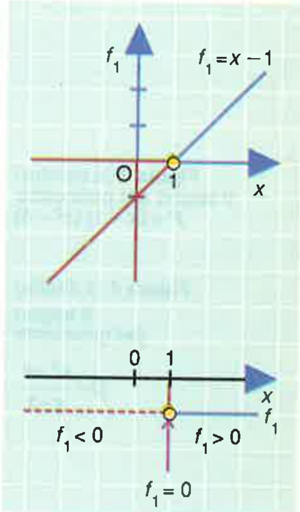
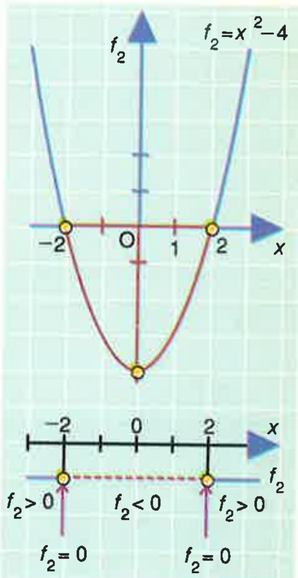


Figura 2
Il segno del trinomio $f_2 = x^2 - 4$



$$x^3 - x^2 - 4x + 4 > 0 \qquad \text{per} \qquad -2 < x < 1 \quad \text{o per} \quad x > 2$$

- i due fattori hanno segno opposto quando x varia nell'intervallo $1 < x < 2$ o nella semiretta $x < -2$; si ha dunque:

$$x^3 - x^2 - 4x + 4 < 0 \qquad \text{per} \qquad 1 < x < 2 \quad \text{o per} \quad x < -2$$

- in corrispondenza dei numeri −2, 1, 2 si annulla un fattore, quindi si ha:

$$x^3 - x^2 - 4x + 4 = 0 \qquad \text{per} \qquad x_1 = -2 \quad x_2 = 1 \quad x_3 = 2$$

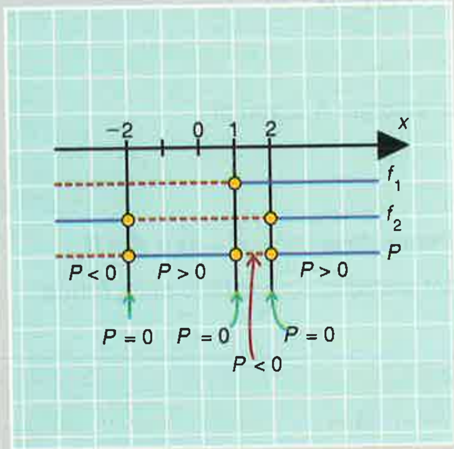
Il procedimento per studiare il segno di un polinomio

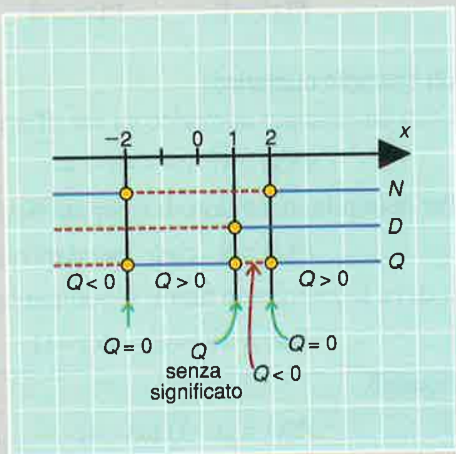
Il procedimento seguito nell'esempio numerico ha carattere generale e può essere esteso a qualunque polinomio che sia scomposto in fattori di 1° o 2° grado. Per studiare il segno di un polinomio si procede dunque nel modo seguente:

1. si studia il segno dei singoli fattori;
2. si determina il segno del polinomio P ottenendo:
   - $P = 0$ se almeno uno dei fattori vale 0;
   - $P < 0$ solo se si ha un numero dispari di fattori negativi.

Figura 3 (a sinistra) **Il segno del polinomio $P = (x-1)(x^2-4)$**

Figura 4 (a destra) **Il segno del quoziente $Q = \dfrac{x^2-4}{x-1}$**





Il segno di un quoziente di polinomi in un caso particolare

Cominciamo anche in questo caso con un esempio. È dato il quoziente:

$$Q(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 1}$$

Per studiarne il segno, basta ricordare che il segno di un quoziente

$$Q = \frac{N}{D}$$

dipende dal segno del numeratore N e del denominatore D nel modo seguente:

- si ha Q senza significato se risulta $D = 0$;
- si ha $Q = 0$ se risulta $N = 0$ e $D \neq 0$;
- si ha $Q > 0$ se N e D hanno lo stesso segno;
- si ha $Q < 0$ se N e D hanno segno opposto.

Ecco allora come si procede.

1. Si studia il segno del binomio di 1° grado $D = x - 1$ che ha la radice $x = 1$ e il segno rappresentato in fig. 1.
2. Si studia il segno del trinomio di 2° grado $N = x^2 - 4$ che ha le radici reali $x = \pm 2$ ed il segno rappresentato in fig. 2.
3. Si riuniscono i due schemi grafici delle figure 1 e 2 in un unico schema (fig. 4), dal quale si «legge» il segno del quoziente Q nel modo seguente:
   - numeratore N e denominatore D hanno lo stesso segno quando x varia nell'intervallo $-2 < x < 1$ o nella semiretta $x > 2$; si ha dunque che:

$$\frac{x^2-4}{x-1} > 0 \quad \text{per} \quad -2 < x < 1 \quad \text{o per} \quad x > 2$$

   - numeratore N e denominatore D hanno segno opposto quando x varia nell'intervallo $1 < x < 2$ o nella semiretta $x < -2$; si ha dunque che:

$$\frac{x^2-4}{x-1} < 0 \quad \text{per} \quad 1 < x < 2 \quad \text{o per} \quad x < -2$$

   - in corrispondenza del numero 1 si annulla il denominatore D e quindi il quoziente perde significato; si ha dunque che:

$$\frac{x^2-4}{x-1} \quad \text{perde significato per} \quad x = 1$$

   - in corrispondenza dei numeri 2 e -2 si annulla il numeratore N ma non il denominatore D, e quindi il quoziente vale 0; si ha dunque che:

$$\frac{x^2-4}{x-1} = 0 \quad \text{per} \quad x_1 = -2 \quad x_2 = 2$$

Il procedimento per studiare il segno di un polinomio

Il procedimento seguito nell'esempio numerico ha carattere generale e può essere esteso per studiare il segno a qualunque quoziente di polinomi (o frazione algebrica) $Q = \frac{N}{D}$.

Si procede nel modo seguente:

1. si studia il segno del numeratore N e del denominatore D;
2. si determina il segno del quoziente Q ottenendo:
   - Q è privo di significato se risulta $D = 0$;
   - $Q = 0$ vale 0 se risulta $N = 0$ e $D \neq 0$;
   - $Q > 0$ se numeratore e denominatore hanno lo stesso segno;
   - $Q < 0$ se numeratore e denominatore hanno segno opposto.

7 Le equazioni irrazionali

Equazioni irrazionali

Si chiamano *irrazionali* le equazioni in cui *l'incognita compare sotto il segno di radice.*
Ecco allora qualche esempio di equazioni irrazionali:

$$\sqrt{x+3} = 2x \qquad \sqrt[3]{x-6} = x$$

Non sono invece irrazionali le equazioni seguenti:

$$x+\sqrt{3} = 2x \qquad x-\sqrt[3]{6} = x$$

dato che sotto il segno di radice *non* compare l'incognita.

Come si risolvono le equazioni irrazionali

Le equazioni irrazionali vengono generalmente risolte con il seguente procedimento: *si elevano i due membri dell'equazione alla stessa potenza fino a far diventare l'equazione razionale.*
Tuttavia questo procedimento deve essere seguito con cautela; basta un esempio per rendersene conto.
L'equazione:

$$x = 1 \qquad (1)$$

mostra come unica soluzione il numero 1. Ma, elevando al quadrato i due membri della (1), si ottiene l'equazione:

$$x^2 = 1 \qquad (2)$$

che ha le due soluzioni:

$$x_1 = -1 \qquad\qquad x_2 = 1$$

Questo esempio fa capire che, *elevando al quadrato i due membri di un'equazione, non si ottiene un'equazione equivalente.*
Si ottiene invece un'equazione che ha tutte le soluzioni dell'equazione di partenza, ma può ammetterne in più altre, dette *soluzioni estranee* all'equazione data, perché introdotte dal procedimento di elevazione al quadrato.

Queste considerazioni possono essere visualizzate interpretando le equazioni esaminate con la geometria analitica (fig. 1); si considera:

- l'equazione (1) come se provenisse dal sistema:

$$\begin{cases} y = x \\ y = 1 \end{cases} \quad \text{chc fornisce appunto} \quad \begin{cases} y = x \\ x = 1 \end{cases}$$

- l'equazione (2) come se provenisse dal sistema:

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = 1 \end{cases} \quad \text{che fornisce appunto} \quad \begin{cases} y = x^2 \\ x^2 = 1 \end{cases}$$

Così si vede che la retta $y = 1$ incontra:

- la retta $y = x$ (fig. 1*a*) solo nel punto A(1; 1);
- la parabola $y = x^2$ (fig. 1*b*) non solo in A, ma anche in B(–1;1).

La figura suggerisce allora di ripetere le stesse considerazioni a partire da una qualunque altra potenza pari: la retta $y = 1$ incontra, per esempio, anche la curva $y = x^4$ nei due punti A e B (fig. 2).

