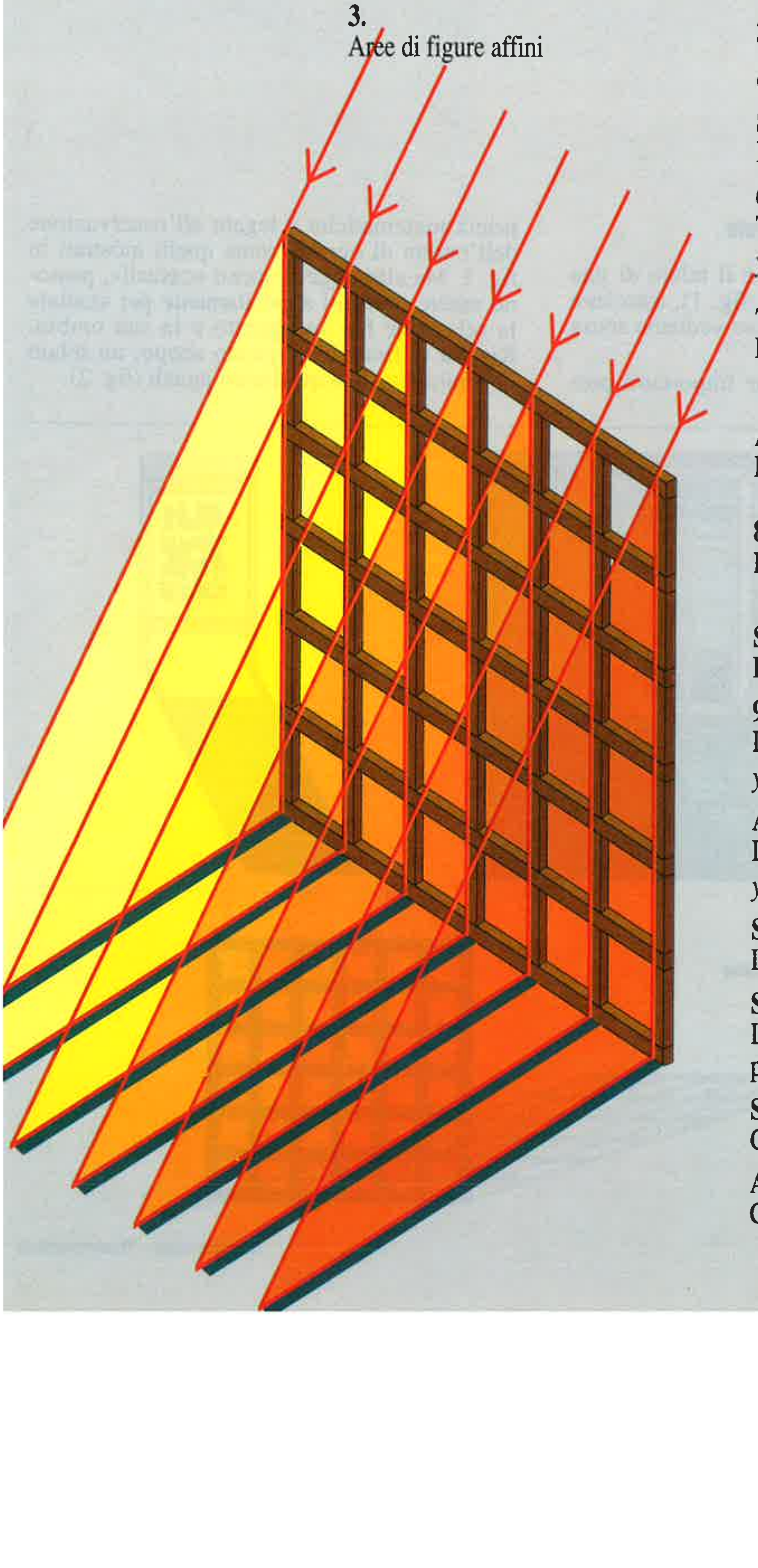
CAPITOLO SESTO

TRASFORMAZIONI



1 Trasformazioni affini

Osservare le ombre date dal Sole

Un cartellone pubblicitario o il telaio di una finestra, illuminati dal Sole (fig. 1), tracciano ombre nitide, che molto spesso vediamo senza fermarci ad osservarle.

Eppure la scoperta di alcune importanti proprietà matematiche è legata all'osservazione dell'ombra di oggetti come quelli mostrati in fig. 1. Ma altri oggetti, meno «casuali», possono essere costruiti appositamente per studiare la relazione fra un oggetto e la sua ombra. Risulta utilissimo, a questo scopo, un telaio quadrato diviso in quadratini uguali (fig. 2).

Figura 1
Una finestra e un cartellone pubblicitario illuminati dal Sole

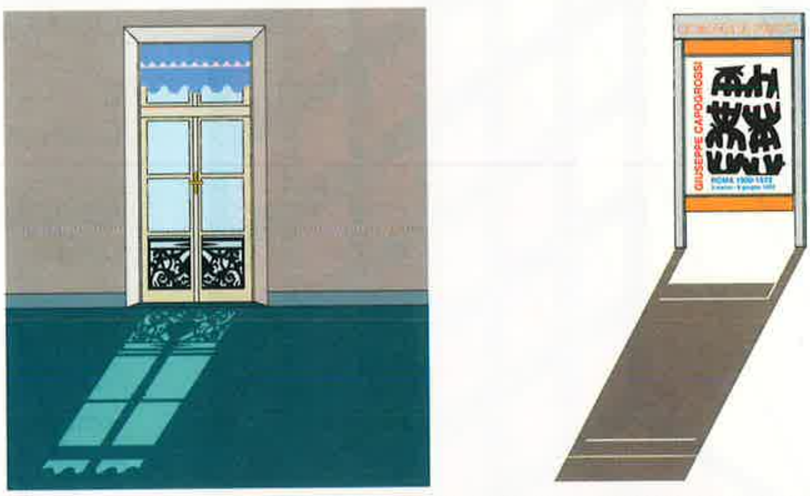
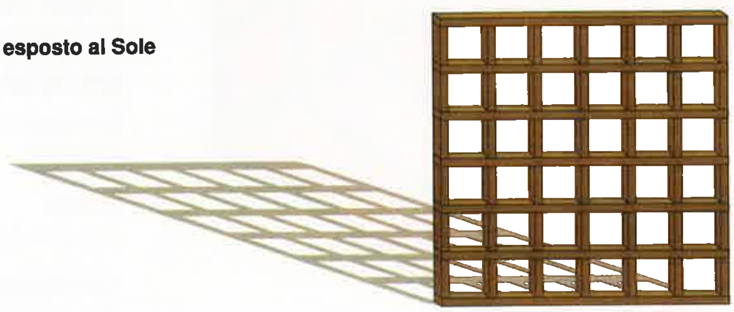


Figura 2
Un telaio quadrettato esposto al Sole



Il telaio è esposto al Sole per tutto il giorno e l'ombra si modifica nel corso della giornata, ma sembra avere sempre le stesse caratteristiche: l'ombra del telaio quadrato è un parallelogramma.
Ci si chiede:

- l'ombra è proprio un parallelogramma?
- l'ombra è un parallelogramma a qualunque ora del giorno?

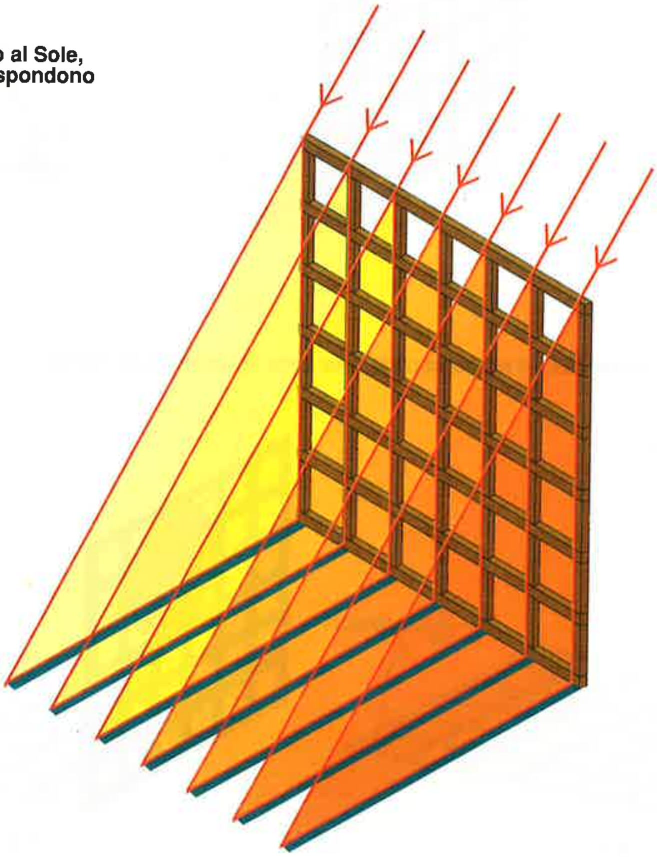
La trasformazione data dai raggi del Sole è una trasformazione affine

Per trovare la risposta alle domande precedenti si può ragionare così (fig. 3): il Sole è talmente distante dalla Terra che i suoi raggi si possono considerare paralleli; questi raggi, sfiorando le sbarrette, formano dei «piani di luce» paralleli che tracciano sul tavolo ombre parallele.
Così si conclude che *a sbarrette parallele corrispondono ombre che sono segmenti di rette parallele.*
Proprio per questo il telaio quadrato e i quadratini in cui è suddiviso danno come ombra certamente dei parallelogrammi, cioè dei quadrilateri con i lati a due a due paralleli.
Si può dire che *i raggi del Sole* trasformano *il telaio nella sua ombra, mantenendo il parallelismo*: sbarrette che sono parallele nel telaio danno come ombra segmenti che sono ancora paralleli.
Una trasformazione che mantiene il parallelismo prende il nome di trasformazione affine *o* affinità.

Un'affinità modifica angoli, lunghezze ed aree

La trasformazione affine data dai raggi del Sole mantiene dunque il parallelismo, ma non mantiene la perpendicolarità: sbarrette che erano perpendicolari danno spesso come ombra segmenti che non sono più perpendicolari.
Più in generale, si osserva che l'affinità modifica l'ampiezza degli angoli e, insieme all'ampiezza degli angoli, cambia la lunghezza dei segmenti e l'area delle superfici: l'ombra del telaio si allunga al tramonto e quindi ne varia l'area nel corso della giornata.

Figura 3
Quando il telaio è esposto al Sole, a sbarrette parallele corrispondono ombre parallele



Un'affinità mantiene il rapporto delle aree

Anche se tutto sembra variare, continuando ad osservare il telaio e la sua ombra si scopre facilmente qualcosa che non cambia: al telaio A formato da 36 quadratini Q tutti uguali fra loro (fig. 4) corrisponde un'ombra A' formata da 36 parallelogrammi Q' tutti uguali fra loro; questo vuol dire che risulta:

$$A = 36\,Q \quad \text{e} \quad A' = 36\,Q'$$

ossia:

$$\frac{A}{Q} = 36 \quad \text{e} \quad \frac{A'}{Q'} = 36$$

Questo particolare rapporto di aree che resta costante porta a indagare meglio sul rapporto fra aree di figure corrispondenti.

Si può, per esempio, suddividere ogni quadratino del telaio in due triangoli con una sbarretta-diagonale (fig. 5*a*): si ottengono 72 triangoli T tutti uguali, che daranno come ombra 72 triangoli T' ancora tutti uguali fra loro e così si avrà che:

$$\frac{A}{T} = 72 \quad \text{e} \quad \frac{A'}{T'} = 72$$

E ancora, si possono isolare nel telaio un certo numero di triangoli T, per formare un poligono P come quello di fig. 5*b*, che è formato da 14 triangoli T; l'ombra sarà un poligono P' formato ancora da 14 triangoli uguali T' e perciò si avrà, per esempio:

Figura 4
Una trasformazione affine mantiene il rapporto fra le aree dei quadrilateri corrispondenti

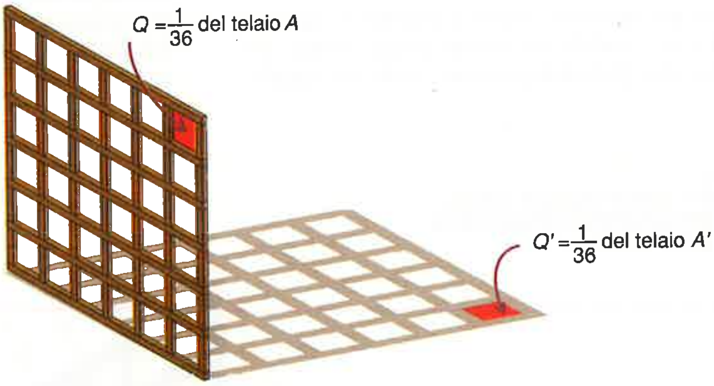
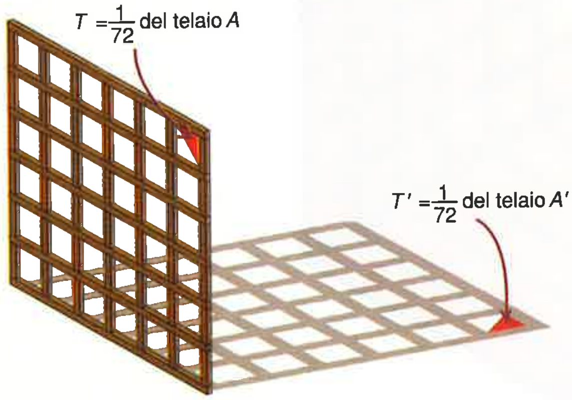
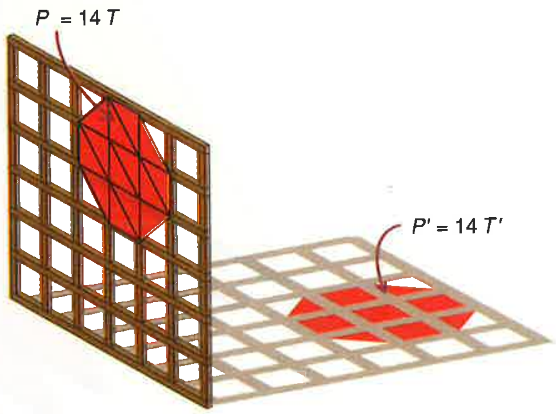


Figura 5
Una trasformazione affine mantiene il rapporto fra le aree delle figure corrispondenti



5 *a*



5 *b*

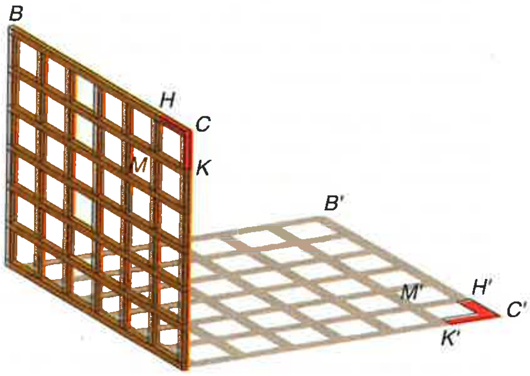
$$\frac{P}{T} = 14 \qquad \text{e} \qquad \frac{P'}{T'} = 14$$

Si può continuare a esaminare nello stesso modo tanti altri poligoni, arrivando a concludere che *è costante il rapporto fra poligoni corrispondenti.*

E dai poligoni si può passare alle figure curvilinee, ricavando dal modello suggerimenti per spingersi oltre con l'immaginazione: si possono immaginare poligoni con un numero sempre più grande di lati fino ad approssimare un cerchio, o un quadrettato che approssima una qualunque altra figura curvilinea.

Osservazione e immaginazione portano dunque a concludere che *i raggi del Sole* trasformano *il telaio nella sua ombra, mantenendo il rapporto fra le aree delle figure corrispondenti.*

Figura 6
Una trasformazione affine non mantiene sempre il rapporto fra segmenti corrispondenti



$\frac{CH}{CK} = 1$ ma $\frac{C'H'}{C'K'} \neq 1$

CH e CB sulla stessa retta

$\frac{CH}{CB} = \frac{1}{6}$ e $\frac{C'H'}{C'B'} = \frac{1}{6}$

$\frac{CH}{KM} = 1$ e $\frac{C'H'}{K'M'} = 1$

CH e KM su rette parallele

Un'affinità non mantiene sempre il rapporto fra segmenti

Non sembra invece che si mantenga sempre il rapporto fra segmenti corrispondenti; ecco qualche esempio (fig. 6):

- al lato CH, che è uguale a CK nel telaio, corrisponde C'H', che *non* è uguale a C'K' nell'ombra, cioè si ha:

$$\frac{CH}{CK} = 1 \qquad \text{e} \qquad \frac{C'H'}{C'K'} \neq 1$$

- al lato CH, che è uguale a KM nel telaio, corrisponde C'H', che è uguale a K'M' nell'ombra, cioè si ha:

$$\frac{CH}{KM} = 1 \qquad \text{e} \qquad \frac{C'H'}{K'M'} = 1$$

- al lato CH, che è $\frac{1}{6}$ del lato CB del telaio, corrisponde C'H', che è $\frac{1}{6}$ del lato C'B' dell'ombra, cioè si ha:

$$\frac{CH}{CB} = \frac{1}{6} \qquad \text{e} \qquad \frac{C'H'}{C'B'} = \frac{1}{6}$$

Ripetendo altre osservazioni di questo tipo si arriva a concludere che *una trasformazione affine mantiene il rapporto fra segmenti corrispondenti solo se i segmenti si trovano sulla stessa retta (come CH e CB) o su rette parallele (come CH e KM).*

Proprietà invarianti per una trasformazione affine

Ecco le proprietà che non cambiano, che sono cioè *invarianti* per una trasformazione affine, come risultano dall'osservazione dell'ombra data dai raggi del Sole:

- *il parallelismo;*
- *il rapporto fra le aree delle figure corrispondenti;*
- *il rapporto fra segmenti corrispondenti solo se i segmenti si trovano sulla stessa retta o su rette parallele.*

A queste proprietà se ne può aggiungere un'altra che sembra evidente:

- *a rette corrispondono rette;*

cioè tratti rettilinei, come i lati del telaio, non appaiono «incurvati» nell'ombra.

