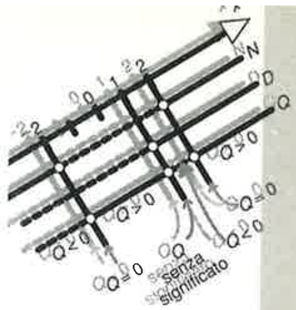

Sulle equazioni di grado superiore al 2°

Scrivere equazioni che hanno *n* date soluzioni reali

1. Completare la tabella seguente come mostrato nella prima riga.

Soluzioni	Equazione 1	Equazione 2
$x_1=-3;\ x_2=0;\ x_3=3$	$[x-(-3)](x-0)(x-1)=0$	$-4[x-(-3)](x-0)(x-1)=0$
$x_1=-3;\ x_2=1;\ x_3=3$		
$x_1=-2;\ x_2=0;\ x_3=\frac{1}{2};\ x_4=2$		
		$6x\left(x+\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{3}{2}\right)(x-2)=0$
	$(x+\sqrt{5})(x+1)(x-\sqrt{5})(x-1)=0$	
		$8x\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(x+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(x-\sqrt{6})=0$

Scrivere almeno due equazioni che abbiano le soluzioni indicate negli esercizi dal n. **2** al n. **21**.

2. $x_1=-2$ $\quad x_2=-1$ $\quad x_3=0$

3. $x_1=0$ $\quad x_2=1$ $\quad x_3=2$

4. $x_1=-5$ $\quad x_2=-3$ $\quad x_3=-1$

5. $x_1=1$ $\quad x_2=3$ $\quad x_3=5$

6. $x_1=-\frac{1}{4}$ $\quad x_2=-\frac{1}{5}$ $\quad x_3=0$

7. $x_1=0$ $\quad x_2=\frac{1}{4}$ $\quad x_3=\frac{1}{5}$

8. $x_1=-2$ $\quad x_2=-\frac{4}{3}$ $\quad x_3=-\frac{3}{4}$

9. $x_1=\frac{3}{4}$ $\quad x_2=\frac{4}{3}$ $\quad x_3=2$

10. $x_1=-\sqrt{5}$ $\quad x_2=-\sqrt{3}$ $\quad x_3=0$

11. $x_1=0$ $\quad x_2=\sqrt{3}$ $\quad x_3=\sqrt{5}$

12. $x_1=-4$ $\quad x_1=-\sqrt{10}$ $\quad x_2=-\sqrt{7}$

13. $x_1=\sqrt{7}$ $\quad x_2=\sqrt{10}$ $\quad x_3=4$

14. $x_1=-\frac{1}{\sqrt{3}}$ $\quad x_2=-\frac{\sqrt{3}}{4}$ $\quad x_3=-\frac{1}{3}$

15. $x_1=\frac{1}{3}$ $\quad x_2=\frac{\sqrt{3}}{4}$ $\quad x_3=\frac{1}{\sqrt{3}}$

16. $x_1=-2$ $x_2=-1$ $x_3=1$ $x_4=2$

17. $x_1=-4$ $x_2=-3$ $x_3=3$ $x_4=4$

18. $x_1=-\frac{1}{2}$ $x_2=-\frac{1}{3}$ $x_3=\frac{1}{3}$ $x_4=\frac{1}{2}$

19. $x_1=-\frac{3}{2}$ $x_2=-\frac{2}{3}$ $x_3=\frac{2}{3}$ $x_4=\frac{3}{2}$

20. $x_1=-\sqrt{3}$ $x_2=-\sqrt{2}$ $x_3=\sqrt{2}$ $x_4=\sqrt{3}$

21. $x_1=-\sqrt{5}$ $x_2=-\frac{\sqrt{5}}{5}$ $x_3=\frac{\sqrt{5}}{5}$ $x_4=\sqrt{5}$

22. Scrivere un'equazione che abbia 5 soluzioni scelte a piacere e un'equazione che abbia 6 soluzioni scelte a piacere.

Determinare le soluzioni di equazioni di grado superiore al 2°

Scrivere le soluzioni delle equazioni indicate negli esercizi dal n. **23** al n. **32**.

23. $2x(x+3)(x+1)(x-1)=0$

24. $-5x(x+9)(x-2)(x-3)=0$

25. $\frac{3}{2}\left(x+\frac{2}{3}\right)\left(x-\frac{2}{3}\right)\left(x-\frac{4}{3}\right)(x-2)=0$

26. $-\frac{5}{3}\left(x+\frac{3}{5}\right)\left(x-\frac{5}{3}\right)\left(x-\frac{3}{4}\right)(x-1)=0$

27. $\frac{4}{5}\left(x+\frac{5}{4}\right)\left(x-\frac{4}{5}\right)\left(x-\frac{5}{4}\right)(x-1)(x+1)=0$

28. $-\frac{7}{6}\left(x+\frac{6}{7}\right)\left(x-\frac{6}{7}\right)\left(x-\frac{7}{6}\right)(x-3)=0$

29. $\sqrt{2}\,x(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})(x-1)(x+1)=0$

30. $-\sqrt{5}\,x(x+\sqrt{5})(x-\sqrt{5})(x-2)(x+2)=0$

31. $\frac{\sqrt{2}}{2}\,x(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})(x-2)(x+2)=0$

32. $-\frac{\sqrt{5}}{6}\,x(x+\sqrt{5})(x-\sqrt{5})(x-2)(x+3)=0$

Collegamenti con il primo volume

Riprendere le equazioni assegnate negli esercizi dal n. **23** al n. **32** e sviluppare i prodotti indicati al primo membro.

[*Per il prodotto di polinomi vedere il primo volume, pp. 166-167*]

Esaminare le equazioni assegnate negli esercizi dal n. **33** al n. **39** e risolvere i seguenti quesiti:

a. spiegare perché tutte le equazioni di uno stesso esercizio sono equivalenti;
b. indicare le soluzioni delle equazioni.

[*Per le equazioni equivalenti vedere il primo volume, p. 374, e questo volume, p. 337*]

33. $x\left(x-\frac{1}{4}\right)(x+1)=0$ $\quad 4x\left(x-\frac{1}{4}\right)(x+1)=0$ $\quad x(4x-1)(x+1)=0$

34. $x\left(x-\frac{2}{3}\right)\left(x-\frac{4}{3}\right)=0$ $\quad 3\cdot 3x\left(x-\frac{2}{3}\right)\left(x+\frac{4}{3}\right)=0$ $\quad x(3x-2)(3x+4)=0$

35. $x\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{3}\right)=0$ $\quad 2\cdot 3x\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{3}\right)=0$ $\quad x(2x-1)(3x+1)=0$

36. $\left(x-\frac{3}{2}\right)\left(x+\frac{7}{5}\right)(x+1)=0$ $\quad 2\cdot 5\left(x-\frac{3}{2}\right)\left(x+\frac{7}{5}\right)(x+1)=0$ $\quad (2x-3)(5x+7)(x+1)=0$

37. $\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(x+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)(x-6)=0$ $\quad 2\cdot 3\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(x+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)(x-6)=0$ $\quad (2x-\sqrt{2})(3x+\sqrt{3})(x-6)=0$

38. $(4x+4)(2x-5)(3x+5)=0$ $\quad 4\cdot 2\cdot 3(x+1)\left(x-\frac{5}{2}\right)\left(x+\frac{5}{3}\right)=0$ $\quad (x+1)\left(x-\frac{5}{2}\right)\left(x+\frac{5}{3}\right)=0$

39. $x(\sqrt{2}x+\sqrt{2})(\sqrt{3}x-2\sqrt{3})=0$ $\quad \sqrt{2}\sqrt{3}x(x+1)(x-2)=0$ $\quad x(x+1)(x-2)=0$

Esaminare le equazioni assegnate negli esercizi dal n. **40** al n. **49** e valersi della legge di annullamento del prodotto per determinarne le soluzioni.

[*Per la legge di annullamento del prodotto vedere anche il primo volume, p. 14*]

40. $(3x+3)(2x+4)(5x-10)(2x+10)=0$

41. $(4x+4)(3x+6)(3x-15)(7x+14)=0$

42. $(2x+1)(2x-1)(3x-1)(4x+1)=0$

43. $(4x+2)(4x-2)(6x-2)(8x+2)=0$

44. $(2x+1)(2x-1)(3x-5)(8x-7)=0$

45. $(1+2x)(1-2x)(5-3x)(7-8x)=0$

46. $(\sqrt{2}x+2)(\sqrt{2}x-2)(\sqrt{3}x-3)(\sqrt{3}x+3)=0$

47. $(2x+\sqrt{2})(2x-\sqrt{2})(3x-\sqrt{3})(3x+\sqrt{3})=0$

48. $(\sqrt{5}x+6)(\sqrt{5}x-6)(\sqrt{6}x-5)(\sqrt{6}x+5)=0$

49. $(5x+\sqrt{6})(5x-\sqrt{6})(6x-\sqrt{5})(6x+\sqrt{5})=0$

Divisibilità di un polinomio per $(x-a)$

Esaminare i polinomi assegnati negli esercizi dal n. **50** al n. **53** e risolvere i seguenti quesiti:

a. scegliere i polinomi divisibili per $(x-1)$, motivando la scelta;
b. modificare il termine noto degli altri polinomi in modo da renderli divisibili per $(x-1)$.

50. x^3-4x^2+2x-5 $\quad x^3-4x^2-2x-5$ $\quad x^3+4x^2-2x-5$ $\quad -x^3-4x^2+5$

51.	$-x^4-5x^2+4$	x^4-5x^2+4	x^4-5x+4	x^4-5x^2+2x-4
52.	$2x^4-5x+4$	$2x^4-5x^2-x+4$	$-4x^3+5x-1$	$-4x^4+5x^2+2x-1$
53.	$3x^5-x-2$	$-4x^6+5x^3-1$	$8x^6-5x^2-2x-1$	$-7x^5+5x^3+4$

Esaminare i polinomi assegnati negli esercizi dal n. **54** al n. **57** e risolvere i seguenti quesiti:

a. scegliere quelli divisibili per $(x+1)$, motivando la scelta;
b. modificare il termine noto degli altri polinomi in modo da renderli divisibili per $(x+1)$.

54.	$4x^3+x^2-2x+1$	$-4x^3-x^2+2x-1$	$5x^3+2x^2-x+2$	$5x^3+2x^2+x+2$
55.	x^4-5x^2+4	x^4+5x^2+4	x^4+5x+4	$-x^4-5x^3+2x-4$
56.	$6x^3-3x+3$	$6x^3-3x^2+3$	$-7x^4-5x^2+2$	$-7x^4-5x^3+2$
57.	$-x^5-x-2$	x^5+x-2	$8x^6-5x^2+2x-1$	$8x^6-5x^3+2x-1$

Esaminare i polinomi assegnati negli esercizi dal n. **58** al n. **61** e risolvere i seguenti quesiti:

a. scegliere quelli divisibili per $(x-2)$, motivando la scelta;
b. modificare il termine noto degli altri polinomi in modo da renderli divisibili per $(x-2)$.

58.	x^3-3x^2+x+2	x^3+3x^2-x-2	x^3+8	x^3-x-6
59.	x^4-5x^2-x+2	x^4-5x^2+x+2	x^4-5x-6	$x^4-5x^3+10x-4$
60.	$2x^4-4x^2-2x+4$	$2x^4-4x^3-2x+4$	$-3x^3+6x^2-x+2$	$-5x^4+10x^3+3x-6$
61.	$3x^5-12x^3-3x^2+6$	$3x^5-12x^3-3x+6$	$-3x^6+12x^4+x-8$	$-3x^6+12x^4+x^3-8$

Esaminare i polinomi assegnati negli esercizi dal n. **62** al n. **65** e risolvere i seguenti quesiti:

a. scegliere quelli divisibili per $(x+2)$, motivando la scelta;
b. modificare il termine noto degli altri polinomi in modo da renderli divisibili per $(x+2)$.

62.	x^3+2x^2+x+2	x^3-2x^2-x-2	x^3-8	x^3-x+6
63.	x^4-5x^2-x+2	x^4-5x^2+x+2	x^4+5x-6	$x^4-5x^3+10x-4$
64.	$2x^4-4x^2+3x+6$	$2x^4-4x^3+3x+6$	$-3x^3-6x^2+x+2$	$-5x^4-10x^3+3x+6$
65.	$-3x^5+12x^3-3x^2+6$	$3x^5+12x^3+3x+6$	$-3x^6+12x^4-x-8$	$-3x^6+12x^4-x^3-8$

Riflettere sulla divisibilità di un polinomio per (*x*–a)

66. Considerare un qualunque polinomio $P(x)$ di 3° grado scritto nella forma:

$$P(x)=a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$$

Risolvere i seguenti quesiti:

a. dimostrare che $P(x)$ è divisibile per $(x-1)$ se e solo se la somma dei suoi coefficienti è uguale a 0;
b. enunciare il precedente teorema, valendosi del connettivo di implicazione.

67. Estendere il teorema esaminato nell'esercizio 66 ad un qualunque polinomio $P(x)$ di grado n, scritto nella forma:

$$P(x)=a_nx^n+\ldots+a_2x^2+a_1x+a_0$$

68. Considerare un qualunque polinomio $P(x)$ di 3° grado scritto nella forma:

$$P(x)=a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$$

Risolvere i seguenti quesiti:

a. dimostrare che $P(x)$ è divisibile per $(x+1)$ se e solo se la somma dei coefficienti dei monomi di grado pari è uguale alla somma dei coefficienti dei monomi di grado dispari;

b. enunciare il precedente teorema, valendosi del connettivo di implicazione.

69. Estendere il teorema esaminato nell'esercizio 68 ad un qualunque polinomio $P(x)$ di grado n, scritto nella forma:

$$P(x)=a_nx^n+\ldots+a_2x^2+a_1x+a_0$$

70. Considerare un qualunque polinomio $P(x)$ di 4° grado con tutti i monomi di grado pari, scritto nella forma:

$$P(x)=a_4x^4+a_2x^2+a_0$$

Risolvere i seguenti quesiti:

a. dimostrare che se $P(x)$ è divisibile per $(x-a)$ allora è divisibile anche per $(x+a)$;

b. enunciare il precedente teorema, valendosi del connettivo di implicazione.

71. Estendere il teorema esaminato nell'esercizio 70 ad un qualunque polinomio $P(x)$ di grado n, con tutti i monomi di grado pari, scritto nella forma:

$$P(x)=a_nx^n+\ldots a_4x^4+a_2x^2+a_0$$

72. Considerare un polinomio $P(x)$ di 3° grado, scritto nella forma:

$$P(x)=mx^3+nx^2+nx+m$$

Risolvere i seguenti quesiti:

a. dimostrare che se $P(x)$ è divisibile per $(x-a)$, allora è divisibile anche per $\left(x-\frac{1}{a}\right)$;

b. enunciare il teorema precedente, valendosi del connettivo di implicazione.

[*Considerare l'identità* P(a)=0 *e dividerne i due membri per* a]

73. Considerare un polinomio $P(x)$ di 4° grado, scritto nella forma:

$$P(x)=mx^4+nx^3+px^2+nx+m$$

Risolvere i seguenti quesiti:

a. dimostrare che se $P(x)$ è divisibile per $(x-a)$, allora è divisibile anche per $\left(x-\frac{1}{a}\right)$;

b. enunciare il precedente teorema, valendosi del connettivo di implicazione.

[*Vedere il suggerimento dato nell'esercizio 72*]

74. Considerare un polinomio $P(x)$ di 3° grado, scritto nella forma:

$$P(x)=mx^3+nx^2-nx-m$$

Risolvere i seguenti quesiti:

a. dimostrare che se $P(x)$ è divisibile per $(x-a)$, allora è divisibile anche per $\left(x-\frac{1}{a}\right)$;

b. enunciare il precedente teorema, valendosi del connettivo di implicazione.

[*Vedere il suggerimento dato nell'esercizio 72*]

75. Considerare un polinomio $P(x)$ di 4° grado, scritto nella forma:

$$P(x)=mx^4+nx^3-nx-m$$

Risolvere i seguenti quesiti:

a. dimostrare che se $P(x)$ è divisibile per $(x-a)$, allora è divisibile anche per $\left(x-\frac{1}{a}\right)$;

b. enunciare il precedente teorema, valendosi del connettivo di implicazione.

[*Vedere il suggerimento dato nell'esercizio 72*]

Sul metodo per selezionare le radici intere di un polinomio

76. Determinare le radici intere del polinomio

$$P(x)=2x^3-7x^2+7x-2$$

completando il procedimento iniziato qui sotto.

I. Le radici intere del polinomio si trovano fra i divisori del .... che sono:

$-1 \qquad 1 \qquad -2 \qquad 2$

II. Si calcola il valore che il polinomio assume quando si sostituisce a x uno dei precedenti numeri; si ha:

- $P(-1)=2(....)^3-7(.....)^2+7(....)-2=......\neq 0$
- $P(1)=....................................=\mathbf{0}$
- $P(-2)=...................................=.........\neq 0$
- $P(2)=.....................................=\mathbf{0}$

III. Si conclude che il polinomio ha le radici intere: $x_1=1 \qquad x_2=2$

Esaminare i polinomi degli esercizi dal n. **77** al n. **92** e risolvere i seguenti quesiti:

a. elencare i numeri interi che possono essere radici del polinomio;
b. determinare le radici intere del polinomio.

77. $P(x)=x^3-1$ [1]

78. $P(x)=x^3+1$ [−1]

79. $P(x)=x^3-8$ [2]

80. $P(x)=x^3+8$ [−2]

81. $P(x)=x^3-2x^2-x+2$ [±1; 2]

82. $P(x)=2x^3+3x^2-2x-3$ [±1]

83. $P(x)=x^4-1$ [±1]

84. $P(x)=x^4-16$ [±2]

85. $P(x)=x^4+2x^2-3$ [±1]

86. $P(x)=x^4-2x^2-8$ [±2]

87. $P(x)=x^4+x^3-3x^2-4x-4$ [±2]

88. $P(x)=x^4+x^3-x^2-4x-12$ [±2]

89. $P(x)=x^4-3x^3+3x^2-3x+2$ [1; 2]

90. $P(x)=x^4-6x^3+9x^2-4$ [1; 2]

91. $P(x)=x^4-10x^2+9$ [±1; ±3]

92. $P(x)=x^4-5x^3+5x^2+5x-6$ [±1; 2; 3]

Sul metodo per selezionare le radici razionali di un polinomio

93. Determinare le radici razionali del polinomio

$$P(x)=2x^3-7x^2+7x-2$$

completando il procedimento iniziato qui sotto.

I. Le radici razionali del polinomio si trovano fra le frazioni che hanno come numeratore un divisore del .... e come denominatore un divisore del ....
I divisori del termine noto sono ....
I divisori del .... sono ....
Le frazioni fra cui cercare le radici razionali del polinomio sono:

$-1 \qquad 1 \qquad -2 \qquad 2 \qquad -\frac{1}{2} \qquad \frac{1}{2}$

II. Si calcola il valore che il polinomio assume quando si sostituisce a x uno dei numeri razionali elencati prima; si ha (vedere esercizio 76):

$P(1)=........ \qquad P(2)=....... \qquad P\left(\frac{1}{2}\right)=.......$

III. si conclude che il polinomio ha le radici razionali:

$x_1=\frac{1}{2} \qquad x_2=1 \qquad x_3=2$

Esaminare i polinomi degli esercizi dal n. **94** al n. **109** e risolvere i seguenti quesiti:

a. elencare i numeri razionali che possono essere radici del polinomio;
b. determinare le radici razionali del polinomio.