Questo vuol dire che anche l'equazione

$$x^4 = 1$$

ottenuta elevando alla quarta potenza i due membri della (1) fornisce una soluzione in più di quella di partenza.
Non si hanno invece gli stessi problemi elevando i due membri di un'equazione a esponente dispari: la retta $y = 1$ incontra, ad esempio, la curva $y = x^3$ solo nel punto A (fig. 3), perciò l'equazione:

$$x^3 = 1$$

ha una sola soluzione reale:

$$x = 1$$

proprio come l'equazione di partenza.
Dunque, *per risolvere un'equazione irrazionale si procede nel modo seguente:*

1. *si elevano i due membri alla stessa potenza fino a ottenere un'equazione che non è più irrazionale;*
2. *si risolve l'equazione razionale ottenuta;*
3. *se i due membri dell'equazione sono stati elevati a un esponente pari, si verifica che le soluzioni ottenute siano anche soluzioni dell'equazione irrazionale di partenza.*

Figura 1
Elevando al quadrato i due membri di un'equazione si possono introdurre soluzioni estranee

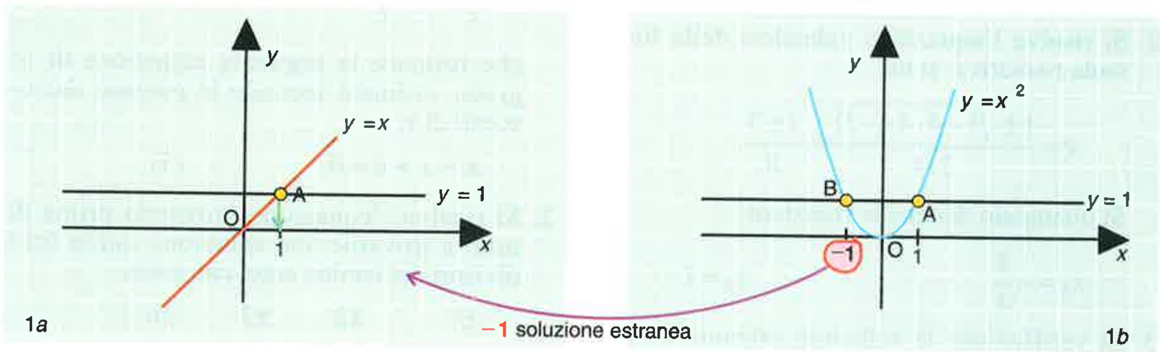


Figura 2
Elevando i due membri di un'equazione a esponente pari si possono introdurre soluzioni estranee

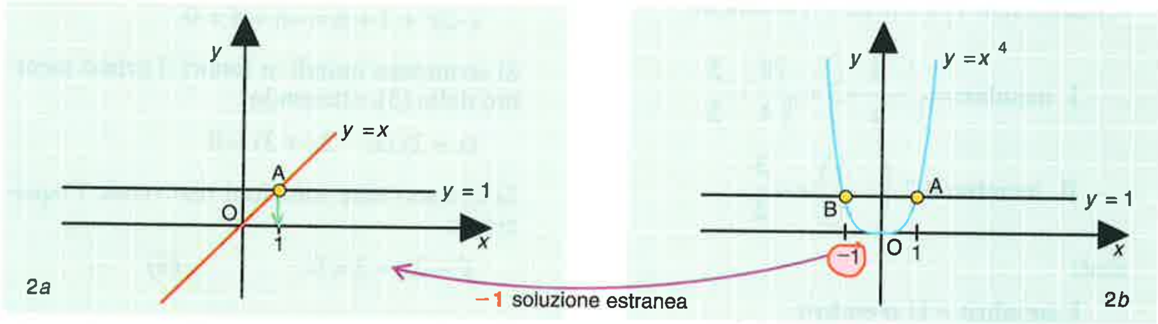
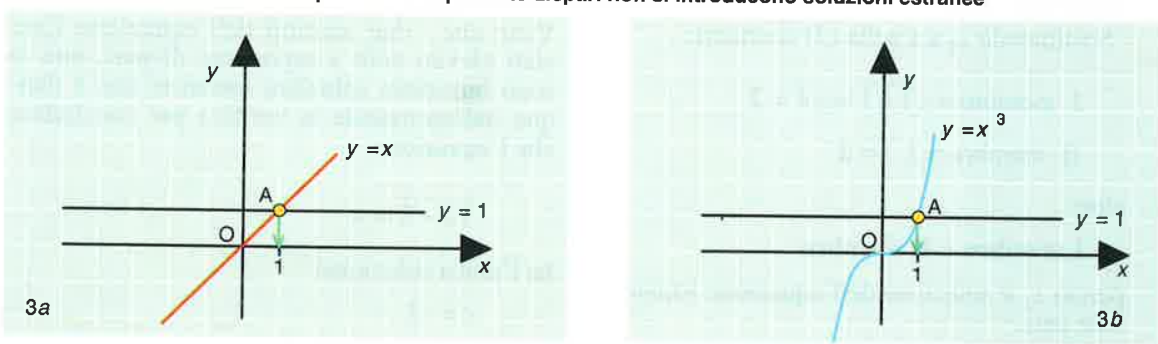


Figura 3
Elevando i due membri di un'equazione a esponente dispari non si introducono soluzioni estranee



Due esempi di equazioni irrazionali risolte

Primo esempio
Seguendo il procedimento indicato risolviamo l'equazione:

$$\sqrt{x+3}=2x \qquad (3)$$

1. Si elevano i due membri al quadrato e si ha:

$$\left(\sqrt{x+3}\right)^2=(2x)^2 \quad \text{ossia} \quad x+3=4x^2$$

che fornisce la seguente equazione di 2° grado, ordinata secondo le potenze decrescenti di x:

$$4x^2-x-3=0$$

2. Si risolve l'equazione valendosi della formula risolutiva; si ha:

$$x=\frac{1\pm\sqrt{1-4\cdot4\cdot(-3)}}{2\cdot4}=\frac{1\pm7}{8}$$

Si ottengono dunque le soluzioni:

$$x_1=-\frac{3}{4} \qquad\qquad x_2=1$$

3. Si verifica che le soluzioni ottenute siano anche soluzioni dell'equazione irrazionale di partenza.
- Sostituendo x_1 a x nella (3) si ottiene:

$$\text{I membro}=\sqrt{-\frac{3}{4}+3}=\sqrt{\frac{9}{4}}=\mathbf{\frac{3}{2}}$$

$$\text{II membro}=2\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)=-\mathbf{\frac{3}{2}}$$

cioè:

I membro ≠ II membro

perciò x_1 *non è soluzione* dell'equazione irrazionale data.
- Sostituendo x_2 a x nella (3) si ottiene:

$$\text{I membro}=\sqrt{1+3}=\sqrt{4}=\mathbf{2}$$

$$\text{II membro}=2\cdot1=\mathbf{2}$$

cioè:

I membro = II membro

perciò x_2 *è soluzione* dell'equazione irrazionale data.

Si conclude che l'equazione:

$$\sqrt{x+3}=2x$$

ha l'unica soluzione:

$$x=1$$

Secondo esempio

Risolviamo ora l'equazione:

$$\sqrt[3]{x-6}=x \qquad (4)$$

1. Si elevano i due membri dell'equazione al cubo e si ha:

$$\left(\sqrt[3]{x-6}\right)^3=x^3 \quad \text{ossia} \quad x-6=x^3$$

che fornisce la seguente equazione di 3° grado, ordinata secondo le potenze decrescenti di x:

$$x^3-x+6=0 \qquad (5)$$

2. Si risolve l'equazione provando prima di tutto a trovarne una soluzione intera fra i divisori del temine noto, che sono:

$$\pm1 \qquad \pm2 \qquad \pm3 \qquad \pm6$$

Si ottiene la soluzione intera $x_1=-2$, dato che risulta:

$$(-2)^3+2+6=-8+8=0$$

Si scompone quindi in fattori il primo membro della (5), ottenendo:

$$(x+2)\,(x^2-2x+3)=0$$

Si cercano altre soluzioni risolvendo l'equazione:

$$x^2-2x+3=0 \qquad (6)$$

Non si trovano però altre soluzioni, dato che la (6) non ha soluzioni reali.

Visto che i due membri dell'equazione sono stati elevati solo a esponente dispari, non si sono introdotte soluzioni estranee; non è dunque indispensabile la verifica per concludere che l'equazione:

$$\sqrt[3]{x-6}=x$$

ha l'unica soluzione:

$$x=-2$$

Verifiche

Conoscenze

① Spiegare come si riconosce un'equazione irrazionale.

② Spiegare come si risolve un'equazione irrazionale.

③ Spiegare il significato del termine «soluzioni estranee» di un'equazione irrazionale.

④ Indicare i casi in cui, risolvendo un'equazione irrazionale, si introducono delle soluzioni estranee.

Comprensione

① Portare qualche esempio di equazione irrazionale diverso da quelli dati dal testo.

② Spiegare perché, risolvendo un'equazione irrazionale, si possono introdurre delle soluzioni estranee.

Applicazioni

① Esaminare le equazioni:

$$\sqrt{x+3} = -2x \qquad \sqrt[3]{x-6} = -x$$

$$x + \sqrt{3} = -2x \qquad x - \sqrt[3]{6} = -x$$

Risolvere i seguenti quesiti:

a. scegliere le equazioni irrazionali, motivando la scelta;
b. risolvere le equazioni irrazionali.