Le trasformazioni affini sono particolari trasformazioni proiettive

L'ultima osservazione potrebbe sembrare superflua, ma acquista significato quando si sottopone il telaio a un'altra trasformazione che non è affine: si illumina il telaio non più con i raggi solari ma con un proiettore (fig. 7); l'ombra non è più un parallelogramma, ma un quadrilatero qualunque.
Non si mantiene dunque il parallelismo, che è la proprietà invariante caratteristica dell'affinità, e perciò la trasformazione non è affine; prende invece il nome di *trasformazione proiettiva* o *proiettività* (vedi anche la scheda informativa di p. 282).
Non mantenendosi il parallelismo, in una proiettività non si mantiene neanche il rapporto fra le aree (l'ombra è formata da quadrilateri disuguali) e tanto meno si mantiene il rapporto fra i segmenti.
C'è un'unica proprietà che rimane: *a rette corrispondono rette*.

È interessante osservare che, se il proiettore viene allontanato dal telaio, il quadrilatero-ombra tende ad assumere la forma di un parallelogramma.
Si può così intuire che *un'affinità è una particolare proiettività*, ottenuta considerando la sorgente di luce infinitamente lontana.

Verifiche

Conoscenze

① Che cosa vuol dire il termine trasformazione affine?

② Quali sono le proprietà invarianti per una trasformazione affine?

Comprensione

① Perché una trasformazione affine è considerata un caso particolare della trasformazione proiettiva?

② Un pettine è posto davanti a una lampadina accesa; i raggi di luce che passano attraverso i denti del pettine vanno poi a illuminare un telaio quadrato come quello di fig. 2. Rispondere ai seguenti quesiti:

a. i raggi di luce che passano attraverso i denti del pettine sono paralleli?

b. la trasformazione data da questi raggi di luce è affine o proiettiva?

Applicazioni

① La luce del Sole, penetrando attraverso una finestra aperta, determina sul pavimento una zona luminosa. Quale forma ha questa zona luminosa?

② Il telaio quadrettato di fig. 2 è disposto davanti a uno specchio curvo, come per esempio una pentola d'acciaio ben lucida; il telaio viene così trasformato in un'immagine formata tutta di linee curve. Rispondere ai seguenti quesiti:

a. spiegare perché la trasformazione descritta non è proiettiva;

b. spiegare perché la trasformazione non è affine.

Figura 7
Quando si illumina il telaio con un proiettore non si ha una trasformazione affine

Le equazioni di una trasformazione affine

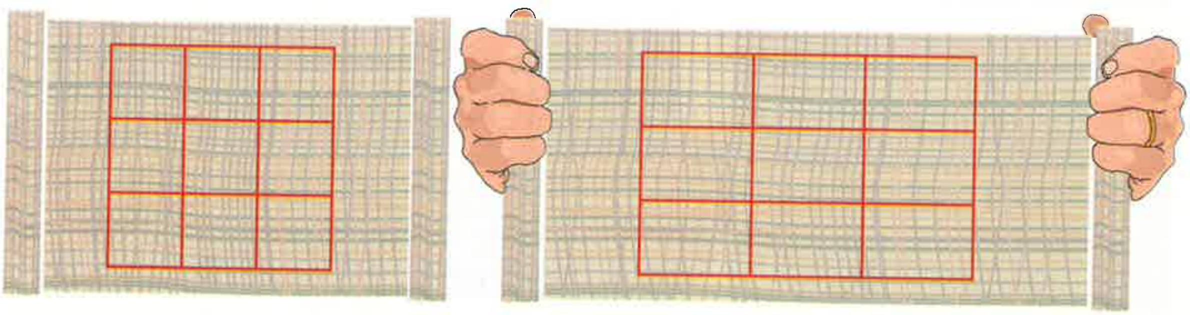
Dall'ombra del Sole alla tela elastica

Pensiamo a una persona ferma davanti al Sole al tramonto (fig. 1): si osserva che l'ombra diventa sempre più lunga mano a mano che il Sole si abbassa all'orizzonte. È come se l'ombra fosse un elastico che viene tirato.

L'idea dell'elastico fa nascere un'altra idea (fig. 2): disegnare una figura su una tela elastica (fig. 2*a*) e tirare la tela nella direzione delle fibre (fig. 2*b*). La figura subisce una trasformazione che sembra un'affinità, pur essendo lontana dalla trasformazione data dai raggi del Sole.

Figura 1
L'ombra si allunga al tramonto

Figura 2
Una figura disegnata su una tela elastica viene allungata



2*a* 2*b*

Per verificare se si tratta effettivamente di una trasformazione affine basta verificare la proprietà caratteristica di un'affinità: rette parallele si trasformano in rette parallele.

Per avere questa verifica si disegnano su una tela elastica due rette parallele r e s, che attraversano le fibre elastiche della tela in tanti punti, come ad esempio R e S (fig. 3*a*); si stira quindi la tela nella direzione delle fibre elastiche, cioè nella direzione RS (fig. 3*b*). Si ottengono così due rette, r' e s', che sono certamente ancora parallele: dilatando la tela nella direzione RS non può infatti accadere che R e S vadano a coincidere.

Dunque rette parallele si trasformano in rette parallele e cioè *la trasformazione che si ottiene dilatando una tela elastica è un'affinità.*

Dalla tela elastica alle equazioni di un'affinità

Le osservazioni sulla tela elastica portano a descrivere una trasformazione affine per mezzo di equazioni. Ecco come si può procedere.

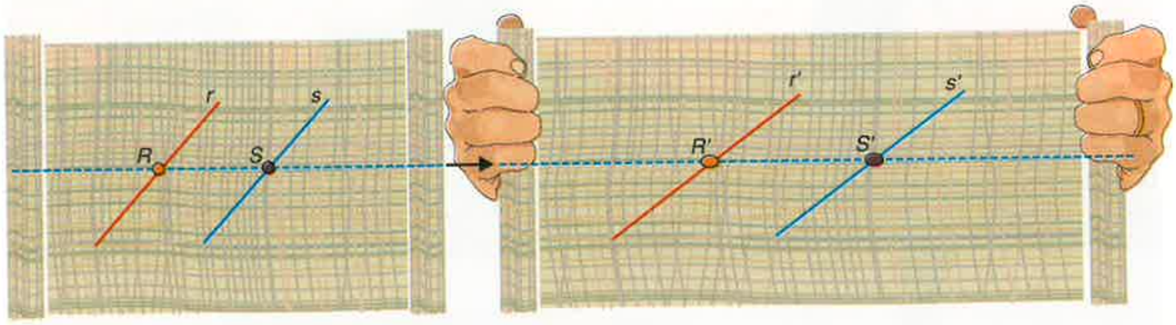
Si disegna su una tela elastica un riferimento cartesiano e si fissa l'attenzione su un punto di questo piano, per esempio A(2; 3) (fig. 4*a*).

Viene quindi dilatata la tela nella direzione dell'asse delle x fino a raddoppiarne la lunghezza (fig. 4*b*): il piano si è trasformato e la scala sull'asse delle x risulta dilatata; si intuisce che sono cambiate le coordinate di A rispetto al riferimento presentato in fig. 4*a*. Ma la situazione iniziale adesso è scomparsa.

Per capire meglio che cosa è successo conviene fissare su una lastra di vetro il riferimento nella situazione iniziale, indicandolo con $O'x'y'$ (in nero in fig. 5*a*).

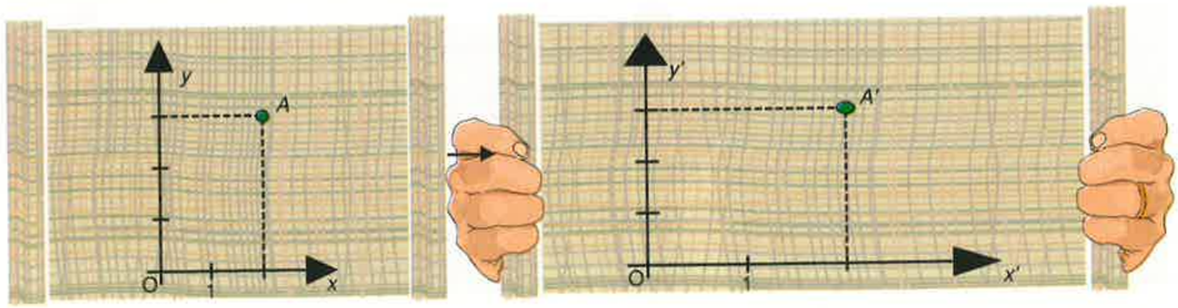
Così inizialmente si ha il piano di vetro perfettamente sovrapposto al piano elastico ed il punto A di coordinate (2; 3); ma, dopo aver operato lo stiramento lungo l'asse delle x, il punto A si trasforma nel punto A'(4; 3) (fig. 5*b*).

Figura 3
La trasformazione ottenuta dilatando una tela elastica è un'affinità



3*a* 3*b*

Figura 4
Un riferimento cartesiano sulla tela elastica



4*a* 4*b*

Si trova dunque che l'ordinata è rimasta inalterata, mentre l'ascissa è raddoppiata.

È chiaro che hanno subito la stessa sorte tutti i punti della tela elastica: qualunque punto A che aveva inizialmente le coordinate:

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y \end{cases}$$

si trasforma, in seguito allo stiramento, nel punto A' che ha le coordinate (x'; y') date da:

$$\begin{cases} x' = 2x \\ y' = y \end{cases}$$

Se poi la tela viene stirata sempre lungo l'asse delle x, ma con una forza diversa, le ascisse verranno moltiplicate per un coefficiente $m > 1$ e il punto A' avrà le coordinate (x'; y') date da:

$$\begin{cases} x' = mx \\ y' = y \end{cases}$$

Se invece si opera uno stiramento lungo l'asse delle y rimangono inalterate le ascisse di tutti i punti, mentre le ordinate risultano moltiplicate per un numero $n > 1$. Perciò un qualunque punto A(x; y) si trasforma in un punto A', che ha le coordinate (x'; y') date da:

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = ny \end{cases}$$

Infine, se si operano successivamente (o contemporaneamente) uno stiramento lungo l'asse delle x e uno lungo l'asse delle y, un punto A(x; y) si trasforma in un punto A' che ha le coordinate (x'; y') date da:

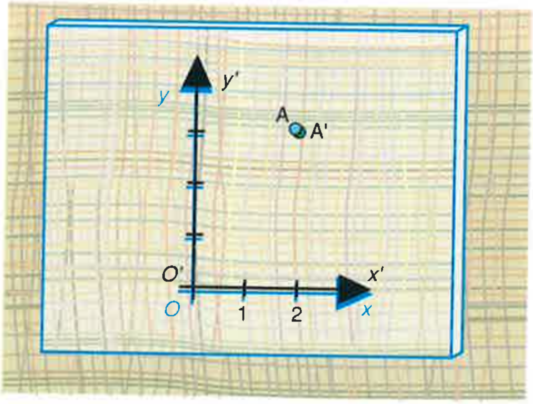
$$\begin{cases} x' = mx \\ y' = ny \end{cases} \qquad (1)$$

dove le lettere m e n indicano due numeri reali più grandi di 1.

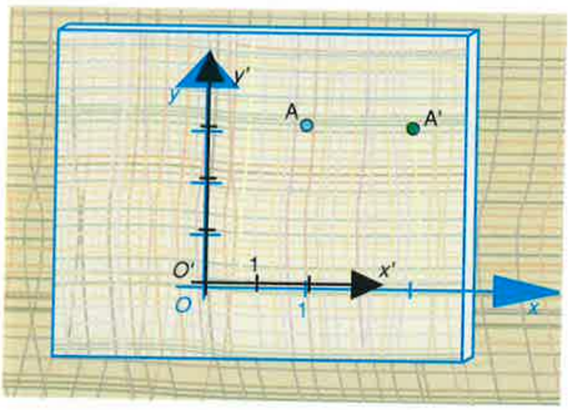
Si può anche immaginare di disegnare il riferimento su una tela elastica che sia stata già dilatata lungo i due assi cartesiani; quando si allenta la tensione, il piano «si restringe» come se fosse stato compresso lungo i due assi. A questa esperienza fisica corrisponde il fatto che nelle equazioni (1) i coefficienti m e n hanno valori più piccoli di 1 (ma sempre positivi).

Le equazioni (1) sono *le equazioni che descrivono una trasformazione affine*, dove m e n indicano due qualunque numeri reali positivi che generalmente non sono uguali fra loro.

Figura 5
Le equazioni dell'affinità



5*a*



5*b*

La similitudine come caso particolare di affinità

Che cosa succede se i due coefficienti m e n sono uguali fra loro?
Si avrà che i due stiramenti in direzione degli assi cartesiani avvengono «con forze uguali» e questo porta al fatto che non cambia la forma delle figure: si ottiene cioè una *figura simile*.
Si può dunque concludere che *la similitudine è una particolare affinità, descritta dalle equazioni*:

$$\begin{cases} x' = mx \\ y' = my \end{cases} \qquad (2)$$

Applicare le equazioni dell'affinità

Per vedere come si possono usare le equazioni dell'affinità per trasformare una figura, conviene lavorare subito su qualche esempio.

1. Si disegna sul piano cartesiano il quadrilatero che ha i vertici seguenti:

   A(2; 2) B(4; 3) C(3; 5) D(1; 4)

   È facile verificare che questo quadrilatero è un quadrato, dato che ha tutti i lati uguali e tutti gli angoli uguali (fig. 6*a*).
   Si vuole ora disegnare il quadrilatero che si ottiene operando l'affinità descritta dalle seguenti equazioni:

   $$\begin{cases} x' = 3x \\ y' = 2y \end{cases}$$

   Si tratta dunque di triplicare le ascisse e raddoppiare le ordinate; si ottiene il quadrilatero che ha i seguenti vertici:

   A'(6; 4) B'(12; 6) C'(9; 10) D'(3; 8)

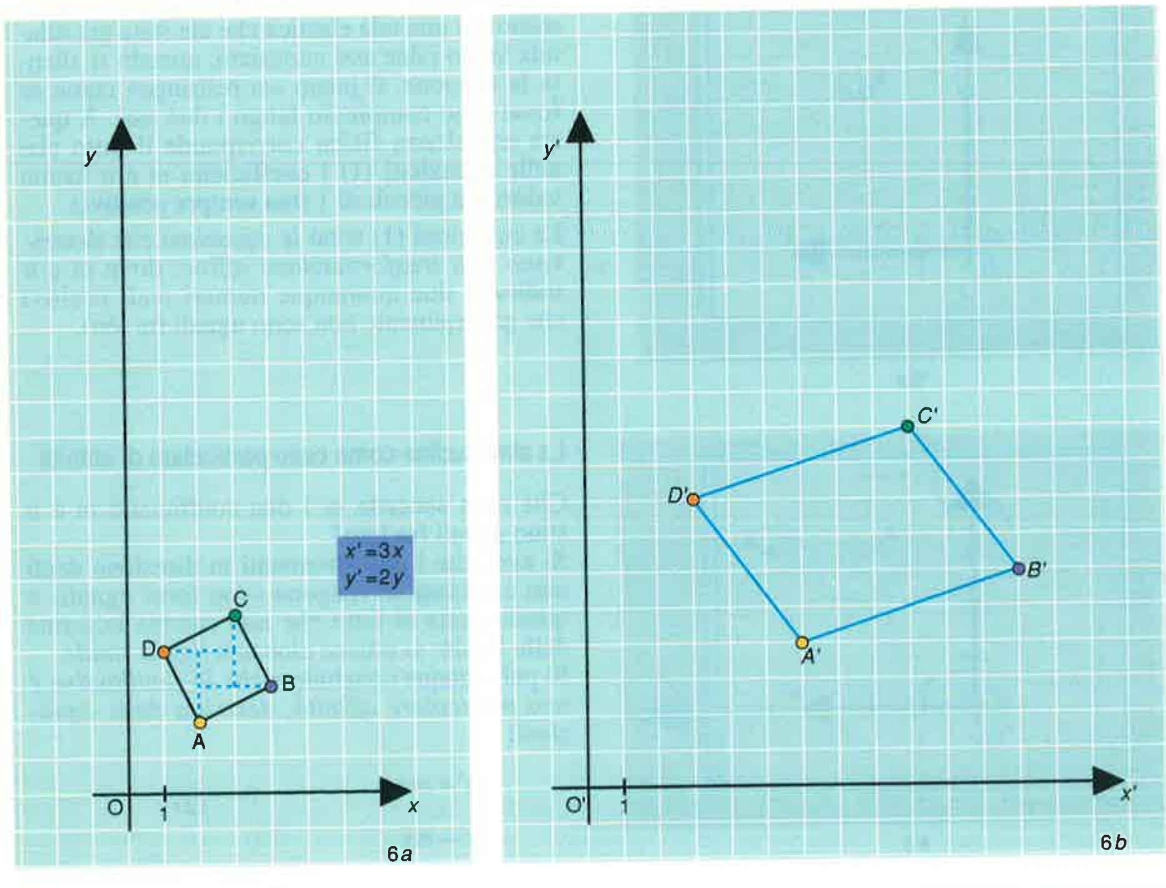
   Disegnando questo quadrilatero (fig. 6*b*) si trova appunto la figura trasformata del quadrato iniziale: è un parallelogramma perché i lati paralleli del quadrato si trasformano in segmenti ancora paralleli, ma non è più un quadrato, perché l'affinità assegnata non mantiene la perpendicolarità.

2. Ci si chiede ora come modificare le equazioni dell'affinità in modo da avere una trasformazione che modifichi solo le dimensioni del quadrato iniziale, ma non la sua forma. La risposta si è trovata prima: le equazioni debbono essere del tipo (2), cioè presentare i due coefficienti uguali; per esempio:

   $$\begin{cases} x' = 3x \\ y' = 3y \end{cases}$$

   Con queste equazioni si opera una similitudine, che triplica sia le ascisse che le ordina-

Figura 6
Un quadrato e il parallelogramma trasformato per affinità



te; si ottiene il quadrilatero che ha i vertici seguenti:

A''(6; 6) B''(12; 9) C''(9; 15) D''(3; 12)

Il quadrilatero (fig. 7*b*) è certamente un quadrato.

Verifiche

Conoscenze

① Scrivere le equazioni che descrivono una trasformazione affine

② Scrivere le equazioni di una similitudine

Comprensione

① Spiegare il significato delle lettere x, y, x', y', m, n che compaiono nelle equazioni di un'affinità.

② Spiegare perché una trasformazione affine si può realizzare disegnando una figura su una tela elastica.