94. $P(x)=3x^3-2x^2-3x+2$ [±1; $\frac{2}{3}$]

95. $P(x)=2x^3+3x^2-2x-3$ [±1; $\frac{3}{2}$]

96. $P(x)=8x^3-1$ $[\frac{1}{2}]$

97. $P(x)=8x^3+1$ $[-\frac{1}{2}]$

98. $P(x)=16x^4-1$ $[\pm\frac{1}{2}]$

99. $P(x)=9x^4+8x^2-1$ $[\pm\frac{1}{3}]$

100. $P(x)=27x^3-8$ $[\frac{2}{3}]$

101. $P(x)=8x^3+27$ $[-\frac{3}{2}]$

102. $P(x)=81x^4-16$ $[\pm\frac{2}{3}]$

103. $P(x)=16x^4-81$ $[\pm\frac{3}{2}]$

104. $P(x)=4x^4-13x^2+9$ $[\pm 1;\ \pm\frac{3}{2}]$

105. $P(x)=9x^4+8x^2-1$ $[\pm\frac{1}{3}]$

106. $P(x)=9x^4+9x^3+5x^2-4x-4$ $[\pm\frac{2}{3}]$

107. $P(x)=4x^4-5x^2+1$ $[\pm 1;\ \pm\frac{1}{2}]$

108. $P(x)=4x^6-x^4+4x^2-1$ $[\pm\frac{1}{2}]$

109. $P(x)=4x^6-9x^4+4x^2-9$ $[\pm\frac{3}{2}]$

Sulla divisione di polinomi

Esaminare le divisioni fra polinomi assegnate negli esercizi dal n. **110** al n. **145** e risolvere i seguenti quesiti:

a. eseguire la divisione fra i due polinomi, seguendo la regola descritta a p. 397;
b. verificare che il risultato della divisione è esatto, cioè moltiplicare il quoziente Q per il divisore D, aggiungere l'eventuale resto R e verificare che si ottiene il polinomio dividendo N.

110. $(x^3-1):(x-1)$

111. $(x^3-1):(x+1)$

112. $(x^3+1):(x+1)$

113. $(x^3+1):(x-1)$

114. $(x^3-8):(x-2)$

115. $(x^3-8):(x+2)$

116. $(x^3+8):(x-2)$

117. $(x^3+8):(x+2)$

118. $(8x^3-1):(2x-1)$

119. $(8x^3-1):(2x+1)$

120. $(8x^3+1):(2x-1)$

121. $(8x^3+1):(2x+1)$

122. $(2x^3-7x^2+8x-3):(2x-3)$

123. $(2x^3-7x^2+8x-3):(2x+3)$

124. $(12x^3+8x^2-21x-14):(2x-2)$

125. $(12x^3+8x^2-21x-14):(2x+2)$

126. $(6x^3+5x^2-9x):(-3x+2)$

127. $(6x^3+5x^2-9x):(3x+2)$

128. $\left(\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{3}x+1\right):\left(x+\frac{1}{3}\right)$

129. $\left(\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{3}x+1\right):\left(x-\frac{1}{3}\right)$

130. $\left(\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^2-1\right):\left(2x-\frac{1}{4}\right)$

131. $\left(\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^2-1\right):\left(2x+\frac{1}{4}\right)$

132. $(x^3-2x^2-x+2):(x^2-1)$

133. $(x^3-2x^2-x+2):(x^2+1)$

134. $(2x^3+3x^2-2x-3):(x^2-1)$

135. $(2x^3+3x^2-2x-3):(x^2+1)$

136. $(x^4+2x^2-3):(x^2-1)$

137. $(x^4+2x^2-3):(x^2+1)$

138. $(x^4-2x^2-8):(x^2-4)$

139. $(x^4-2x^2-8):(x^2+4)$

140. $(x^4+x^3-3x^2-4x-4):(x^2-4)$

141. $(x^4+x^3-3x^2-4x-4):(x^2+4)$

142. $(x^3-2x^2-x+2):(x^2-3x+2)$

143. $(x^3-2x^2-x+2):(x^2+3x+2)$

144. $(x^4-3x^3+3x^2-3x+2):(x^2-3x+2)$

145. $(x^4-3x^3+3x^2-3x+2):(x^2+3x+2)$

Riflettere sulla divisione dei polinomi

146. Calcolare il quoziente $Q(x)$ della seguente divisione di polinomi

$$(3x-1-2x^2+6x^3):(1+2x^2)$$

completando il procedimento descritto qui sotto.

I. Il procedimento di divisione di due polinomi richiede che i polinomi siano ordinati secondo le potenze decrescenti della variabile x, perciò, *prima di iniziare la divisione, bisogna ordinare i due polinomi*; si ha:

$$(\dots x^3-\dots x^2+\dots x-\dots):(\dots x^2+\dots)$$

II. Si esegue la divisione. [$Q(x)=3x-1$]

Dopo aver svolto l'esercizio 146, esaminare le divisioni di polinomi assegnate negli esercizi dal n. **147** al n. **156** e risolvere i seguenti quesiti:

a. ordinare i polinomi secondo le potenze decrescenti della variabile x;
b. calcolare il quoziente $Q(x)$ della divisione.

147. $(2x^2-9x-4+x^3):(-1-2x+x^2)$ [$Q(x)=x+4$]

148. $(x-3x^2+x^3+2x^4):(x+x^2-1)$ [$Q(x)=2x^2-x$]

149. $(6-19x+4x^2+4x^3):(5x+2x^2-2)$ [$Q(x)=2x-3$]

150. $(20x+4-6x^3+17x^2):(7x+2-2x^2)$ [$Q(x)=3x+2$]

151. $(7x+3-4x^3+2x^2+x^5-x^4):(2x+1+x^2)$ [$Q(x)=x^3-3x^2+x+3$]

152. $(10x^2-10x+3-4x^3):(3-4x+2x^2)$ [$Q(x)=-2x+1$]

153. $(2x^2+7x+3-4x^3+x^5-x^4):(3+x-3x^2+x^3)$ [$Q(x)=x^2+2x+1$]

154. $(4x^2-11x+4x^3+4):(3x-4+2x^2)$ [$Q(x)=2x-1$]

155. $(3x^2-8x-3+10x^3+3x^4):(3x+1+x^2)$ [$Q(x)=3x^2+x-3$]

156. $(3x+4-6x^2+2x^5-x^4-2x^3):(-x+x^2-1)$ [$Q(x)=2x^3+x^2+x-4$]

Collegamenti con il primo volume

Ricordare che un polinomio può essere scritto valendosi di una qualunque lettera (vedere il primo volume, p. 256) e calcolare i quozienti dei polinomi assegnati negli esercizi dal n. **157** al n. **164**.

157. $(y^6-1):(y^3-1)$ [$Q(y)=y^3+1$]

158. $(z^6-1):(z^2-1)$ [$Q(z)=z^4+z^2+1$]

159. $(17a^2-7a-2-3a^3):(5a+1-a^2)$ [$Q(a)=3a-2$]

160. $(4y-4+4y^4-y^2):(y-2+2y^2)$ [$Q(y)=2y^2-y+2$]

161. $(6m^2-m+1+2m^5-7m^4-m^3):(m-7m^2+2m^3-1)$ [$Q(m)=m^2-1$]

162. $\left(\frac{9}{2}-\frac{3}{4}k^2-\frac{9}{4}k+\frac{1}{3}k^3\right):\left(\frac{1}{4}k-\frac{3}{2}+\frac{1}{3}k^2\right)$ [$Q(k)=k-3$]

163. $\left(4b-2-\frac{17}{6}b^2+2b^4-\frac{14}{3}b^3\right):(2-5b+6b^2)$ [$Q(b)=\frac{1}{3}b^2-\frac{1}{2}b-1$]

164. $\left(4z^4+2z^2+\frac{1}{4}-\frac{1}{16}z^8\right):\left(2z^2+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}z^4\right)$ [$Q(z)=\frac{1}{4}z^4+2z^2+\frac{1}{2}$]

Sulla regola di Ruffini

Esaminare le divisioni fra un polinomio ed un binomio del tipo $(x-a)$ assegnate negli esercizi dal n. **165** al n. **180** e risolvere i seguenti quesiti:

a. eseguire la divisione fra i due polinomi, valendosi della regola di Ruffini descritta a p. 400;
b. verificare che il risultato della divisione è esatto, cioè moltiplicare il quoziente Q per il divisore D e verificare che si ottiene il polinomio dividendo N.

165. $(4x^3+x^2-2x-1):(x+1)$

166. $(4x^3+x^2-4x-1):(x-1)$

167. $(x^4-5x^2+x+2):(x-2)$

168. $(x^3-8x^2+16x-5):(x-5)$

169. $(2x^3-9x^2+2x+8):(x-4)$

170. $(x^3-3x^2+3x-9):(x-3)$

171. $(x^3-3x^2-17x-7):(x+2)$

172. $(x^4+3x^3+2x^2-5x+16):(x+2)$

173. $(x^5+2x^4-x^3-2x^2+2x+4):(x+2)$

174. $(x^5+4x^4+2x^3+7x^2-7x-12):(x+4)$

175. $\left(3x^3+x^2+\frac{1}{4}x-2\right):\left(x-\frac{1}{2}\right)$

176. $\left(x^3+\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\right):\left(x+\frac{1}{4}\right)$

177. $\left(3x^3+x^2+\frac{3}{4}x+\frac{1}{2}\right):\left(x+\frac{1}{2}\right)$

178. $\left(x^3-\frac{4}{3}x^2-\frac{5}{3}x+\frac{2}{3}\right):\left(x-\frac{1}{3}\right)$

179. $(3x^3-14x^2-2x+1):\left(x+\frac{1}{3}\right)$

180. $\left(9x^6-5x^5-\frac{2}{3}x^4+3x^2-x-\frac{2}{3}\right):\left(x-\frac{2}{3}\right)$

Esaminare le divisioni fra un polinomio ed un binomio del tipo $(x-a)$ assegnate negli esercizi dal n. **181** al n. **190** e risolvere i seguenti quesiti:

a. ordinare il polinomio secondo le potenze decrescenti della variabile;
b. scrivere i coefficienti del polinomio, ricordando di indicare i coefficienti che valgono 0;
c. valersi della regola di Ruffini per eseguire la divisione;
d. verificare che il risultato della divisione è esatto, cioè moltiplicare il quoziente Q per il divisore D e verificare che si ottiene il polinomio dividendo N.

181. $(3x^3+5x+13x^2):(x+4)$

182. $(2x+1+3x^5-2x^4):(x-1)$

183. $(6x^3+4+2x^4-3x^2):(x+2)$

184. $(x^2-1+x^3+8x^6):(x+1)$

185. $(3x^5-2x-5x^4-12x^3+7):(x-3)$

186. $(15x+x^4-2x^3-4):(x-2)$

187. $\left(\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{3}x-\frac{1}{5}\right):\left(x+\frac{1}{5}\right)$

188. $(2x^3-5x^2+18):\left(x+\frac{3}{2}\right)$

189. $(4x^4+7x^3-6x^2+x):\left(x-\frac{1}{4}\right)$

190. $\left(18x^3-x-\frac{1}{3}\right):\left(x-\frac{1}{3}\right)$

Sulla scomposizione in fattori dei polinomi

Scomporre in fattori polinomi di cui si conosce qualche radice intera

191. Scomporre in fattori il polinomio

$P(x)=2x^3-7x^2+7x-2$

completando il procedimento iniziato qui sotto.

A. Si ricercano le eventuali radici intere del polinomio che si trovano fra i divisori del ....; questi divisori sono:

$-1 \qquad 1 \qquad -2 \qquad 2$

B. Si calcola il valore che il polinomio assume quando si sostituisce a x uno dei precedenti numeri; si ha (vedere esercizio 76, p. 748):

$P(1)=0 \qquad P(2)=0$

Si conclude che il polinomio ha le radici intere:

$x_1=$....... $\qquad x_2=$......

perciò il polinomio è divisibile per ($x-$.......) e ($x-$.......), cioè è divisibile per

(.......)(.......)$=x^2-3x+2$

C. Si calcola il quoziente della divisione;

$Q(x)=(2x^3-7x^2+7x-2):(x^2-3x+2)$

ottenendo:

$Q(x)=$.................................

D. Si scrive il polinomio scomposto in fattori:

$2x^3-7x^2+7x-2=(x-1)(x-2)(2x-1)$

Esaminare i polinomi assegnati negli esercizi dal n. **192** al n. **220** e risolvere i seguenti quesiti:

a. elencare i numeri interi che possono essere radici del polinomio;
b. determinare le radici intere del polinomio e scrivere i binomi per cui è divisibile il polinomio;
c. dividere il polinomio per i binomi individuati prima;
d. scrivere il polinomio scomposto in fattori.

192. $P(x)=x^3-1$

193. $P(x)=x^3+1$

194. $P(x)=x^3-8$

195. $P(x)=x^3+8$

196. $P(x)=x^3-27$

197. $P(x)=x^3+27$

198. $P(x)=x^3-2x^2-x+2$

199. $P(x)=x^3-5x^2-4x+20$

200. $P(x)=3x^3-2x^2-3x+2$

201. $P(x)=3x^3+2x^2-4x-3$

202. $P(x)=3x^3-4x^2+6x-5$

203. $P(x)=6x^3-6x^2+4x-32$

204. $P(x)=3x^3-5x^2+7x-5$

205. $P(x)=3x^3-4x^2+5x-4$

206. $P(x)=x^4-1$

207. $P(x)=x^4-16$

208. $P(x)=x^4+2x^2-3$

209. $P(x)=4x^4-13x^2+9$

210. $P(x)=4x^4-5x^2+1$

211. $P(x)=x^4-5x^2+4$

212. $P(x)=x^4-10x^2+9$

213. $P(x)=x^4+x^3-3x^2-4x-4$

214. $P(x)=x^4+x^3-x^2-4x-12$

215. $P(x)=x^4-3x^3+3x^2-3x+2$

216. $P(x)=x^4-6x^3+9x^2-4$

217. $P(x)=x^4-5x^3+5x^2+5x-6$

218. $P(x)=x^4-2x^3-10x^2+4x+16$

219. $P(x)=x^6-14x^4+49x^2-36$

220. $P(x)=9x^5-18x^4-10x^3+20x^2+x-2$

Scomporre in fattori polinomi di cui si conosce qualche radice razionale

Esaminare i polinomi assegnati negli esercizi dal n. **221** al n. **246** e risolvere i seguenti quesiti:

a. elencare i numeri razionali che possono essere radici del polinomio, basandosi sul procedimento esposto a p. 394;
b. determinare le radici razionali del polinomio e scrivere i binomi per cui è divisibile il polinomio;
c. dividere il polinomio per i binomi individuati prima;
d. scrivere il polinomio scomposto in fattori.

221. $P(x)=8x^3-1$

222. $P(x)=8x^3+1$

223. $P(x)=27x^3-8$

224. $P(x)=8x^3+27$

225. $P(x)=27x^3+8$

226. $P(x)=8x^3-27$

227. $P(x)=6x^3-17x^2+16x-6$

228. $P(x)=2x^3+7x^2+7x+2$

229. $P(x)=4x^3-13x^2-13x+4$

230. $P(x)=3x^3-7x^2-7x+3$

231. $P(x)=6x^3+7x^2-7x-6$

232. $P(x)=6x^3-x^2-20x+12$

233. $P(x)=16x^4-1$

234. $P(x)=81x^4-1$

235. $P(x)=81x^4-16$

236. $P(x)=16x^4-81$

237. $P(x)=9x^4+8x^2-1$

238. $P(x)=9x^4+8x^2-1$

239. $P(x)=9x^4+9x^3+5x^2-4x-4$

240. $P(x)=4x^4-5x^2+1$

241. $P(x)=2x^4+5x^3-5x-2$

242. $P(x)=6x^4-13x^3+13x-6$

243. $P(x)=3x^4-10x^3+10x-3$

244. $P(x)=2x^6-5x^5+2x^4-2x^2+5x-2$

245. $P(x)=4x^6-x^4+4x^2-1$

246. $P(x)=4x^6-9x^4+4x^2-9$

Scomporre in fattori raccogliendo un fattore comune

Completare le uguaglianze indicate negli esercizi dal n. **247** al n. **258**.

247. $x^3-x=x(\ldots\ldots\ldots)$

248. $x^3-x^2=x^2(\ldots\ldots\ldots)$

249. $2x^3-x^2-x=x(\ldots\ldots\ldots)$

250. $4x^4-2x^3-2x^2=2x^2(\ldots\ldots\ldots)$

251. $3x^3-9x^2+6x=3x(\ldots\ldots\ldots)$

252. $2x^4-6x^3+4x^2=2x^2(\ldots\ldots\ldots)$

253. $-x^3+3x^2+4x=\ldots\ldots(x^2-3x-4)$

254. $-4x^4+4x^3+8x^2=\ldots\ldots x^2-x-2)$

255. $-\frac{4}{5}x^4-2x^3+\frac{6}{5}x^2=\ldots\ldots 2x^2+5x-3)$

256. $x^4-2x^3-8x^2=\ldots\ldots\left(\frac{1}{2}x^2-x-4\right)$

257. $\frac{3}{4}x^3-\frac{3}{2}x^2-\frac{9}{4}x=\ldots\ldots(x^2-2x-3)$

258. $-\frac{4}{3}x^5-4x^4+8x^3=\ldots\ldots(x^2+3x-6)$

259. Nei seguenti polinomi raccogliere prima il monomio $2x$ e poi il monomio $-2x$.

$2x^3-4x^2+6x$ $\quad -10x^3-8x^2+2x$ $\quad 2x^3-x^2+6x$ $\quad -10x^3-8x^2+x$

260. Nei seguenti polinomi raccogliere prima il monomio $3x^2$ e poi il monomio $\frac{1}{3}x^2$.

$3x^4-12x^3+6x^2$ $\quad -\frac{2}{3}x^4-\frac{4}{3}x^3+\frac{1}{3}x^2$ $\quad 3x^4-4x^3+6x^2$ $\quad -\frac{2}{3}x^4-x^3+\frac{1}{3}x^2$

Completare le uguaglianze indicate negli esercizi dal n. **261** al n. **268**.

261. $(1-x)^3-8(1-x)^2+4(1-x)=(1-x)[(\dots\dots)^2-8(\dots\dots)+4]$

262. $2(x+1)^3-4(x+1)^2+6(x+1)(x-2)=2(x+1)[\dots\dots\dots\dots]$

263. $6x(x+2)^2(x+1)-4x^2(x+2)(x+1)+8x(x+2)(x+1)^2=2x(x+2)(x+1)[3(\dots\dots)-2\dots+4(\dots\dots)]$

264. $2x^2(x+3)-x(x+3)-(x+3)=\dots(2x^2-x-1)$

265. $-6x^4(2x-1)-4x^3(2x-1)+2x^2(2x-1)=\dots\dots3x^2+2x-1)$

266. $x^3-x^2+2x-2=\dots\dots(x-1)+\dots(x-1)=(x-1)(\dots\dots)$

267. $15x^3+10x^2-9x-6=\dots\dots(3x+2)-\dots(3x+2)=\dots\dots$

268. $x^5-3x^3-2x^2-6=\dots\dots(x^2-3)-\dots(x^2-3)=\dots\dots$

Scomporre in fattori i polinomi assegnati negli esercizi dal n. **269** al n. **276** raccogliendo opportunamente dei fattori comuni.

269. $15x^2-6-10x^4+4x^2$

270. x^4+3x^3-2x-6

271. $1-x-x^2+x^3$

272. $x^4+x^3-x^2-x$

273. $x^5-x^4+x^3-x^2$

274. $2x^5+2x^4-4x^3-4x^2$

275. $x^4-3x^3-2x^2+6x$

276. $3x^5+3x^4-9x^3-9x^2$

Scomporre in fattori valendosi del prodotto notevole $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

Completare le uguaglianze indicate negli esercizi dal n. **277** al n. **279**.

277. $x^4-16=[(x^2)^2-4^2]=(\dots\dots-4)(\dots\dots+4)=(\dots\dots-2)(\dots\dots+2)(\dots\dots+4)$

278. $4x^4-9=[(2x^2)^2-\dots^2]=\dots\dots\dots=\dots\dots\dots$

279. $x^8-16=[(x^4)^2-(\dots\dots)^2]=(\dots\dots-4)(\dots\dots+4)=(\dots\dots-2)(\dots\dots+2)(\dots\dots+4)=$
$=(\dots\dots-\sqrt{2})(\dots\dots+\sqrt{2})(\dots\dots+2)(\dots\dots+4)$

Scomporre in fattori i polinomi assegnati negli esercizi dal n. **280** al n. **288**.