Collegamento con il primo volume

① Risolvere le equazioni dell'esercizio precedente che non sono irrazionali; di che grado sono le due equazioni?
(*Vedere p. 373*)

Collegamenti con i capitoli precedenti

① Esaminare l'equazione:

$$\sqrt{x+3} = -2x \qquad (7)$$

come se provenisse dal sistema:

$$\begin{cases} y = \sqrt{x+3} \\ y = -2x \end{cases}$$

Risolvere i seguenti quesiti:

a. tracciare il grafico delle due funzioni che compaiono nel sistema, tenendo presente che:
   - $y = -2x$ ha per grafico una retta;
   - $y = \sqrt{x+3}$ ha il grafico di $y = \sqrt{x}$ opportunamente traslato;

b. individuare i punti d'intersezione delle due curve.
(*Vedere il capitolo 6, paragrafi 5 e 7*)

② Elevare al quadrato i due membri della (7) e ripetere l'interpretazione grafica della nuova equazione.

③ Confrontare i risultati degli esercizi (1) e (2).

④ Esaminare l'equazione:

$$\sqrt[3]{x-6} = -x \qquad (8)$$

come se provenisse dal sistema:

$$\begin{cases} y = \sqrt[3]{x-6} \\ y = -x \end{cases}$$

Risolvere i seguenti quesiti:

a. tracciare il grafico delle due equazioni, tenendo presente che
   - $y = -x$ ha per grafico una retta;
   - $y = \sqrt[3]{x-6}$ ha il grafico di $y = \sqrt[3]{x}$ opportunamente traslato;

b. individuare i punti di intersezione delle due curve.
(*Vedere il capitolo 6, paragrafi 5 e 7*)

⑤ Elevare al cubo i due membri della (8) e ripetere l'interpretazione grafica della nuova equazione.

⑥ Confrontare i risultati degli esercizi ④ e ⑤.

Le disequazioni irrazionali

Disequazioni irrazionali che si risolvono facilmente per via grafica

Analogamente alle equazioni, si chiamano *irrazionali* le disequazioni in cui *l'incognita compare sotto il segno di radice.*

Numerosi casi di disequazioni irrazionali possono essere agevolmente risolti basandosi sulla geometria analitica; ecco i primi esempi.

$$\sqrt[3]{x} > 0 \qquad \sqrt[3]{x} < 0 \qquad \sqrt{x} > 0 \qquad \sqrt{x} < 0$$

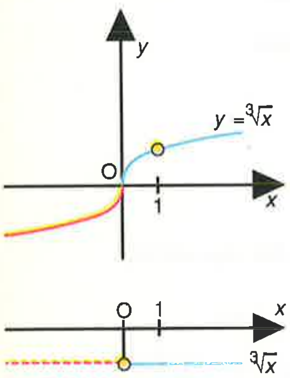
Le prime due disequazioni possono essere riassunte nel seguente quesito: studiare il segno della funzione $y = \sqrt[3]{x}$.

Il quesito si risolve facilmente tracciando il grafico della funzione (vedi anche il capitolo sesto, p. 253); si ha (fig. 1):

$$\sqrt[3]{x} > 0 \qquad \text{per } x > 0$$

$$\sqrt[3]{x} < 0 \qquad \text{per } x < 0$$

Figura 1
Il segno di $y = \sqrt[3]{x}$



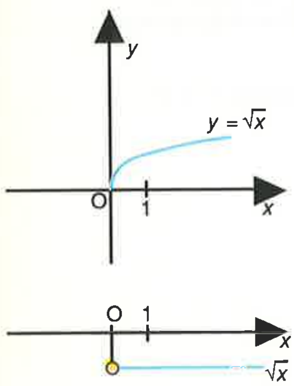
Questo risultato corrisponde al ben noto risultato numerico: la radice cubica di un numero ha lo stesso segno del radicando.

Analogamente si può procedere per risolvere le ultime due disequazioni, che possono essere riassunte nel quesito: studiare il segno della funzione $y = \sqrt{x}$. Tracciando anche in questo caso il grafico della funzione (fig. 2), si trova che:

$$\sqrt{x} > 0 \qquad \text{per } x > 0$$

$$\sqrt{x} < 0 \qquad \text{senza soluzioni}$$

Figura 2
Il segno di $y = \sqrt{x}$



Questo risultato corrisponde ad un noto risultato numerico: quando si calcola la radice quadrata di un numero x si hanno due casi:

- $x < 0$ e perciò la radice non si può calcolare;
- $x \geq 0$ e la radice si può calcolare; in quest'ultimo caso il simbolo $\sqrt{x}$ indica un numero positivo e $-\sqrt{x}$ il suo opposto.

Quindi, *il simbolo* $\sqrt{x}$ *non indica mai un numero negativo.*

In modo analogo possono essere esaminate anche le seguenti disequazioni:

$$\sqrt[3]{x-6} > 0 \qquad \sqrt[3]{x-6} < 0 \qquad \sqrt{x+3} > 0 \qquad \sqrt{x+3} < 0$$

Infatti, tracciando il grafico di $y = \sqrt[3]{x-6}$ si trova (fig. 3):

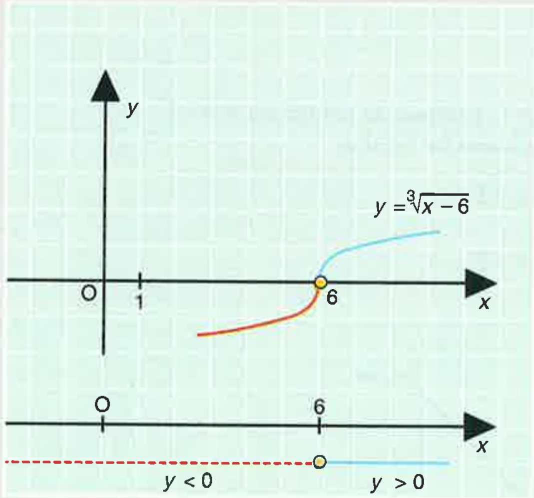
$$\sqrt[3]{x-6} > 0 \qquad \text{per } x > 6$$

$$\sqrt[3]{x-6} < 0 \qquad \text{per } x < 6$$

E, tracciando il grafico di $y = \sqrt{x+3}$, si trova (fig. 4):

$$\sqrt{x+3} > 0 \qquad \text{per } x > -3$$

$$\sqrt{x+3} < 0 \qquad \text{senza soluzioni}$$



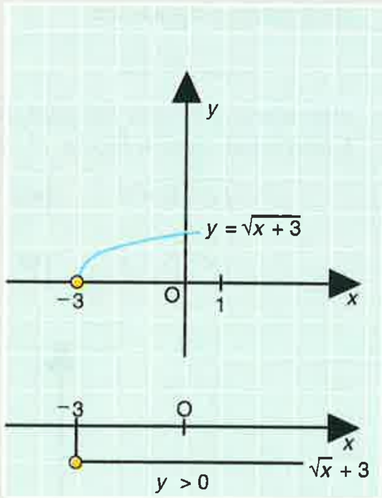


Figura 3 (a sinistra)
Il segno di $y = \sqrt[3]{x-6}$

Figura 4 (a destra)
Il segno di $y = \sqrt{x+3}$

Disequazioni irrazionali che si risolvono con l'aiuto dei grafici

Ecco degli esempi di disequazioni che si possono risolvere con i grafici, completati però dalla risoluzione di un'equazione irrazionale.

A. Risolvere le due disequazioni seguenti:

$$\sqrt[3]{x-6} > x \qquad \sqrt[3]{x-6} < x \qquad (1)$$

Per interpretare queste formule sul piano cartesiano si traccia il grafico delle due funzioni:

$$y = \sqrt[3]{x-6} \qquad y = x$$

ottenendo una curva e una retta che si incontrano nel punto A.

Si immagina ora di considerare due punti con la stessa ascissa x (fig. 5):

- R, che percorre la retta ed ha ordinata $y_R = x$;
- C, che percorre la curva ed ha ordinata $y_C = \sqrt[3]{x-6}$

Così si osserva che:

- a sinistra del punto A la curva si trova sopra la retta e perciò si ha:

$$y_C > y_R \quad \text{ossia} \quad \sqrt[3]{x-6} > x$$

- a destra del punto A la curva si trova sotto la retta e perciò si ha:

$$y_C < y_R \quad \text{ossia} \quad \sqrt[3]{x-6} < x$$

- in corrispondenza al punto A la curva e la retta si incontrano e perciò si ha:

$$y_C = y_R \quad \text{ossia} \quad \sqrt[3]{x-6} = x$$

Per risolvere le due disequazioni (1) basta allora determinare l'ascissa di A risolvendo l'equazione:

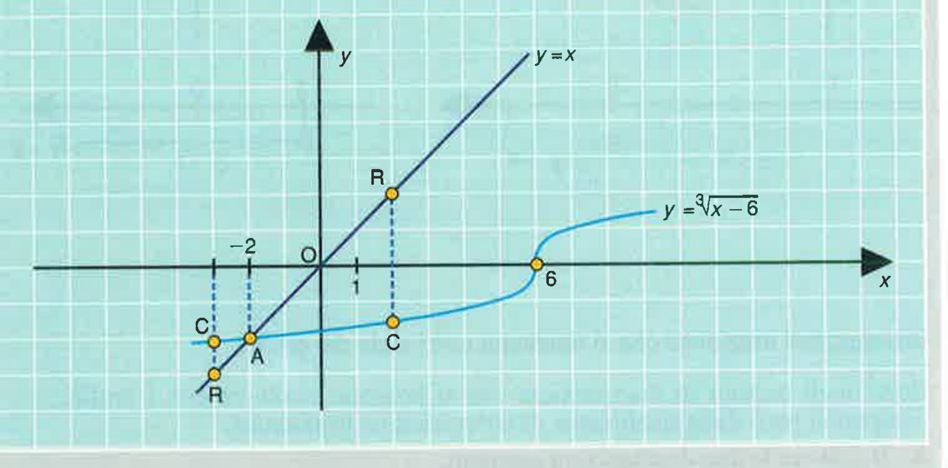
$$\sqrt[3]{x-6} = x$$

che, come si è visto nel paragrafo 7, fornisce la soluzione $x = -2$.
Completata così la figura, si conclude che risulta:

$$\sqrt[3]{x-6} > x \qquad \text{per } x < -2$$

$$\sqrt[3]{x-6} < x \qquad \text{per } x > -2$$

Figura 5
Una disequazione risolta graficamente



B. Il procedimento si può ripetere per risolvere le disequazioni seguenti:

$$\sqrt{x+3} > 2x \qquad \sqrt{x+3} < 2x \qquad (2)$$

Tracciato il grafico delle due funzioni (fig.6):

$$y = \sqrt{x+3} \qquad y = 2x$$

si ottiene ancora una curva e una retta che si incontrano nel punto A di ascissa 1, ottenuta risolvendo l'equazione:

$$\sqrt{x+3} = 2x$$

Il grafico suggerisce prima di tutto un risultato: per $x<-3$ non si trovano punti della curva e perciò la disequazione non si può esaminare. Risulta poi:

$$\sqrt{x+3}<2x \qquad \text{per } x>1$$

$$\sqrt{x+3}>2x \qquad \text{per } -3\leq x<1$$

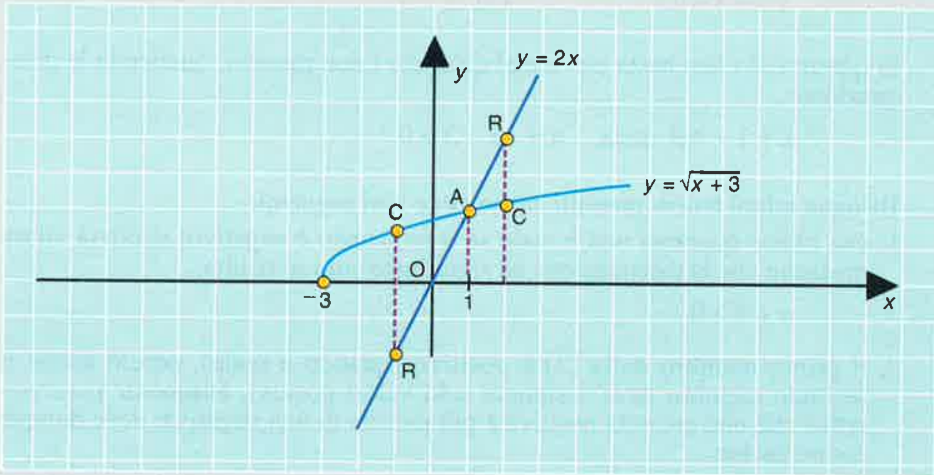


Figura 6
Una disequazione risolta graficamente

Alcune disequazioni irrazionali risolte con metodi algebrici

Il precedente metodo grafico è abbastanza rapido ed espressivo, ma non si applica quando compaiono funzioni di cui non si riesce a tracciare il grafico con i metodi illustrati nel capitolo sesto.

Di validità più generale, anche se più lunghi, sono i metodi algebrici che ora descriviamo rapidamente, distinguendo tre casi.

A. Disequazioni del tipo:

$$\sqrt[3]{R(x)}>P(x) \qquad \sqrt[3]{R(x)}<P(x)$$

dove $R(x)$ e $P(x)$ sono due polinomi.

In tal caso le disequazioni si risolvono semplicemente elevandone al cubo i due membri, dato che l'elevazione ad una potenza dispari mantiene il segno di un'espressione.
Per esempio, per risolvere:

$$\sqrt[3]{x-6}>x$$

si elevano i due membri al cubo e si ottiene la disequazione:

$$x-6>x^3 \qquad \text{ossia} \qquad x^3-x+6<0$$

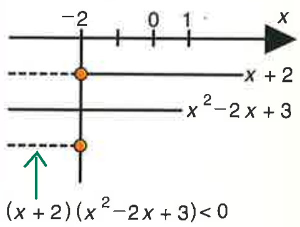
che deve essere risolta scomponendo in fattori il polinomio al primo membro; si ha (vedi p. 389):

$$x^3-x+6=(x+2)\,(x^2-2x+3)$$

Esaminando insieme il segno del binomio $(x+2)$ e il segno del trinomio di 2° grado senza soluzioni reali (x^2-2x+3) si ottiene (fig. 7):

$$\sqrt[3]{x-6}>x \qquad \text{per } x<-2$$

Figura 7
Una disequazione risolta algebricamente



B. Disequazioni del tipo:

$$\sqrt{R(x)} < P(x)$$

dove $R(x)$ e $P(x)$ sono due polinomi; per esempio è data:

$$\sqrt{x+3} < 2x \qquad (3)$$

In questo caso non basta elevare al quadrato i due membri, ottenendo le disequazione:

$$x + 3 < 4x^2 \text{ ossia } \quad 4x^2 - x - 3 > 0$$

Bisogna infatti tenere presenti anche i due fatti seguenti:

1. una radice quadrata non è reale se il radicando è negativo; si dovrà allora precisare che la disequazione ha significato solo se risulta:

   $$x + 3 \geq 0$$

2. il primo membro della (3) è positivo (quando è reale), perciò anche il secondo membro deve assumere solo valori positivi, altrimenti si scriverebbe che una quantità positiva è più piccola di una negativa; deve dunque essere anche:

   $$2x \geq 0$$

Si conclude che le soluzioni della (3) sono i valori di x che soddisfano contemporaneamente le seguenti disequazioni:

$$\begin{cases} 4x^2 - x - 3 > 0 \\ x + 3 \geq 0 \\ 2x \geq 0 \end{cases} \qquad (4)$$

Lo schema di fig. 8 mostra che, risolvendo il sistema di disequazioni (4), si ottengono le soluzioni:

$$x > 1$$

come si era ottenuto in modo molto più rapido dal grafico.

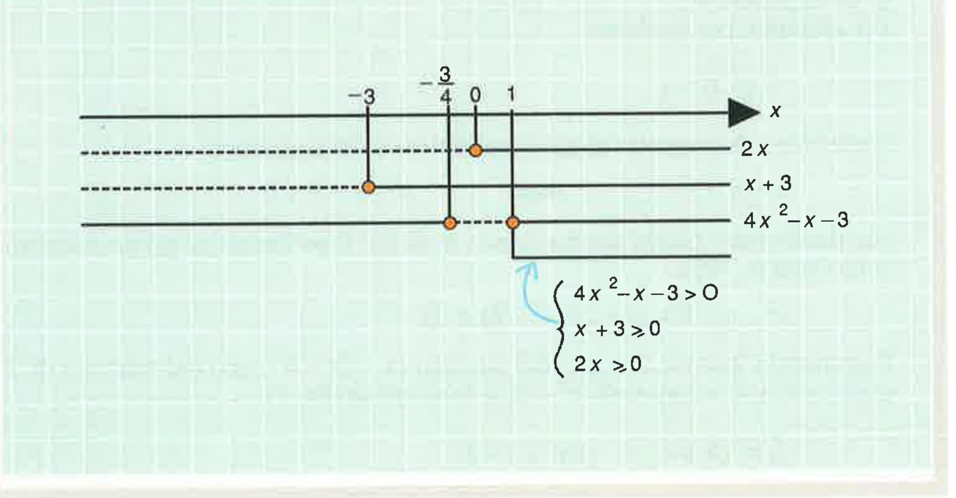


Figura 8
Una disequazione risolta algebricamente

Generalizzando il procedimento ora indicato, si conclude che, per risolvere una disequazione del tipo:

$$\sqrt{R(x)} < P(x)$$

bisogna risolvere simultaneamente le seguenti disequazioni:

$$\begin{cases} R(x) < [P(x)]^2 \\ R(x) \geq 0 \\ P(x) \geq 0 \end{cases}$$

C. Disequazioni del tipo:

$$\sqrt{R(x)} > P(x)$$

dove $R(x)$ e $P(x)$ sono due polinomi; per esempio è data:

$$\sqrt{x+3} > 2x \qquad (5)$$

Si può procedere così:
- si osserva che la disequazione è certamente soddisfatta se il secondo membro è negativo, purché il primo membro sia reale; dunque sono soluzioni della disequazione i valori di x per cui risulta

$$\begin{cases} x+3 \geq 0 \\ 2x < 0 \end{cases}$$

- se invece il secondo membro non è negativo (e il primo membro è reale), si procede come nel caso B, elevando i due membri al quadrato; perciò altre soluzioni della (5) sono i valori di x che soddisfano il seguente sistema di disequazioni:

$$\begin{cases} 2x \geq 0 \\ x+3 \geq 0 \\ x+3 > 4x^2 \end{cases}$$

ossia:

$$\begin{cases} 2x \geq 0 \\ x+3 \geq 0 \\ 4x^2 - x - 3 < 0 \end{cases}$$

In definitiva, per risolvere la disequazione (5) bisogna risolvere i due sistemi di disequazioni. Il primo sistema è:

$$\begin{cases} x+3\geq 0 \\ 2x<0 \end{cases}$$

da cui si ottiene (fig. 9*a*):

$$-3\leq x<0$$

Il secondo sistema è:

$$\begin{cases} 2x\geq 0 \\ x+3\geq 0 \\ 4x^2-x-3<0 \end{cases}$$

da cui si ottiene (fig. 9*b*):

$$0\leq x<1$$

Tutte le soluzioni della (5) sono dunque:

$$-3\leq x<1$$

come si era già visto graficamente.
Generalizzando il procedimento ora indicato, si conclude che, per risolvere una disequazione del tipo:

$$\sqrt{R(x)}>P(x)$$

bisogna risolvere i due seguenti sistemi di disequazioni:

$$\begin{cases} R(x)\geq 0 \\ P(x)<0 \end{cases} \qquad \begin{cases} R(x)>[P(x)]^2 \\ R(x)\geq 0 \\ P(x)\geq 0 \end{cases}$$