Applicazioni

① Disegnare sul piano cartesiano il parallelogramma che ha i vertici seguenti:

A(2; 3) B(8; 3) C(10; 6) D(4; 6)

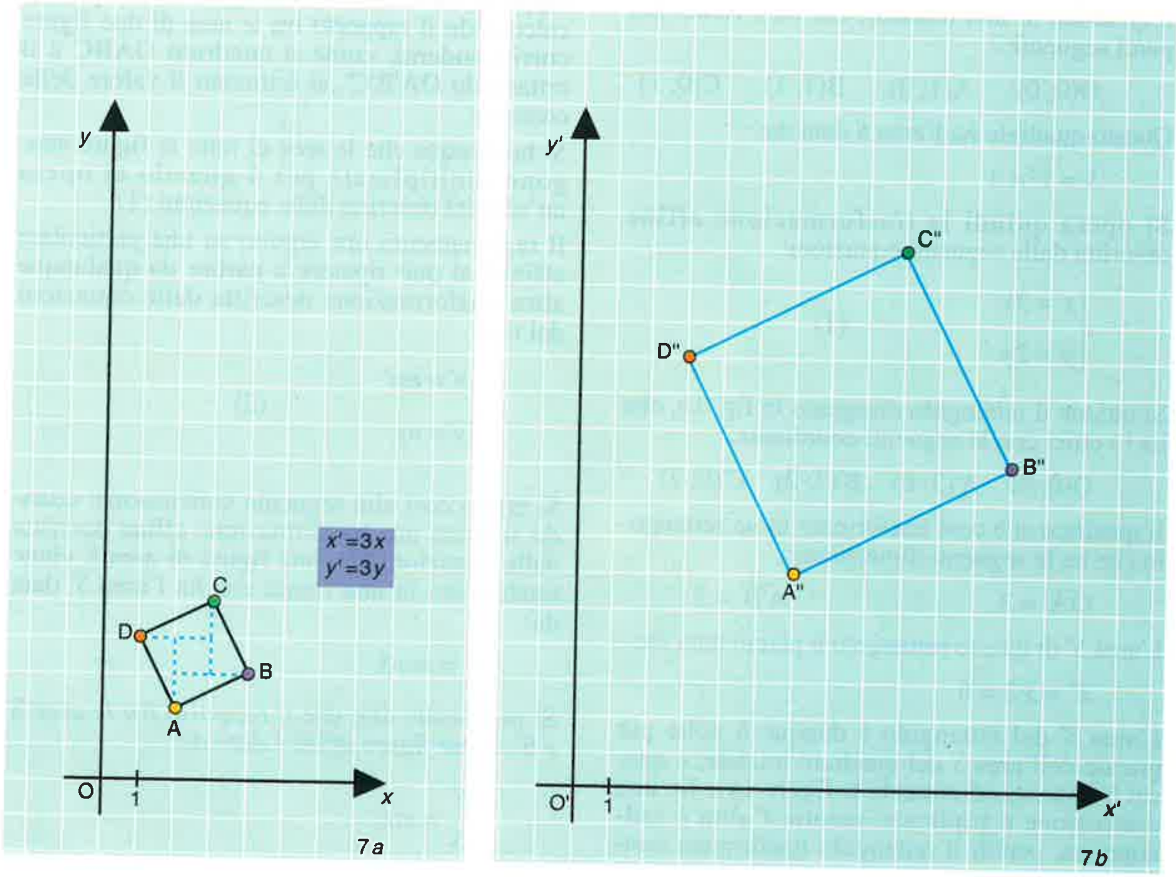
Operare la trasformazione affine descritta dalle seguenti equazioni:

$$\begin{cases} x' = \dfrac{1}{2}x \\[2ex] y' = \dfrac{1}{3}y \end{cases}$$

Disegnare il quadrilatero trasformato.

② Modificare le equazioni precedenti in modo da ottenere un parallelogramma simile a quello assegnato.

Figura 7
Un quadrato e il quadrato trasformato per similitudine



3 Aree di figure affini

Rapporto fra le aree di due figure affini

Le equazioni delle trasformazioni affini permettono di completare e approfondire un risultato trovato nel paragrafo 1: è costante il rapporto fra le aree di due figure che si corrispondono in un'affinità.

Conviene cominciare a riflettere su un semplice esempio numerico: in fig. 1*a* si è disegnato il quadrato di lato unitario, che ha i vertici nei punti seguenti:

$$O(0; 0) \quad A(1; 0) \quad B(1; 1) \quad C(0; 1)$$

Questo quadrato ha l'area S data da:

$$S = 1^2 = 1$$

Si opera quindi la trasformazione affine descritta dalle seguenti equazioni:

$$\begin{cases} x' = 3x \\ y' = 2y \end{cases} \qquad (1)$$

Si ottiene il rettangolo disegnato in fig. 1*b*, che ha i vertici con le seguenti coordinate:

$$O(0; 0) \quad A'(3; 0) \quad B'(3; 2) \quad C'(0; 2)$$

Il quadrato si è così trasformato in un rettangolo che ha le seguenti dimensioni:

$$\overline{OA'} = 3 \qquad \overline{A'B'} = 2$$

L'area S' di questo rettangolo è perciò data da:

$$S' = 3 \cdot 2 = 6$$

L'area S' del rettangolo è dunque 6 volte più grande dell'area S del quadrato iniziale; e questo è chiaro confrontando le figure 1*a* e 1*b*: una dimensione è triplicata, mentre l'altra è raddoppiata, perciò il rettangolo trasformato contiene $3 \cdot 2$ quadrati uguali a quello iniziale.

Risulta dunque:

$$S' = 6\,S \quad \text{ossia} \quad \frac{S'}{S} = 6$$

La conclusione ora ottenuta è valida per tutte le coppie di figure corrispondenti: è costante il rapporto fra le aree di due figure affini; perciò, calcolando il rapporto fra le aree di due figure corrispondenti, come il quadrato OABC e il rettangolo OA'B'C', si è trovato il valore della costante.

Si ha dunque che le aree di tutte le figure vengono moltiplicate per 6 quando si opera un'affinità descritta dalle equazioni (1).

Il ragionamento ora seguito su una particolare affinità si può ripetere a partire da qualunque altra trasformazione descritta dalle equazioni del tipo:

$$\begin{cases} x' = mx \\ y' = ny \end{cases} \qquad (2)$$

Si arriva così alla seguente conclusione: quando si opera una trasformazione affine descritta dalle equazioni (2), una figura di area S viene trasformata in una figura che ha l'area S' data da:

$$S' = mn \cdot S$$

Si può anche dire che *il rapporto fra le aree* S *e* S' *di due figure affini è dato da:*

$$\frac{S'}{S} = mn$$

Rapporto fra le aree di due figure simili

Il risultato ora ottenuto si applica anche alle similitudini, cioè alle trasformazioni descritte da equazioni del tipo:

$$\begin{cases} x' = mx \\ y' = my \end{cases} \qquad (3)$$

In tal caso (vedi anche il capitolo terzo, pp. 103-104) il rapporto delle aree di due figure simili sarà dato da:

$$\frac{S'}{S} = m^2$$

In fig. 2 viene illustrata questa conclusione: il quadrato OABC di fig. 2*a*, che ha l'area $S = 1$, viene trasformato con la similitudine di equazioni:

$$\begin{cases} x' = 3x \\ y' = 3y \end{cases}$$

Si ottiene così un altro quadrato (fig. 2*b*), che ha entrambe le dimensioni triplicate e perciò contiene 3·3 quadrati uguali a quello iniziale; si ha dunque che l'area S' del quadrato trasformato è data da:

$$S' = 3^2 S$$

Si può anche dire che risulta:

$$\frac{S'}{S} = 3^2$$

Figura 1
Rapporto fra le aree di due figure affini

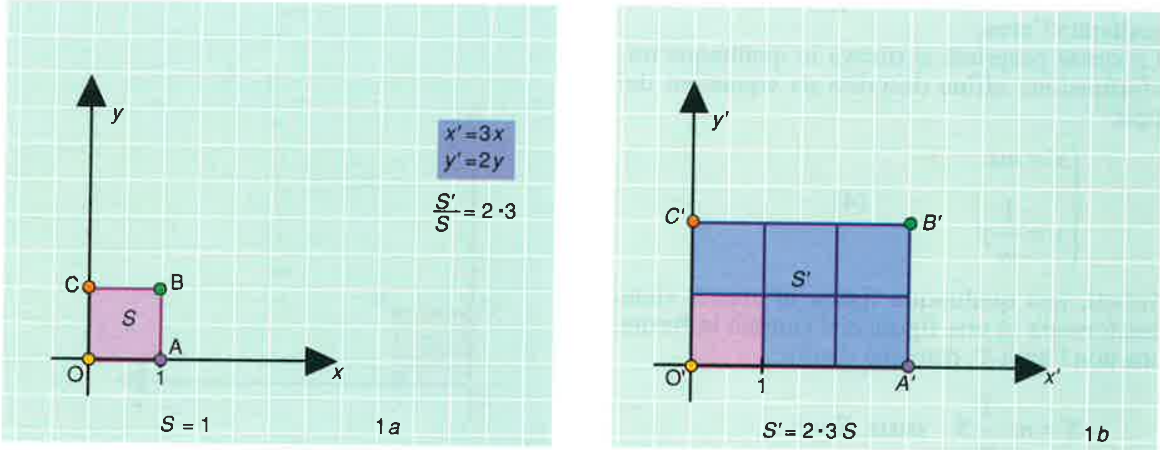
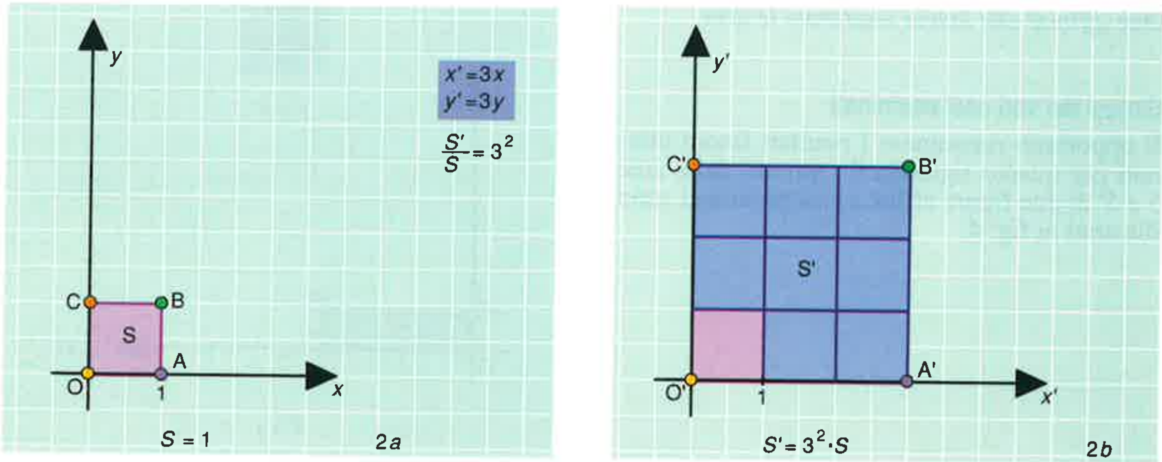


Figura 2
Rapporto fra le aree di due figure simili



Affinità equivalenti

Un caso di affinità particolarmente interessante si ottiene pensando di stirare il piano lungo una direzione (per esempio quella dell'asse delle x) e di comprimerlo lungo l'altra direzione (quella dell'asse delle y).
Ecco un esempio: a partire dal quadrato OABC (fig. 3*a*) di area $S = 1$, si opera la trasformazione descritta dalle seguenti equazioni:

$$\begin{cases} x' = 2x \\ y' = \dfrac{1}{2}y \end{cases}$$

Si ottiene il rettangolo O'A'B'C' di fig. 3*b*, con l'area S' che vale ancora 1, dato che risulta:

$$S' = 2 \cdot \frac{1}{2} S \quad \text{ossia} \quad S' = S$$

Si capisce così che questa trasformazione modifica la forma delle figure, ma ne lascia inalterata l'area.
La stessa proprietà si ritrova in qualunque trasformazione affine descritta da equazioni del tipo:

$$\begin{cases} x' = mx \\ y' = \dfrac{1}{m}y \end{cases} \qquad (4)$$

Infatti, una qualunque figura di area S viene trasformata in una figura che cambia la forma, ma non l'area S', dato che risulta:

$$S' = m \cdot \frac{1}{m} S \quad \text{ossia} \quad S' = S$$

Una trasformazione descritta da equazioni del tipo (4) prende il nome di *affinità equivalente*, cioè *affinità che lascia inalterate le aree.*

Sintesi dei vari casi esaminati

È opportuno riassumere i risultati finora ottenuti per quanto riguarda il rapporto delle aree S e S' di due figure affini; i casi esaminati sono illustrati in fig. 4.

Verifiche

Conoscenze

① Scrivere le equazioni che descrivono un'affinità e dire quanto vale il rapporto delle aree di due figure affini.

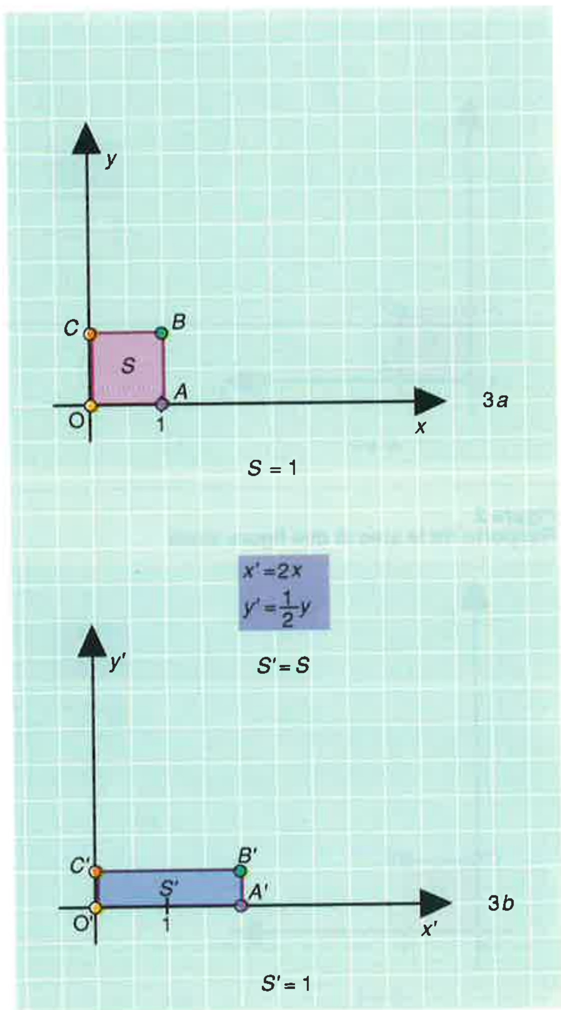
② Scrivere le equazioni che descrivono una similitudine e dire quanto vale il rapporto delle aree di due figure simili.

③ Spiegare che cosa si intende con il termine *affinità equivalente* e scriverne le equazioni.

Comprensione

① Spiegare perché il rapporto di due figure

Figura 3
Un'affinità equivalente lascia inalterate le aree



corrispondenti in un'affinità è dato dal prodotto dei coefficienti m e n.

② Spiegare perché lascia inalterate le aree una trasformazione affine con i coefficienti m e n che sono l'uno il reciproco dell'altro.

Applicazioni

① Disegnare il quadrato che ha i vertici seguenti:

A(2; 2) B(4; 4) C(2; 6) D(0; 4)

e verificare che ha l'area $S = 8$.
Operare la trasformazione descritta dalle equazioni seguenti:

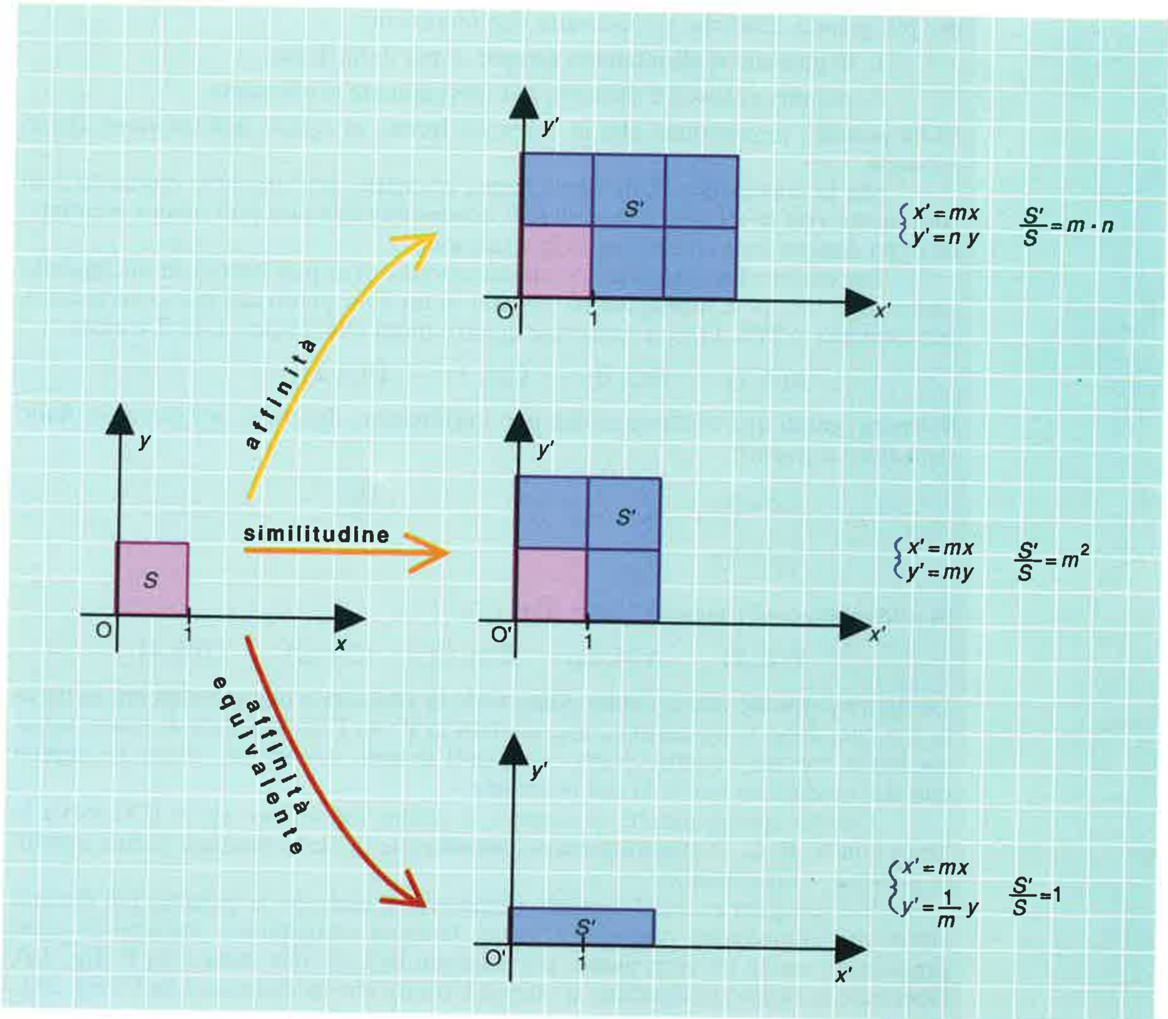
$$\begin{cases} x' = 4x \\ y' = \dfrac{1}{2}y \end{cases} \qquad (1)$$

Disegnare il quadrilatero trasformato e determinarne l'area.