280. x^4-25 $\quad x^4-81$

281. $9x^4-4$ $\quad 16x^4-25$

282. x^4-2 $\quad 2x^4-1$

283. x^8-1 $\quad x^8-64$

284. $16x^8-81$ $\quad 16x^8-25$

285. $4x^8-25$ $\quad 9x^8-16$

286. $x^{16}-1$ $\quad x^{16}-64$

287. $64x^{16}-1$ $\quad 16x^{16}-1$

288. $64x^{16}-81$ $\quad 81x^{16}-625$

289. Esaminare le uguaglianze:

$x^4+1=(x^2+1)(x^2-1)$ $\quad x^4-4=(x+2)(x-2)$ $\quad x^8-4=(x^2+2)(x^2-2)$

Risolvere i seguenti quesiti:

a. spiegare perché le uguaglianze non sono identità;
b. correggere le uguaglianze in modo da trasformarle in identità.

290. Ripetere l'esercizio 289 a partire dalle seguenti uguaglianze:

$x^4+9=(x^2+3)(x^2-3)$ $\quad$ $x^4-9=(x+3)(x-3)$ $\quad$ $x^{16}-16=(x^2+4)(x^2-4)$

291. Esaminare l'uguaglianza:

$$x^{2n}-a=(x^n-\sqrt{a})(x^n+\sqrt{a})$$

Risolvere i seguenti quesiti:

a. spiegare perché l'uguaglianza è vera quando si sceglie x nell'insieme dei reali, a nell'insieme dei reali positivi e n nell'insieme degli interi positivi;

b. scrivere almeno tre identità ottenute assegnando ad a e n dei valori a piacere.

Scomporre in fattori un polinomio valendosi delle potenze di un binomio

Completare le uguaglianze indicate negli esercizi dal n. **292** al n. **295**.

292. $x^4+6x^2+9=[(x^2)^2+2\cdot x^2\cdot 3+3^2]=[x^2+.......]^2$

293. $x^8+4x^4+4=[(x^4)^2+2\cdot x^4\cdot 2+2^2]=[x^4+....]^2$

294. $x^3-3x^2+3x-1=[x^3+3\cdot x^2\cdot(-1)+3\cdot x\cdot(-1)^2+(-1)^3]=[x+(.......)]^3=..............$

295. $x^6+3x^4+3x^2+1=[(x^2)^3+3\cdot(x^2)^2\cdot 1+3\cdot x^2\cdot 1^2+1^3]=(x^2+......)^3$

Scomporre in fattori i polinomi assegnati negli esercizi dal n. **296** al n. **303**.

296.	x^4+10x^2+25	x^4+18x^2+81	$4x^4+4x^2+1$
297.	$9x^4+6x^2+1$	$9x^4+12x^2+4$	$4x^4+12x^2+9$
298.	x^8+2x^4+1	x^8+6x^4+9	$4x^8+4x^4+1$
299.	$9x^8+6x^4+1$	x^3+3x^2+3x+1	$x^3+6x^2+12x+8$
300.	$x^3+9x^2+27x+27$	$x^3-9x^2+27x-27$	$8x^3+12x^2+6x+1$
301.	$8x^3-12x^2+6x-1$	$8x^3+36x^2+54x+27$	$8x^3-36x^2+54x-27$
302.	$27x^3+54x^2+36x+8$	$27x^3-54x^2+36x-8$	$x^6+6x^4+12x^2+8$
303.	$8x^6+12x^4+6x^2+1$	$8x^6+36x^4+54x^2+27$	$27x^6+54x^4+36x^2+8$

304. Esaminare la seguente uguaglianza:

$$x^{2n}+2ax^n+a^2=(x^n+a)^2$$

Risolvere i seguenti quesiti:

a. spiegare perché l'uguaglianza è vera comunque si scelgano x e a nell'insieme dei reali e n nell'insieme degli interi positivi;

b. scrivere almeno tre identità ottenute assegnando ad a e n dei valori a piacere.

305. Esaminare la seguente uguaglianza:

$$x^{3n}+3ax^{2n}+3a^2x^n+a^3=(x^n+a)^3$$

Risolvere i seguenti quesiti:

a. spiegare perché l'uguaglianza è vera comunque si scelgano x e a nell'insieme dei reali e n nell'insieme degli interi positivi;

b. scrivere almeno tre identità ottenute assegnando ad a e n dei valori a piacere.

Scomporre in fattori polinomi biquadratici

306. Completare la seguente tabella come è indicato nelle prime righe:

Polinomio biquadratico	Trinomio di 2° grado	Radici reali del trinomio	Trinomio scomposto	Polinomio scomposto
$3x^4+x^2+2$	$3z^2+z+2$	nessuna	no	no
$3x^4+12x^2+12$	$3z^2+12z+12$	$z_1=z_2=2$	$3(z+2)^2$	$3(x^2+2)^2$
$2x^2-3x-5$		$z_1=-1 \quad z_2=\frac{5}{2}$	$2(z+1)\left(z-\frac{5}{2}\right)$	$2(x^2+1)\left(x^2-\frac{5}{2}\right)$
$-2x^4+3x^2+5$				
$-2x^4+3x^2-5$				
$-2x^4+8x^2-8$				

Esaminare i polinomi biquadratici assegnati negli esercizi dal n. **307** al n. **318** e risolvere i seguenti quesiti:

a. trasformare il polinomio in un trinomio di 2° grado;
b. determinare le eventuali radici reali del trinomio di 2° grado;
c. valersi delle radici ottenute per scomporre il trinomio in fattori;
d. scrivere il polinomio scomposto in fattori.

307. $4x^4-3x^2-1$ $\quad$ $4x^4-4x^2+1$ $\quad$ $4x^4-4x^2+3$

308. $2x^4+7x^2+3$ $\quad$ $2x^4+8x^2+8$ $\quad$ $2x^4+7x^2+8$

309. $9x^4-6x^2+1$ $\quad$ $4x^4-6x^2-4$ $\quad$ $9x^4-6x^2+2$

310. $4x^4+20x^2+27$ $\quad$ $4x^4+20x^2+25$ $\quad$ $4x^4+20x^2+9$

311. $2x^4+5x^2-3$ $\quad$ $4x^4+10x^2-6$ $\quad$ $-2x^4-5x^2+3$

312. $16x^4-8x^2+1$ $\quad$ $2x^4-x^2+\frac{1}{8}$ $\quad$ $-x^4+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{16}$

313. $12x^4-25x^2+12$ $\quad$ $-12x^4+25x^2-12$ $\quad$ $-6x^4+2{,}5x^2-6$

314. x^4+20x^2+100 $\quad$ $100x^4+20x^2+1$ $\quad$ $10x^4+2x^2+0{,}1$

315. $x^4+\sqrt{5}x^2-10$ $\quad$ $5x^4-\sqrt{5}x^2-2$ $\quad$ $10x^4+\sqrt{5}x^2+1$

316. $4x^4-4\sqrt{6}x^2+5$ $\quad$ $-4x^4+4\sqrt{6}x^2-5$ $\quad$ $2x^4-2\sqrt{6}x^2+\frac{5}{2}$

317. $2x^4+3\sqrt{3}x^2-3$ $\quad$ $\frac{2}{3}x^4+\sqrt{3}x^2-1$ $\quad$ $-x^4-\frac{3}{2}\sqrt{3}x^2+\frac{3}{2}$

318. $2x^4-(\sqrt{6}-2\sqrt{3})x^2-3\sqrt{2}$ $\quad$ $-2x^4+(\sqrt{6}-2\sqrt{3})x^2+3\sqrt{2}$

319. $x^4-(\sqrt{2}+\sqrt{3})x^2+\sqrt{6}$ $\quad$ $x^4+(\sqrt{2}-\sqrt{3})x^2-\sqrt{6}$

320. Esaminare l'uguaglianza:

$$az^2+bz+c=a(z-z_1)(z-z_2)$$

Risolvere i seguenti quesiti:

a. descrivere i casi in cui l'uguaglianza è vera;
b. scrivere le uguaglianze che si ottengono sostituendo a z le seguenti potenze di x:

$z=x^2$ $\quad$ $z=x^3$ $\quad$ $z=x^4$ $\quad$ $z=x^5$

321. Dopo aver risolto l'esercizio 320, riscrivere l'uguaglianza:

$az^2+bz+c=a(z-z_1)(z-z_2)$

sostituendo a z una qualunque potenza di x ad esponente intero positivo, cioè:

$z=x^n$

Scomporre in fattori scegliendo i procedimenti più opportuni

Scomporre in fattori i polinomi assegnati negli esercizi dal n. **322** al n. **341** scegliendo i procedimenti che si ritengono più opportuni.

322. x^4-18x^2+81 $[(x-3)^2(x+3)^2]$

323. x^4-10x^2+25 $[(x-\sqrt{5})^2(x+\sqrt{5})^2]$

324. $x^6-3x^4+3x^2-1$ $[(x-1)^3(x+1)^3]$

325. $x^6-6x^4+12x^2-8$ $[(x-\sqrt{2})^3(x+\sqrt{2})^3]$

326. $x^9-3x^6+3x^3-1$ $[(x-1)^3(x^2+x+1)^3]$

327. $x^4-2x^3+3x^2+8x-4$ $[(x-1)^2(x-2)(x+2)]$

328. x^6-1 $[(x-1)(x^2+x+1)(x+1)(x^2-x+1)]$

329. x^6-64 $[(x-2)(x^2+2x+4)(x+2)(x^2-2x+4)]$

330. $x^{12}-64$ $[(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})(x^4+2x^2+4)(x^2+2)(x^4-2x^2+4)]$

331. $8x^6-12x^4+6x^2-1$ $[(\sqrt{2}x-1)^3(\sqrt{2}x+1)^3]$

332. $27x^6-54x^4+36x^2-8$ $[(\sqrt{3}x-\sqrt{2})^3(\sqrt{3}x+\sqrt{2})^3]$

333. $8x^6-36x^4+54x^2-27$ $[(\sqrt{2}x-\sqrt{3})^3(\sqrt{2}x+\sqrt{3})^3]$

334. x^4-9x^2+8 $[(x-1)(x+1)(x-\sqrt{8})(x+\sqrt{8})]$

335. x^6-9x^3+8 $[(x-1)(x^2+x+1)(x-2)(x+2x+4)]$

336. $x^4-4x^3+3x^2+4x-4$ $[(x-2)^2(x-1)(x+1)]$

337. $x^5-3x^4-6x^3+26x^2-27x+9$ $[(x-1)^3(x-3)(x+3)]$

338. $x^5-9x^4+30x^3-46x^2+33x-9$ $[(x-1)^3(x-3)^2]$

339. $x^5-2x^3-x^2+2$ $[(x-1)(x^2+x+1)(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})]$

340. $x^5-3x^3-2x^2+6$ $[(x-\sqrt[3]{2})(x^2+\sqrt[3]{2}x+\sqrt[3]{4})(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})]$

341. $x^6-14x^4+49x^2-36$ $[(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)(x-3)(x+3)]$

Collegamenti con il primo volume

Ricordare che un polinomio è la somma di monomi in cui compaiono una o più lettere qualunque dell'alfabeto (vedere il primo volume, p. 256) e scomporre in fattori i polinomi assegnati negli esercizi dal n. **342** al n. **356**.

342. $\frac{4}{9}a^3b-\frac{2}{3}a^2b+\frac{1}{4}ab$ $\left[ab\left(\frac{2}{3}a+\frac{1}{2}\right)^2\right]$

343. $24x^3-24a^2x^3+6a^4x^3$ $[6x^3(a-2)^2]$

344. $\frac{5}{9}x^6y^2-5x^2y^2$ $\left[5x^2y^2\left(\frac{1}{\sqrt{3}}x-1\right)\left(\frac{1}{\sqrt{3}}x+1\right)\left(\frac{1}{3}x^2+1\right)\right]$

345. $x^4-a^2x^2-4x^2+4a^2$ $[(x-2)(x+2)(x-a)(x+a)]$

346. $a^3x^3-7a^3x^2+12a^3x$ $[a^3x(x-4)(x-3)]$

347. $(a-b)^3-1$ $[(a-b-1)\{(a-b)^2+a-b+1\}]$

348. $(x+y)^3+1$ $[(x+y+1)\{(x+y)^2-x-y+1\}]$

349. $27a^3-(2a+b)^3$ $[(a-b)(19a^2+7ab+b^2)]$

350. $81-(y-1)^4$ $[(4-y)(2+y)(y^2-2y+10)]$

351. $a^4-b^4+3(a^2+b^2)+a^2x+b^2x$ $[(a^2+b^2)(a^2-b^2+3+x)]$

352. $x^4-16a^4-4ax^3+16a^3x$ $[(x-2a)^3(x+2a)]$

353. $x^8-y^8-2x^6y^2+2x^2y^6$ $[(x-y)^3(x+y)^3(x^2+y^2)]$

354. $a^3-b^3-2b(a^2-b^2)+(a-b)(a^2+b^2)$ $[a(a-b)(2a-b)]$

355. $a^3-b^3-a(a^2-b^2)+ab-b^2$ $[b(b+1)(a-b)]$

356. $(x^2+3xy)^2+x^2+9y^2+6xy-(x^2-9y^2)^2$ $[(x+3y)^2(1+6xy-9y^2)]$

Sulle radici multiple di un polinomio

Esaminare i polinomi assegnati negli esercizi dal n. **357** al n. **370** e risolvere i seguenti quesiti:

a. scomporre in fattori i polinomi;
b. scegliere i polinomi che presentano delle radici multiple motivando la scelta;
c. scrivere le radici reali di ogni polinomio, ciascuna con la sua molteplicità.

357.	x^3-1	x^3-3x^2+3x-1
358.	x^3+3x^2+3x+1	x^3+1
359.	x^4-1	x^4-2x^2+1
360.	x^4+2x^2+1	x^4+1
361.	x^4-81	x^4-18x^2+81
362.	x^4+18x^2+81	x^4+81
363.	x^6-1	$x^6-3x^4+3x^2-1$
364.	$x^6+3x^4+3x^2+1$	x^6+1
365.	$x^6-6x^4+12x^2-8$	x^6-6x^4
366.	$8x^6-12x^4+6x^2-1$	$8x^6-12x^4$
367.	$x^9-3x^6+3x^3-1$	x^9-3x^8
368.	$x^4-2x^3+3x^2+8x-4$	x^4-2x^3
369.	$x^4-4x^3+3x^2+4x-4$	x^4+4x
370.	x^4-2x^3+2x-1	x^4+x

Collegamenti con i capitoli precedenti

371. Rappresentare sul piano cartesiano le funzioni seguenti:
- $y=x^3$ (vedere il capitolo quinto, paragrafo 5);
- $y=(x-1)^3$ ottenuta dalla prima con una traslazione nella direzione dell'asse delle x (vedere capitolo sesto, paragrafo 5);
- $y=x^3-1$ ottenuta dalla prima con una traslazione nella direzione dell'asse delle y (vedere capitolo sesto, paragrafo 5).

Rispondere ai seguenti quesiti:

a. determinare le intersezioni di ciascuna curva con l'asse delle x (vedere capitolo settimo, paragrafo 1);

b. osservare che la curva $y=(x-1)^3$ sembra «appoggiarsi» all'asse delle x nel punto A(1; 0) in cui sono riuniti tre punti di intersezione e spiegare perché la curva $y=x^3-1$ taglia l'asse delle x nello stesso punto A senza «appoggiarsi».

372. Dopo aver risolto l'esercizio 371, rappresentare le funzioni seguenti:

$y=x^3$ $\qquad$ $y=(x+1)^3$ $\qquad$ $y=x^3+1$

Rispondere ai seguenti quesiti:

a. determinare le intersezioni di ciascuna curva con l'asse delle x;

b. osservare che la curva $y=(x+1)^3$ sembra «appoggiarsi» all'asse delle x nel punto B(–1; 0) in cui sono riuniti tre punti di intersezione e spiegare perché la curva $y=x^3+1$ taglia l'asse delle x nello stesso punto B senza «appoggiarsi».

373. Dopo aver risolto l'esercizio 371, rappresentare le funzioni seguenti:

$y=x^4$ $\qquad$ $y=(x-1)^4$ $\qquad$ $y=x^4-1$

Rispondere ai seguenti quesiti:

a. determinare le intersezioni di ciascuna curva con l'asse delle x ;

b. osservare che la curva $y=(x-1)^4$ sembra «appoggiarsi» all'asse delle x nel punto A(1; 0) in cui sono riuniti quattro punti di intersezione e spiegare perché la curva $y=x^4-1$ taglia l'asse delle x in due punti senza «appoggiarsi».

374. Dopo aver risolto l'esercizio 371, rappresentare le funzioni seguenti:

$y=x^4$ $\qquad$ $y=(x+1)^4$ $\qquad$ $y=x^4+1$

Rispondere ai seguenti quesiti:

a. determinare le intersezioni di ciascuna curva con l'asse delle x ;

b. osservare che la curva $y=(x+1)^4$ sembra «appoggiarsi» all'asse delle x nel punto B(–1; 0) in cui sono riuniti quattro punti di intersezione e spiegare perché la curva $y=x^4+1$ non incontra l'asse delle x.

Sulle equazioni di grado superiore al 2°

Equazioni di cui si individua una soluzione

Risolvere le equazioni assegnate negli esercizi dal n. **375** al n. **409** procedendo nel modo seguente:

a. individuare le radici intere del polinomio al primo membro, valendosi del procedimento esposto a p. 392;

b. scomporre in fattori il polinomio al primo membro, valendosi della divisione dei polinomi, esposta a p. 397;

c. risolvere l'equazione valendosi del principio di annullamento del prodotto.

375. $x^3-1=0$ [1]

376. $x^3+1=0$ [–1]

377. $x^3-8=0$ [2]

378. $x^3+8=0$ [-2]

379. $x^3-2x^2-x+2=0$ [$\pm1; 2$]

380. $2x^3+3x^2-2x-3=0$ [$\pm1; \frac{3}{2}$]

381. $2x^3-7x^2+7x-2=0$ [$1; 2; \frac{1}{2}$]

382. $3x^3-2x^2-3x+2=0$ [$\pm1; \frac{2}{3}$]

383. $x^3+x^2-4x-4=0$ [$\pm2; -1$]

384. $x^3-6x^2-9x+14=0$ [$1; -2; 7$]

385. $3x^3+2x^2-19x+6=0$ [$2; -3; \frac{1}{3}$]

386. $x^3-20x+32=0$ [$2; -1\pm\sqrt{17}$]

387. $2x^3+7x^2+7x+2=0$ [$-1; -2; -\frac{1}{2}$]

388. $4x^3-13x^2-13x+4=0$ [$-1; 4; \frac{1}{4}$]

389. $x^3+3x^2-3x-1=0$ [$1; -2\pm\sqrt{3}$]

390. $x^3-3x^2+3x-1=0$ [$x_1=x_2=x_3=1$]

391. $3x^3-7x^2-7x+3=0$ [$-1; 3; \frac{1}{3}$]

392. $3x^3-5x^2-4x+3=0$ [$-1; \frac{4\pm\sqrt{7}}{3}$]

393. $x^4-1=0$ [±1]

394. $x^4-16=0$ [±2]

395. $x^4+x^3-3x^2-4x-4=0$ [±2]

396. $x^4+x^3-x^2-4x-12=0$ [±2]

397. $x^4-3x^3+3x^2-3x+2=0$ [$1; 2$]

398. $x^4-6x^3+9x^2-4=0$ [$1; 2; \frac{3\pm\sqrt{17}}{2}$]

399. $2x^4+5x^3-5x-2=0$ [$\pm1; -2; -\frac{1}{2}$]

400. $6x^4-13x^3+13x-6=0$ [$\pm1; \frac{2}{3}; \frac{3}{2}$]

401. $x^4-5x^3+5x^2+5x-6=0$ [$\pm1; 2; 3$]

402. $3x^4-10x^3+10x-3=0$ [$\pm1; 3; \frac{1}{3}$]

403. $6x^4-7x^3-13x^2+4x+4=0$ $\left[-1;\ 2;\ \frac{2}{3};\ -\frac{1}{2}\right]$

404. $2x^4+x^3-6x^2+x+2=0$ $\left[x_1=x_2=1;\ -2;\ -\frac{1}{2}\right]$

405. $9x^5-18x^4-10x^3+20x^2+x+2=0$ $\left[\pm 1;\ 2;\ \pm\frac{1}{3}\right]$

406. $2x^5-3x^4-5x^3+5x^2+3x-2=0$ $\left[x_1=x_2=-1;\ 1;\ 2;\ \frac{1}{2}\right]$

407. $2x^5+3x^4-5x^3-5x^2+3x+2=0$ $\left[x_1=x_2=1;\ -1;\ -2;\ -\frac{1}{2}\right]$

408. $2x^6-5x^5+2x^4-2x^2+5x-2=0$ $\left[\pm 1;\ 2;\ \frac{1}{2}\right]$

409. $2x^6+5x^5+2x^4-2x^2-5x-2=0$ $\left[\pm 1;\ -2;\ -\frac{1}{2}\right]$

Equazioni di cui si individua un fattore comune

Risolvere le equazioni assegnate negli esercizi dal n. **410** al n. **428** procedendo nel modo seguente:

a. individuare un fattore comune nel polinomio al primo membro, valendosi del procedimento esposto a p. 406;
b. scomporre in fattori il polinomio al primo membro;
c. risolvere l'equazione valendosi del principio di annullamento del prodotto.