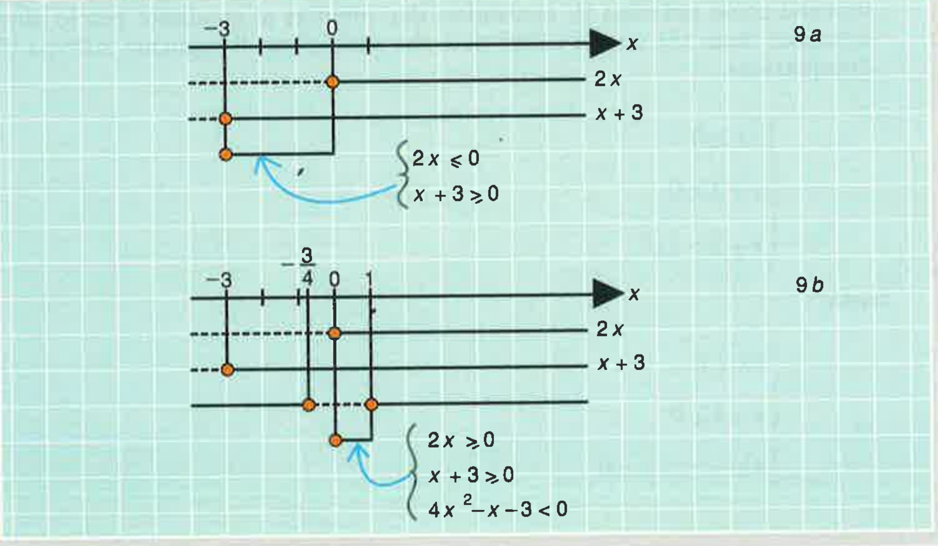


Figura 9
Una disequazione risolta algebricamente

8 Sistemi di grado superiore al 2°

Le intersezioni di una parabola con una circonferenza conducono a un sistema di 4° grado

La fig. 1 rappresenta la parabola e il cerchio che hanno le equazioni seguenti:

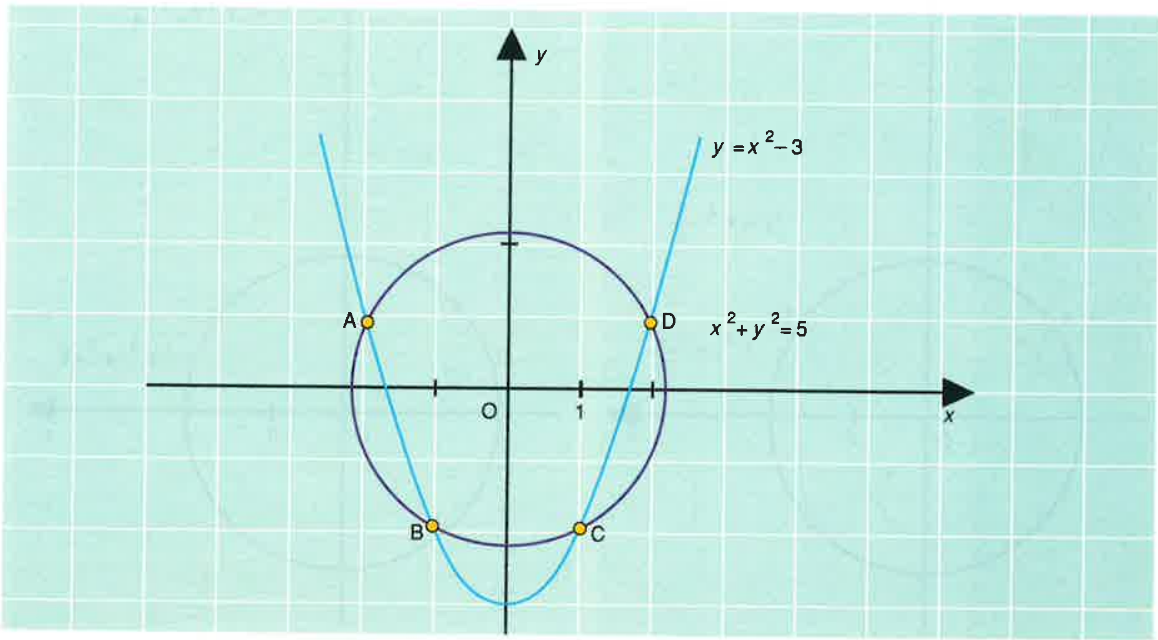
$$y = x^2 - 3 \qquad\qquad x^2 + y^2 = 5$$

Il grafico mostra che le curve si incontrano in quattro punti; la ricerca delle coordinate di questi punti conduce allora a risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} y = x^2 - 3 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$$

Si osserva subito che *il sistema è di 4° grado*, dato che il grado di un sistema è il prodotto dei gradi delle singole equazioni.
In questo caso si ha infatti:
- grado della prima equazione = 2;
- grado della seconda equazione = 2;
- grado del sistema = 2·2 = 4.

Figura 1
Una parabola e una circonferenza che si incontrano in quattro punti



Un sistema di 4° grado può avere al massimo quattro soluzioni

A questo sistema si possono estendere le considerazioni svolte nel capitolo settimo, paragrafo 9; in particolare si ha che *il sistema può essere risolto col metodo di sostituzione.*

Sostituendo nella seconda equazione, al posto di y, l'espressione $x^2 - 3$ fornita dalla prima equazione, si ha:

$$\begin{cases} y = x^2 - 3 \\ x^2 + (x^2 - 3)^2 = 5 \end{cases}$$

da cui, svolgendo i calcoli indicati nella seconda equazione, si ottiene:

$$\begin{cases} y = x^2 - 3 \\ x^4 - 5x^2 + 4 = 0 \end{cases}$$

La seconda equazione diventa così un'equazione di 4° grado in un'incognita, equazione che in questo caso si risolve facilmente, perché si tratta di una biquadratica.

Risolvendo quindi l'equazione, si ottengono le quattro ascisse dei punti d'intersezione; si ha:

$$\begin{cases} y = x^2 - 3 \\ (x^2 - 4)(x^2 - 1) = 0 \end{cases}$$

e quindi

$$\begin{cases} y = x^2 - 3 \\ x_1 = -2 \quad x_2 = -1 \quad x_3 = 1 \quad x_4 = 2 \end{cases}$$

Per ottenere le ordinate basta sostituire i valori di x ottenuti nella prima equazione; le soluzioni del sistema sono:

Figura 2
Una parabola e una circonferenza che si incontrano in due punti

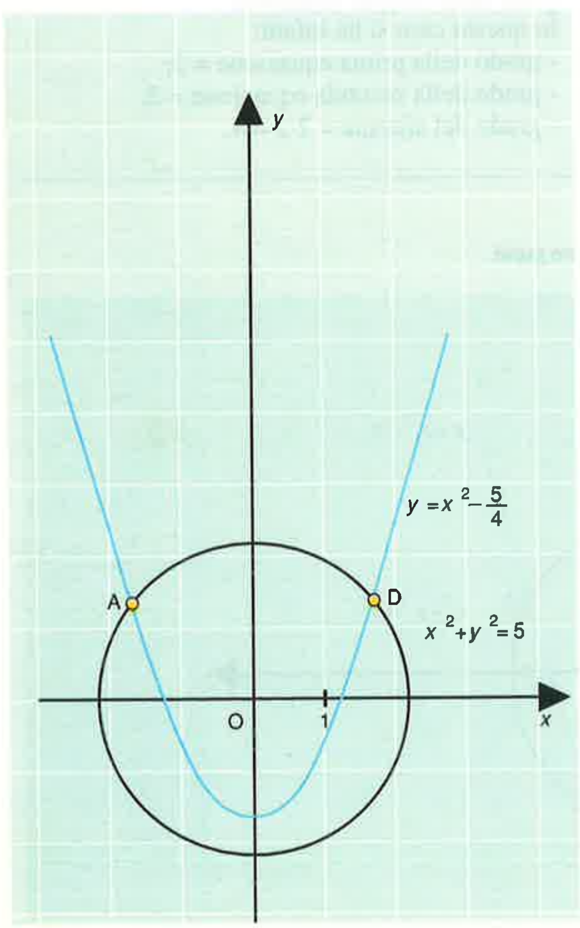
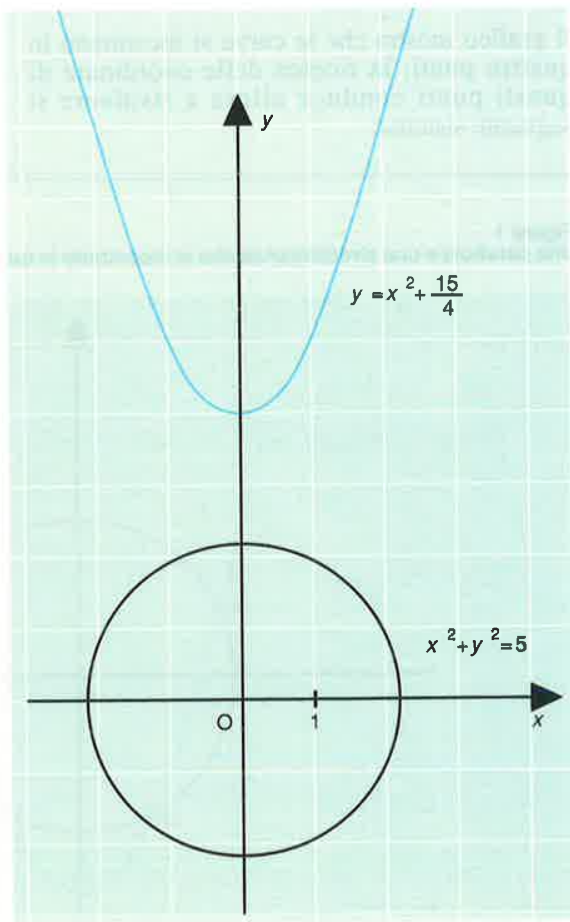