② Modificare le equazioni (5) in modo da ottenere una similitudine; disegnare il quadrilatero trasformato e determinarne l'area.

③ Modificare le equazioni (5) in modo da ottenere un'affinità equivalente; disegnare il quadrilatero trasformato e determinarne l'area.

Figura 4
Aree di figure affini



Le trasformazioni nella natura

La similitudine e l'espansione dell'universo

Le equazioni della similitudine trovate nel paragrafo 2 aiutano a capire il fenomeno dell'*espansione dell'universo*, un fenomeno scoperto dagli astronomi all'inizio di questo secolo.

Ecco di che cosa si tratta: si ritiene che l'universo diventi col tempo sempre più grande, dato che si osservano due fenomeni:

1. le galassie si allontanano sempre di più dalla Terra;
2. più una galassia è distante, più velocemente si allontana.

Si ha perciò l'impressione che la Terra sia ferma, al centro dell'universo che si espande.

Ma la concezione della Terra ferma al centro dell'universo contrasta così fortemente con le attuali conoscenze di astronomia che non può essere accettata; bisogna dunque esaminare meglio la situazione.

Per capire che cosa effettivamente avviene ci si può basare su un modello piano (fig. 1*a*): ci si immagina di trovarsi in un dato punto del piano cartesiano, per esempio in P(3; 1), e di osservare quattro punti che distano 1 da P, e cioè:

A(2; 1) B(3; 0) C(4; 1) D(3; 2)

Si opera quindi una trasformazione per similitudine, descritta, per esempio, dalle equazioni seguenti:

$$\begin{cases} x' = 2x \\ y' = 2y \end{cases}$$

Si ottengono così i seguenti punti (fig. 1*b*):

P'(6; 2) A'(4; 2) B'(6; 0) C'(8; 2) D'(6; 4)

La figura permette ora di capire come vede la situazione una persona che si trova in P e che, dopo la trasformazione, si trova in P': ha l'impressione di essere rimasta ferma mentre i quattro punti circostanti si sono allontanati, senza accorgersi che si è modificata anche la sua posizione.

Questo spiega perché si osserva il primo fenomeno: se in P si trova la Terra e in A, B, C, D quattro galassie, sembra che la Terra rimanga ferma, mentre le galassie si allontanano.

Per spiegare anche il secondo fenomeno, e cioè che le galassie più distanti sembrano allontanarsi più velocemente, bisogna considerare, insieme ai punti precedenti, anche un altro punto, per esempio E(3; 3), che dista 2 da P (fig. 2*a*). Operando la stessa similitudine, si ottiene E'(6; 6), che ha distanza 4 da P' (fig. 2*b*).

Si trova dunque che:

- A, che distava 1 da P, dopo la similitudine si trova in A' a distanza 2 da P';
- E, che distava 2 da P, dopo la similitudine si trova in E' a distanza 4 da P'.

E così, trovandosi in P, si ha l'impressione che i punti più distanti si allontanino più velocemente di quelli vicini.

Le trasformazioni e la crescita delle strutture ossee

Nel paragrafo 1 si è visto che un telaio quadrettato viene trasformato da un'affinità in un parallelogramma, suddiviso in parallelogrammi uguali.

E allo stesso modo, un poligono che ha per vertici dei nodi del quadrettato (fig. 3*a*) viene trasformato in un poligono che ha per vertici i nodi dei corrispondenti parallelogrammi (fig. 3*b*)..

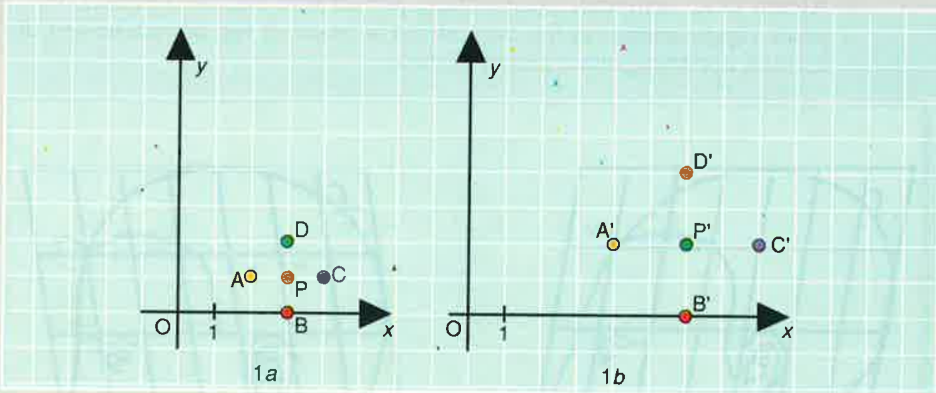


Figura 1
Un modello per «vedere»l'espansione dell'universo

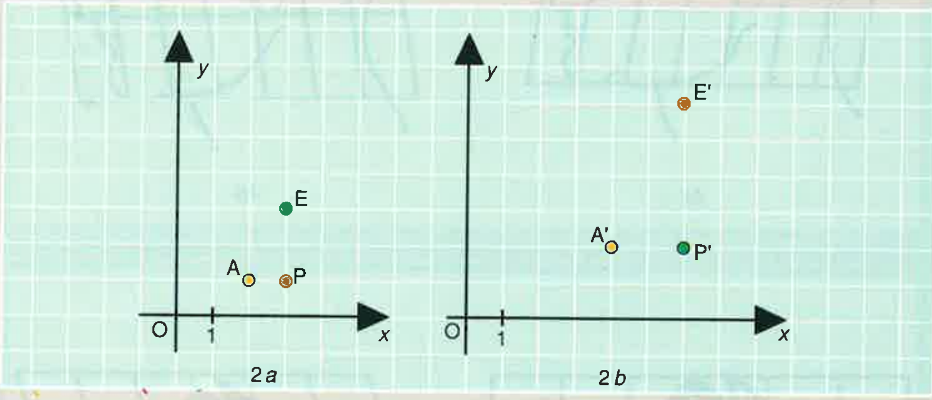


Figura 2
Un modello per capire perché le galassie più lontane sembrano allontanarsi più velocemente

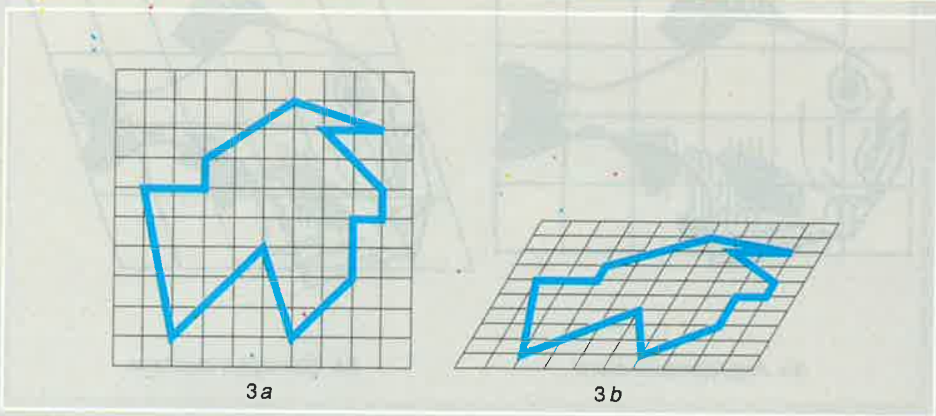


Figura 3
Come trasformare un poligono con un'affinità

Se poi la figura non è un poligono, si potranno utilizzare dei quadrettati più fitti, in modo da poter disegnare con una buona approssimazione la figura trasformata. È proprio quest'idea che ha portato i biologi a studi di carattere matematico sulla crescita degli animali.

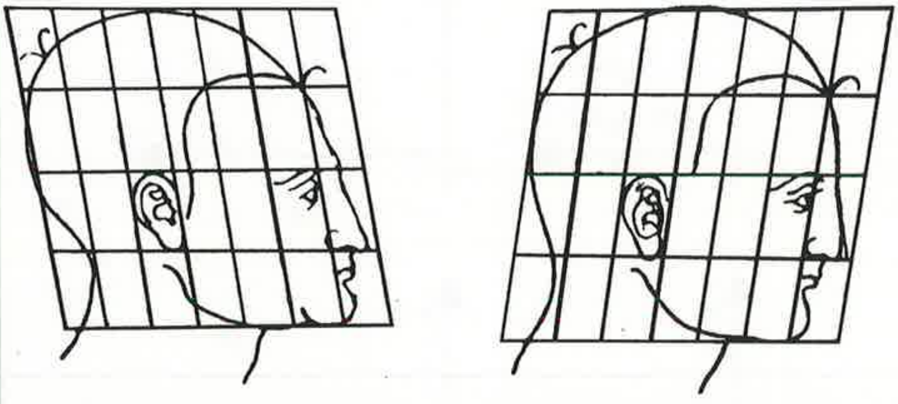
I primi tentativi di applicare la geometria delle trasformazioni per descrivere i cambiamenti di forma sono dovuti al naturalista inglese D'Arcy Thompson, che pubblicò i risultati dei suoi studi nel libro *Crescita e forma* (1917).

Thompson riprende alcuni disegni pubblicati nel 1528 dal grande pittore e incisore tedesco Albrecht Dürer (fig. 4) ed esamina il cambiamento di forma di una testa d'uomo studiato da Dürer, scoprendo che questo cambiamento è dovuto ad una trasformazione affine.

Ma è la forma degli animali che più sollecita le ricerche del naturalista; ecco due esempi semplici, ma suggestivi.

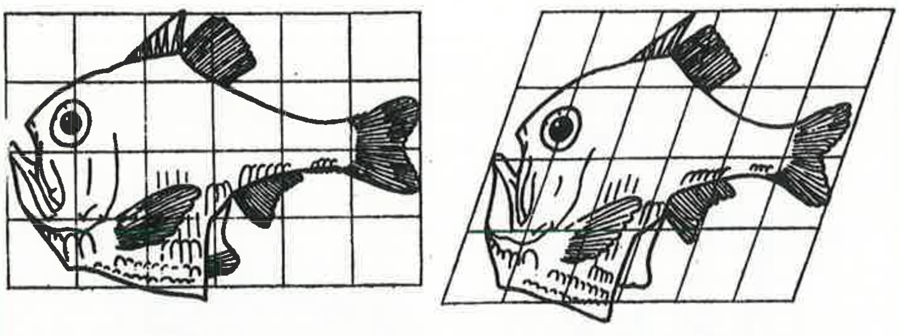
1. Alcuni pesci sembrano trasformarsi per affinità durante l'evoluzione: il pesce rappresentato in fig. 5*a* è affine al pesce di fig. 5*b*, anche se i due animali appartengono a generi diversi.

Figura 4
La trasformazione di una testa d'uomo studiata da Dürer e ripresa da Thompson



4*a* 4*b*

Figura 5
Un pesce che sembra essersi trasformato in un altro per affinità durante l'evoluzione, secondo Thompson



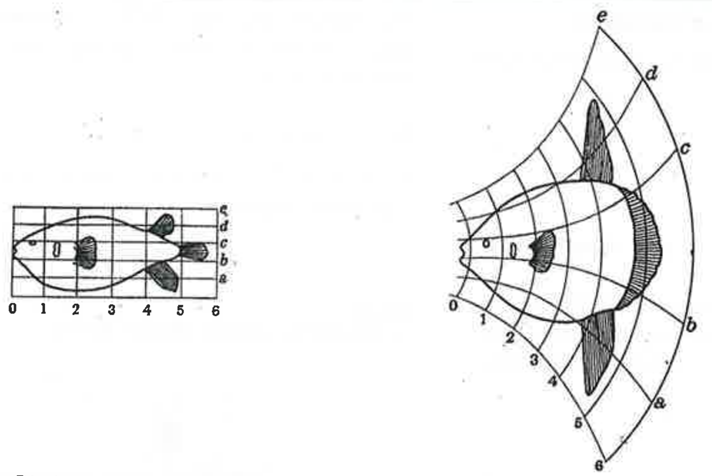
5*a*. *Argyropelecus olfersi* 5*b*. *Sternoptyx diaphana*

2. Sono invece legati da una trasformazione molto più complicata il pesce-porcospino e il pesce-luna (fig. 6): i segmenti verticali del reticolato che inquadra il pesce-porcospino (fig. 6*a*) si trasformano in un sistema di cerchi concentrici nel disegno del pesce-luna (fig. 6*b*), mentre i segmenti orizzontali di fig. 6*a* diventano dei rami d'iperbole in fig. 6*b*.

Thompson aveva notato che, proprio basandosi sulle trasformazioni, si riusciva a spiegare molti fatti relativi alla fisiologia degli animali.
Queste teorie biologico-matematiche restarono abbandonate per parecchie decine d'anni; solo recentemente sono state riprese e sviluppate con l'aiuto dei calcolatori.

Lo scopo è oggi duplice (fig. 7):

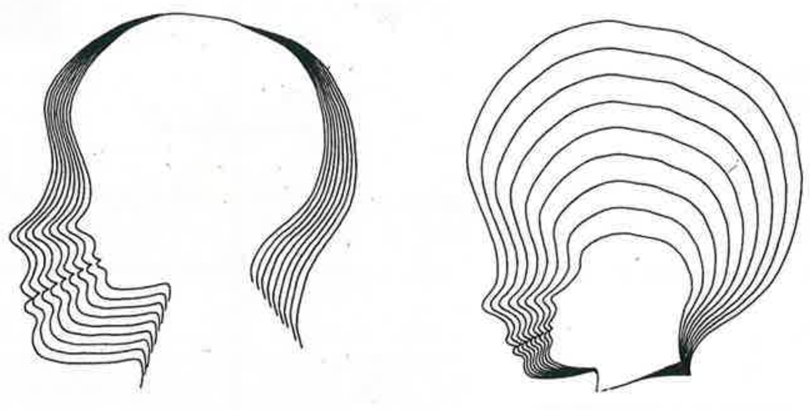
- prevedere lo sviluppo di un organo in condizioni normali, per esempio lo sviluppo della testa di un bambino a partire dalla nascita (profilo più interno in fig. 7*a*);
- studiare l'evoluzione della testa umana a partire dall'uomo di Neandertal (profilo più interno in fig. 7*b*).



6*a*. *Diodon* o pesce-porcospino

6*b*. *Orthagoriscus* o pesce-luna

Figura 6
Due pesci legati da una complicata trasformazione secondo Thompson



7*a*

7*b*

Figura 7
Studio delle trasformazioni della testa umana

4

Dalle equazioni di un'affinità alle equazioni di una simmetria

Le simmetrie rispetto agli assi cartesiani

Finora sono state esaminate le trasformazioni descritte dalle equazioni:

$$\begin{cases} x' = mx \\ y' = ny \end{cases}$$

considerando i coefficienti m e n sempre positivi.
Ora, abbandonando il supporto della tela elastica, si può vedere che cosa succede se i due coefficienti non sono più positivi. Ecco qualche caso particolare.

A. $m = -1$ e $n = 1$

Si ottiene la trasformazione descritta dalle equazioni seguenti:

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases} \qquad (1)$$

È facile prevedere l'effetto di questa trasformazione: le ordinate restano inalterate, mentre le ascisse cambiano segno.
Un qualunque punto P si porta in un punto P', che ha la stessa distanza dall'asse delle y ma si trova nel semipiano opposto, cioè *P' è il simmetrico di P rispetto all'asse delle* y.
In fig. 1 si trovano delle coppie di punti corrispondenti:

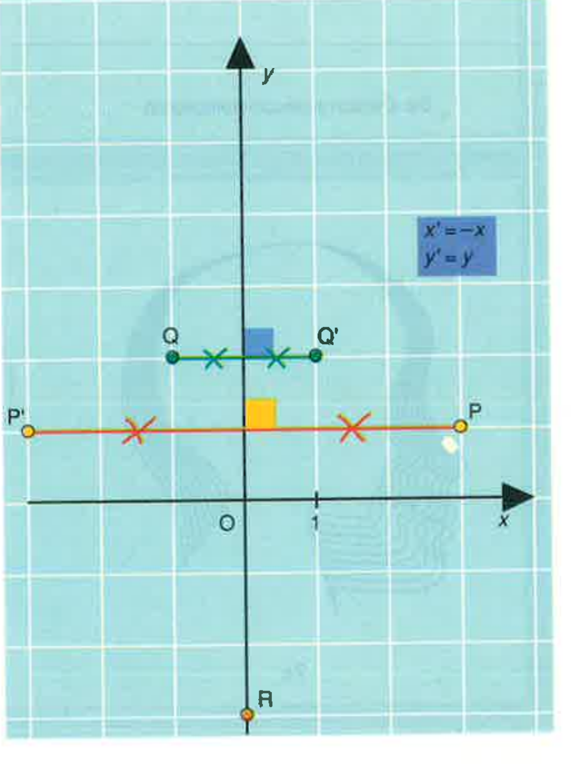
- P(3; 1) si porta in P'(–3; 1);
- Q(–1; 2) si porta in Q'(1; 2);
- R(0; –3) e tutti i punti di ascissa 0 rimangono fermi.

Le equazioni (1) descrivono dunque la simmetria rispetto all'asse delle y; questa simmetria lascia inalterati tutti i punti che si trovano sull'asse delle y.

B. $m = 1$ e $n = -1$

Si ottiene la trasformazione descritta dalle equazioni seguenti:

Figura 1
La simmetria rispetto all'asse delle *y*



$$\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases} \qquad (2)$$

Ora sono le ascisse a rimanere inalterate, mentre le ordinate cambiano segno.
Un qualunque punto P si porta in un punto P', che ha la stessa distanza dall'asse delle x ma si trova nel semipiano opposto, cioè *P' è il simmetrico di P rispetto all'asse delle* x.
In fig. 2 si trovano delle coppie di punti corrispondenti:

- P(3; 1) si porta in P'(3; –1);
- Q(1; –2) si porta in Q'(1; 2);
- R(–3; 0) e tutti i punti di ordinata 0 rimangono fermi.

Le equazioni (2) descrivono dunque la simmetria rispetto all'asse delle x; questa simmetria lascia inalterati tutti i punti che si trovano sull'asse delle x.