410. $x^3-x=0$ $[0;\ \pm 1]$

411. $x^3-x^2=0$ $[x_1=x_2=0;\ 1]$

412. $2x^3-x^2-x=0$ $\left[0;\ 1;\ -\frac{1}{2}\right]$

413. $4x^4-2x^3-2x^2=0$ $\left[x_1=x_2=0;\ 1;\ -\frac{1}{2}\right]$

414. $3x^3-9x^2+6x=0$ $[0;\ 1;\ 2]$

415. $2x^4-6x^3+4x^2=0$ $[x_1=x_2=0;\ 1;\ 2]$

416. $x^5-3x^3-2x^2-6=0$ $[\sqrt[3]{2};\ \pm\sqrt{3}]$

417. $x^4+3x^3-2x-6=0$ $[-3;\ \sqrt[3]{2}]$

418. $x^4+x^3-x^2-x=0$ $[x_1=x_2=-1;\ 1;\ 0]$

419. $x^5-x^4+x^3-x^2=0$ $[x_1=x_2=0;\ 1]$

420. $x^4-3x^3-2x^2+6x=0$ $[0;\ 3;\ \pm\sqrt{2}]$

421. $x^4-2x^3-3x^2+6x=0$ $[0;\ 2;\ \pm\sqrt{3}]$

422. $2(x+1)^3-4(x+1)^2+6(x+1)(x-2)=0$ $\left[-1;\ \frac{-3\pm\sqrt{37}}{2}\right]$

423. $6x(x+2)^2(x+1)-4x^2(x+2)(x+1)+8x(x+2)(x+1)^2=0$ $[x_1=x_2=-2;\ 0;\ -1]$

424. $2x^2(x+3)-x(x+3)-(x+3)=0$ $[-3; -\frac{1}{2}; 1]$

425. $-6x^4(2x-1)-4x^3(2x-1)+2x^2(2x-1)=0$ $[x_1=x_2=0; -1; \frac{1}{3}; \frac{1}{2}]$

426. $15x^2-6-10x^4+4x^2=0$ $[\pm\sqrt{\frac{3}{2}}; \pm\sqrt{\frac{2}{5}}]$

427. $2x^5-2x^4-4x^3-4x^2=0$ $[x_1=x_2=0; -1; \pm\sqrt{2}]$

428. $3x^5+3x^4-9x^3-9x^2=0$ $[x_1=x_2=0; -1; \pm\sqrt{3}]$

Equazioni in cui si individua il prodotto notevole $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

Risolvere le equazioni assegnate negli esercizi dal n. **429** al n. **444** procedendo nel modo seguente:

a. individuare nel polinomio al primo membro la differenza di due quadrati;
b. scomporre in fattori il polinomio al primo membro;
c. risolvere l'equazione valendosi del principio di annullamento del prodotto.

429. $x^4-16=0$ $[\pm 2]$

430. $4x^4-9=0$ $[\pm\sqrt{\frac{3}{2}}]$

431. $x^4-25=0$ $[\pm\sqrt{5}]$

432. $x^4-81=0$ $[\pm 3]$

433. $9x^4-4=0$ $[\pm\sqrt{\frac{2}{3}}]$

434. $16x^4-25=0$ $[\pm\frac{\sqrt{5}}{2}]$

435. $x^4-2=0$ $[\pm\sqrt[4]{2}]$

436. $2x^4-1=0$ $[\pm\sqrt[4]{\frac{1}{2}}]$

437. $x^8-16=0$ $[\pm\sqrt{2}]$

438. $x^8-81=0$ $[\pm\sqrt{3}]$

439. $16x^8-81=0$ $[\pm\sqrt{\frac{3}{2}}]$

440. $16x^8-25=0$ $[\pm\sqrt{\frac{5}{2}}]$

441. $x^{16}-16=0$ $[\pm\sqrt[4]{2}]$

442. $16x^{16}-1=0$ $[\pm\sqrt[4]{\frac{1}{2}}]$

443. $16x^{16}-81$ $[\pm\sqrt[4]{\frac{3}{2}}]$

444. $81x^{16}-625$ $[\pm\sqrt[4]{\frac{5}{3}}]$

Equazioni in cui si individua la potenza di un binomio

Risolvere le equazioni assegnate negli esercizi dal n. **445** al n. **481** procedendo nel modo seguente:

a. individuare nel polinomio al primo membro la potenza di un binomio, come mostrato a p. 407;
b. scomporre in fattori il polinomio al primo membro;
c. risolvere l'equazione valendosi del principio di annullamento del prodotto.

445. $x^4-2x^2+1=0$ $[x_1=x_2=-1; x_3=x_4=1]$

446. $x^4+2x^2+1=0$ [nessuna]

447. $x^4-18x^2+81=0$ $[x_1=x_2=-3; x_3=x_4=3]$

448. $x^4+18x^2+81=0$ [nessuna]

449. $x^4-6x^2+9=0$ $[x_1=x_2=-\sqrt{3};\ x_3=x_4=\sqrt{3}]$

450. $x^4+6x^2+9=0$ [nessuna]

451. $4x^4-4x^2+1=0$ $[x_1=x_2=-\sqrt{\frac{1}{2}};\ x_3=x_4=\sqrt{\frac{1}{2}}]$

452. $4x^4+4x^2+1=0$ [nessuna]

453. $9x^4-6x^2+1=0$ $[x_1=x_2=-\sqrt{\frac{1}{3}};\ x_3=x_4=\sqrt{\frac{1}{3}}]$

454. $9x^4+6x^2+1=0$ [nessuna]

455. $9x^4-12x^2+4=0$ $[x_1=x_2=-\sqrt{\frac{2}{3}};\ x_3=x_4=\sqrt{\frac{2}{3}}]$

456. $9x^4+12x^2+4=0$ [nessuna]

457. $4x^4-12x^2+9=0$ $[x_1=x_2=-\sqrt{\frac{3}{2}};\ x_3=x_4=\sqrt{\frac{3}{2}}]$

458. $4x^4+12x^2+9=0$ [nessuna]

459. $x^8-2x^4+1=0$ $[x_1=x_2=-1;\ x_3=x_4=1]$

460. $x^8+2x^4+1=0$ [nessuna]

461. $x^8-8x^4+256=0$ $[x_1=x_2=-2;\ x_3=x_4=2]$

462. $x^8+8x^4+256=0$ [nessuna]

463. $x^8-6x^4+9=0$ $[x_1=x_2=-\sqrt[4]{3};\ x_3=x_4=\sqrt[4]{3}]$

464. $x^8+6x^4+9=0$ [nessuna]

465. $x^3-3x^2+3x-1=0$ $[x_1=x_2=x_3=1]$

466. $x^3+3x^2+3x+1=0$ $[x_1=x_2=x_3=-1]$

467. $x^3+6x^2+12x+8=0$ $[x_1=x_2=x_3=-2]$

468. $x^3-6x^2+12x-8$ $[x_1=x_2=x_3=2]$

469. $x^3+9x^2+27x+27=0$ $[x_1=x_2=x_3=-3]$

470. $x^3-9x^2+27x-27=0$ $[x_1=x_2=x_3=3]$

471. $8x^3+12x^2+6x+1=0$ $[x_1=x_2=x_3=-\frac{1}{2}]$

472. $8x^3-12x^2+6x-1=0$ $[x_1=x_2=x_3=\frac{1}{2}]$

473. $8x^3+36x^2+54x+27=0$ $[x_1=x_2=x_3=-\frac{3}{2}]$

474. $8x^3-36x^2+54x-27=0$ $[x_1=x_2=x_3=\frac{3}{2}]$

475. $27x^3+54x^2+36x+8=0$ $[x_1=x_2=x_3=-\frac{2}{3}]$

476. $27x^3-54x^2+36x-8=0$ $\quad [x_1=x_2=x_3=\frac{2}{3}]$

477. $x^6+3x^4+3x^2+1=0$ $\quad$ [nessuna]

478. $x^6+6x^4+12x^2+8=0$ $\quad$ [nessuna]

479. $x^6-3x^4+3x^2-1=0$ $\quad [x_1=x_2=x_3=-1;\ x_4=x_5=x_6=1]$

480. $x^6-6x^4+12x^2-8=0$ $\quad [x_1=x_2=x_3=-\sqrt{2};\ x_4=x_5=x_6=\sqrt{2}]$

481. $8x^6-12x^4+6x^2-1=0$ $\quad [x_1=x_2=x_3=-\sqrt{\frac{1}{2}};\ x_4=x_5=x_6=\sqrt{\frac{1}{2}}]$

Equazioni biquadratiche

Risolvere le equazioni assegnate negli esercizi dal n. **482** al n. **509** procedendo nel modo seguente:

a. trasformare il polinomio al primo membro in un trinomio di 2° grado;
b. determinare le eventuali radici reali del trinomio di 2° grado;
c. scomporre in fattori il polinomio al primo membro;
d. risolvere l'equazione valendosi del principio di annullamento del prodotto.

482. $x^4-5x^2+4=0$ $\quad [\pm 1;\ \pm 2]$

483. $x^4+5x^2+4=0$ $\quad$ [nessuna]

484. $x^4+10x^2+9=0$ $\quad$ [nessuna]

485. $x^4-10x^2+9=0$ $\quad [\pm 1;\ \pm 3]$

486. $4x^4-13x^2+9=0$ $\quad [\pm 1;\ \pm \frac{3}{2}]$

487. $4x^4-13x^2+9=0$ $\quad$ [nessuna]

488. $9x^4+8x^2-1=0$ $\quad [\pm 1]$

489. $9x^4-8x^2-1=0$ $\quad [\pm \frac{1}{3}]$

490. $4x^4-5x^2+1=0$ $\quad [\pm 1;\ \pm \frac{1}{2}]$

491. $x^4+2x^2-3=0$ $\quad [\pm 1]$

492. $x^4-2x^2-8=0$ $\quad [\pm 2]$

493. $x^4+2x^2-8=0$ $\quad [\pm\sqrt{2}]$

494. $x^4-2x^2+6=0$ $\quad [\pm\sqrt{3};\ \pm\sqrt{2}]$

495. $x^4+2x^2+6=0$ $\quad$ [nessuna]

496. $5x^4+4x^2-1=0$ $\quad [\pm\sqrt{\frac{1}{5}}]$

497. $2x^4-3x^2-5=0$ $\quad [\pm\sqrt{\frac{5}{2}}]$

498. $4x^4-3x^2-1=0$ $\quad [\pm 1]$

499. $3x^4-4x^2-7=0$ $\quad [\pm\sqrt{\frac{7}{3}}]$

500. $2x^4-3x^2-2=0$ $\quad [\pm\sqrt{2}]$

501. $2x^4+5x^2-3=0$ $\quad [\pm\sqrt{\frac{1}{2}}]$

502. $-\frac{1}{2}x^4-\frac{3}{4}x^2+\frac{5}{4}=0$ $\quad [\pm 1]$

503. $\frac{1}{2}x^4+\frac{3}{2}x^2+1=0$ $\quad$ [nessuna]

504. $0{,}6x^4+0{,}7x^2-2=0$ $\quad [\pm\sqrt{\frac{4}{3}}]$

505. $0{,}6x^4-0{,}7x^2-2=0$ $\quad [\pm\sqrt{\frac{5}{2}}]$

506. $x^4-4\sqrt{2}x^2+6=0$ $\quad [\pm\sqrt[4]{18};\ \pm\sqrt[4]{2}]$

507. $\sqrt{2}x^4+x^2+\sqrt{2}=0$ $\quad$ [nessuna]

508. $-x^4+2\sqrt{2}x^2+6=0$ $\quad [\pm\sqrt[4]{18}]$

509. $\sqrt{2}x^4+3x^2-\sqrt{8}=0$ $\quad [\pm\sqrt[4]{\frac{1}{2}}]$

Equazioni trinomie

Risolvere le equazioni assegnate negli esercizi dal n. **510** al n. **517** procedendo nel modo seguente:

a. trasformare il polinomio al primo membro in un trinomio di 2° grado;
b. determinare le eventuali radici reali del trinomio di 2° grado;
c. scomporre in fattori il polinomio al primo membro;
d. risolvere l'equazione valendosi del principio di annullamento del prodotto.

510. $x^6+7x^3-8=0$ $[1;\ -2]$

511. $x^6+x^3-6=0$ $[\sqrt[3]{2}\ ;\ \sqrt[3]{3}\ ]$

512. $x^6+x^3+3=0$ [nessuna]

513. $8x^6-31x^3-4=0$ $[-\frac{1}{2}\ ;\ \sqrt[3]{4}\ ]$

514. $x^8-17x^4+16=0$ $[\pm 1;\ \pm 2]$

515. $16x^8+31x^4-2=0$ $[\pm\frac{1}{2}]$

516. $x^8+x^4-20=0$ $[\pm\sqrt{2}]$

517. $x^8-20x^4+64=0$ $[\pm 2;\ \pm\sqrt{2}]$

Collegamenti con i capitoli o i paragrafi precedenti

518. Risolvere i seguenti quesiti:
a. spiegare perché un'equazione biquadratica non può avere solo una soluzione reale;
b. spiegare perché un'equazione biquadratica non può avere 5 soluzioni reali (vedere il capitolo ottavo, paragrafo 3).

519. Riprendere la regola di Cartesio per determinare il segno delle radici reali di un'equazione di 2° grado (vedere il capitolo settimo, p. 326) e completare la seguente tabella:

Equazione biquadratica	**Esame dell'equazione $az^2+bz+c=0$**	**Segno delle soluzioni di $az^2+bz+c=0$**	**Soluzioni della biquadratica**
$x^4+13x^2+45=0$	$z^2+13z+45=0$ I. $\Delta=13^2-4\cdot 45=-11<0$	nessuna soluzione reale	nessuna reale
$x^4-13x^2+36=0$	$z^2-13z+36=0$ I. $\Delta=13^2-4\cdot 36=25>0$ II. due variazioni	2 soluzioni positive $z_1>0$ $z_2>0$	4 soluzioni reali $x_{1,2}=\pm\sqrt{z_1}$ $x_{3,4}=\pm\sqrt{z_2}$
$x^4-3x^2-4=0$	$z^2-3z-4=0$ I. $\Delta=3^2-4\cdot(-4)\cdot 1=25>0$ II. una variazione	1 soluzione positiva $z_1<0$ $z_2>0$	2 soluzioni reali $x_{1,2}=\pm\sqrt{z_2}$
$x^4+13x^2+36=0$	$z^2+13z+36=0$ I. $\Delta=25>0$ II. nessuna variazione	2 soluzioni negative $z_1<0$ $z_2<0$	nessuna reale
$-5x^4-11x^2-2=0$			
$-5x^4+11x^2-10=0$			
$-5x^4+10x^2-5=0$			

520. Dopo aver svolto l'esercizio 519, descrivere i casi i cui un'equazione biquadratica ha:
- quattro soluzioni reali;
- due soluzioni reali;
- nessuna soluzione reale.

Equazioni varie

Risolvere le equazioni assegnate negli esercizi dal n. **521** al n. **537** scegliendo i procedimenti che si ritengono più opportuni.

521. x^6-1 $[\pm 1]$

522. x^6-64 $[\pm 2]$

523. $x^{12}-1$ $[\pm 1]$

524. $x^{12}-64$ $[\pm\sqrt{2}]$

525. $x^9-3x^6+3x^3-1=0$ $[x_1=x_2=x_3=1]$

526. $x^4-9x^2+8=0$ $[\pm 1;\ \pm\sqrt{8}]$

527. $x^4-2x^3+3x^2+8x-4=0$ $[x_1=x_2=1;\ \pm 2]$

528. $x^6-9x^3+8=0$ $[1;\ 2]$

529. $x^5-2x^3-x^2+2=0$ $[1;\ \pm\sqrt{2}]$

530. $x^5-3x^3-2x^2+6=0$ $[\sqrt[3]{2};\ \pm\sqrt{3}]$

531. x^4-10x^2+25 $[x_1=x_2=\sqrt{5};\ x_3=x_4=-\sqrt{5}]$

532. $8x^6+36x^4+54x^2+27=0$ $[x_1=x_2=x_3=-\sqrt{\frac{3}{2}};\ x_4=x_5=x_6=\sqrt{\frac{3}{2}}]$

533. $27x^6+54x^4+36x^2+8=0$ $[x_1=x_2=x_3=-\sqrt{\frac{2}{3}};\ x_4=x_5=x_6=\sqrt{\frac{2}{3}}]$

534. $x^4-4x^3+3x^2+4x-4=0$ $[x_1=x_2=2;\ \pm 1]$

535. $x^5-3x^4-6x^3+26x^2-27x+9=0$ $[x_1=x_2=x_3=1;\ \pm 3]$

536. $x^5-9x^4+30x^3-46x^2+33x-9=0$ $[x_1=x_2=x_3=1;\ x_4=x_5=3]$

537. $x^6-14x^4+49x^2-36=0$ $[\pm 1;\ \pm 2;\ \pm 3]$

Equazioni letterali

Risolvere le equazioni assegnate negli esercizi dal n. **538** al n. **549** e risolvere i seguenti quesiti:

a. scrivere le soluzioni dell'equazione, considerando come incognita la lettera x;

b. esaminare i vari casi che si possono presentare a seconda dei valori assunti dal parametro.

538. $x^3-kx^2=0$ $[x_1=x_2=0;\ k]$

539. $4x^3-2kx=0$ $[0;\ \pm\sqrt{\frac{k}{2}}]$

540. $x^3-4kx^2+4k^2x=0$ $[x_1=x_2=2k;\ 0]$

541. $x^4-kx^3=0$ $[x_1=x_2=x_2=0;\ k]$

542. $x^4-kx^2=0$ $[x_1=x_2=0;\ \pm\sqrt{k}]$

543. $x^4-kx=0$ $[0;\ \sqrt[3]{k}]$

544. $4x^4-25k^2x^2+36k^4=0$ $[\pm 2k;\ \pm\frac{3k}{2}]$

545. $9k^4x^4+10k^2x^2+1=0$ [nessuna]

546. $x^4-9k^2x^2=4k^2(x^2-9k^2)$ $[\pm 2k;\ \pm 3k]$

547. $x^4-4k^2x^2=k^2(x^2-4k^2)$ $[\pm k;\ \pm 2k]$

548. $x^4-2kx^2+k^2=0$ $[x_1=x_2=\sqrt{k};\ x_3=x_4=-\sqrt{k}]$

549. $x^4-4kx^4+4k^2x^2=0$ $[x_1=x_2=0;\ x_3=x_4=2k]$

Dopo aver svolto gli esercizi 519 e 520, esaminare le equazioni biquadratiche assegnate negli esercizi dal n. **550** al n. **557** e stabilire quante sono le soluzioni reali di ogni equazione senza risolverla.