Figura 3
Una parabola e una circonferenza che non si incontrano



$$\begin{cases} y_1 = 1 \\ x_1 = -2 \end{cases} \qquad \begin{cases} y_2 = -2 \\ x_2 = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_3 = -2 \\ x_3 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} y_4 = 1 \\ x_4 = 2 \end{cases}$$

ɔssia:

A(–2; 1) B(–1; –2) C(1; –2) D(2; 1)

Questo esempio già suggerisce una considera-zione di carattere generale, e cioè: *per risolve-re il sistema si è condotti a risolvere un'equa-zione di 4° grado in una sola incognita, equa-zione che può avere al massimo quattro solu-zioni reali, perciò il sistema ha al massimo quattro soluzioni (cioè quattro coppie di nume-ri che soddisfano entrambe le equazioni).*

Si capisce allora che, per le soluzioni di un sistema di 4° grado, si possono presentare tante situazioni diverse; ecco qualche caso partico-larmente espressivo anche dal punto di vista grafico.

Jn sistema di 4° grado con due sole soluzioni reali

n fig. 2 si ha sempre la stessa circonferenza di ig. 1, mentre la parabola è stata traslata verso 'alto, fino ad avere l'equazione:

$$y = x^2 - \frac{5}{4}$$

Così la parabola incontra la circonferenza in ue soli punti.

Ci aspettiamo allora che il sistema:

$$\begin{cases} y = x^2 - \dfrac{5}{4} \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$$

resenti due sole soluzioni reali.

nfatti, risolvendo ancora una volta il sistema ol metodo di sostituzione, si ottiene:

$$\begin{cases} y = x^2 - \dfrac{5}{4} \\ (x^2 + \dfrac{11}{4})(x^2 - \dfrac{5}{4}) = 0 \end{cases}$$

'equazione di 4° grado ha due sole soluzioni eali e quindi anche il sistema ha due sole solu-oni reali.

Un sistema di 4° grado senza soluzioni reali

In fig. 3 si ha sempre la stessa circonferenza, mentre la parabola è stata traslata ancora verso l'alto, fino ad avere l'equazione:

$$y = x^2 + \frac{15}{4}$$

La parabola ora non incontra la circonferenza e perciò ci aspettiamo che il sistema:

$$\begin{cases} y = x^2 + \dfrac{15}{4} \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$$

non abbia soluzioni reali; infatti la risoluzione col metodo di sostituzione conduce a scrivere:

$$\begin{cases} y = x^2 + \dfrac{15}{4} \\ (x^2 + \dfrac{5}{4})(x^2 + \dfrac{29}{4}) = 0 \end{cases}$$

L'equazione di 4° grado ottenuta non ha solu-zioni reali e quindi anche il sistema non ha soluzioni reali.

Curve tangenti e sistemi con soluzioni coincidenti

In fig. 4 sono rappresentati alcuni casi di curve tangenti.

1. In fig. 4*a* si immagina di riprendere la fig. 1 e di «allargare» la parabola fino a che i punti A e B coincidono in un punto di tan-genza T_1, mentre C e D coincidono in un secondo punto di tangenza T_2; le curve si dicono allora *bitangenti*.

   È il caso delle curve d'equazione:

   $$y = \frac{1}{2}x^2 - 3 \qquad x^2 + y^2 = 5$$

   Infatti, il sistema:

   $$\begin{cases} y = \dfrac{1}{2}x^2 - 3 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$$

   risolto col metodo di sostituzione diventa:

$$\begin{cases} y = \dfrac{1}{2}x^2 - 3 \\ (x^2 - 4)^2 = 0 \end{cases}$$

ossia:

$$\begin{cases} y = \dfrac{1}{2}x^2 - 3 \\ (x-2)^2(x+2)^2 = 0 \end{cases}$$

Si arriva dunque a un'equazione di 4° grado che ha due soluzioni doppie (vedi anche il paragrafo 5), perciò anche il sistema ha due soluzioni doppie.

2. In fig. 4*b* si trova ancora la circonferenza di fig. 1, mentre la parabola è stata ora traslata verso l'alto, in modo da avere l'equazione:

$$y = x^2 - \sqrt{5}$$

Così vanno a coincidere B e C nel punto T, mentre A e B restano separati, cioè le curve sono tangenti in T. Il sistema rispecchia questa situazione perché, risolto per sostituzione, diventa:

$$\begin{cases} y = x^2 - \sqrt{5} \\ x^2(x^2 + 1 - 2\sqrt{5}) = 0 \end{cases}$$

e cioè presenta un'equazione di 4° grado con la soluzione $x = 0$ che è doppia, e altre due soluzioni semplici; così anche il sistema ha una soluzione doppia e due semplici.

3. In fig. 4*c* si trova sempre la circonferenza di fig. 1, mentre la parabola di fig. 4*b* è stata ora «allargata», fino a avere l'equazione:

$$y = \frac{1}{2\sqrt{5}}x^2 - \sqrt{5}$$

Il sistema mostra ora una situazione molto particolare perché, risolto per sostituzione, diventa:

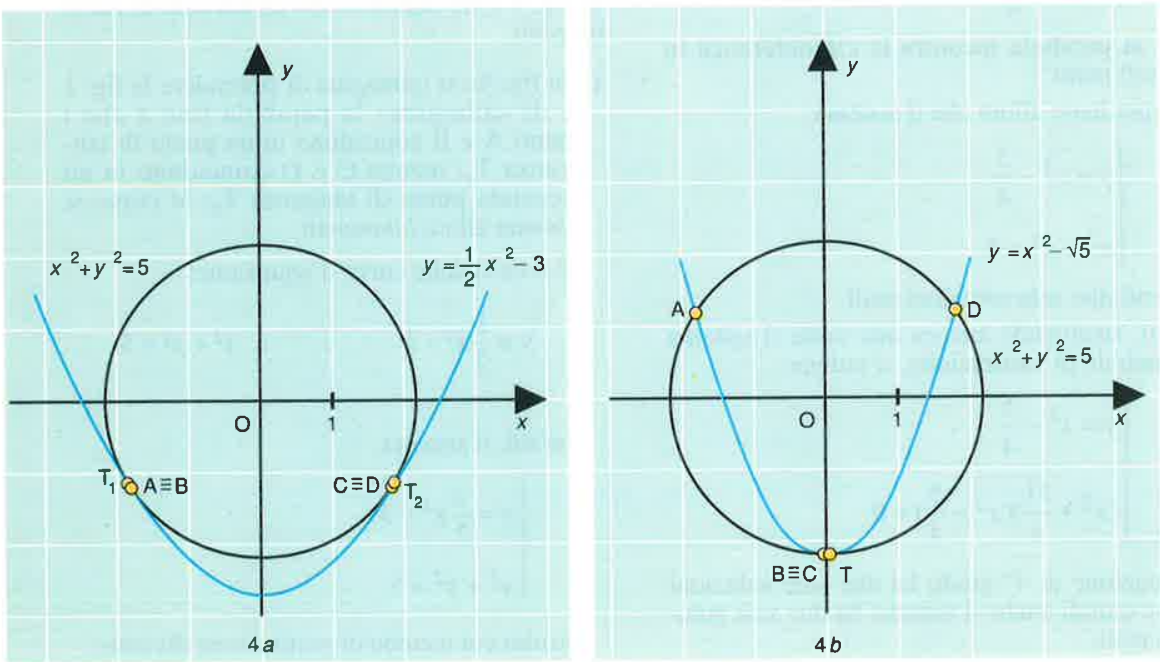
$$\begin{cases} y = \dfrac{1}{2\sqrt{5}}x^2 - \sqrt{5} \\ x^4 = 0 \end{cases}$$

e cioè presenta un'equazione di 4° grado con la soluzione $x = 0$ contata quattro volte; questo vuol dire che anche il sistema ha la sola soluzione:

T(0; $\sqrt{5}$) contata quattro volte

La situazione si intuisce facilmente dal punto di vista geometrico: nel punto T sono andati a coincidere i quattro punti A, B, C, D.

Figura 4
Tre casi di parabole e circonferenze tangenti



I sistemi di grado superiore al 2° e le loro soluzioni

Le situazioni ora esaminate non esauriscono i tanti casi che si possono presentare risolvendo un sistema di grado superiore al 2°, ma danno qualche indicazione di carattere generale e cioè:

- *anche un sistema di grado superiore al 2° si risolve generalmente per sostituzione;*
- *un sistema di grado ennesimo ha al massimo* n *soluzioni;*
- *fra le* n *soluzioni reali se ne possono trovare alcune multiple;*
- *dal punto di vista geometrico, una soluzione multipla corrisponde a un punto di tangenza fra due curve.*

Verifiche

Conoscenze

① Come si risolve un sistema di grado ennesimo?