La simmetria rispetto all'origine O

Un terzo caso da esaminare è il seguente:

C. $m = -1$ e $n = -1$

Si ottiene la trasformazione descritta dalle equazioni seguenti:

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases} \qquad (3)$$

In questo caso un qualunque punto si porta in un punto che ha le coordinate opposte; in fig. 3 si trovano delle coppie di punti corrispondenti:

- P(3; 1) si porta in P'(–3; –1);
- Q(–1; 2) si porta in Q'(1; –2);
- R(0; 3) si porta R'(0; –3);
- S(–2; 0) si porta in S'(2; 0);
- O(0; 0) resta fermo.

In questa trasformazione il solo punto che resta fermo è l'origine O, che ha un ruolo fondamentale (fig. 3): due punti corrispondenti come P e P' sono legati dalle seguenti proprietà:

- si trovano sulla stessa retta per O;
- sono equidistanti da O, cioè risulta PO=P'O.

Le equazioni (3) descrivono dunque la simmetria rispetto all'origine O, unico punto che rimane fermo.

Figura 2
La simmetria rispetto all'asse delle *x*

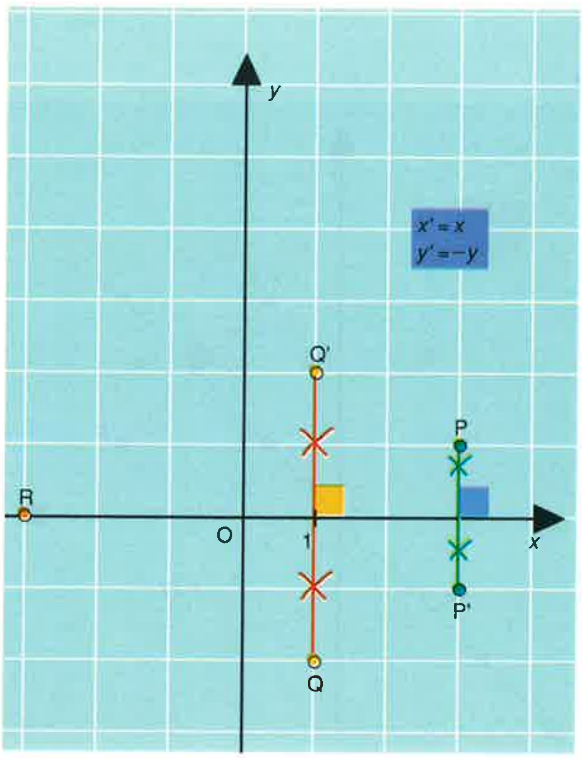
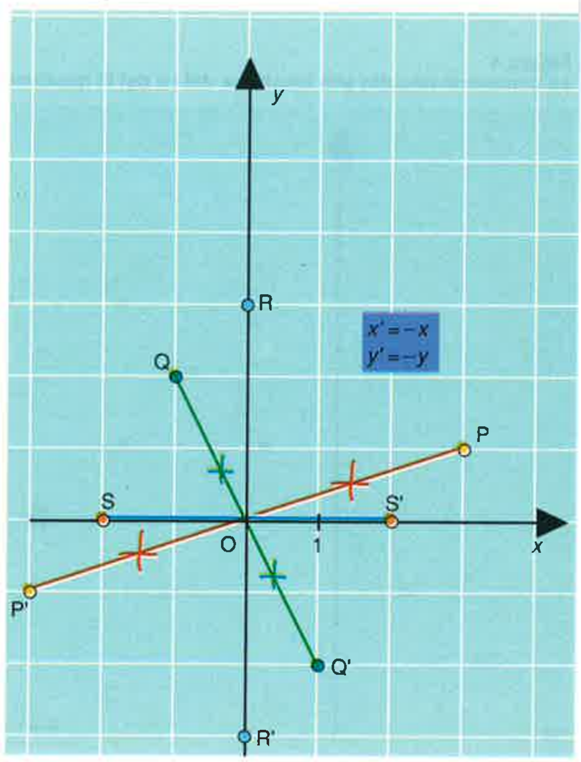


Figura 3
La simmetria rispetto all'origine O



La simmetria rispetto alla bisettrice del I e III quadrante

C'è un'ultima trasformazione che è molto ricca di applicazioni (vedi anche il paragrafo 7, p. 253), ma che non rientra fra quelle finora esaminate; si tratta della trasformazione descritta dalle seguenti equazioni:

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases} \qquad (5)$$

È facile capire il significato di queste equazioni: per ogni punto P del piano si scambia l'ascissa con l'ordinata.

In fig. 4*a* si trovano delle coppie di punti corrispondenti:

- P(3; 1) si porta in P'(1; 3);
- Q(–1; 2) si porta in Q'(2; –1);
- R(3; 3) e tutti gli altri punti con le coordinate uguali fra loro rimangono fermi.

In questa trasformazione dunque rimangono fissi tutti i punti che hanno le coordinate uguali fra loro: si tratta dei punti che si trovano tutti sulla retta d'equazione:

$$y = x$$

cioè sulla retta r, bisettrice del I e III quadrante.

Tracciando il grafico di questa retta (fig. 4*b*) si nota che due punti corrispondenti come P e P' risultano simmetrici rispetto a r.

Le equazioni (5) descrivono dunque la simmetria rispetto alla bisettrice del I e III quadrante.

Applicare le equazioni delle simmetrie

Ecco un esempio di applicazione delle equazioni delle simmetrie ora ottenute: si disegna il rettangolo che ha i seguenti vertici (in nero in fig. 5):

A(3; 1) B(6; 1) C(6; 2) D(3; 2)

Si operano quindi le varie simmetrie esaminate in questo paragrafo e si ottengono i seguenti risultati:

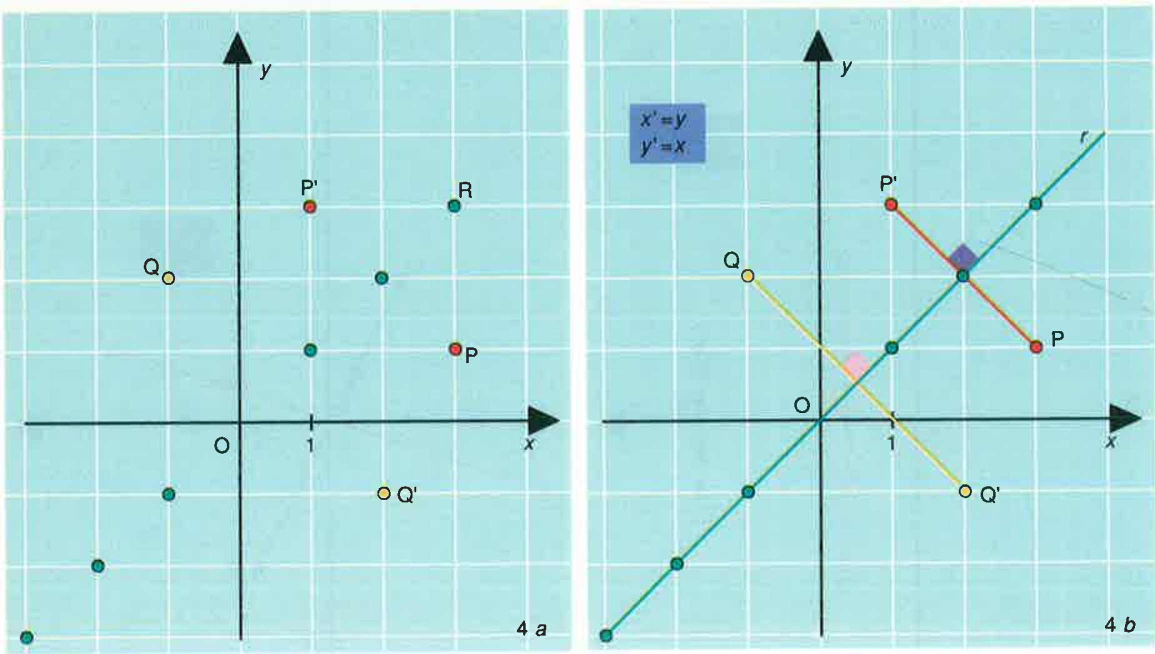
- con la simmetria rispetto all'asse delle y, descritta dalle equazioni (1), si ottiene il rettangolo che ha i vertici seguenti (in rosso in fig. 5):

  A'(–3; 1) B'(–6; 1)

  C'(–6; 2) D'(–3; 2)

- con la sola simmetria rispetto all'asse delle x, descritta dalle equazioni (2), si ottiene il rettangolo che ha i vertici seguenti (in blu in fig. 5):

Figura 4
La simmetria rispetto alla bisettrice del I e del III quadrante



A"(3; –1) B"(6; –1)

C"(6; –2) D"(3; –2)

- con la simmetria rispetto all'origine O, descritta dalle equazioni (3), si ottiene il rettangolo che ha i vertici seguenti (in verde in fig. 5):

A'''(–3; –1) B'''(–6; –1)

C'''(–6; –2) D'''(–3; –2)

- con la simmetria rispetto alla bisettrice del I e III quadrante, descritta dalle equazioni (5), si ottiene il rettangolo che ha i vertici seguenti (in grigio in fig. 5):

A*(1; 3) B*(1; 6)

C*(2; 6) D*(2; 3)

Le simmetrie sono particolari isometrie

Quando si opera una simmetria, si ritrova un'osservazione fatta all'inizio: non si può più pensare alle figure disegnate sulla tela elastica, visto che non cambia la forma della figura, ma solo la sua posizione nel piano cartesiano.
Proprio per questo le simmetrie prendono anche il nome di *isometrie*, termine che riunisce tutte le trasformazioni del piano che si limitano a cambiare la posizione delle figure, lasciandone immutate forma e dimensioni.

Comporre trasformazioni

È interessante ora osservare che la simmetria rispetto a O può essere ottenuta operando successivamente, ossia *componendo*, le due simmetrie rispetto agli assi coordinati.
Quest'osservazione permette di esaminare rapidamente il seguente caso:

D. $m = -3$ e $n = -2$

La trasformazione descritta dalle equazioni:

$$\begin{cases} x' = -3x \\ y' = -2y \end{cases} \qquad (4)$$

può essere esaminata pensando di operare successivamente, ossia di comporre, le seguenti trasformazioni:

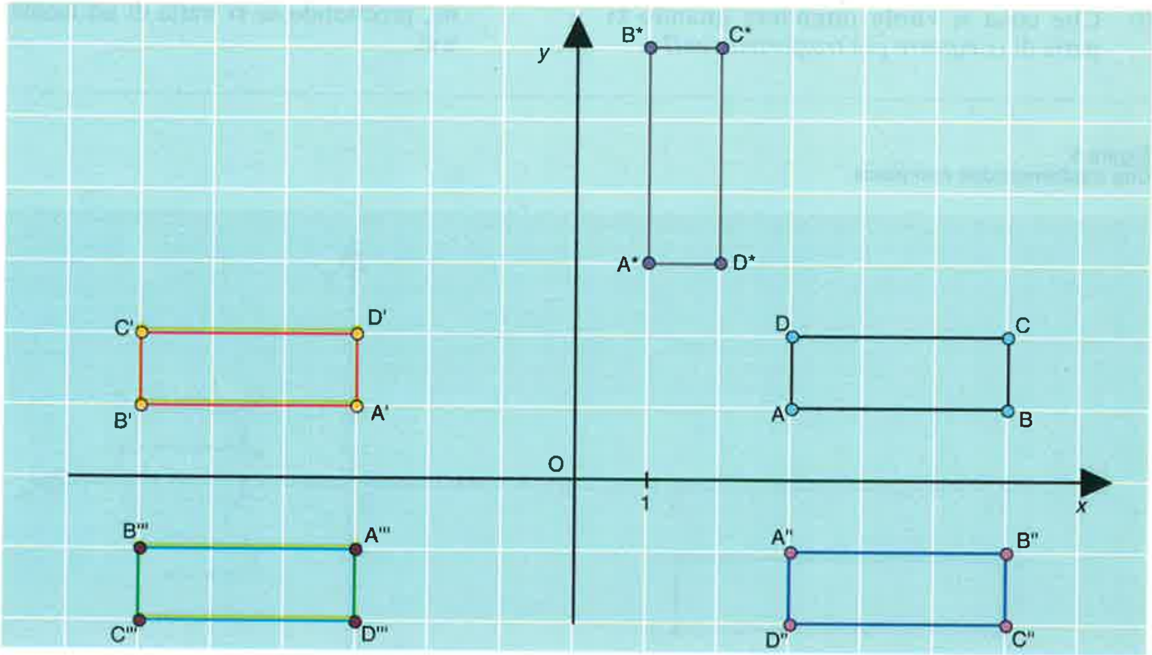
$$\text{I.} \quad \begin{cases} x^* = 3x \\ y^* = 2y \end{cases}$$

cioè un'affinità che dilata il piano nella direzione degli assi, e:

$$\text{II.} \quad \begin{cases} x' = -x^* \\ y' = -y^* \end{cases}$$

cioè una simmetria rispetto a O, che cambia segno alle coordinate.

Figura 5
Un rettangolo e i rettangoli simmetrici



La trasformazione descritta dalle equazioni (4) non è più un'isometria: trasforma il rettangolo ABCD nel rettangolo A'B'C'D' di fig. 6.
Considerazioni analoghe possono essere ripetute quando i coefficienti m e n nelle equazioni di una trasformazione non sono entrambi positivi. Si può dunque concludere che *equazioni del tipo*:

$$\begin{cases} x' = mx \\ y' = ny \end{cases}$$

descrivono una trasformazione del piano che presenta le seguenti caratteristiche:

- se i coefficienti m e n sono entrambi positivi, *la trasformazione è una dilatazione (o una contrazione) nella direzione degli assi coordinati;*
- se i coefficienti m e n non sono entrambi positivi, *la trasformazione è ottenuta componendo la dilatazione (o la contrazione) con simmetrie rispetto agli assi coordinati.*

Verifiche

Conoscenze

① Scrivere le equazioni di tutte le simmetrie introdotte in questo paragrafo e descriverne l'effetto.

② Che cosa significa il termine *isometria*?

Comprensione

① Che cosa si vuole intendere quando si parla di *comporre più trasformazioni*?

② Esaminare la seguente trasformazione:

$$\begin{cases} x' = 2y \\ y' = 3x \end{cases}$$

Rispondere ai seguenti quesiti:

a. descrivere l'effetto della trasformazione, pensandola ottenuta componendo un'affinità e una simmetria;
b. la trasformazione assegnata è un'isometria?

Applicazioni

① Disegnare sul piano cartesiano il quadrato che ha i seguenti vertici:

A(–3; –2) B(–4; –4)

C(–6; –3) D(–5; –1)

Operare tutte le simmetrie introdotte in questo paragrafo e disegnare la figura trasformata.

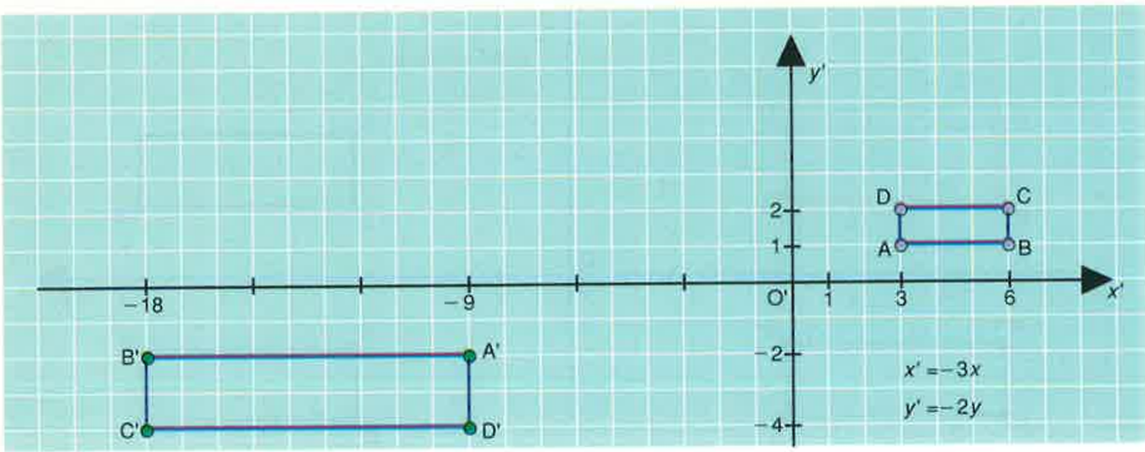
② Sempre a partire dal quadrato assegnato nell'esercizio precedente, operare la trasformazione descritta dalle seguenti equazioni:

$$\begin{cases} x' = -2x \\ y' = -y \end{cases}$$

Risolvere i seguenti quesiti:

a. disegnare la figura trasformata;
b. descrivere l'effetto della trasformazione, precisando se si tratta di un'isometria.

Figura 6
Una trasformazione composta



5

Traslazioni nella direzione degli assi cartesiani

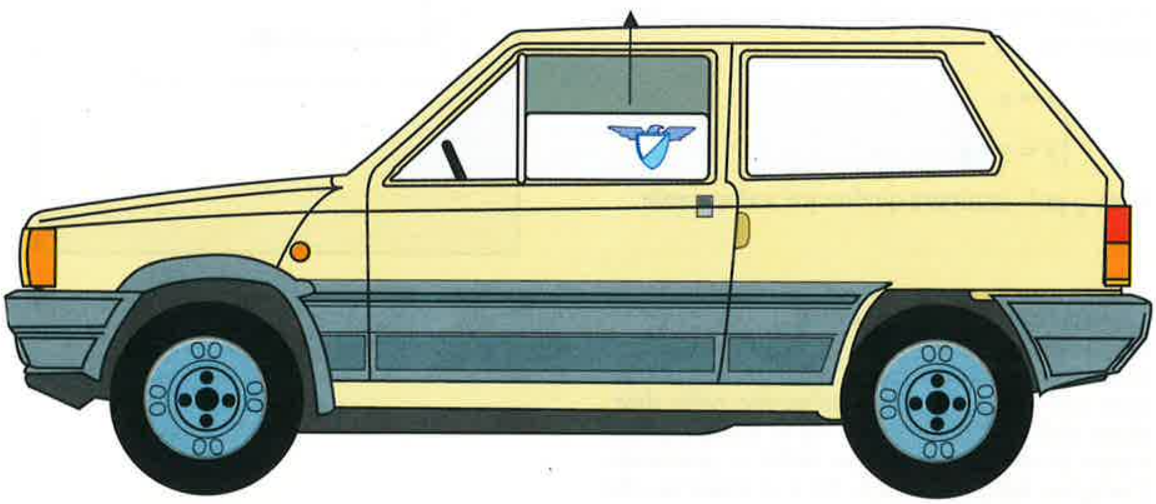
Anche le traslazioni sono particolari isometrie

La realtà suggerisce varie trasformazioni che modificano la posizione di una figura, lasciandone inalterate forma e dimensioni. Ecco un esempio: un adesivo è attaccato sul vetro laterale di un'automobile e, quando il vetro sale o scende, l'adesivo cambia solo posizione.
L'esempio descrive una *traslazione*: tutti i punti del vetro dell'automobile percorrono la stessa distanza, muovendosi nella stessa direzione e nello stesso verso e lo stesso succede ai punti del vetro dell'automobile (fig. 1).
Le traslazioni sono delle particolari isometrie, dato che le figure come l'adesivo cambiano solo la loro posizione.