550. $x^4-2x^2+k=0$

551. $x^4-2x^2+k^2=0$

552. $x^4-4x^2-k^2=0$

553. $x^4+4x^2+k^2=0$

554. $x^4+4x^2-k^2=0$

555. $x^4+2kx^2-1=0$

556. $x^4+2k^2x^2-1=0$

557. $x^4-2k^2x^2-1=0$

Sulle frazioni algebriche

558. Completare la seguente tabella come mostrato nelle prime righe.

Frazione algebrica	Denominatore D	D=0	Numeri per cui la frazione ha significato
$\frac{2x}{2x-4}$	$D=2x-4$	$2x-4=0$ da cui $x=2$	$x\neq 2$
$\frac{2x}{x^2+4}$	$D=x^2+4$	$x^2+4=0$ senza soluzioni reali	tutti i reali
$\frac{x^2+4}{2x}$			
$\frac{4x^2-x}{x^2-4}$			
$\frac{4x^2-1}{4x^2-x}$			

Dopo aver svolto l'esercizio 558, esaminare le frazioni algebriche assegnate negli esercizi dal n. **559** al n. **564** e risolvere i seguenti quesiti:

a. scrivere il denominatore D della frazione;
b. determinare i valori di x per cui risulta D=0;
c. determinare i valori di x per cui la frazione ha significato.

559. $\frac{2x^2-x-1}{x^2-2x+1}$ $\frac{x^2-2x+1}{2x^2-x-1}$ $\frac{x^2-2x+1}{2x-1}$ $\frac{x^2-2x+1}{2x^2-x+1}$

560. $\frac{2x^2-x}{x^2-1}$ $\frac{x^2-2x}{2x^2+1}$ $\frac{x+1}{x-1}$ $\frac{x^2-4x+4}{x^2-4x-5}$

561. $\frac{4x-9}{4x}$ $\frac{4x^2}{4x^2-9}$ $\frac{x^2+3x}{4x^2+9}$ $\frac{x-2}{x^2-4x+4}$

562. $\frac{5x-3}{4x^2}$ $\frac{4x+4}{4x^2+4}$ $\frac{4x^2+4x}{4x^2-4}$ $\frac{3x}{x^2-6x+9}$

563. $\frac{x^3+1}{x^4-1}$ $\frac{2x^4}{x^4+1}$ $\frac{x^4-2x^2+1}{x^3-1}$ $\frac{x^3-2x^2}{x^3-10x^2+9x}$

564. $\frac{x^2-1}{x^4-1}$ $\frac{2x^3}{x^3-8}$ $\frac{x^4+2x^2+1}{x^2+2x^2+1}$ $\frac{2x^4-4x^2}{4x^3-8x}$

565. Completare il procedimento per ridurre ai minimi termini la frazione algebrica:

$$\frac{x^2-9}{x^2-3x}$$

A. Si scompongono in fattori primi il numeratore e il denominatore (vedere paragrafo 4 di questo capitolo):

$x^2-9=(.....+....)(....-....)$ $\qquad$ $x^2-3x=x(....-....)$

B. Si divide numeratore e denominatore per tutti i fattori comuni:

$$\frac{x^2-9}{x^2-3x}=\frac{\boxed{x-3}(.........)}{\boxed{x-3}......}=\frac{x+3}{x}$$

C. Si indicano i valori di x per cui la semplificazione è valida:
- i due termini della frazione sono stati divisi per ....–........;
- risulta ....–........=0 per x=........;
- la semplificazione non è valida per x=........, ma è valida per qualunque altro valore reale di $x \neq 3$.

Dopo aver svolto l'esercizio 565, esaminare le frazioni algebriche assegnate negli esercizi dal n.**566** al n.**585** e risolvere i seguenti quesiti:
a. ridurre ai minimi termini la frazione;
b. indicare i valori di x per cui la semplificazione è valida.

566. $\dfrac{x^2-1}{x^2+x}$ $\qquad$ [$\dfrac{x-1}{x}$; $x\neq-1$]

567. $\dfrac{x^2-2x+1}{4x^2-4}$ $\qquad$ [$\dfrac{x-1}{4x+4}$; $x\neq1$]

568. $\dfrac{x^2-4}{x^2+4x+4}$ $\qquad$ [$\dfrac{x-2}{x+2}$; $x\neq-2$]

569. $\dfrac{x^2-2x+1}{4x^2-4}$ $\qquad$ [$\dfrac{x-1}{4x+4}$; $x\neq1$]

570. $\dfrac{6x^2+12x+6}{3x^2-3}$ $\qquad$ [$\dfrac{2x+2}{x-1}$; $x\neq-1$]

571. $\dfrac{x^2-9}{x^2+2x-3}$ $\qquad$ [$\dfrac{x-3}{x-1}$; $x\neq-3$]

572. $\dfrac{x^2-x-2}{x^2-3x+2}$ $\qquad$ [$\dfrac{x+1}{x-1}$; $x\neq2$]

573. $\dfrac{x^2-6x+9}{x^2-2x-3}$ $\qquad$ [$\dfrac{x-3}{x+3}$; $x\neq3$]

574. $\dfrac{x^2+2x-3}{x^2+3x-4}$ $\qquad$ [$\dfrac{x+3}{x+4}$; $x\neq1$]

575. $\dfrac{x^2+x-6}{-x^2+4x-4}$ $\qquad$ [$\dfrac{x+3}{2-x}$; $x\neq2$]

576. $\dfrac{x^4-1}{x^3+1}$ $\qquad$ [$\dfrac{(x+1)(x^2+1)}{x^2+x+1}$; $x\neq1$]

577. $\dfrac{x^3+27}{x^2+6x+9}$ $\qquad$ [$\dfrac{x^2-3x+9}{x+3}$; $x\neq-3$]

578. $\dfrac{x^3+1}{x^6-1}$ $\qquad$ [$\dfrac{1}{x^3-1}$; $x\neq-1$]

579. $\dfrac{x^2-2x+4}{x^3+8}$ $\quad [\dfrac{1}{x+2}]$

580. $\dfrac{x^4-1}{x^8-2x^4+1}$ $\quad [\dfrac{1}{x^4-1}; x\neq\pm1]$

581. $\dfrac{x^3-8}{x^2+x-6}$ $\quad [\dfrac{x^2+2x+4}{x+3}; x\neq2]$

582. $\dfrac{x^3-3x^2+3x-1}{x^3-1}$ $\quad [\dfrac{(x-1)^2}{x^2+x+1}; x\neq1]$

583. $\dfrac{x^3-1}{x^4-x^3+3x^2-3}$ $\quad [\dfrac{x^2+x+1}{x^3+3x+3}; x\neq1]$

584. $\dfrac{4x^2+4x+1}{16x^4-8x^2+1}$ $\quad [\dfrac{1}{(2x-1)^2}; x\neq-\dfrac{1}{2}]$

585. $\dfrac{x^3-6x^2+12x-8}{x^3-5x^2+8x-4}$ $\quad [\dfrac{x-2}{x-1}; x\neq2]$

Moltiplicazioni e divisioni di frazioni algebriche

Esaminare le espressioni assegnate negli esercizi dal n. **586** al n. **593** e risolvere i seguenti quesiti:
a. eseguire le operazioni indicate;
b. ridurre ai minimi termini le frazioni ottenute;
c. indicare i valori di x per cui la semplificazione è valida.

586. $\dfrac{1}{9+3x}\cdot\dfrac{3+x}{2x}$ $\quad \dfrac{1}{9+3x}:\dfrac{2x}{3+x}$ $\quad [\dfrac{1}{6x}; x\neq-3]$

587. $\dfrac{4x^2}{3x-6}\cdot\dfrac{9x-18}{2x}$ $\quad \dfrac{4x^2}{3x-6}:\dfrac{2x}{9x-18}$ $\quad [6x; x\neq0 \text{ e } x\neq2]$

588. $\dfrac{x^2-1}{2x}\cdot\dfrac{6x^2}{x+1}$ $\quad \dfrac{x^2-1}{2x}:\dfrac{x+1}{6x^2}$ $\quad [3x(x-1); x\neq0 \text{ e } x\neq-1]$

589. $\dfrac{x^2-2x+1}{3x}\cdot\dfrac{x^2}{x^2-1}$ $\quad \dfrac{x^2-2x+1}{3x}:\dfrac{x^2-1}{x^2}$ $\quad [\dfrac{x(x-1)}{3(x+1)}; x\neq0 \text{ e } x\neq1]$

590. $\dfrac{x+2}{x-2}\cdot\dfrac{x^2-4x+4}{x^2+4x+4}$ $\quad \dfrac{x+2}{x-2}:\dfrac{x^2+4x+4}{x^2-4x+4}$ $\quad [\dfrac{x-2}{x+2}; x\neq\pm2]$

591. $\dfrac{x^3-1}{x^2-1}\cdot\dfrac{x^2+x}{x^2+x+1}$ $\quad \dfrac{x^3-1}{x^2-1}:\dfrac{x^2+x+1}{x^2+x}$ $\quad [x; x\neq\pm1]$

592. $\dfrac{x^2+x-2}{x^2+5x+6}\cdot\dfrac{x^2-4x+3}{x^2-9}\cdot\dfrac{x^2-3x}{x^2-1}$ $\quad [\dfrac{x}{x+3}; x\neq\pm1 \text{ e } x\neq3 \text{ e } x\neq-2]$

593. $\dfrac{x^2+2x-3}{x^2-9}\cdot\dfrac{2x^2-6x+3}{x^2+x-2}\cdot\dfrac{x^2-x-6}{x^2-2x}$ $\quad [\dfrac{2(x-3)}{x-2}; x\neq\pm3 \text{ e } x\neq0 \text{ e } x\neq-2 \text{ e } x\neq1]$

Potenze di frazioni algebriche

Esaminare le espressioni assegnate negli esercizi dal n. **594** al n. **598** ed eseguire le potenze indicate.

594. $\left(\dfrac{x-2}{x+3}\right)^2$ $\quad \dfrac{(x-2)^2}{x+3}$ $\quad \dfrac{x-2}{(x+3)^2}$

595. $\left(\dfrac{2x-1}{4x-3}\right)^2$ $\quad \dfrac{(2x-1)^2}{4x-3}$ $\quad \dfrac{2x-1}{(4x-3)^2}$

596. $\left(\frac{x^2-2}{x^3+1}\right)^2$ $\qquad \frac{(x^2-2)^2}{x^3+1} \qquad \frac{x^2-2}{(x^3+1)^2}$

597. $\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3$ $\qquad \frac{(x-1)^3}{x+1} \qquad \frac{x-1}{(x+1)^3}$

598. $\left(\frac{x^2-1}{x-2}\right)^3$ $\qquad \frac{(x^2-1)^3}{x-2} \qquad \frac{x^2-1}{(x-2)^3}$

Addizione e sottrazione di frazioni algebriche

Eseguire le addizioni e sottrazioni di frazioni algebriche assegnate negli esercizi dal n. **599** al n. **626**, basandosi sul procedimento organizzato nei seguenti passi:

a. scomporre in fattori i denominatori;
b. calcolare il minimo comune multiplo dei denominatori;
c. ad ogni frazione sostituire una frazione equivalente, che ha per denominatore il m.c.m. prima determinato;
d. addizionare le frazioni così ottenute;
e. ridurre ai minimi termini la somma.

599. $\frac{1}{x}-\frac{1}{x-1}$ $\qquad [\frac{1}{x-x^2}]$

600. $\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x}$ $\qquad [\frac{2}{x(x-2)}]$

601. $1+x+\frac{x^2}{1-x}$ $\qquad [\frac{1}{1-x}]$

602. $\frac{1}{x-2}+x+2$ $\qquad [\frac{x^2-3}{x-2}]$

603. $\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}$ $\qquad [\frac{2}{x^2-1}]$

604. $\frac{1}{x+1}+\frac{3}{2x+2}$ $\qquad [\frac{5}{2x+2}]$

605. $\frac{1}{x^2+x}+\frac{1}{x+1}$ $\qquad [\frac{1}{x}]$

606. $\frac{3}{x^2-3x}-\frac{1}{x-3}$ $\qquad [-\frac{1}{x}]$

607. $\frac{x-2}{x+2}+\frac{x+2}{x-2}-2$ $\qquad [\frac{16}{x^2-4}]$

608. $\frac{1}{x^2+2x+1}-\frac{x}{x+1}+1$ $\qquad [\frac{x+2}{(x+1)^2}]$

609. $\frac{1}{x+1}+\frac{3}{2x+2}-\frac{2}{3x+3}$ $\qquad [\frac{11}{6x+6}]$

610. $\frac{1}{x-2}-\frac{1}{2x-4}+\frac{1}{3x-6}$ $\qquad [\frac{5}{6x-12}]$

611. $\frac{2}{x+1}+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}$ $\qquad [\frac{x^2+1}{x^2(x+1)}]$

612. $\frac{x+1}{x^2-x}-\frac{x-1}{x^2+x}-\frac{1}{x^2-1}$ $\qquad [\frac{3}{x^2-1}]$

613. $\frac{x+2}{x^2+x}-\frac{x-2}{x^2-x}-\frac{3}{x^2-1}$ $\left[\frac{1}{1-x^2}\right]$

614. $\frac{x-1}{x+1}-\frac{2x^2}{x^2-1}+\frac{x+1}{x-1}$ $\left[\frac{2}{x^2-1}\right]$

615. $\frac{x+2}{x-2}-\frac{x+1}{x-1}-\frac{2}{x^2-3x+2}$ $\left[\frac{2}{x-2}\right]$

616. $\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x-3}-\frac{x-2}{x^2-5x+6}$ $\left[\frac{1}{x-2}\right]$

617. $\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2-1}+\frac{2x+1}{x^3-x}$ $\left[\frac{2}{x^2-1}\right]$

618. $\frac{x+1}{x-1}+\frac{x-2}{x+1}+\frac{x^2+3}{1-x^2}$ $\left[\frac{x}{x+1}\right]$

619. $\frac{x^2}{x^3+8}-\frac{x}{x^2-2x+4}+\frac{1}{x+2}$ $\left[\frac{(x-2)^2}{x^3+8}\right]$

620. $\frac{x^2}{x^3-1}+\frac{x}{x^2+x+1}-\frac{2}{x-1}$ $\left[\frac{2+3x}{1-x^3}\right]$

621. $\frac{x+2}{x^2+7x+10}-\frac{x-3}{x^2-8x+15}+\frac{x^2-15}{x^2-25}$ [1]

622. $\frac{x}{x^2-1}-\frac{1}{x+1}+\frac{x^2-2x+1}{x-1}-\frac{1}{x^2-1}$ $[x-1]$

623. $\frac{x^2+3x-1}{x^3-3x^2+3x+1}+\frac{x}{x^2-2x+1}+\frac{1}{x-1}$ $\left[\frac{3x^2}{(x-1)^3}\right]$

624. $\frac{1}{x^3+6x^2+12x+8}-\frac{2}{x^2+4x+4}+\frac{1}{x+2}$ $\left[\frac{(x+1)^2}{(x+2)^3}\right]$

625. $\frac{2}{x^2-x-2}+\frac{1}{x^2+3x+2}-\frac{1}{x^3+x^2-4x-4}$ $\left[\frac{3}{x^2-4}\right]$

626. $\frac{x-2}{x^3+2x^2-x-2}-\frac{x+2}{x^3-2x^2-x+2}+\frac{16}{x^4-5x^2+4}$ $\left[\frac{-8}{(x^2-1)(x+2)}\right]$

Semplificare espressioni con frazioni algebriche

Semplificare le espressioni assegnate negli esercizi dal n. **627** al n. **646**, seguendo il procedimento indicato a p. 423 e cioè:

1. svolgere le operazioni racchiuse fra parentesi;
2. in assenza di parentesi seguire la priorità delle operazioni;
3. ridurre ai minimi termini la frazione ottenuta.

627. $\left(\frac{x+2}{x-2}-\frac{x-2}{x+2}\right)\left(x-\frac{4}{x}\right)$ [8]

628. $\left(\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x+2}\right)\frac{x^2-4}{x}$ [2]

629. $\left(\frac{2x^2}{x+1}-x\right)\left(x-\frac{1+2x-x^3}{1-x^2}\right)$ [1]

630. $\left(\frac{3}{x^2}-\frac{2}{x^2+x}\right)\left(1-\frac{2}{x+3}\right)$ $\left[\frac{1}{x^2}\right]$

631. $\left[1+\dfrac{3x(x+1)}{1-x-2x^2}\right]\left(1-5x+\dfrac{9x^2}{x+1}\right)$ $[1-2x]$

632. $\left[1+\dfrac{3(x+1)}{x^2-x-2}\right]\left(x-5+\dfrac{9}{x+1}\right)$ $[x-2]$

633. $\left(\dfrac{2}{x-2}-\dfrac{2}{x+3}-\dfrac{5x}{x^2+x-6}\right)\left(1+\dfrac{3}{x}\right)$ $[-\dfrac{5}{x}]$

634. $\left(\dfrac{2+x}{2-x}+\dfrac{2x^2-4-2x}{4-4x+x^2}\right)\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{2}{x}\right)$ $[1+\dfrac{x}{2}]$

635. $\left(\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x^2-3x+2}\right)^2\left(x+\dfrac{4}{x}-4\right)$ $[\dfrac{1}{x}]$

636. $\left(\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{1}{x+2}\right)\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^2$ $[\dfrac{2(x+2)}{x(x-2)}]$

637. $\left(\dfrac{x^4-1}{x^2-x+1}\right):\left[\dfrac{x^2+1}{x^3+1}\cdot\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^2\right]$ $[(x-1)^3]$

638. $\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^2\left(\dfrac{x}{x-1}+\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{2}{x^2-1}\right)$ $[\dfrac{x-1}{x+1}]$

639. $\dfrac{\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{2x}{x^2-1}}{\dfrac{x}{x+1}}$ $[-\dfrac{1}{x}]$

640. $\dfrac{1-\dfrac{1}{x}}{\left(1+\dfrac{1}{x}\right)(x^2-1)}$ $[\dfrac{1}{(x+1)^2}]$

641. $\dfrac{\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{x}{x-1}}{1+\dfrac{x}{x^2-1}}$ $[2]$

642. $\dfrac{\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x-1}}{\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x+1}}$ $[-\dfrac{1}{x}]$

643. $\dfrac{\dfrac{x+1}{x-1}-\dfrac{x-1}{x+1}}{\dfrac{1}{(x-1)^2}+\dfrac{1}{(x+1)^2}}$ $[2x\dfrac{x^2-1}{x^2+1}]$

644. $\dfrac{1+\dfrac{1}{x}}{\left(1-\dfrac{1}{x}\right)\cdot\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)}$ $[1]$

645. $\dfrac{\dfrac{x}{2x-2}-\dfrac{x}{2x+2}-\dfrac{1}{1-x^2}}{1+\dfrac{1}{x-1}}$ $[\dfrac{1}{x}]$

646. $\dfrac{\dfrac{x^2-2x+1}{x^2}-\dfrac{x^2}{x^2+2x+1}}{\left(2-\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}\right)^2}$ $[\dfrac{1}{1-2x^2}]$

Collegamenti con il primo volume

Ricordare che un polinomio è una somma di monomi in cui compaiono una o più lettere qualunque dell'alfabeto (vedere il primo volume, p. 256) e semplificare le espressioni contenenti frazioni algebriche assegnate negli esercizi dal n. **647** al n. **656**.

647. $\left(1-\dfrac{a}{a-b}\right)\dfrac{a-b}{b^2}$ $[-\dfrac{1}{b}]$

648. $\dfrac{1+\dfrac{x}{y}}{\left(1-\dfrac{x}{y}\right)\left(\dfrac{y-x}{y+x}\right)}$ $[1]$

649. $\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}-\dfrac{3ab}{3b-2a}\right)\dfrac{3ab}{3b-2a}$ $[3]$

650. $\left(1-\frac{1}{x}\right)\left(1-\frac{1}{y}\right)\frac{3xy}{xy-x-y+1}$ [1]

651. $\left[1+\frac{3x(x+y)}{y^2-xy-2x^2}\right]\left(y-5x+\frac{9x^2}{x+y}\right)$ $[y-2x]$

652. $\left(\frac{1}{a-2b}+\frac{1}{a+2b}\right)\frac{a^2-4b^2}{a}$ [2]

653. $\left(\frac{x-y}{x+y}\right)^2\left(\frac{x}{x-y}+\frac{y}{x+y}+\frac{2y^2}{x^2-y^2}\right)$ $\left[\frac{x-y}{x+y}\right]$

654. $\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a-b}\right)\left(1+\frac{b}{a}\right)^2$ $\left[\frac{2(a+b)}{a(a-b)}\right]$

655. $\left(\frac{a^2}{4a^2+4ab+b^2}-\frac{a-b}{6a+3b}\right)\frac{12a+6b}{a^3-b^3}$ $\left[\frac{(2a+b)(a-b)}{2}\right]$

656. $\left(\frac{a}{a^2+2ab+b^2}-\frac{1}{a+b}+\frac{1}{3a+3b}\right)\left(\frac{1}{a^2}+\frac{2}{ab}+\frac{1}{b^2}\right)$ $\left[\frac{a-2b}{3a^2b^2}\right]$

Sulle equazioni fratte

Risolvere le equazioni assegnate negli esercizi dal n. **657** al n. **700** seguendo il procedimento indicato a p. 425 e cioè:

a. scrivere l'equazione nella forma:

$$\frac{N}{D}=0$$

dove N e D sono due polinomi;

b. risolvere l'equazione

$$N=0$$

c. verificare che le soluzioni ottenute siano soluzioni dell'equazione assegnata.