② Quali soluzioni può avere un sistema di grado ennesimo?

Comprensione

① Disegnare una parabola e una circonferenza che hanno solo due intersezioni coincidenti; in tal caso quali soluzioni darà il sistema formato dalle equazioni delle due curve?

② Portare un esempio di sistema di 3° grado e dire quante soluzioni può avere al massimo il sistema.

Applicazioni

① Risolvere il seguente sistema:

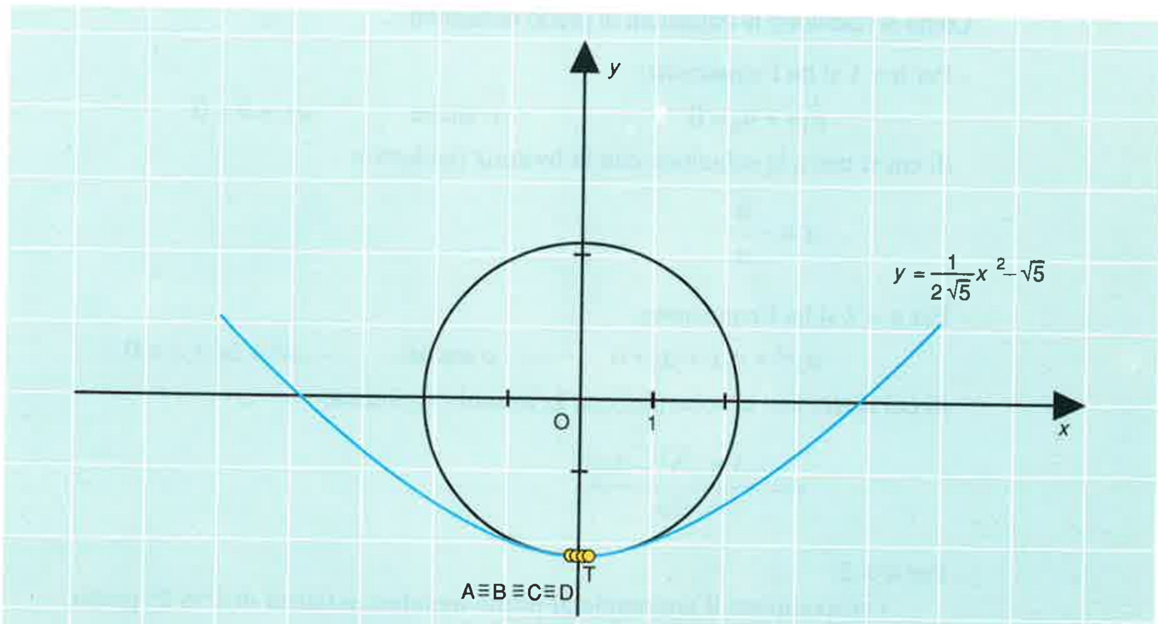
$$\begin{cases} y = -x^2 + 3 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$$

Interpretare graficamente le soluzioni ottenute.

② Risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} y = x^2 + \sqrt{5} \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$$

Interpretare graficamente le soluzioni ottenute.



4c

Che cosa bisogna sapere

Equazione di grado ennesimo

È un'equazione che può essere scritta nella forma:

$$a_n x^n + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$$

- ha al massimo n soluzioni reali;
- se l'equazione ha proprio n soluzioni reali $x_1,\ x_2,\ \ldots\ x_n$, *il polinomio al primo membro si può sempre scomporre in fattori* nel modo seguente:

$$a_n x^n + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = a_n (x - x_1)\,(x - x_2) \ldots (x - x_n)$$

- l'equazione ha *la soluzione multipla* $x = x_1$ se nella fattorizzazione del polinomio compare un fattore del tipo $(x - x_1)^m$.

Come si risolvono le equazioni di grado ennesimo

- Per $n = 1$ si ha l'equazione:

$$a_1 x + a_0 = 0 \qquad \text{o anche} \qquad ax + b = 0$$

di cui si trova la soluzione con la formula risolutiva:

$$x = -\frac{b}{a}$$

- Per $n = 2$ si ha l'equazione:

$$a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0 \qquad \text{o anche} \qquad ax^2 + bx + c = 0$$

di cui si trovano le soluzioni con la formula risolutiva:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- Per $n > 2$
  - si scompone il polinomio al primo membro in fattori di 1° o 2° grado;
  - si applica la legge di annullamento del prodotto.

Procedimenti per scomporre un polinomio in fattori

1. Raccogliere un fattore comune, basandosi sulla proprietà distributiva

$$ab + ac = a(b + c)$$

Esempio: $x^4 + x^3 + 2x^2 = x^2(x^2 + x + 2)$

2. Valersi del prodotto notevole

$$(a^2 - b^2) = (a + b)(a - b)$$

Esempio: $x^4 - 2 = (x^2 + \sqrt{2})(x^2 - \sqrt{2})$

3. Valersi del quadrato di un binomio

$$a^2 + b^2 + 2ab = (a + b)^2$$

Esempio: $x^4 + 1 + 2x^2 = (x^2 + 1)^2$

4. Valersi del cubo di un binomio

$$a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2 = (a + b)^3$$

Esempio: $x^3 + 1 + 3x^2 + 3x = (x + 1)^3$

5. Valersi della scomposizione di un trinomio di 2° grado con le radici reali x_1 e x_2

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Esempio: $x^4 + 3x^2 - 10 = (x^2 + 5)(x^2 - 2)$

ottenuto introducendo la lettera $z = x^2$ e procedendo nel modo seguente:

A. si risolve l'equazione:

$z^2 + 3z - 10 = 0$ *che ha le soluzioni* $z_1 = -5$ e $z_2 = 2$

B. si scompone il trinomio di 2° grado, scrivendo:

$z^2 + 3z - 10 = (z + 5)(z - 2)$ *ossia* $x^4 + 3x^2 - 10 = (x^2 + 5)(x^2 - 2)$

6. Dividere il polinomio per binomi del tipo $(x - a)$, dove a è una radice del polinomio

Esempio: $x^3 + 8 = (x + 2)(x^2 - 2x + 4)$

ottenuto procedendo nel modo seguente:

A. si trova la radice -2 del polinomio, tenendo presente che le radici intere di un polinomio si possono trovare solo fra i divisori del termine noto;

B. si eseguire la divisione $(x^3 + 8) : [x - (-2)]$.

Criterio di divisibiltà di un polinomio per un binomio $(x - a)$

Un polinomio $P(x)$ è divisibile per un binomio $(x - a)$ solo se a è una radice del polinomio.

Esempio: $x^3 + 8$ è divisibile per $[x - (-2)] = (x + 2)$ perché risulta:

$$(-2)^3 + 8 = -8 + 8 = 0$$

Divisione di due polinomi

Si esegue estendendo il procedimento per la divisione fra due interi.

Esempio:

$$
\begin{array}{r|l}
\mathbf{x^3+8} & \quad \mathbf{x+2} \\
\cline{2-2}
x^3+2x^2 & x^2-2x+4 \\
\mathbf{-2x^2+8} & \\
-2x^2-4x & \\
\mathbf{4x+8} & \\
4x+8 & \\
\mathbf{0} &
\end{array}
$$

Frazione algebrica

È una frazione che ha per termini due polinomi.

Una frazione algebrica $\frac{N}{D}$ perde significato in corrispondenza ai numeri, che sostituiti a x, rendono uguale a 0 il denominatore D.

Esempio:

$$\frac{x^2-4}{\mathbf{x-1}}$$

è una frazione algebrica che perde significato se risulta:

$$\mathbf{x-1}=0 \quad \text{ossia} \quad x=1$$

A partire dalle frazioni algebriche si possono ripetere tutte le operazioni eseguite sulle frazioni numeriche e cioè:

1. ridurre ai minimi termini una frazione;
2. moltiplicare e dividere due frazioni;
3. elevare a potenza una frazione;
4. addizionare o sottrarre due frazioni;
5. semplificare espressioni frazionarie.

Equazioni fratte

Sono equazioni che si possono scrivere nella forma di una frazione algebrica uguagliata a 0, cioè sono equazioni del tipo:

$$\frac{N}{D}=0$$

dove N e D sono due polinomi.

Esempio:

$$\frac{x^2-4}{x-1}=0$$

Si risolvono con il seguente procedimento:

1. si risolve l'equazione $N=0$;
2. si verifica che le soluzioni ottenute mantengano $D \neq 0$.

Equazioni irrazionali

Si chiamano irrazionali le equazioni in cui l'incognita compare sotto il segno di radice.
Esempio:

$$\sqrt{x-6} = 2x$$

Si risolvono con il seguente procedimento:

1. si elevano i due membri alla stessa potenza fino a ottenere un'equazione che non è più irrazionale;
2. si risolve l'equazione razionale ottenuta;
3. se i due membri dell'equazione sono stati elevati a un esponente pari, si verifica che le soluzioni ottenute siano anche soluzioni dell'equazione irrazionale di partenza.

Sistemi di grado ennesimo

È un sistema di due equazioni in due incognite in cui, moltiplicando i gradi delle equazioni, si ottiene il numero n.
Esempio:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ y = x^2 - 3 \end{cases} \quad \text{che è di grado} \quad n = 2 \cdot 2 = 4$$

Un sistema di grado ennesimo si può risolvere per sostituzione e ha al massimo n soluzioni reali.
Fra le soluzioni reali se ne possono trovare alcune multiple.
Rappresentando le due equazioni del sistema sul piano cartesiano, si ottengono due curve e si ha che:

- una soluzione semplice del sistema dà le coordinate del punto di intersezione fra le due curve;
- una soluzione multipla del sistema corrisponde a un punto di tangenza fra le due curve.