Le equazioni di una traslazione nella direzione dell'asse delle *y*

Per arrivare a descrivere anche queste ultime isometrie con equazioni, si può fissare l'attenzione sulle traslazioni che lasciano le figure

Figura 1
Una traslazione



nello stesso piano, basandosi ancora una volta su un supporto concreto (fig. 2): si disegna il riferimento cartesiano Oxy su una lastra trasparente, che può traslare scivolando su un cartone; il riferimento O'$x'y'$, disegnato sul cartone, permette di confrontare la situazione iniziale con quella finale.
In fig. 3*a* la lastra trasparente è stata traslata di 3 unità nella direzione dell'asse delle y, verso l'alto.
Così un qualunque punto A del piano, che aveva inizialmente le coordinate:

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y \end{cases}$$

dopo la traslazione mantiene la stessa ascissa, ma aggiunge 3 all'ordinata. Questo vuol dire che A si porta in un punto A' che ha le coordinate (x'; y') date da:

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y + 3 \end{cases} \qquad (1)$$

In particolare, l'origine si porta in O(0; 3).
Se invece la stessa traslazione lungo l'asse delle y avviene verso il basso (fig. 3*b*), si deve sottrarre 3 alle ordinate, perciò un punto A(x; y) si porta in un punto A' che ha le coordinate (x'; y') date da:

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y - 3 \end{cases} \qquad (2)$$

In particolare, l'origine si porta in O(0; –3).
Le considerazioni ora svolte suggeriscono delle conclusioni di carattere generale: *una traslazione lungo l'asse delle* y, *che porta l'origine nel punto* O(0; q) *è descritta dalle equazioni:*

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y + q \end{cases}$$

dove q può assumere qualunque valore reale.

Le equazioni di una traslazione lungo l'asse delle *x*

Si può ragionare in modo analogo per descrivere con equazioni una traslazione nella direzione dell'asse delle x (fig. 4): si trasla il piano verso destra lungo l'asse delle x, portando l'origine nel punto O(2; 0) e si osserva che bisogna aggiungere 2 alle ascisse di tutti i punti (fig. 3*a*).
Si ha quindi che un punto A(x; y) si porta in un punto A' che ha le coordinate (x'; y') date da:

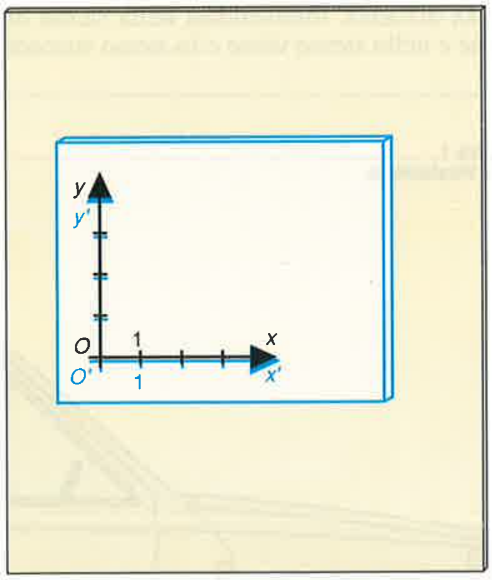
$$\begin{cases} x' = x + 2 \\ y' = y \end{cases} \qquad (3)$$

Se invece la stessa traslazione lungo l'asse delle x avviene verso sinistra (fig. 4*b*), si deve sottrarre 2 alle ascisse, perciò un punto A(x; y) si porta in un punto A' che ha le coordinate (x'; y') date da:

$$\begin{cases} x' = x - 2 \\ y' = y \end{cases} \qquad (4)$$

In particolare, l'origine si porta in O(–2; 0).

Figura 2
Un dispositivo per studiare le traslazioni



In generale, *una traslazione lungo l'asse delle* x *che porta l'origine nel punto* O(p; 0) *è descritta dalle equazioni:*

$$\begin{cases} x' = x + p \\ y' = y \end{cases}$$

dove p può assumere qualunque valore reale.

Comporre due traslazioni lungo gli assi cartesiani

Le due traslazioni lungo gli assi possono essere composte, cioè effettuate una dopo l'altra; in tal caso l'origine si porta in O(p; q) e le coordinate di tutti i punti vengono modificate nello stesso modo: si aggiunge p all'ascissa e q all'ordinata.

Questo vuol dire che un qualunque punto A(x; y) si porta in un punto A' che ha le coordinate (x'; y') date da:

$$\begin{cases} x' = x + p \\ y' = y + q \end{cases}$$

dove p e q possono assumere qualunque valore reale.

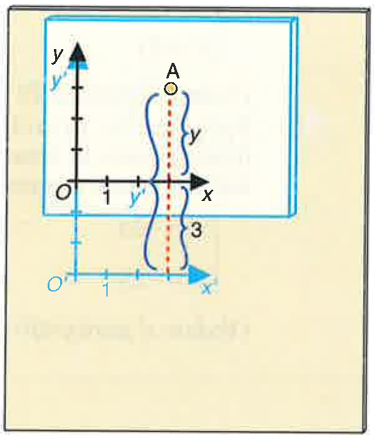
Applicare le equazioni di una traslazione

Ecco un esempio di applicazione delle equazioni delle traslazioni ora ottenute: si disegna il rettangolo che ha i vertici (in nero in fig. 5)

A(1; 1) B(1; 3) C(2; 3) D(2; 1)

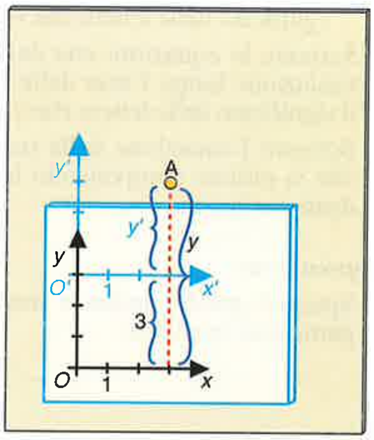
Si operano quindi le varie traslazioni esaminate in questo paragrafo e si ottengono i seguenti risultati:

Figura 3
Le equazioni di traslazioni lungo l'asse delle *y*



3*a*

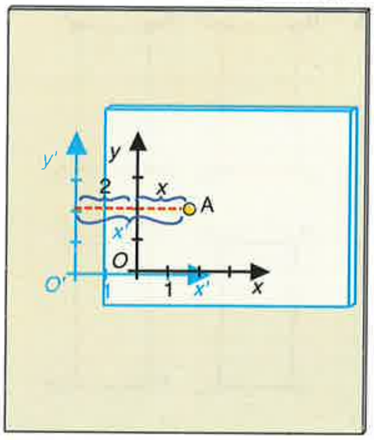
$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y + 3 \end{cases}$$



3*b*

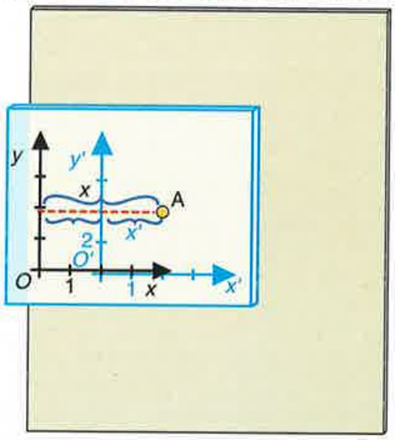
$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y - 3 \end{cases}$$

Figura 4
Le equazioni di traslazioni lungo l'asse delle *x*



4*a*

$$\begin{cases} x' = x + 2 \\ y' = y \end{cases}$$



4*b*

$$\begin{cases} x' = x - 2 \\ y' = y \end{cases}$$

- con la traslazione lungo l'asse delle y, descritta dalle equazioni (1), si ottiene il rettangolo che ha i vertici (in rosso in fig. 5):

A'(1; 4) B'(1; 6) C'(2; 6) D'(2; 4)

- con la sola traslazione lungo l'asse delle x, descritta dalle equazioni (3), si ottiene il rettangolo che ha i vertici (in blu in fig. 5):

A"(3; 1) B"(3; 3) C"(4; 3) D"(4; 1)

- componendo le due traslazioni, si ottiene il rettangolo che ha i vertici (in verde in fig. 5):

A*(3; 4) B*(3; 6) C*(4; 6) D*(4; 4)

V e r i f i c h e

Conoscenze

① Scrivere le equazioni che descrivono una traslazione lungo l'asse delle x, spiegando il significato delle lettere che vi compaiono.

② Scrivere le equazioni che descrivono una traslazione lungo l'asse delle y, spiegando il significato delle lettere che vi compaiono.

③ Scrivere l'equazione della trasformazione che si ottiene componendo le due precedenti traslazioni.

Comprensione

① Spiegare perché anche le traslazioni sono particolari isometrie.

② Spiegare come si arriva a scrivere l'equazione di una traslazione lungo l'asse delle x o lungo l'asse delle y.

Applicazioni

① Disegnare sul piano cartesiano il quadrato che ha i seguenti vertici:

A(3; 2) B(4; 4) C(6; 3) D(5; 1)

Operare le traslazioni descritte dalle equazioni (2) e (4) di questo paragrafo e disegnare le figure trasformate.

② Disegnare la figura che si ottiene applicando successivamente le traslazioni descritte dalle equazioni (2) e (4) al quadrato assegnato nel precedente esercizio.

Collegamento con i paragrafi precedenti

① Spiegare le principali differenze che distinguono le trasformazioni descritte dalle seguenti equazioni:

$$\begin{cases} x' = 3x \\ y' = 2y \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = x + 3 \\ y' = y + 2 \end{cases}$$

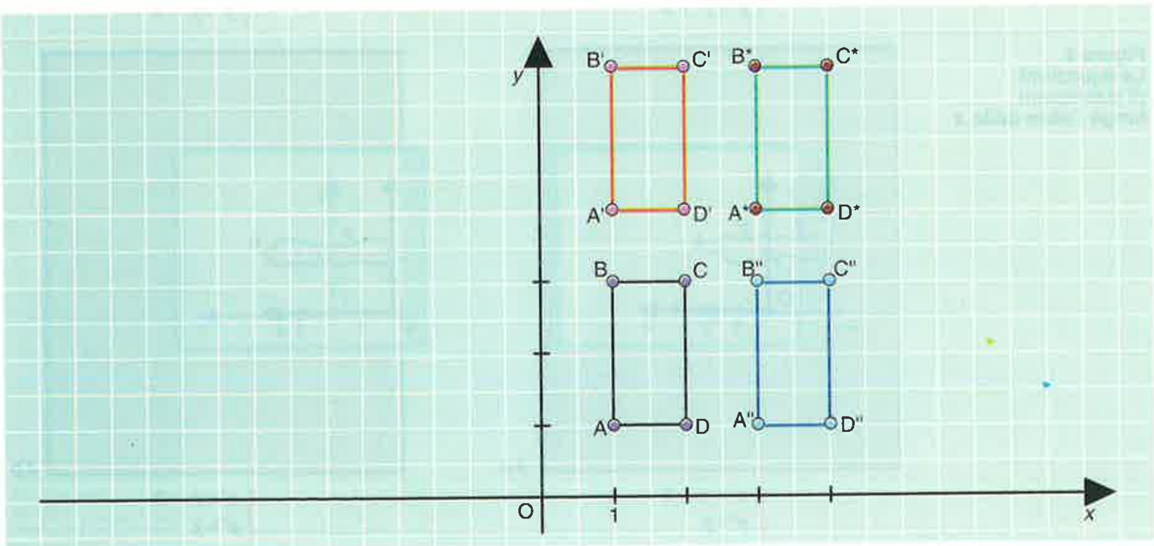
(Vedere il paragrafo 2)

② Spiegare le principali differenze che distinguono le trasformazioni descritte dalle seguenti equazioni:

$$\begin{cases} x' = -3x \\ y' = -2y \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = x - 3 \\ y' = y - 2 \end{cases}$$

(Vedere il paragrafo 4)

Figura 5
Un rettangolo che viene traslato



Dalle traslazioni ai vettori

Descrivere una traslazione con un vettore

Osserviamo una situazione analoga a quella descritta all'inizio del paragrafo precedente (p. 239): il pavimento di un ascensore in movimento subisce una traslazione, dato che tutti i suoi punti percorrono la stessa distanza muovendosi nella stessa direzione e nello stesso verso (fig. 1*a*).

Queste considerazioni mettono in rilievo un fatto: per descrivere una traslazione bisogna fornire tre informazioni:

1. la *distanza percorsa* dai punti (cioè la lunghezza dei segmenti AA', BB', etc. in fig. 1*b*, dove l'ascensore sale di 2 metri);
2. la *direzione* lungo la quale si muovono i punti (cioè la direzione delle rette parallele AA', BB', etc. in fig. 1*b*);
3. il *verso* del movimento, per dire se l'ascensore sale o scende (in fig. 1*b* la freccia verso l'alto indica che l'ascensore sale).

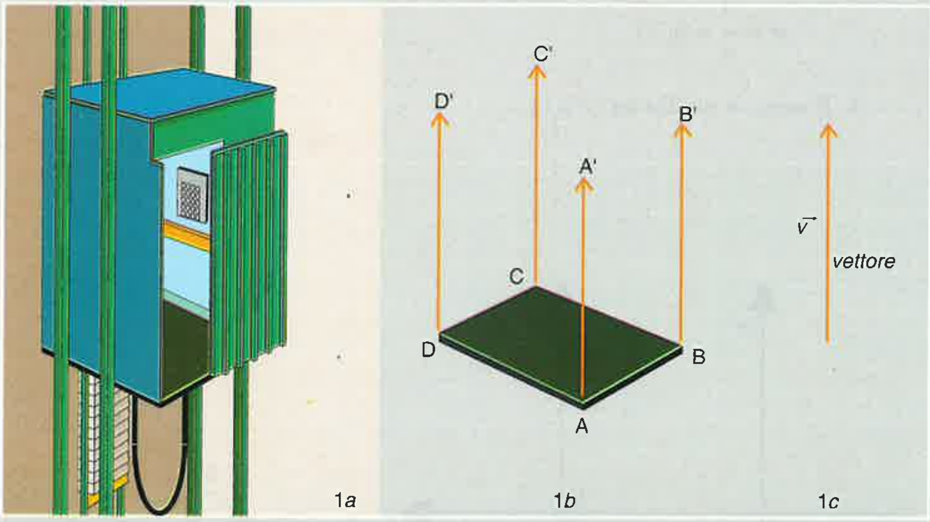


Figura 1
Una traslazione può essere descritta da un vettore

Queste tre informazioni possono essere date disegnando tanti *segmenti orientati*; per esempio, quando l'ascensore sale di 2 metri, tutti i suoi punti subiscono una traslazione che può essere descritta disegnando tanti segmenti orientati come quelli indicati in fig. 1*b*.

Ma proprio questa figura suggerisce un'osservazione: è inutile riempire il foglio di segmenti orientati che hanno tutti la stessa lunghezza, direzione e verso; basta disegnarne uno.

Quest'unico segmento orientato che descrive completamente la traslazione indicandone lunghezza, direzione e verso prende il nome di *vettore* (fig. 1*c*), ed è indicato in simboli con una lettera sormontata da una freccia:

$$\vec{v}$$

Dalle equazioni al vettore che descrive una traslazione

Nel paragrafo precedente sono state descritte le traslazioni per mezzo di equazioni, che ora appaiono lunghe e complicate rispetto al simbolo così sintetico di vettore, appena introdotto.

Per capire come si può passare dalle equazioni al vettore conviene cominciare a esaminare un caso numerico (fig. 2): la traslazione descritta dalle seguenti equazioni:

$$\begin{cases} x' = x + 4 \\ y' = y + 3 \end{cases}$$

Questa traslazione porta, per esempio, l'origine nel punto O(3; 4) e perciò può essere descritta dal vettore $\vec{v}$ che ha le seguenti caratteristiche (fig. 2*a*):

1. lunghezza, che è la distanza di O da O';
2. direzione, che è quella della retta OO';
3. verso, in questo caso da O' a O.

È facile capire come queste tre caratteristiche sono legate alle equazioni della trasformazione; ecco come si può ragionare (fig. 2*b*).

1. La lunghezza di OO' si può calcolare valendosi del teorema di Pitagora; si ha:

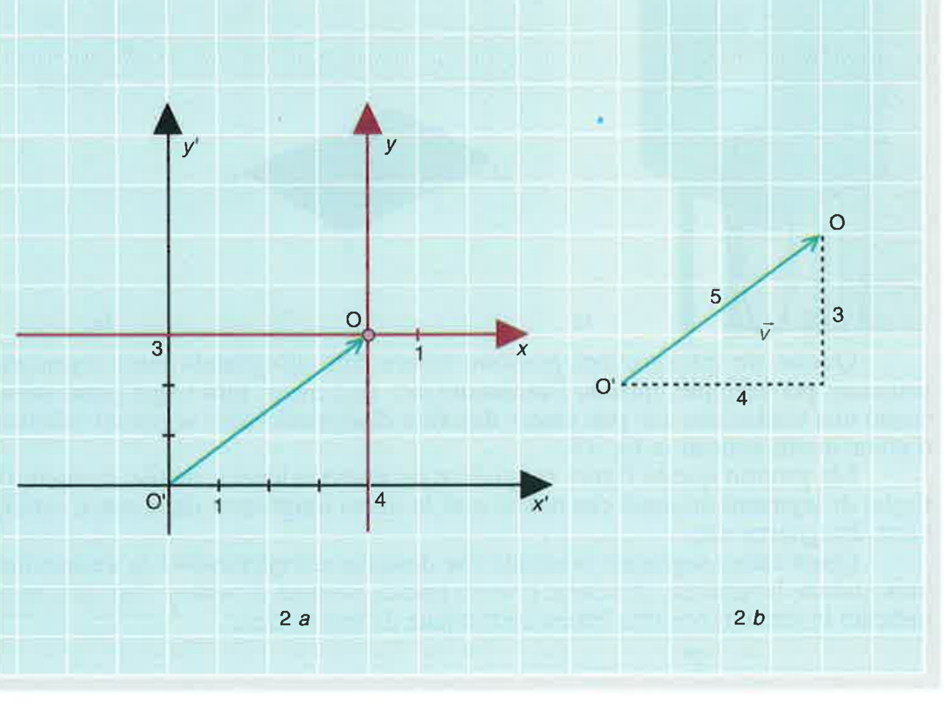
$$\overline{OO'} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

2. La direzione della retta OO' si può determinare valendosi della sua pendenza m, data da (vedi il primo volume, pp. 341-345):

$$m = \frac{3}{4} = 0,75$$

3. Il verso è quello da O' a O.

Figura 2
Disegnare il vettore che individua una traslazione



Un procedimento analogo si può sempre seguire quando una traslazione è data mediante le equazioni:

$$\begin{cases} x' = x + p \\ y' = y + q \end{cases} \qquad (1)$$

La traslazione porta l'origine in O(p; q) e perciò può anche essere descritta dal vettore $\vec{v}$ che ha le seguenti caratteristiche:

1. la lunghezza $\overline{OO'}$ calcolata valendosi del teorema di Pitagora, e cioè:

$$\overline{OO'} = \sqrt{p^2 + q^2}$$

2. la direzione, che è quella della retta OO', determinata valendosi della sua pendenza m, data da:

$$m = \frac{q}{p}$$

3. il verso, che è quello da O' a O.