Equazioni di 1° grado

657. $\frac{1}{x}+\frac{1}{3}-\frac{1}{2x}=\frac{7}{12}$ [2]

658. $\frac{3}{x}-\frac{1}{4}=\frac{8}{5x}+\frac{1}{10}$ [4]

659. $\frac{x}{2x-1}-\frac{1}{4}=\frac{1}{2(2x-1)}$ [impossibile]

660. $\frac{2x+1}{x-3}=\frac{x+2}{2x-6}$ [0]

661. $\frac{3}{x-1}=\frac{2}{x+1}$ [–5]

662. $\frac{1}{x-2}=\frac{2}{x+2}$ [6]

663. $\frac{1-x}{x-1}+\frac{4x}{2x+1}=1$ [impossibile]

664. $\frac{3}{2-2x}+\frac{1}{6}+\frac{1}{x-1}=0$ [4]

665. $\frac{2x-3}{x-2} - \frac{3x+1}{2-x} = 1 - \frac{x}{2x-4}$ [0]

666. $\frac{2}{x-1} + 3 = 1 - \frac{2x}{1-x}$ [indeterminata per $x \neq 1$]

667. $\frac{2x}{3x-6} - \frac{x}{2x-4} = 1 + \frac{5x-12}{12-6x}$ [indeterminata per $x \neq 2$]

668. $3 - \frac{x}{2+\frac{x}{2}} = \frac{8}{4+x}$ [–4]

Equazioni di 2° grado

669. $\frac{8x-2}{5} = \frac{2}{x}$ $[-1; \frac{5}{4}]$

670. $2x + \frac{7}{x} = 8 + x$ [1; 7]

671. $x - \frac{x+2}{x-2} = \frac{4x-4}{5}$ [–3; 6]

672. $\frac{x}{2} - \frac{12}{x+3} = \frac{7+x^2}{4x+12}$ [–11; 5]

673. $2x-1+\frac{2(5x-1)}{2x-1} = \frac{3}{2x-1}$ [–2]

674. $4(x+1) = \frac{4(2x-1)}{x-1} - \frac{3}{x-1}$ $[\frac{3}{2}; \frac{1}{2}]$

675. $\frac{2x+5}{x} - \frac{x-3}{x^2} = \frac{3}{4}$ $[-2; -\frac{6}{5}]$

676. $\frac{x+5}{x} + \frac{1-4x}{x^2} = 7$ $[-\frac{1}{3}; \frac{1}{2}]$

677. $\frac{6}{x^2-1} - \frac{3}{x-1} + \frac{3}{x+1} = 1$ [impossibile]

678. $\frac{2x}{x-3} - \frac{1-3x}{x+3} = \frac{15}{x^2-9}$ $[-\frac{6}{5}; 2]$

679. $1 - \frac{3x}{x^2-9} + \frac{x}{2x-6} = 0$ [–2]

680. $\frac{2-x}{2x+2} + \frac{1}{1-x} = \frac{1+x^2}{1-x^2}$ [–2]

681. $\frac{4x}{x-4} + \frac{3}{x-8} = \frac{22x-48}{x^2-12x+32}$ $[12; \frac{3}{4}]$

682. $\frac{x-2}{x-1} = \frac{x^2}{x^2-3x+2} + \frac{x-1}{x-2}$ [–3]

683. $\frac{x}{x+1} + \frac{x}{x+4} = 1$ [±2]

684. $\frac{3x+1}{x-2} - \frac{x+2}{x-1} = \frac{3}{2}$ [–5; 0]

685. $\frac{x+2}{x} + \frac{3x+2}{6x-8} - \frac{4}{3x^2-4x} = 1$ [–6]

686. $\frac{x+3}{x^2-2x+1}+\frac{1}{2x-2}+\frac{5+x}{1-x^2}=0$ [impossibile]

687. $\frac{x+1}{3x-3x^2}-\frac{x-1}{2x+2x^2}+\frac{7}{6x}=0$ [−3; 2]

688. $\frac{1}{x^2-1}-\frac{1}{6}=\frac{1}{3(x-1)}-\frac{1}{2(x+1)}$ [2]

689. $\frac{2x+1}{x-1}-\frac{2(x+4)}{x+1}=3-\frac{3x+1}{x-2}$ $[\frac{5}{4};-5]$

690. $\frac{7x+10}{x+2}+\frac{3-4x}{x-1}=\frac{2x^2+11}{x^2+x-2}=0$ [−3; 5]

Equazioni di grado superiore al 2°

691. $x^2+\frac{3}{2}\left(1+\frac{7}{8x^2-8}\right)=0$ $[\pm\frac{1}{2}]$

692. $5\left(\frac{x^2}{x^2+1}-\frac{8}{1-x^4}\right)=\frac{9}{2}-\frac{4}{1-x^2}$ [±3]

693. $5\left(\frac{1}{x^2+1}+\frac{2}{x^4-1}\right)=\frac{3x^2}{x^2-1}$ $[\pm\sqrt{\frac{5}{3}}]$

694. $\frac{3x^2}{x^2-1}+\frac{2}{3(x^4-1)}=0$ [impossibile]

695. $\frac{2x^2}{x^2-1}-\frac{15}{2(x^4-1)}=0$ $[\pm\frac{\sqrt{6}}{3}]$

696. $\frac{18}{x^2-4}=x^2-7$ $[\pm 1;\pm\sqrt{10}]$

697. $x^2+2+\frac{5}{4(x^2-1)}=0$ $[\pm\frac{\sqrt{2}}{2}]$

698. $\frac{x^2+12}{x^4-x^2+4}+\frac{12}{x^2-2}=1$ [±1; ±4]

699. $\frac{x^2-4}{x^2+2}+\frac{3+\sqrt{3}}{2}=\frac{x^2+2}{x^2-4}$ $[\pm(1+\sqrt{3})]$

700. $\frac{x^2-3}{x^2+1}-\frac{x^2-1}{x^2-3}=3$ $[\pm\sqrt[4]{\frac{19}{3}}]$

Equazioni letterali di 2° grado

Esaminare le equazioni assegnate negli esercizi dal n. **701** al n. **715** e risolvere i seguenti quesiti:

a. scrivere le soluzioni dell'equazione, considerando come incognita la lettera x;
b. esaminare i vari casi che si possono presentare a seconda dei valori assunti dal parametro.

701. $\frac{1}{k-x}+\frac{3}{2k}=\frac{1}{x}$ [(a) $x_1=\frac{k}{3}$; $x_2=2k$ per $k\neq 0$; (b) per $k=0$ l'equazione perde significato]

702. $kx+3=\dfrac{1}{kx-1}$ $\left[\begin{array}{l}\text{(a) } x_1=x_2=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{k} \text{ per } k\neq 0\\ \text{(b) per } k=0 \text{ l'equazione perde significato}\end{array}\right]$

703. $\dfrac{x-4k}{k}-1=\dfrac{x-k}{x-4k}$ $\left[\begin{array}{l}\text{(a) } x_1=2k;\quad x_2=7k \text{ per } k\neq 0\\ \text{(b) per } k=0 \text{ l'equazione perde significato}\end{array}\right]$

704. $\dfrac{1}{2x-m}+\dfrac{1}{x-m}=\dfrac{1}{m}$ $\left[\begin{array}{l}\text{(a) } x_1=x_2=\dfrac{m(3\pm\sqrt{3})}{2} \text{ per } m\neq 0\\ \text{(b) per } m=0 \text{ l'equazione perde significato}\end{array}\right]$

705. $kx+\dfrac{1}{x}=k+\dfrac{1}{kx}$ $\left[\begin{array}{l}\text{(a) } x_1=\dfrac{1}{k};\quad x_2=\dfrac{k-1}{k} \text{ per } k\neq 0 \text{ e } k\neq 1\\ \text{(b) per } k=0 \text{ l'equazione perde significato}\\ \quad \text{per } k=1 \text{ l'equazione ha una sola soluzione}\end{array}\right]$

706. $\dfrac{x}{k+1}+\dfrac{k}{x}=\dfrac{1}{x}+\dfrac{2k}{k+1}$ $\left[\begin{array}{l}\text{(a) } x_1=k-1;\ x_2=k+1 \text{ per } k\neq\pm 1\\ \text{(b) per } k=-1 \text{ l'equazione perde significato}\\ \quad \text{per } k=1 \text{ l'equazione ha una sola soluzione}\end{array}\right]$

707. $x+\dfrac{1}{k}+\dfrac{1-k^2}{(k^2-k)x}=0$ $\left[\begin{array}{l}\text{(a) } x_1=1;\quad x_2=-\dfrac{1+k}{k} \text{ per } k\neq\pm 1 \text{ e } k\neq 0\\ \text{(b) per } k=1 \text{ e } k=0 \text{ l'equazione perde significato}\\ \quad \text{per } k=-1 \text{ l'equazione ha una sola soluzione}\end{array}\right]$

708. $\dfrac{(x+2)(x-2)}{x}=2m+\dfrac{x-10m}{2mx}$ $\left[\text{(a) } x_1=\dfrac{1}{2m};\ x_2=2m\right]$

709. $\dfrac{x^2+m^2}{x^2-m^2}=\dfrac{1}{x+m}+\dfrac{1}{x-m}$ $\left[\text{(a) } x_1=x_2=1\pm\sqrt{1-m^2}\right]$

710. $\dfrac{(a-2)x^2+ax}{x^2-1}+\dfrac{a+1}{x+1}+\dfrac{x}{x-1}=\dfrac{ax}{x-1}$ $\left[\text{(a) } x_1=a+1\right]$

711. $\dfrac{k^2x}{x+1}+\dfrac{x}{x-1}=\dfrac{kx^2}{x^2-1}+k$ $\left[\text{(a) } x_1=\dfrac{1}{k-1};\ x_2=\dfrac{k}{k-1}\right]$

712. $2x^2+\dfrac{1}{2x^2}=2k+\dfrac{1}{2k}$ $\left[\text{(a) } x_1=x_2=\pm\sqrt{k};\ x_3=x_4=\pm\dfrac{\sqrt{k}}{2k}\right]$

713. $\dfrac{1}{x^2+m^2}+\dfrac{1}{2x^2-m^2}=\dfrac{x^2+2m^2}{x^4+m^2x^2}$ $\left[\text{(a) } x_1=x_2=\pm m;\ x_3=x_4=\pm m\sqrt{2}\right]$

714. $\dfrac{1}{x^2+k^2}-\dfrac{1}{k^2}+\dfrac{1}{2kx-2k^2}=\dfrac{1}{3k^2}+\dfrac{1}{2kx+2k^2}$ $\left[\text{(a) } x_1=x_2=\pm k\sqrt{2}\right]$

715. $\dfrac{(1-x^2)^2-(x^2-2k)^2}{(1-x^2)(x^2-2k)}=\dfrac{8k}{1-4k^2}$ $\left[\text{(a) } x_1=x_2=\pm\sqrt{\dfrac{1+4k^2}{2}};\ x_3=x_4=\pm\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1+4k^2}{k}}\right]$

Sul segno di un polinomio

Studiare il segno dei polinomi proposti negli esercizi dal n. **716** al n. **733**, seguendo il procedimento indicato a p. 430 e cioè:

a. scomporre il polinomio in fattori di 1° o 2° grado;
b. determinare il segno del polinomio P, tenendo presente che si ha:
   - P=0 solo se almeno uno dei fattori vale 0;
   - P<0 solo se il polinomio presenta un numero dispari di fattori negativi.

716. $P(x)=x^3-1$ **717.** $P(x)=x^3+1$

718. $P(x)=x^3-8$ **719.** $P(x)=x^3+8$

720. $P(x)=x^4-1$ **721.** $P(x)=x^4-16$

722. $P(x)=x^3-2x^2-x+2$ **723.** $P(x)=2x^3+3x^2-2x-3$

724. $P(x)=3x^3-2x^2-3x+2$ **725.** $P(x)=3x^3+2x^2-4x-3$

726. $P(x)=3x^3-5x^2+7x-5$ **727.** $P(x)=6x^3-6x^2+4x-32$

728. $P(x)=x^4+2x^2-3$ **729.** $P(x)=x^4-2x^2-8$

730. $P(x)=4x^4-13x^2+9$ **731.** $P(x)=4x^4-5x^2+1$

732. $P(x)=x^4+x^3-3x^2-4x-4$ **733.** $P(x)=x^4-6x^3+9x^2-4$

Sul segno di un quoziente di polinomi

Studiare il segno dei quozienti di polinomi proposti negli esercizi dal n. **734** al n. **743**, seguendo il procedimento indicato a p. 429 e cioè:

a. studiare il segno del numeratore N e del denominatore D;
b. determinare il segno del quoziente Q, tenendo presente che si ha:
   - Q privo di significato se risulta D=0;
   - Q=0 se risulta N=0 e D≠0;
   - Q>0 se N e D hanno lo stesso segno;
   - Q<0 se N e D hanno segno opposto.

734. $Q(x)=\frac{x}{x-1}$ $Q(x)=\frac{x-1}{x}$ **735.** $Q(x)=\frac{2x}{x+1}$ $Q(x)=\frac{x+1}{2x}$

736. $Q(x)=\frac{x-2}{x+2}$ $Q(x)=\frac{x+2}{x-2}$ **737.** $Q(x)=\frac{3x-4}{3x+4}$ $Q(x)=\frac{3x+4}{3x-4}$

738. $Q(x)=\frac{2x}{2x^2+x}$ $Q(x)=\frac{2x^2+x}{2x}$ **739.** $Q(x)=\frac{x^2-1}{x+1}$ $Q(x)=\frac{x+1}{x^2-1}$

740. $Q(x)=\frac{x^2-4}{x^2+4x+4}$ $Q(x)=\frac{x^2+4x+4}{x^2-4}$ **741.** $Q(x)=\frac{x^2-2x+1}{4x^2+4}$ $Q(x)=\frac{4x^2+4}{x^2-2x+1}$

742. $Q(x)=\frac{x^2-2x-3}{2x^2+1}$ $Q(x)=\frac{2x^2+1}{x^2-2x-3}$ **743.** $Q(x)=\frac{2x^2}{x^3-1}$ $Q(x)=\frac{x^3-1}{2x^2}$

Sulle equazioni irrazionali

Equazioni irrazionali di grado non superiore al 2°

Risolvere le equazioni irrazionali proposte negli esercizi dal n. **744** al n. **781**, seguendo il procedimento indicato a p. 432 e cioè:

a. elevare i due membri dell'equazione allo stesso esponente per ottenere un'equazione che non è più irrazionale;
b. risolvere l'equazione razionale ottenuta, che è di grado non superiore al 2°;
c. se i due membri dell'equazione sono stati elevati ad un esponente pari, verificare che le soluzioni ottenute siano anche soluzioni dell'equazione di partenza.

744. $\sqrt{x}=2$ $\qquad$ $\sqrt[3]{x}=2$

745. $\sqrt{x-1}=2$ $\qquad$ $\sqrt[3]{x-1}=2$

746. $\sqrt{x^2+x}=0$ $\qquad$ $\sqrt[3]{x^2+x}=0$

747. $\sqrt{x^2-9}=0$ $\qquad$ $\sqrt[3]{x^2-9}=0$

748. $\sqrt{x^2+3x-5}=1-x$ [impossibile]

749. $\sqrt{x^2+3x-5}=x-1$ $[\frac{6}{5}]$

750. $3-2x=\sqrt{9x^2-9x}$ $[\frac{4}{3}]$

751. $2x-3=\sqrt{9x^2-9x}$ [impossibile]

752. $\sqrt{x^2-3x+2}=x-3$ [impossibile]

753. $\sqrt{x^2-3x+2}=3-x$ $[\frac{7}{3}]$

754. $\sqrt[3]{3x^3-2x}=x\sqrt[3]{3}$ [0]

755. $\sqrt[3]{x(x^2-9)+2(x^2-13)}=x+1$ [–9; –3]

756. $3-x=\sqrt{-2x^2+x+5}$ $[1; \frac{4}{3}]$

757. $x-3=\sqrt{-2x^2+x+5}$ [impossibile]

758. $\sqrt[4]{x^4-4x^3+3x^2}=1-x$ $[\frac{1}{3}; 1]$

759. $\sqrt[4]{x^4+4x^3+67}=x+1$ [3]

760. $\sqrt{1+3x}=1-3x$ [0]

761. $\sqrt{1+3x}=3x-1$ [1]

762. $\sqrt{5x+1}=2(1-x)$ $[\frac{1}{4}]$

763. $\sqrt{5x+1}=2(1-x)$ [3]

764. $\sqrt[3]{x^3+x-2}=x-1$ $[-\frac{1}{3}; 1]$

765. $\sqrt[3]{x^3-1}=x-1$ $[0; 1]$

766. $5\sqrt{x-1}=-x-5$ [impossibile]

767. $5\sqrt{x-1}=x+5$ $[5; 10]$

768. $\sqrt{3x+6}=x-4$ $[10]$

769. $\sqrt{3x+6}=4-x$ $[1]$

770. $\sqrt{x-1}=-\frac{2}{5}x$ [impossibile]

771. $\sqrt{x-1}=\frac{2}{5}x$ $[\frac{5}{4}; 5]$

772. $\sqrt[3]{x^3+26}=x+2$ $[-3; 1]$

773. $\sqrt[3]{(x+1)^3+10x+17}=x+2$ $[-\frac{5}{3}; 2]$

774. $\sqrt{x+3}=\sqrt{5-x}$ $[1]$

775. $\sqrt{3x-1}=\sqrt{2x+5}$ $[6]$

776. $\sqrt{3x+1}=\sqrt{2x+7}$ $[6]$

777. $\sqrt{x-4}=\sqrt{3-x}$ [impossibile]

778. $\sqrt{x+2}=\sqrt{2(x+1)}$ $[0]$

779. $\sqrt{3x+1}=\sqrt{5x-1}$ $[1]$

780. $\sqrt{x^2+3}=\sqrt{3-x}$ $[-1; 0]$

781. $\sqrt{x^2+x}=\sqrt{x+1}$ $[-1; 1]$

Equazioni in cui si deve isolare un radicale

782. Esaminare l'equazione:

$$\sqrt{x^2+7}-1=\sqrt{2x}$$

Risolvere i seguenti quesiti:

a. elevare i membri al quadrato e spiegare perché l'equazione è ancora irrazionale;

b. *isolare il radicale*, cioè lasciare al primo membro solo il radicale, scrivendo l'equazione nella forma:

$$\sqrt{x^2+7}=\sqrt{2x}+1$$

c. risolvere l'equazione irrazionale ottenuta con il procedimento seguito negli esercizi 744-781.

[(c) $\sqrt{2}$]

Dopo aver svolto l'esercizio 782, risolvere le equazioni irrazionali assegnate negli esercizi dal n. **783** al n. **788** procedendo nel modo seguente:

a. isolare il radicale;
b. elevare i due membri dell'equazione allo stesso esponente per ottenere un'equazione che non è più irrazionale;
c. risolvere l'equazione razionale ottenuta, che è di grado non superiore al 2°;
d. verificare che le soluzioni ottenute siano soluzioni dell'equazione di partenza.