Che cosa bisogna saper fare

Le nozioni svolte in questo capitolo possono essere divise in parti nel modo seguente:

1. Divisione di polinomi e fattorizzazione di un polinomio;
2. Frazioni algebriche e operazioni fra di esse;
3. Risoluzione di equazioni, da suddividere ancora in:
   A. equazioni di grado superiore al 2°;
   B. equazioni fratte;
   C. equazioni irrazionali.

Queste nozioni sono largamente basate su vari argomenti precedenti e costituiscono dunque un sistema di regole complesso, in cui è necessario imparare a orientarsi scegliendo i procedimenti più adatti a ogni occasione.

Proprio a questo sono dedicati gli esercizi seguenti.

1. Divisione di polinomi e fattorizzazione di un polinomio

Attività 1

Esaminare il polinomio:

$$P(x) = x^4 - 3x^3 - 2x^2 + 12x - 8$$

Rispondere alle seguenti domande, motivando la risposta:

a. nel polinomio si individua subito un fattore da raccogliere?
b. il polinomio è un prodotto notevole?
c. il polinomio è il quadrato o il cubo di un binomio?
d. il polinomio è biquadratico?
e. quale altra via rimane da provare per scomporre il polinomio in fattori?

Attività 2

Esaminare di nuovo il polinomio:

$$P(x) = x^4 - 3x^3 - 2x^2 + 12x - 8$$

Rispondere ai seguenti quesiti motivando la risposta:

a. spiegare perché 3 non può essere una radice del polinomio;
b. quali numeri interi possono essere radici del polinomio?

c. determinare le radici intere del polinomio;
d. elencare i binomi per cui è divisibile il polinomio.

Attività 3

Dopo aver svolto l'attività 2, risolvere i seguenti quesiti:

a. spiegare perché il polinomio

$$P(x) = x^4 - 3x^3 - 2x^2 + 12x - 8$$

si può scrivere nella forma seguente:

$$x^4 - 3x^3 - 2x^2 + 12x - 8 = (x - 2)(x + 2)(x - 1)\,Q(x) \qquad (1)$$

b. indicare il modo più rapido per determinare $Q(x)$;
c. scomporre in fattori il polinomio $P(x)$;
d. dire se il polinomio ha qualche radice multipla.

Quesito (b) *Sviluppare il prodotto dei tre binomi nella* (1); *si ha:*

$$[(x - 2)(x + 2)](x - 1) = (\dots\dots\dots\dots)\,(x - 1) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

così la (1) *diventa:*

$$x^4 - 3x^3 - 2x^2 + 12x - 8 = (x^3 - x^2 - 4x + 4)Q(x)$$

Per determinare Q(x) *basta ora effettuare la divisione:*

$$(x^4 - 3x^3 - 2x^2 + 12x - 8) : (x^3 - x^2 - 4x + 4)$$

completando lo schema preparato qui sotto.

$$\begin{array}{l|l}
\mathbf{x^4} - 3x^3 - 2x^2 + 12x - 8 & \mathbf{x^3} - x^2 - 4x + 4 \\ \cline{2-2}
x^4 - x^3 - 4x^2 + 4x & x - \dots\dots\dots \\
\mathbf{-2x^3} + 2x^2 + 8x - 8 & \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\
\qquad\qquad\qquad\quad \mathbf{0} &
\end{array}$$

Quesito (c) *Si ottiene:*

$$P(x) = (x - 1)(x + 2)(x - 2)^2$$

Attività 4

Esaminare il polinomio:

$$P(x) = x^4 - x^2 + 2$$

Rispondere ai seguenti quesiti motivando la risposta:

a. quali numeri interi possono essere radici del polinomio?
b. spiegare perché il polinomio non ha radici intere;
c. spiegare perché il polinomio è biquadratico;
d. scomporre in fattori il polinomio.

Quesito (d) *Si ottiene:*

$$P(x) = (x + \sqrt{2})\,(x - \sqrt{2})\,(x^2 + 1)$$

2. Frazioni algebriche e operazioni fra di esse

Attività 5

Ridurre ai minimi termini la seguente frazione algebrica, indicando il valore di x per cui la semplificazione non è valida.

$$\frac{x^4-3x^3-2x^2+12x-8}{x^2-1}$$

Per scomporre in fattori il numeratore, tenere presenti i risultati dell'attività 3.

Attività 6

Semplificare la seguente espressione:

$$\frac{x+2}{x}+\frac{3x+2}{6x-8}-\frac{4}{3x^2-4x}-1$$

completando il seguente procedimento.

Dato che si debbono eseguire soltanto addizioni e sottrazioni, si procede così:

a. *si scompongono in fattori i denominatori, trovando:*

x $\qquad$ $6x-8=2\,(\dots\dots\dots)$ $\qquad$ $3x^2-4x=x\,(\dots\dots\dots\dots)$ $\qquad$ (1)

b. *si calcola il minimo comune multiplo dei denominatori, dato da*

m.c.m. $= 2x\,(3x-4)$

c. *a ogni frazione si sostituisce una frazione equivalente, che ha per denominatore il m.c.m. prima determinato; si ha:*

$$\frac{x+2}{x}+\frac{3x+2}{2(3x-4)}-\frac{4}{x(3x-4)}-1=$$

$$=\frac{(x+2)[\dots\dots\dots]}{2x(3x-4)}+\frac{(3x+2)\cdot\dots\dots}{2x(3x-4)}-\frac{4\cdot\dots\dots}{2x(3x-4)}-\frac{1\cdot[\dots\dots\dots]}{2x(3x-4)}=$$

$$=\frac{\dots\dots\dots}{2x(3x-4)}+\frac{\dots\dots\dots}{2x(3x-4)}-\frac{\dots\dots\dots}{2x(3x-4)}-\frac{\dots\dots\dots}{2x(3x-4)}$$

d. *si addizionano le frazioni ottenute che hanno tutte lo stesso denominatore e si ottiene infine:*

$$\frac{x+2}{x}+\frac{3x+2}{2(3x-4)}-\frac{4}{x(3x-4)}-1=\frac{3x^2+14x-24}{2x(3x-4)}$$

3. Risoluzione di equazioni

A. Equazioni di grado superiore al 2°

Attività 7

Risolvere l'equazione:

$$x^4-3x^3-2x^2+12x-8=0$$

Tenere presente la conclusione dell'attività 3.

Attività 8

Risolvere l'equazione:

$$x^4 - x^2 + 2 = 0 \qquad (2)$$

e scegliere fra le seguenti affermazioni quelle corrette motivando la scelta:

a. l'equazione (2) non ha soluzioni reali;

b. l'equazione (2) non ha soluzioni razionali.

Tenere presente la conclusione dell'attività 4.

B. Equazioni fratte

Attività 9

Risolvere l'equazione:

$$\frac{x+2}{x} + \frac{3x+2}{6x-8} = \frac{4}{3x^2-4x} + 1$$

Tenere presente la conclusione dell'attività 6 per scrivere l'equazione nella forma di una frazione algebrica uguagliata a 0.
L'equazione ha l'unica soluzione x = –6.

C. Equazioni irrazionali

Attività 10

Risolvere l'equazione:

$$\sqrt{x^2+4} = 3x+2$$

completando il seguente procedimento.

1. *Si elevano i due membri al quadrato ottenendo:*

$$\text{.............} = (\text{.............})^2$$

e quindi:

$$8x^2 + 12x = 0$$

2. *Si risolve l'equazione razionale ottenuta; si ha:*

$$x(\text{.............}) = 0$$

da cui:

$$x_1 = -\frac{3}{2} \qquad\qquad x_2 = 0$$

3. *Si verifica che i numeri ottenuti siano anche soluzioni dell'equazione irrazionale di partenza; si ha:*

- *per* $x = -\frac{3}{2}$

$$\left.\begin{array}{l} I\ membro = \sqrt{\text{..........}} = \sqrt{\text{..........}} = \frac{5}{2} \\ II\ membro = \text{............} = \text{.............} = -\frac{5}{2} \end{array}\right\} \text{perciò } -\frac{3}{2} \text{ non è ....}$$

- *per* x = 0

$$I\ membro = \sqrt{\ldots\ldots\ldots\ldots} = \sqrt{\ldots\ldots\ldots\ldots} = 2$$
$$II\ membro = \ldots\ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots\ldots = 2$$
perciò 0 è ....

Si conclude che l'equazione ha l'unica soluzione x = 0.

Attività 11

Risolvere l'equazione

$$\sqrt[3]{6x^2+2} = x+1 \qquad (3)$$

Completando il seguente procedimento

1. *Si elevano i due membri al cubo ottenendo:*

$$\ldots\ldots\ldots\ldots = (\ldots\ldots\ldots\ldots)^3$$

e quindi:

$$\ldots\ldots\ldots\ldots = 0$$

2. *Si risolve l'equazione razionale ottenuta, scomponendo in fattori il polinomio al primo membro; si ha:*

$$(\ldots\ldots\ldots\ldots)^3 = 0$$

da cui:

$x = 1$ contata 3 volte

Dato che si sono elevati i due membri della (3) *a esponente dispari, non si sono introdotte soluzioni estranee; si conclude che l'equazione* (3) *irrazionale ha la soluzione:*

$$x = 1$$