Le componenti di un vettore

Ecco qualche esempio di applicazione dei risultati ora ottenuti.

A. La traslazione descritta dalle equazioni:

$$\begin{cases} x' = x + 4 \\ y' = y - 3 \end{cases}$$

può anche essere descritta dal vettore $\vec{v}$ che ha le seguenti caratteristiche (fig. 3):

1. lunghezza $\overline{OO'} = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5$;
2. pendenza $m = \frac{-3}{4} = -0,75$;
3. verso da O' a O.

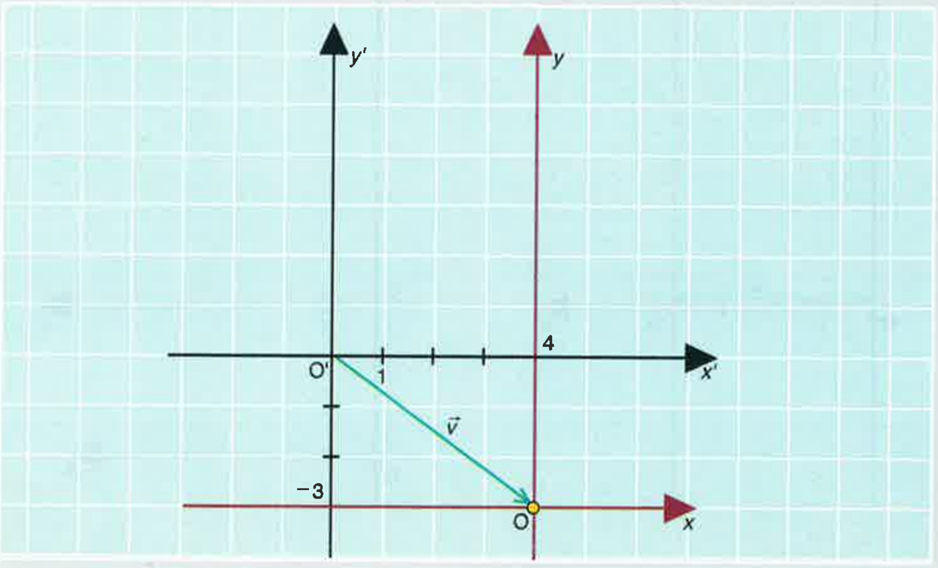


Figura 3
Il vettore che descrive una traslazione

B. La traslazione descritta dalle equazioni:

$$\begin{cases} x' = x + 4 \\ y' = y \end{cases}$$

può anche essere descritta dal vettore $\vec{w}$ che ha le seguenti caratteristiche (fig. 4):

1. lunghezza $\overline{OO'} = 4$;
2. pendenza $m = \dfrac{0}{4} = 0$;
3. verso da O' a O.

C. La traslazione descritta dalle equazioni:

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y - 3 \end{cases}$$

può essere anche descritta dal vettore $\vec{t}$ disegnato in fig. 5; ma questo vettore deve essere disegnato direttamente e non può essere ricavato con il procedimento precedente, dato che non si può calcolare la pendenza dell'asse delle y.

Questi esempi suggeriscono la seguente conclusione. Dalle equazioni:

$$\begin{cases} x' = x + p \\ y' = y + q \end{cases}$$

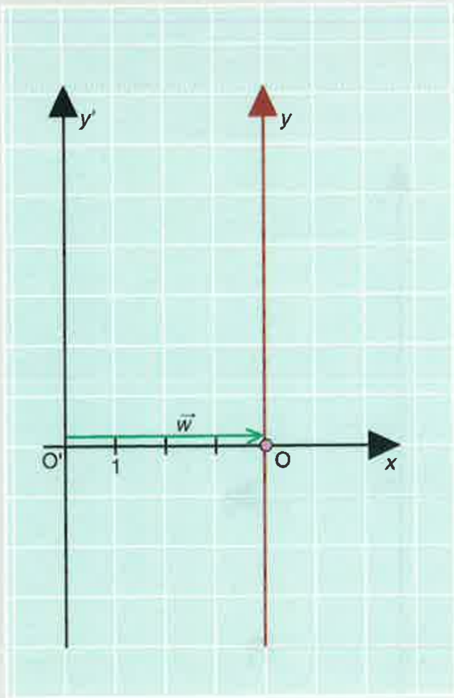
si può sempre ricavare il vettore $\vec{v}$ che descrive la traslazione.

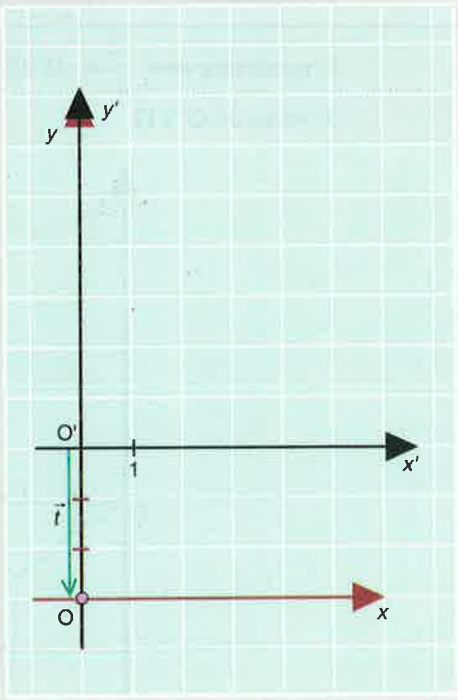
Per mettere in rilievo questo fatto si dice che p e q sono le *componenti* del vettore $\vec{v}$ e più precisamente (fig. 6):

p è la *componente orizzontale*;
q è la *componente verticale*.

Figura 4 (a sinistra) **Il vettore che descrive una traslazione lungo l'asse delle *x***

Figura 5 (a destra) **Il vettore che descrive una traslazione lungo l'asse delle *y***





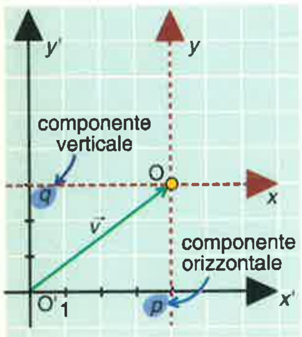


Figura 6 Le componenti di un vettore

Queste informazioni vengono espresse sinteticamente dalla seguente scrittura:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

E così si scriverà, per esempio:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} \qquad \vec{w} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{t} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Composizione di traslazioni e somma di vettori

Le figg. 3, 4 e 5 conducono a riflettere sulla composizione di traslazioni descritte con vettori: componendo la traslazione descritta dal vettore $\vec{w}$ con quella descritta dal vettore $\vec{t}$ si ottiene la traslazione descritta dal vettore $\vec{v}$.

Ma quest'ultimo vettore si può disegnare direttamente a partire dai primi due con il seguente procedimento (fig. 7):

- a partire da O' si disegnano successivamente i due vettori $\vec{w}$ e $\vec{t}$, in modo che la «coda» di $\vec{t}$ parta dalla «punta» di $\vec{w}$;
- il vettore $\vec{v}$ ha la «coda» in O' e la «punta» sull'ultimo vettore.

Il vettore $\vec{v}$ così ottenuto prende il nome di *somma dei vettori* $\vec{w}$ *e* $\vec{t}$ e si scrive:

$$\vec{v} = \vec{w} + \vec{t}$$

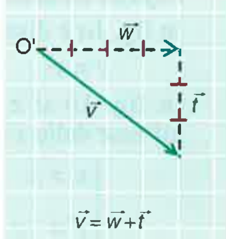


Figura 7
La somma di due vettori

L'origine del termine *somma di vettori* si spiega esaminando le componenti dei vettori.

Ecco un altro esempio (fig. 8): si operano le traslazioni descritte dai seguenti vettori:

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \vec{t} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Il vettore $\vec{v}$, che in fig. 8 descrive la composizione delle due traslazioni, ha le componenti seguenti:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 3+2 \\ 4+1 \end{pmatrix}$$

cioè *addizionando due vettori* $\vec{w}$ *e* $\vec{t}$ *si ottiene un vettore* $\vec{v}$ *che ha come componenti la somma delle componenti corrispondenti dei due vettori* $\vec{w}$ *e* $\vec{t}$.

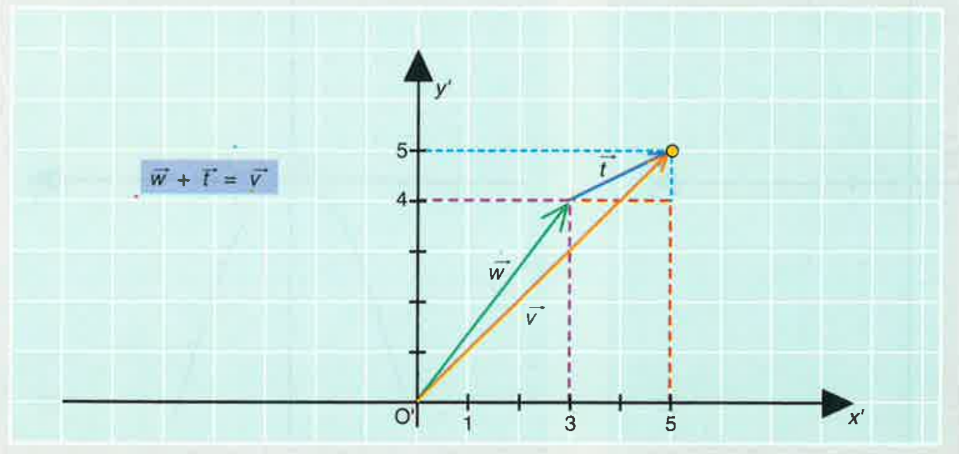


Figura 8
Per sommare due vettori se ne sommano le componenti

6 Trasformare le funzioni $y = x^n$ con simmetrie

Trasformare la funzione $y = x^2$ con la simmetria rispetto all'asse delle x

In fig. 1*a* è disegnata la parabola d'equazione:

$$y = x^2 \qquad (1)$$

In fig. 1*b* si è operata la simmetria rispetto all'asse delle x descritta dalle equazioni:

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases} \qquad (2)$$

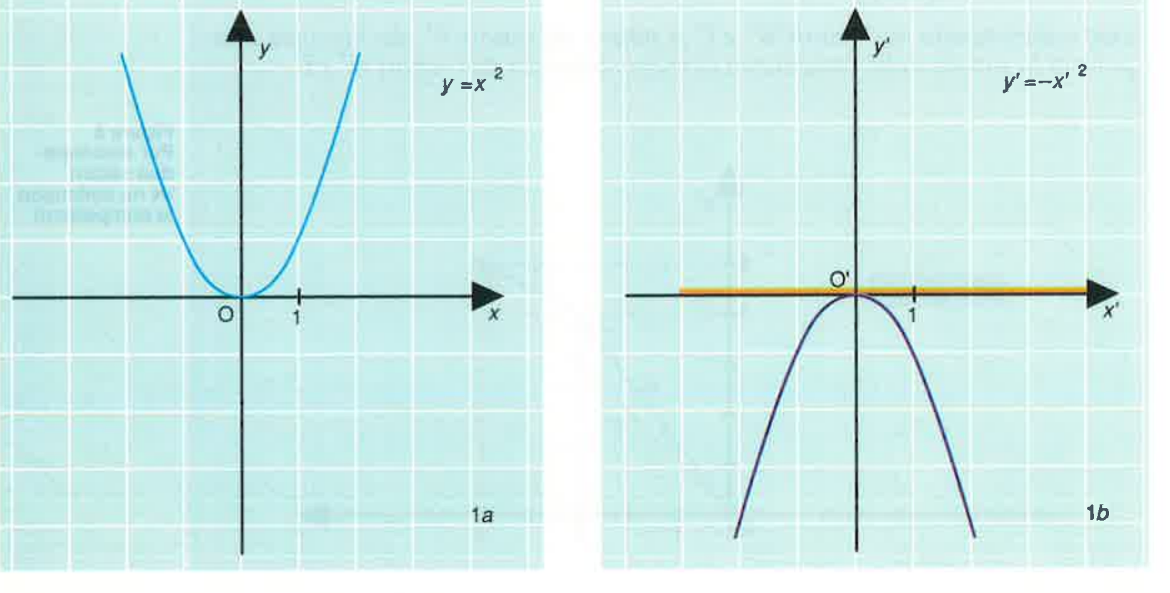
In conseguenza di questa simmetria, la parabola ha modificato la sua posizione nel piano cartesiano e si trova ora con la concavità rivolta verso il basso.
Quale sarà l'equazione della curva in questa nuova posizione?
Per rispondere alla domanda, basta ricavare x e y dalla (2) per poterle sostituire nella (1); si ha:

$$\begin{cases} x = x' \\ y' = -y' \end{cases} \qquad \text{e quindi} \qquad -y' = x'^2$$

ossia:

$$y' = -x'^2$$

Figura 1
La funzione $y = x^2$ trasformata con una simmetria rispetto all'asse delle x



La parabola $y = x^2$ rimane inalterata operando la simmetria rispetto all'asse delle y

In fig. 2 si è operata invece una simmetria rispetto all'asse delle y descritta dalle equazioni:

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases} \qquad (3)$$

La parabola è rimasta inalterata: la simmetria scambia il ramo destro con quello sinistro, ma non modifica il disegno.

Si ha dunque che *la parabola d'equazione* $y = x^2$ *è simmetrica rispetto all'asse delle* y, *ossia l'asse delle* y *è asse di simmetria per la curva.*

Questo fatto geometrico è legato ad un fatto algebrico, che si trova subito scrivendo l'equazione della curva trasformata; dalle (3) si ricava infatti:

$$\begin{cases} x = -x' \\ y = y' \end{cases} \qquad \text{e quindi} \qquad y' = (-x')^2$$

Eseguendo l'elevazione al quadrato, si ottiene:

$$(-x')^2 = x'^2$$

e perciò si ha di nuovo l'equazione iniziale:

$$\mathbf{y' = x'^2}$$

Confrontare le due scritture $-x'^2$ e $(-x')^2$

Il risultato prima ottenuto conduce ad esaminare le due scritture:

$$-x'^2 \qquad \text{e} \qquad (-x')^2$$

La scrittura:

$$-x'^2$$

richiede di svolgere i calcoli seguendo la priorità delle operazioni:

1. si eleva al quadrato, ottenendo x'^2;
2. si calcola l'opposto ottenendo $(-1)x'^2 = -x'^2$.

Il risultato sarà sempre un numero negativo.

Invece la scrittura:

$$(-x')^2$$

presenta le parentesi per alterare la priorità delle operazioni, che andranno perciò eseguite nell'ordine seguente:

1. si calcola l'opposto, ottenendo $-x' = (-1)\,x'$;
2. si esegue l'elevazione al quadrato, ottenendo:

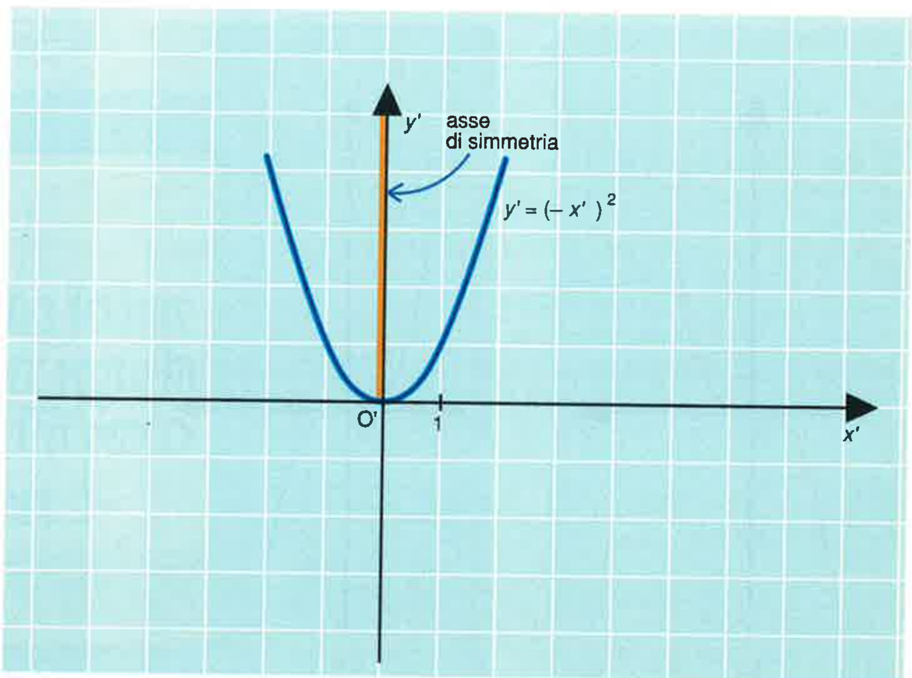
$$(-x')^2 = [(-1)\,x']^2 = (-1)^2 x'^2 = 1 \cdot x'^2 = x'^2$$

Si ottiene dunque:

$$(-x')^2 = x'^2$$

Il risultato sarà sempre un numero positivo.