783. $2x=\sqrt{x^2+4}-2$ [0]

784. $\sqrt{6x+12}-3=x$ [$\pm\sqrt{3}$]

785. $\sqrt{8x+21}-x=4$ [$\pm\sqrt{5}$]

786. $2x+\sqrt{x+4}=2$ [0]

787. $2x=4-\sqrt{3x+4}$ [$\frac{3}{4}$]

788. $x-\sqrt{x^2+3x+9}=3$ [impossibile]

789. Esaminare l'equazione:

$$\sqrt{x-2}-\sqrt{2(x-1)}=0$$

Risolvere i seguenti quesiti:

a. elevare i membri al quadrato e spiegare perché l'equazione rimane irrazionale;
b. lasciare in ciascun membro solo un radicale, scrivendo l'equazione nella forma:

$$\sqrt{x-2}=\sqrt{2(x-1)}$$

c. risolvere l'equazione irrazionale ottenuta con il procedimento seguito negli esercizi 744-781. [(c) impossibile]

Dopo aver svolto l'esercizio 789, risolvere le equazioni irrazionali assegnate negli esercizi dal n. **790** al n. **797** procedendo nel modo seguente:

a. scrivere l'equazione in modo che ciascun membro presenti solo un radicale;
b. elevare i due membri dell'equazione allo stesso esponente per ottenere un'equazione che non è più irrazionale;
c. risolvere l'equazione razionale ottenuta, che è di grado non superiore al 2°;
d. verificare che le soluzioni ottenute siano soluzioni dell'equazione di partenza.

790. $\sqrt{16-x}-\sqrt{56+x}=0$ [–1; 0]

791. $\sqrt{18x-5}-\sqrt{6x+1}=0$ [$\frac{1}{2}$]

792. $2\sqrt{28+x}-\sqrt{40-2x}=0$ [–12]

793. $\sqrt{x^2+67}-2\sqrt{5x-8}=0$ [11; 9]

794. $\sqrt{x-2}-\sqrt{2x+3}=0$ [impossibile]

795. $\sqrt{x-1}-\sqrt{1-x}=0$ [1]

796. $\sqrt{64x^2-81}-\sqrt{16x^2+63}=0$ [$\pm\sqrt{3}$]

797. $\sqrt{5x-7}-\sqrt{1-x}=0$ [impossibile]

Equazioni che si risolvono elevando più volte a potenza

798. Esaminare l'equazione:

$$\sqrt{x+3}=1+\sqrt{10-x}$$

che non può essere scritta in modo da presentare in ciascun membro solo un radicale. Risolvere i seguenti quesiti:

a. elevare i membri al quadrato e spiegare perché l'equazione rimane irrazionale;
b. isolare il radicale nell'equazione irrazionale ottenuta ed elevare di nuovo i due membri al quadrato, ottenendo un'equazione razionale;
c. risolvere l'equazione razionale ottenuta e verificare che le soluzioni ottenute siano soluzioni dell'equazione irrazionale di partenza. [(c) 6]

Dopo aver svolto l'esercizio 798, risolvere le equazioni irrazionali assegnate negli esercizi dal n. **799** al n. **810** procedendo nel modo seguente:

a. elevare i membri al quadrato, ottenendo un'equazione ancora irrazionale;
b. isolare il radicale nell'equazione ottenuta;
c. elevare di nuovo al quadrato i due membri dell'equazione fino ad ottenere un'equazione che non è più irrazionale;
d. risolvere l'equazione razionale ottenuta, che è di grado non superiore al 2°;
e. verificare che le soluzioni ottenute siano soluzioni dell'equazione di partenza.

799. $\sqrt{4x+5}=2+\sqrt{2(x+2)}$ $[-\frac{3}{2};\frac{5}{2}]$

800. $\sqrt{3x-8}=2+\sqrt{x-4}$ [4; 8]

801. $\sqrt{6x-2}=1+\sqrt{2x-1}$ $[\frac{1}{2}; 1]$

802. $1+\sqrt{3x-5}=\sqrt{3x}$ [impossibile]

803. $\sqrt{x+9}=8-\sqrt{x-7}$ [16]

804. $\sqrt{18x+10}=1+3\sqrt{2x-1}$ [5]

805. $\sqrt{3x-8}=2+\sqrt{x-4}$ [4; 8]

806. $\sqrt{8-x}=4+3\sqrt{8+x}$ [8; –8]

807. $\sqrt{9x-41}+2\sqrt{x+6}=5\sqrt{x-1}$ [10]

808. $\sqrt{x+12}-\sqrt{x+32}=5\sqrt{x}$ [4]

809. $\sqrt{x+3}+\sqrt{3x-2}=\sqrt{8x+1}$ [1; 6]

810. $\sqrt{10x-1}-2\sqrt{2-x}=\sqrt{2x-1}$ [1]

Equazioni irrazionali di grado superiore al 2°

Risolvere le equazioni irrazionali proposte negli esercizi dal n. **811** al n. **822**, seguendo il procedimento indicato a p. 734 e cioè:

a. elevare i due membri dell'equazione allo stesso esponente per ottenere un'equazione che non è più irrazionale;
b. risolvere l'equazione razionale ottenuta, che è di grado superiore al 2°;
c. se i due membri dell'equazione sono stati elevati ad un esponente pari, verificare che le soluzioni ottenute siano anche soluzioni dell'equazione di partenza.

811. $3x^2+2=\sqrt{20x^2+5}$ [±1]

812. $x^2-3=\sqrt{3x^2+1}$ $[\pm2\sqrt{2}]$

813. $\sqrt{-x^3+6x^2+4}=x+2$ [0; 1; 4]

814. $\sqrt[3]{6x^3+4x+8}=2+x$ $[-\frac{4}{5}; 0; 2]$

815. $\sqrt[3]{x^3-3x^2+4x+1}=2x+1$ $[0; 2; -\frac{1}{7}]$

816. $\sqrt[3]{x^3-6x^2+13x-7}=2x-1$ $[\pm1; \frac{6}{7}]$

817. $\sqrt[3]{8x^2+16x}=x+2$ [±2]

818. $\sqrt[3]{2x^2-8x+8}=x-2$ [2; 4]

819. $\sqrt[4]{x^4+1}=x+1$ [0]

820. $\sqrt[4]{x^4-1}=x-1$ [1]

821. $\sqrt[4]{x^4-4x^3+1}=1-x$ $[0; \frac{2}{3}]$

822. $\sqrt[4]{x^4-4x^3+1}=x-1$ [impossibile]

Riflettere sulle equazioni irrazionali

823. Esaminare le equazioni:

$\sqrt{5x+11}=0$ $\sqrt{8x}=\sqrt{2}x-1$ $\sqrt{3}x^2-\sqrt{3}=0$ $\sqrt{5}x^2+\sqrt{20}x=0$

Risolvere i seguenti quesiti:
a. spiegare perché nessuna delle equazioni è irrazionale;
b. risolvere le equazioni.

824. Esaminare l'equazione:

$\sqrt{x}=-4$

Risolvere i seguenti quesiti:
a. spiegare perché non si trova un valore di x che rende negativa l'espressione:

$\sqrt{x}$

b. spiegare perché l'equazione assegnata è impossibile, senza risolverla.

825. Esaminare le equazioni:

$\sqrt{x}=-2$ $\sqrt[3]{x}=-2$ $\sqrt{x-1}=-2$ $\sqrt[3]{x-1}=-2$

Risolvere i seguenti quesiti:
a. scegliere le equazioni impossibili motivando la scelta;
b. risolvere le altre equazioni.

Equazioni irrazionali letterali

Esaminare le equazioni assegnate negli esercizi dal n. **826** al n. **834** e risolvere i seguenti quesiti:

a. scrivere le soluzioni dell'equazione, considerando come incognita la lettera x;
b. esaminare i vari casi che si presentano a seconda dei valori del parametro.

826. $x-k=\sqrt{k(k-x)}$ $\left[\begin{array}{l} x_1=k \text{ sempre valida} \\ x_2=0 \text{ valida solo per } k\leq 0 \end{array}\right]$

827. $x=\sqrt{k(2x-k)}$ [$x_1=x_2=k$ valida solo per $k\geq 0$]

828. $\sqrt{(k+2)x+1}=\sqrt{kx+1}$ [0]

829. $x+2m=\sqrt{2x^2+2mx+m^2}$ [$x_1=-m$; $x_2=3m$ valide solo per $m\geq 0$]

830. $\sqrt{k(6x+5k)}=5k-3x$ $\left[\begin{array}{l} x_1=\frac{2}{3}k \text{ valida solo per } k\geq 0 \\ x_2=\frac{10}{3}k \text{ valida solo per } k\leq 0 \end{array}\right]$

831. $2m-2x=\sqrt{4x^2-m^2}$ [$x=\frac{5}{8}m$ valida solo per $k\geq 0$]

832. $x=\sqrt{(x-2k)(x+2k)}$ [$x=\frac{2}{3}k$ valida solo per $k\geq 0$]

833. $\sqrt{6x+m}=\sqrt{9x-5m^2}$ [$x=6m^2$ valida solo per $m\geq 0$]

834. $\sqrt{x+3a^2}=a+\sqrt{10a^2-x}$ [$x=6a^2$ valida solo per $a\geq 0$]

Collegamento con il paragrafo precedente: equazioni irrazionali fratte

835. Esaminare l'equazione:

$$\frac{2}{\sqrt{x^2+2x}}-\frac{1}{\sqrt{x+2}}=0$$

Risolvere i seguenti quesiti:

a. spiegare perché l'equazione è irrazionale e fratta (vedere il paragrafo 6, p. 420);
b. completare il procedimento iniziato qui sotto per risolvere l'equazione.

I. Si riducono tutti i termini allo stesso denominatore $\sqrt{x^2+2x}$ e si ottiene:

$$\frac{2}{\sqrt{x^2+2x}}-\frac{\dots\dots}{\sqrt{x^2+2x}}=0$$

II. Si addizionano le frazioni ottenendo:

$$\frac{\dots\dots\dots}{\sqrt{x^2+2x}}=0$$ cioè un'equazione del tipo $\frac{N}{D}=0$

III. Si risolve l'equazione $N=0$, cioè:

$\dots\dots\dots=0$ da cui $x=4$

IV. Si verifica che la soluzione sia soluzione dell'equazione di partenza; si ha:

$$\frac{2}{\sqrt{\dots^2+2\dots}}-\frac{1}{\sqrt{\dots+2}}=\dots\dots\dots=0$$

e perciò si conclude che l'equazione ha la soluzione $x=4$.

Dopo aver risolto l'esercizio 835, risolvere le equazioni dal n. **836** al n. **845** che sono irrazionali e fratte.

836. $\frac{2}{\sqrt{x^2-1}}-\frac{1}{\sqrt{x-1}}=0$ [3]

837. $\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{4x+9}}-\frac{9}{\sqrt{16x^2+36x}}=0$ [4]

838. $\sqrt{x+6}-\frac{12}{\sqrt{x+6}}+\sqrt{x}=0$ [3]

839. $\sqrt{x+2}-3\sqrt{x-4}+\frac{2}{\sqrt{x-4}}=0$ [6]

840. $\sqrt{2x-5}+1=\frac{2}{\sqrt{2x-5}}$ [3]

841. $\sqrt{4x+1}+\sqrt{8x}=\frac{21}{\sqrt{4x+1}}$ [2]

842. $\sqrt{x^2-x-1}=\frac{x^2-1}{\sqrt{x^2-x-1}}-2$ [2]

843. $\sqrt{x+4}=\frac{4}{\sqrt{x+4}}+\sqrt{2}$ [4]

844. $\sqrt{5x-48}+\frac{12}{\sqrt{x+8}}=\sqrt{x+8}$ [10]

845. $\frac{\sqrt{3-x}}{\sqrt{3+x}}+\frac{\sqrt{3+x}}{\sqrt{3-x}}=6$ [$\pm\sqrt{8}$]

Equazioni irrazionali fratte letterali

Esaminare le equazioni assegnate negli esercizi dal n. **846** al n. **854** e risolvere i seguenti quesiti:

a. scrivere le soluzioni dell'equazione, considerando come incognita la lettera x;
b. esaminare i vari casi che si presentano a seconda dei valori del parametro.

846. $\sqrt{x+a}-\frac{a}{2\sqrt{x+a}}=\frac{\sqrt{x+a}}{2}$ [$x=0$ valida solo per $a>0$]

847. $\frac{2a}{\sqrt{x+a}}-\sqrt{x+a}=\sqrt{x+a}$ [$x=\frac{a}{3}$ valida solo per $a>0$]

848. $\frac{5x+7k}{\sqrt{x-k}}=2\sqrt{x-k}+3\sqrt{2x}$ [$x=9k$ valida solo per $k>0$]

849. $\sqrt{5k+x}+\sqrt{5k-x}=\frac{12k}{\sqrt{5k+x}}$ [$x=4k$ valida solo per $k>0$]

850. $\sqrt{x+2m}-\frac{4}{\sqrt{x+2m}}=\sqrt{2}$ [$x=8-2m$]

851. $\sqrt{x+m}-\sqrt{x}=\frac{x+m-m\sqrt{2}}{\sqrt{x+m}}$ [$x=m$ valida solo per $m>0$]

852. $\sqrt{x+k}+\sqrt{x}=\frac{2k}{\sqrt{x+k}}$ [$x=\frac{k}{3}$ valida solo per $k>0$]

853. $\dfrac{3k}{\sqrt{x^2+k}}=x+\sqrt{x^2+k}$ [$x=2\sqrt{\frac{k}{5}}$ valida solo per $k>0$]

854. $\dfrac{2+\sqrt{x+k}}{3}+\dfrac{1}{1+\sqrt{x+k}}=\dfrac{5}{3}$ [$x_1=-k$; $x_2=-k+4$]

Sulle disequazioni irrazionali

Studio del segno di funzioni irrazionali

Esaminare le funzioni assegnate negli esercizi dal n. **855** al n. **862** e risolvere i seguenti quesiti:

a. tracciare il grafico delle funzioni, basandosi sulle nozioni esposte nel capitolo sesto (p. 253) e riprendendo gli esercizi 284-299 del capitolo sesto (p. 673);
b. studiare il segno di ogni funzione.

855.	$y=\sqrt{x}$	$y=\sqrt{x-1}$	$y=\sqrt{x}-1$	$y=\sqrt{x+1}$	$y=\sqrt{x}+1$
856.	$y=\sqrt{-x}$	$y=\sqrt{-x-2}$	$y=\sqrt{-x}-2$	$y=\sqrt{-x+2}$	$y=\sqrt{-x}+2$
857.	$y=-\sqrt{x}$	$y=-\sqrt{x-1}$	$y=-\sqrt{x}-1$	$y=-\sqrt{x+1}$	$y=-\sqrt{x}+1$
858.	$y=-\sqrt{-x}$	$y=-\sqrt{-x-3}$	$y=-\sqrt{-x}-3$	$y=-\sqrt{-x+3}$	$y=-\sqrt{-x}+3$
859.	$y=\sqrt[3]{x}$	$y=\sqrt[3]{x-1}$	$y=\sqrt[3]{x}-1$	$y=\sqrt[3]{x+1}$	$y=\sqrt[3]{x}+1$
860.	$y=\sqrt[3]{-x}$	$y=\sqrt[3]{-x-2}$	$y=\sqrt[3]{-x}-2$	$y=\sqrt[3]{-x+2}$	$y=\sqrt[3]{-x}+2$
861.	$y=-\sqrt[3]{x}$	$y=-\sqrt[3]{x-1}$	$y=-\sqrt[3]{x}-1$	$y=-\sqrt[3]{x+1}$	$y=-\sqrt[3]{x}+1$
862.	$y=-\sqrt[3]{-x}$	$y=-\sqrt[3]{-x-4}$	$y=-\sqrt[3]{-x}-4$	$y=-\sqrt[3]{-x+4}$	$y=-\sqrt[3]{-x}+4$

863. Esaminare le funzioni:

$y=\sqrt{x-p}+q$ $\qquad y=-\sqrt{x-p}+q$

a. basarsi sulle nozioni esposte nel capitolo sesto (p. 253) e riprendere gli esercizi 284-299 del capitolo sesto per descrivere le caratteristiche dei grafici delle funzioni;
b. esaminare il segno di ogni funzione.

864. Esaminare le funzioni:

$y=\sqrt[3]{x-p}+q$ $\qquad y=-\sqrt[3]{x-p}+q$

a. basarsi sulle nozioni esposte nel capitolo sesto (p. 253) e riprendere gli esercizi 284-299 del capitolo sesto per descrivere le caratteristiche dei grafici delle funzioni;
b. esaminare il segno di ogni funzione.

Disequazioni irrazionali che si possono risolvere sia con l'aiuto dei grafici che con metodi algebrici

Esaminare le disequazioni assegnate negli esercizi dal n. **865** al n. **872** e risolvere i seguenti quesiti:

a. risolvere le disequazioni con l'aiuto dei grafici;
b. risolvere le disequazioni con i metodi algebrici descritti a p. 439;
c. confrontare i procedimenti e i risultati ottenuti.

865. $13-x<\sqrt{x+7}$ $\qquad$ $13-x>\sqrt{x+7}$

866. $\sqrt{5-2x}>6x-1$ $\qquad$ $\sqrt{5-2x}<6x-1$

867. $x-1<\sqrt{2x-2}$ $\qquad$ $x-1>\sqrt{2x-2}$

868. $\sqrt{x+1}<3-2x$ $\qquad$ $\sqrt{x+1}>3-2x$

869. $\sqrt{x-2}<x-3$ $\qquad$ $\sqrt{x-2}>x-3$

870. $1-x<\sqrt{4-2x}$ $\qquad$ $1-x>\sqrt{4-2x}$

871. $\sqrt{x-3}<5-x$ $\qquad$ $\sqrt{x-3}>5-x$

872. $x-1<\sqrt{x-1}$ $\qquad$ $x-1>\sqrt{x-1}$

Disequazioni irrazionali che si risolvono con metodi algebrici

Risolvere le disequazioni assegnate negli esercizi dal n. **873** al n. **892** con i metodi algebrici descritti a p. 439.

873. $\sqrt[3]{x^3+2}<x-1$ $\qquad$ $\sqrt[3]{x^3+2}>x-1$

874. $\sqrt[3]{x^3-4x}>x+1$ $\qquad$ $\sqrt[3]{x^3-4x}<x+1$

875. $x+1>\sqrt[3]{3x^2+x^3}$ $\qquad$ $x+1<\sqrt[3]{3x^2+x^3}$

876. $\sqrt[3]{x^3+1}>x+1$ $\qquad$ $\sqrt[3]{x^3+1}<x+1$

877. $x+2>\sqrt{-x^2+3x+10}$ $\qquad$ **878.** $x+2<\sqrt{-x^2+3x+10}$

879. $\sqrt{-x^2+6x-5}>x-1$ $\qquad$ **880.** $\sqrt{-x^2+6x-5}<x-1$

881. $\sqrt{9x^2-6x-8}<3x+5$ $\qquad$ **882.** $\sqrt{9x^2-6x-8}>3x+5$

883. $\sqrt{4x^2-4x-15}>2x+1$ $\qquad$ **884.** $\sqrt{4x^2-4x-15}<2x+1$

885. $\sqrt{x^2+x+3}<x+6$ $\qquad$ **886.** $\sqrt{x^2+x+3}>x+6$

887. $\sqrt{2x^2+x-3}>x-1$ $\qquad$ **888.** $\sqrt{2x^2+x-3}<x-1$

889. $2x+2>\sqrt{x^2+5x+4}$ $\qquad$ **890.** $2x+2<\sqrt{x^2+5x+4}$

891. $\sqrt{x^4+10x^2}>x^2+4x$ $\qquad$ **892.** $\sqrt{x^4+10x^2}<x^2+4x$

Sui sistemi di grado superiore al 2°

Esaminare i sistemi assegnati negli esercizi dal n. **893** al n. **897** e risolvere i seguenti quesiti:

a. valutare il grado del sistema;
b. determinare le soluzioni di ogni sistema;
c. interpretare graficamente le soluzioni ottenute.

893. $\begin{cases} y=-x^2+2x \\ y=x^2-2x \end{cases}$ [(0;0); (2; 0)]

894. $\begin{cases} y=-x^2+3x \\ y=x^2-2x \end{cases}$ [(0;0); $(\frac{5}{2};\frac{5}{4})$]

895. $\begin{cases} xy=2 \\ x^2+y^2=4 \end{cases}$ [$(\sqrt{2};\sqrt{2})$ due volte; $(-\sqrt{2};-\sqrt{2})$ due volte]

896. $\begin{cases} xy=3 \\ x^2+y^2=4 \end{cases}$ [nessuna soluzione reale]

897. $\begin{cases} xy=2 \\ y=-\frac{1}{4}x^2+x \end{cases}$ [(2; 1); $(1\pm\sqrt{5};\ \frac{2}{1\pm\sqrt{5}})$]

Esaminare i sistemi assegnati negli esercizi dal n. **898** al n. **919** e risolvere i seguenti quesiti:

a. valutare il grado del sistema;
b. determinare le soluzioni di ogni sistema.

898. $\begin{cases} x^2+4y^2=4 \\ x=y^2-1 \end{cases}$ [(0; 1); (0; –1)]

899. $\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1 \end{cases}$ [nessuna]

900. $\begin{cases} x=\frac{4}{9}y^2-\frac{8}{3}y+4 \\ x=y^2+4y^2+4 \end{cases}$ [(4; 0); (100; –12)]

901. $\begin{cases} y=x^2-2x \\ x=\frac{y^2}{6}+\frac{y}{2} \end{cases}$ [(0; 0); (3; 3)]

902. $\begin{cases} 4x^2+4y^2=9 \\ x=y^2-\frac{5}{2} \end{cases}$ [$(-\frac{1}{2};\sqrt{2})$ due volte; $(-\frac{1}{2};-\sqrt{2})$ due volte]

903. $\begin{cases} x^2+2y^2=2 \\ y=2x^2-1 \end{cases}$ [(0; –1) due volte; $(\sqrt{\frac{7}{8}};\frac{3}{4})$; $(-\sqrt{\frac{7}{8}};\frac{3}{4})$]

904. $\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x^2+9y^2=9 \end{cases}$ [(0; 1) due volte; (0; –1) due volte]

905. $\begin{cases} x^2+18y^2=18 \\ \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1 \end{cases}$ $\left[\left(\pm 3\sqrt{\dfrac{6}{7}};\pm\dfrac{2}{\sqrt{7}}\right); \left(-3\sqrt{\dfrac{6}{7}};\dfrac{2}{\sqrt{7}}\right); \left(3\sqrt{\dfrac{6}{7}};-\dfrac{2}{\sqrt{7}}\right) \right]$

906. $\begin{cases} x^2+4y^2=4 \\ x^2+9y^2=9 \end{cases}$ [(0; 1) due volte; (0; –1) due volte]

907. $\begin{cases} x^2+25y^2=25 \\ xy=-2 \end{cases}$ $\left[\pm\sqrt{5};\pm\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right); \quad \left(\pm 2\sqrt{5};\pm\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right) \right]$

908. $\begin{cases} x^2+4y^2=4 \\ xy=1 \end{cases}$ $\left[\left(\sqrt{2};\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\right.$ due volte; $\left.\left(-\sqrt{2};-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\right.$ due volte]

909. $\begin{cases} x=y^2-1 \\ y=x^2-1 \end{cases}$ $\left[(0;-1); (-1;0); \left(\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2};\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}\right)\right]$

910. $\begin{cases} xy=3 \\ x=y^2-4 \end{cases}$ $\left[(-3;-1); \left(\dfrac{6}{1\pm\sqrt{13}};\dfrac{1\pm\sqrt{13}}{2}\right)\right]$

911. $\begin{cases} y=x^3+3x^2+3x+1 \\ y=3x+1 \end{cases}$ [(0; 1) due volte; (–3; –8)]

912. $\begin{cases} y=-3x+1 \\ y=x^3-3x^2-3x+1 \end{cases}$ [(0; 1) due volte; (3; –8)]

913. $\begin{cases} y=x \\ y=2x^3-3x^2+1 \end{cases}$ $\left[\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right); \left(\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2};\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}\right)\right]$

914. $\begin{cases} y=x^3+3x^2+3x+1 \\ y=x^3-3x^2-3x+1 \end{cases}$ [(0; 1); (–1; 0)]

915. $\begin{cases} y=3x+3 \\ y=\dfrac{1+x^3}{x^2} \end{cases}$ [(–1; 0) due volte; $\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{9}{2}\right)$]

916. $\begin{cases} y=-\dfrac{1}{2}x+1 \\ y=\dfrac{2x-1}{2x^3} \end{cases}$ [$\left(1;\dfrac{1}{2}\right)$ tre volte; $\left(-1;\dfrac{3}{2}\right)$]

917. $\begin{cases} y=x^2-\dfrac{1}{2}x \\ y=\dfrac{2x-1}{2x^3} \end{cases}$ [$\left(1;\dfrac{1}{2}\right)$; $\left(-1;\dfrac{3}{2}\right)$; $\left(\dfrac{1}{2};0\right)$]

918. $\begin{cases} y=\dfrac{3}{4}x^2+1 \\ y=x^2+\dfrac{1}{x^2} \end{cases}$ [$\left(-\sqrt{2};\dfrac{5}{2}\right)$ due volte; $\left(\sqrt{2};\dfrac{5}{2}\right)$ due volte]

919. $\begin{cases} x^2+y^2=12 \\ y=\dfrac{12}{x^2}-1 \end{cases}$ [$(\pm\sqrt{12};0)$; $(\pm\sqrt{3};3)$]

Collegamenti col capitolo precedente: sistemi con coefficienti letterali

Riprendere le considerazioni svolte nel testo nel capitolo settimo, p. 368 e negli esercizi 693-721 del capitolo settimo (pp. 735-739) per esaminare i sistemi assegnati negli esercizi dal n. **920** al n. **926** e risolvere i seguenti quesiti:

a. scrivere le soluzioni del sistema;
b. esaminare i casi che si presentano a seconda dei valori del parametro.

920. $\begin{cases} y=x^2+k \\ y=2x^2+4x+3 \end{cases}$ $[(-2\pm\sqrt{1+k};\ 2k+5\pm4\sqrt{2+k})]$

921. $\begin{cases} y=-x^2+2ax \\ y=\dfrac{x^2}{a^4}-\dfrac{2x}{a^3} \end{cases}$ $[(0;\ 0);\ (2a;\ 0)]$

922. $\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ y=kx^2 \end{cases}$ $[\ (\pm\sqrt{\dfrac{\sqrt{1+k^2}-1}{2k^2}}\ ;\ \dfrac{\sqrt{1+k^2}-1}{2k})\ ]$

923. $\begin{cases} x^2+a^2y^2=a^2 \\ y=x^2-1 \end{cases}$ $[(0;\ -1)$ due volte; $(\pm\sqrt{\dfrac{2a^2-1}{a}}\ ;\ 1-\dfrac{1}{a^2})\ ]$

924. $\begin{cases} x^2+y^2=r^2 \\ x^2+4y^2=4 \end{cases}$ $[\ \pm2\sqrt{\dfrac{r^2-1}{3}}\ ;\ \pm\sqrt{\dfrac{4-r^2}{3}})\ ]$

925. $\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ xy=k \end{cases}$ $[\ (\pm\sqrt{2+\sqrt{4-k^2}}\ ;\ \pm\sqrt{\dfrac{k}{\sqrt{2+\sqrt{4-k^2}}}})\ ;\ (\pm\sqrt{2-\sqrt{4-k^2}}\ ;\ \pm\sqrt{\dfrac{k}{\sqrt{2-\sqrt{4-k^2}}}})\ ]$

926. $\begin{cases} y=\dfrac{a^2}{x^2}-1 \\ x^2+y^2=a^2 \end{cases}$ $[(\pm a;\ 0);\ (\pm\sqrt{\dfrac{\sqrt{1+4a^2}-1}{2}}\ ;\ \dfrac{-1+\sqrt{1+4a^2}}{2})]$

Problemi riassuntivi di tutto il capitolo

Problemi di geometria analitica

Gli esercizi dal n. **927** *al n.* **949** *propongono problemi con le seguenti caratteristiche:*

a. *richiedono di riprendere la geometria analitica (vedere il capitolo quinto) o sulle trasformazioni (vedere il capitolo sesto);*
b. *conducono a risolvere equazioni o sistemi del tipo esaminato nel capitolo ottavo.*

927. Tracciare il grafico della funzione:

$y=x^3$

Risolvere i seguenti quesiti:

a. spiegare perché la curva ottenuta tocca l'asse delle x in tre punti coincidenti;
b. effettuare la traslazione descritta dalle equazioni:

$\begin{cases} x'=x-2 \\ y'=y \end{cases}$

determinare l'equazione della curva trasformata e stabilire se la curva trasformata è ancora tangente all'asse delle x;

c. effettuare la traslazione descritta dalle equazioni:

$\begin{cases} x'=x \\ y'=y+2 \end{cases}$

determinare l'equazione della curva trasformata e stabilire se la curva trasformata è ancora tangente all'asse delle x.

928. Tracciare il grafico della funzione:

$y=x^3$

Risolvere i seguenti quesiti:

a. spiegare perché la curva ottenuta è tangente all'asse delle x;

b. effettuare la traslazione descritta dalle equazioni:

$$\begin{cases} x'=x+2 \\ y'=y \end{cases}$$

determinare l'equazione della curva trasformata e stabilire se la curva trasformata è ancora tangente all'asse delle x;

c. effettuare la traslazione descritta dalle equazioni:

$$\begin{cases} x'=x \\ y'=y-2 \end{cases}$$

determinare l'equazione della curva trasformata e stabilire se la curva trasformata è ancora tangente all'asse delle x.

929. Ripetere l'esercizio 927 a partire dalla funzione:

$y=x^4$

930. Ripetere l'esercizio 928 a partire dalla funzione:

$y=x^4$

931. Tracciare il grafico della funzione:

$y=\sqrt{x}$

Risolvere i seguenti quesiti:

a. determinare il punto d'intersezione fra la curva e la retta r d'equazione:

$y=2$

b. effettuare la traslazione descritta dalle equazioni:

$$\begin{cases} x'=x-1 \\ y'=y \end{cases}$$

determinare l'equazione della curva trasformata e determinare il punto d'intersezione fra la curva e la retta r;

c. effettuare la traslazione descritta dalle equazioni:

$$\begin{cases} x'=x+1 \\ y'=y \end{cases}$$

determinare l'equazione della curva trasformata e determinare il punto d'intersezione fra la curva e la retta r

932. Tracciare il grafico della funzione:

$y=\sqrt{x}$

Risolvere i seguenti quesiti:

a. determinare il punto d'intersezione della curva con l'asse delle x;

b. effettuare la traslazione descritta dalle equazioni:

$$\begin{cases} x'=x \\ y'=y+2 \end{cases}$$

determinare l'equazione della curva trasformata e determinare il punto d'intersezione fra la curva e l'asse delle x;

c. effettuare la traslazione descritta dalle equazioni:

$$\begin{cases} x'=x \\ y'=y-2 \end{cases}$$

determinare l'equazione della curva trasformata e determinare il punto d'intersezione fra la curva e l'asse delle x.

933. Ripetere l'esercizio 931 a partire dalla funzione:

$$y=\sqrt[3]{x}$$

934. Ripetere l'esercizio 932 a partire dalla funzione:

$$y=\sqrt[3]{x}$$

935. Ripetere l'esercizio 931 a partire dalla funzione:

$$y=\sqrt[4]{x}$$

936. Ripetere l'esercizio 932 a partire dalla funzione:

$$y=\sqrt[4]{x}$$

937. Tracciare i grafici della funzione $y=\sqrt{4-x^2}$ e della retta d'equazione $y=1$; determinare le coordinate dei punti d'intersezione fra la curva e la retta.
[Per il grafico della curva, vedere il capitolo quinto, paragrafo 4]

938. Tracciare i grafici della funzione $y=\sqrt{9-x^2}$ e della retta d'equazione $y=2$; determinare le coordinate dei punti d'intersezione fra la curva e la retta.
[Per il grafico della curva, vedere il capitolo quinto, paragrafo 4]

Esaminare le coppie di funzioni assegnate negli esercizi dal n. **939** al n. **948** e risolvere i seguenti quesiti:

a. tracciare il grafico delle funzioni assegnate, tenendo presenti le considerazioni svolte nei capitoli quinto e sesto;
b. calcolare le coordinate degli eventuali punti d'intersezione delle curve con gli assi cartesiani;
c. interpretare dal punto di vista grafico i risultati ottenuti.

939.	$y=(x+1)^3$	$y=x+1$	**940.**	$y=(x+1)^3$	$y=3x+1$
941.	$y=x^3+1$	$y=x+1$	**942.**	$y=x^3+1$	$y=2x$
943.	$y=(x-1)^3$	$y=x-1$	**944.**	$y=x^3-1$	$y=x-1$
945.	$y=x^4-1$	$y=x^2-1$	**946.**	$y=x^3-1$	$y=x^4-1$
947.	$y=x^3+1$	$y=1-x^2$	**948.**	$y=x^3+1$	$y=(x+1)^3$

949. Disegnare sul piano cartesiano le curve che hanno le equazioni seguenti:

$xy=2 \qquad x=y^2$

Risolvere i seguenti quesiti:

a. determinare il punto di intersezione delle due curve;
b. spiegare perché il grafico permette di ottenere il valore esatto di $\sqrt[3]{2}$;
c. in generale, quali curve bisogna disegnare per ottenere il valore esatto di $\sqrt[3]{a}$?

Problemi di geometria

Gli esercizi dal n. **950** *al n.* **960** *propongono problemi con le seguenti caratteristiche:*

a. *richiedono di valersi dei teoremi di Pitagora e di Euclide o delle nozioni fondamentali sulla similitudine;*

b. *conducono a risolvere equazioni o sistemi del tipo esaminato nel capitolo ottavo.*

950. Disegnare il triangolo rettangolo ABC che ha il cateto AC lungo 1 e il cateto AB lungo $\sqrt{2}$. Determinare sul cateto AB un punto P in modo che risulti:

$CP=\sqrt{2}BP$ [$AP=2\sqrt{2}-\sqrt{5}$]

951. Disegnare un quadrato ABCD con il lato lungo 4; scegliere sulla semiretta AB un punto E in modo che il perimetro del triangolo CDE sia uguale a quello del quadrato. [$BE=3\sqrt{2}-2$]

952. Disegnare un quadrato ABCD e su ogni lato costruire, esternamente al quadrato, un triangolo isoscele con l'altezza lunga 36; risolvere i seguenti quesiti:

a. determinare il lato del quadrato in modo che il perimetro dell'ottagono ottenuto sia i $\frac{13}{5}$ del perimetro del quadrato;

b. calcolare l'area S dell'ottagono ottenuto. [(b) $S=3060$]

953. Disegnare una circonferenza di centro O e raggio r ed una tangente t alla circonferenza; condurre una corda AB parallela a t e, dagli estremi della corda, condurre le perpendicolari AA' e BB' a t. Stabilire a quale distanza dal centro si deve condurre la corda in modo che il rettangolo AA'B'B abbia perimetro $2r$. [$\frac{2r\sqrt{5}}{5}$]

954. Disegnare il quadrato inscritto in una semicirconferenza con il diametro AB lungo $2r$; indicare con P e Q i vertici che si trovano sul diametro AB, con R e S i vertici che si trovano sulla semicirconferenza. Risolvere i seguenti quesiti:

a. spiegare perché il triangolo ASB è rettangolo;

b. determinare la lunghezza del lato del quadrato.

[*Scelta come incognita la lunghezza di* AP, *il lato del quadrato è lungo* $2r\frac{\sqrt{5}}{5}$]

955. Un triangolo rettangolo ha i cateti AB e AC lunghi, rispettivamente, 4 e 3; condurre per A una retta esterna al triangolo e indicare con B' e C' le proiezioni ortogonali di B e di C sulla retta. Risolvere i seguenti quesiti:

a. spiegare perché i due triangoli ABB' e ACC' sono simili;

b. calcolare quanto vale la distanza AB', sapendo che B'C' è lungo $\frac{7}{2}\sqrt{2}$.

[*Si ottengono per la distanza* AB' *i due valori* $2\sqrt{2}$ *e* $\frac{62}{25}\sqrt{2}$]

956. Da un punto P esterno alla circonferenza di centro O e raggio r si tracciano le tangenti PN e PM; determinare la distanza OP in modo che risulti:

$OP=4MN$ [$OP=2r\sqrt{8\pm2\sqrt{15}}$]

957. Disegnare un quadrante, quarta parte di un cerchio di centro A e raggi AD e AE lunghi r. Costruire un trapezio rettangolo ABCD nel modo seguente:

- da D tracciare la semiretta che è perpendicolare a AD e si trova dalla stessa parte del quadrante;
- da un punto C della semiretta condurre un'altra tangente t, che tocca la circonferenza in T ed incontra il prolungamento di AE in B.

Risolvere i seguenti quesiti:

a. condurre da C la perpendicolare CH ad AB e spiegare perché i due triangoli ATB e BCH sono uguali;

b. determinare AB, sapendo che il perimetro del trapezio è lungo $5r$.

[$AB=\frac{r}{4}(6\pm\sqrt{2})$]

958. Data una semicirconferenza con il centro O e il diametro AC lungo $2r$, tracciare per A la semiretta che è perpendicolare ad AC e si trova dalla stessa parte della semicirconferenza. Fissare un punto M sulla semiretta e tracciare da M un'altra tangente t, che tocca in B la semicirconferenza. Indicare con K l'intersezione fra la semicirconferenza e il segmento OM e risolvere i seguenti quesiti:
a. spiegare perché il quadrilatero AOBK ha le diagonali perpendicolari;
b. determinare la posizione di M per cui l'area del quadrilatero AOBK vale $\frac{r^2}{2}$.

[$AM=\frac{r}{\sqrt{3}}$]

959. Un punto M varia all'interno di un angolo retto di vertice O, mantenendo la distanza da un lato uguale a b e la distanza dall'altro lato uguale a $2b$. Tracciare una retta per M che incontra i due lati dell'angolo nei punti A e B e stabilire per quale posizione di M risulta:

$$AM^2+BM^2=10b^2$$

[*Condurre da* M *la perpendicolare* MM' *al lato* OA; *si ottiene:* ;MM'=b *e* OM')=2b; *si ottengono per la distanza* AM' *i due valori* b *e* 2b]

960. In un cerchio di centro O e raggio r determinare una corda AB in modo che, sommando l'area del triangolo AOB con l'area del triangolo equilatero di lato AB, si ottenga $\frac{\sqrt{3}}{2}r^2$.

[*Indicando con* $2x$ *la lunghezza della corda, si arriva ad un'equazione biquadratica che ha le due soluzioni positive* $x_1=\frac{r}{2}$ *e* $x_2=\frac{\sqrt{3}}{2}r$]

Problemi vari

961. Si deposita in banca un capitale di 8 milioni ad un tasso di interesse composto annuo r; risolvere i seguenti quesiti:
a. spiegare perché il montante C dopo tre anni è legato al tasso r dalla legge:
$C=8(1+r)^3$
b. calcolare il tasso r per avere un montante C di 12 milioni.

[*Vedere il primo volume, p. 285; si ha* $r \cong 14\%$]

962. Si deposita in banca un capitale di A milioni ad un tasso di interesse composto annuo r; risolvere i seguenti quesiti:
a. spiegare perché il montante C dopo n anni è legato al tasso r dalla legge:
$C=A(1+r)^n$
b. scrivere la formula che permette di calcolare il tasso annuo d'interesse r necessario per ottenere un montante C, impiegando un capitale A per n anni.

[*Vedere il primo volume, p. 285; si ottiene* $r=\sqrt[n]{\frac{C}{A}}-1$]

963. Viene proposto di investire una somma di denaro A=10 milioni con tasso di interesse composto annuo variabile nel modo seguente:
- r=8% per i primi due anni;
- r=10% per i successivi cinque anni;
- r=15% per gli ultimi tre anni.

Risolvere i seguenti quesiti:
a. calcolare il montante C che si ottiene dopo 10 anni;
b. calcolare il tasso fisso annuo r necessario per ottenere, dopo 10 anni, lo stesso montante.

[*Vedere l'esercizio 962; si ottiene* $r \cong 16\%$]