Figura 2
La parabola $y=x^2$ rimane inalterata con la simmetria rispetto all'asse delle y



Trasformare la funzione $y = x^3$ con la simmetria rispetto all'asse delle x

In fig. 3*a* è disegnata la curva d'equazione:

$$y = x^3 \qquad (4)$$

In fig. 3*b* si è operata la simmetria rispetto all'asse delle x descritta dalle equazioni (2).
In conseguenza della simmetria, la curva ha modificato la sua posizione nel piano cartesiano e quindi sarà anche cambiata l'equazione; la nuova equazione si ottiene ricavando x e y dalle (2) per poterle sostituire nella (4); si ha:

$$\begin{cases} x = x' \\ y = -y' \end{cases} \quad \text{e quindi} \quad -y' = x'^3$$

ossia:

$$\mathbf{y' = -x'^3}$$

Trasformare la funzione $y = x^3$ con la simmetria rispetto all'asse delle y

In fig. 3*c* si è operata la simmetria rispetto all'asse delle y descritta dalle equazioni (3), ma la curva ha lo stesso grafico che si era ottenuto con la precedente simmetria.
Questo fatto geometrico è legato a un fatto algebrico, che si trova subito scrivendo l'equazione della curva trasformata; dalle (3) si ricava infatti:

$$\begin{cases} x = -x' \\ y = y' \end{cases} \quad \text{e quindi} \quad y' = (-x')^3$$

e, eseguendo l'elevazione a potenza, si ottiene:

$$(-x')^3 = -x'^3$$

e quindi:

$$\mathbf{y' = -x'^3}$$

Confrontare le due scritture $-x'^3$ e $(-x')^3$

Le due equazioni:

$$y' = -x'^3 \quad \text{e} \quad y' = (-x')^3$$

descrivono dunque la stessa curva e questo fatto analitico-grafico porta l'attenzione sulle due scritture seguenti:

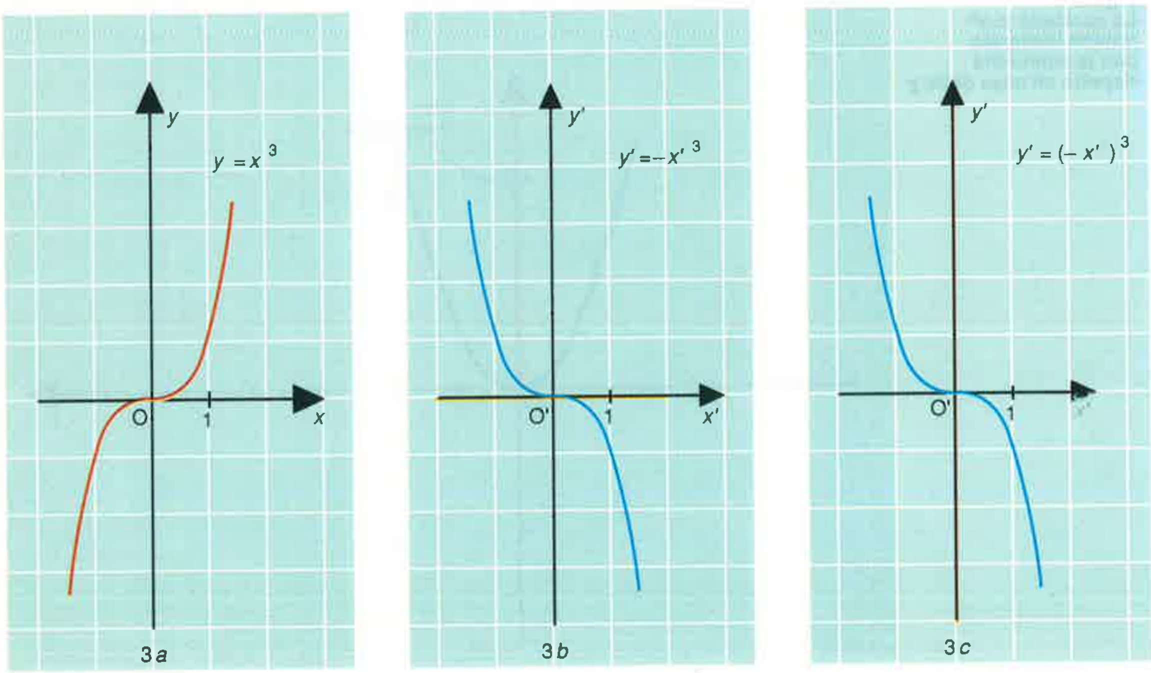
$$-x'^3 \quad \text{e} \quad (-x')^3$$

La scrittura:

$$-x'^3$$

richiede di svolgere i calcoli seguendo la priorità delle operazioni e cioè:
1. si eleva a potenza, ottenendo x'^3;
2. si calcola l'opposto, ottenendo $(-1)\,x'^3 = -x'^3$.

Figura 3
Trasformando la funzione $y = x^3$ con la simmetria rispetto all'asse delle x o all'asse delle y si ottiene sempre la stessa curva



La scrittura:

$$(-x')^3$$

presenta le parentesi per alterare la priorità delle operazioni, ma porta allo stesso risultato; ecco perché:
1. si calcola l'opposto, ottenendo $-x' = (-1)\,x'$;
2. si eleva al cubo, ottenendo:

$$(-x')^3 = [(-1)\,x']^3 = (-1)^3 x'^2 = (-1) \cdot x'^3 = -x'^3$$

È per questo che si ottiene:

$$(-x')^3 = -x'^3$$

La simmetria rispetto all'origine O lascia inalterata la funzione $y = x^3$

Il risultato appena ottenuto conduce a individuare la simmetria che lascia inalterata la curva d'equazione:

$$y = x^3 \qquad (4)$$

Si tratta della simmetria rispetto a O, che cambia il segno a entrambe le coordinate e è descritta dalle seguenti equazioni:

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases} \qquad (5)$$

Ricavando infatti x e y dalle (5) per poterle sostituire nella (4) si ottiene:

$$\begin{cases} x = -x' \\ y = -y' \end{cases} \quad \text{e quindi} \quad -y' = (-x')^3$$

e, eseguendo l'elevazione al cubo, si ottiene:

$$-y' = -x'^3$$

perciò si ritrova l'equazione iniziale:

$$\mathbf{y' = x'^3}$$

Si ha dunque che *la simmetria rispetto all'origine O lascia la curva inalterata*, ossia *la curva d'equazione* $y=x^3$ *è simmetrica rispetto all'origine O*.

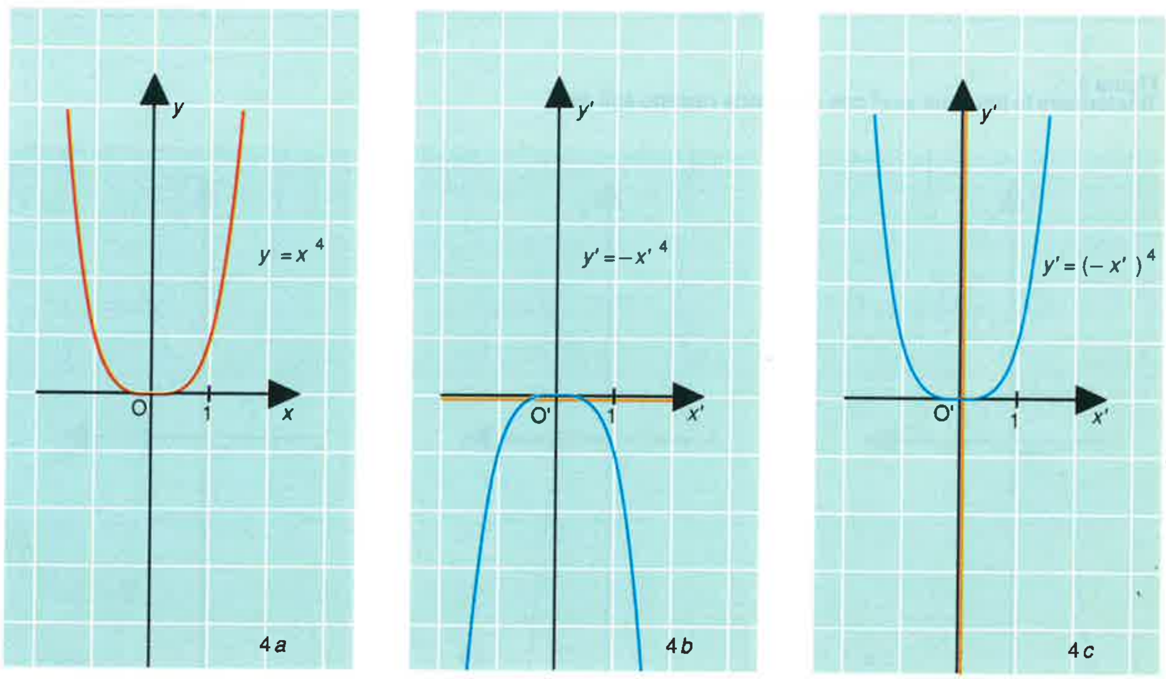
Trasformare con simmetrie le funzioni $y = x^n$

Le funzioni esaminate conducono a operare le simmetrie a partire da altre funzioni del tipo:

$$y = x^n$$

Così, per esempio, in fig. 4 si trova il grafico di $y = x^4$ (fig. 4*a*) e delle curve che si ottengono operando la simmetria rispetto all'asse delle y (fig. 4*b*) e rispetto all'asse delle x (fig. 4*c*).
In fig. 5 si trova invece il grafico della funzione

Figura 4
Trasformare la funzione $y=x^4$ con simmetrie rispetto agli assi



$y = x^5$ (fig. 5*a*) e delle curve che si ottengono operando la simmetria rispetto all'asse delle y (fig. 5*b*) o rispetto all'asse delle x (fig. 5*c*).
Ora, confrontando le figure 1 e 4, si osserva che le due curve hanno un comportamento analogo, che si può ritrovare anche in funzioni come $y = x^6$ o $y = x^8$, cioè in funzioni del tipo $y = x^n$ con esponente n pari.
E così si trova un comportamento analogo nelle due curve delle figure 3 e 5, che sono pure del tipo $y = x^n$, ma con esponente n dispari.
Le considerazioni finora svolte possono essere riassunte nel modo seguente:

1. *tutte le funzioni del tipo* $y = x^n$ *con esponente* n *pari sono simmetriche rispetto all'asse delle* y;
2. *tutte le funzioni del tipo* $y = x^n$ *con esponente* n *dispari sono simmetriche rispetto all'origine O.*

Il grafico delle funzioni $y = -x^n$

Le considerazioni svolte finora hanno anche un'importante conseguenza: esaminando la fig. 1*b* si può «dimenticare» che la curva è stata ottenuta, operando una simmetria, a partire da $y = x^2$ e si può scriverne l'equazione senza più usare gli scomodi apici; e analogamente si può procedere per le curve rappresentate nelle figure 3*b*, 4*b*, 5*b*.
Si arriva così alle curve che hanno le equazioni seguenti:

$$y = -x^2 \quad y = -x^3 \quad y = -x^4 \quad y = -x^5$$

In generale si tratta delle curve che hanno equazione del tipo:

$$y = -x^n$$

con l'esponente n intero positivo.

Verifiche

Conoscenze

① Tracciare il grafico della funzione $y = x^2$ e della curva che si ottiene operando la simmetria rispetto all'asse delle x.

② Tracciare il grafico della funzione $y = x^3$ e della curva che si ottiene operando la simmetria rispetto all'asse delle x.

Comprensione

① Spiegare come si trova che la parabola d'equazione $y = x^2$ è simmetrica rispetto all'asse delle y, mentre la curva d'equazione $y = x^3$ è simmetrica rispetto all'origine O.

② Quali sono il grafico e l'equazione della funzione ottenuta operando una simmetria rispetto a O a partire dalla funzione $y = x^2$?

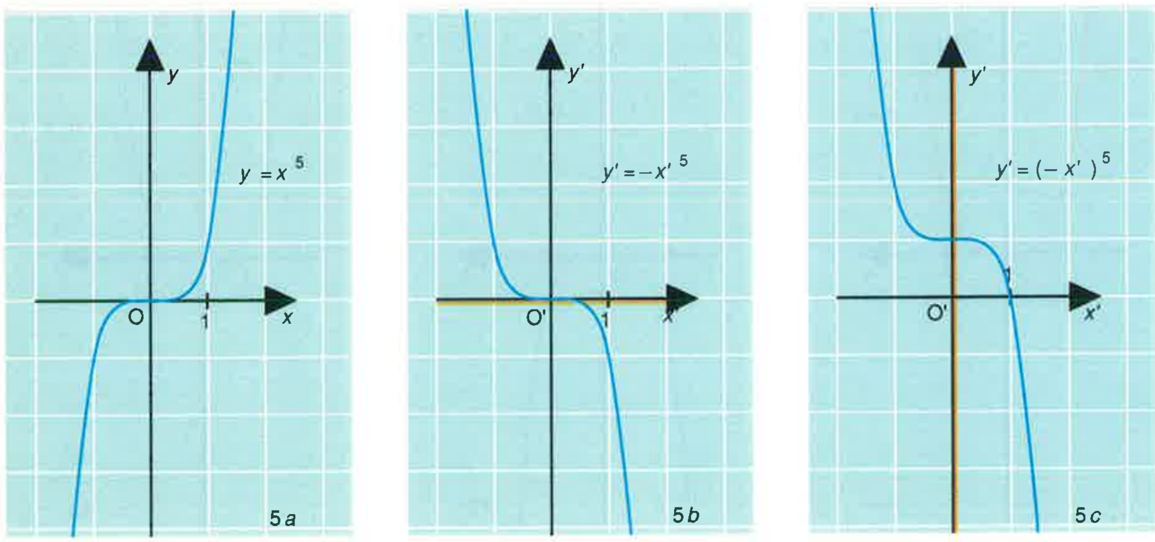
Applicazioni

① Tracciare il grafico delle seguenti funzioni:

$$y = -x^2 \quad y = -x^4 \quad y = -x^3 \quad y = -x^5$$

Indicare le curve simmetriche rispetto all'asse delle y e quelle simmetriche rispetto all'origine O.

Figura 5
Trasformare la funzione $y=x^5$ con simmetrie rispetto agli assi



7

Le funzioni $y = \sqrt[n]{x}$

Trasformare le funzioni $y = x^n$ con la simmetria rispetto alla bisettrice del I e del III quadrante

Nel paragrafo precedente sono state esaminate le situazioni che si presentano quando si trasformano le funzioni $y = x^n$ con le simmetrie rispetto agli assi cartesiani.

In questo paragrafo si continuerà a esaminare queste funzioni operando la simmetria rispetto alla bisettrice del I e del III quadrante.

Si tratta della simmetria che scambia l'ascissa con l'ordinata ed è descritta dalle equazioni seguenti:

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases} \qquad (1)$$

Ecco un primo esempio.

Trasformare la funzione $y = x^3$

In fig. 1*a* è rappresentata la curva d'equazione:

$$y = x^3 \qquad (2)$$

che è simmetrica rispetto all'origine O.

In fig. 1*b* è rappresentata la curva ottenuta operando la simmetria rispetto alla bisettrice del I e del III quadrante: è ancora una curva simmetrica rispetto a O.

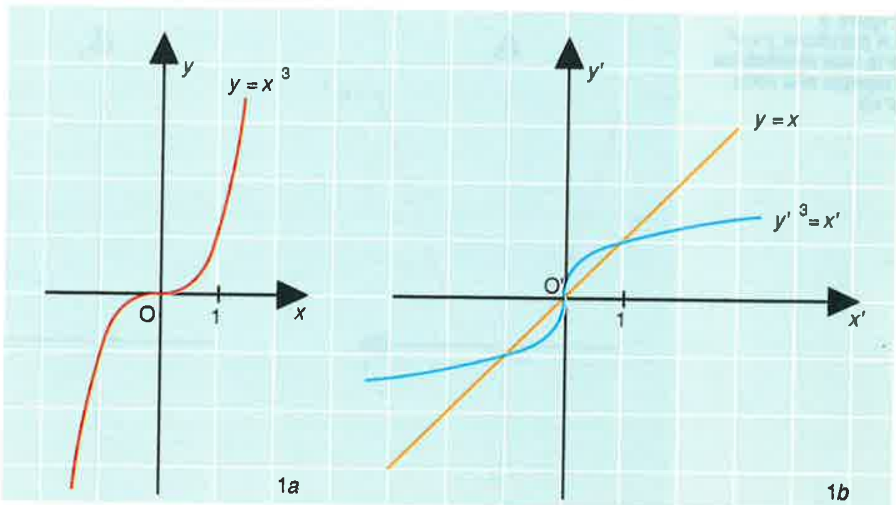
Per ottenere l'equazione della curva trasformata si procede come nel paragrafo precedente: si ricavano x e y dalla (1) per poterle sostituire nella (2); si ottiene:

$$\begin{cases} y = x' \\ x = y' \end{cases} \quad \text{e quindi} \quad x' = y'^3$$

ossia: $y'^3 = x'$

Si può ora «dimenticare» il procedimento che

Figura 1
La funzione $y = x^3$ e la sua simmetrica rispetto alla retta $y = x$



ha portato a disegnare la curva di fig. 1*b* e non scrivere più gli apici, così si trova che la curva è descritta dalla relazione:

$$y^3 = x \qquad (3)$$

Si osserva però che la curva rappresentata in fig. 1*b* è il grafico di una funzione, ma la formula (3) non descrive esplicitamente la legge per ottenere y a partire da x; la formula fornisce infatti, in corrispondenza di un dato valore di x, invece di y, y^3.

Tuttavia, a partire dalla relazione (3) è facile esplicitare y; si ha infatti, per esempio:

- per $x = 1$ $\quad y^3 = 1$ $\quad$ da cui $y = 1$
- per $x = 2$ $\quad y^3 = 2$ $\quad$ da cui $y = \sqrt[3]{2} \cong 1{,}26$
- per $x = -1$ $\quad y^3 = -1$ $\quad$ da cui $y = -1$
- per $x = -2$ $\quad y^3 = -2$ $\quad$ da cui $y = \sqrt[3]{-2} \cong -1{,}26$

In generale, dato un qualunque valore reale di x, si ottiene la funzione (fig. 2):

$$y = \sqrt[3]{x}$$

che ha come dominio l'insieme R dei reali.

Trasformare la funzione $y = x^2$

In fig. 3*a* è rappresentata la curva d'equazione:

$$y = x^2 \qquad (4)$$

Questa curva è simmetrica rispetto all'asse delle y.

In fig. 3*b* è disegnata invece la curva ottenuta operando la simmetria rispetto alla bisettrice del I e del III quadrante; essendo scambiata l'ascissa con l'ordinata, la curva è simmetrica rispetto all'asse delle x.

Per ottenere l'equazione della curva trasformata si procede come nel caso precedente; si ottiene che la curva di fig. 3*b* è descritta dalla relazione:

$$y^2 = x \qquad (5)$$

Ora, il grafico mostra una notevole differenza con il caso precedente: *la curva non è il grafico di una funzione*, perché a un dato valore di x possono corrispondere due valori di y.

La fig. 3*b* suggerisce però un'osservazione: la curva è simmetrica rispetto all'asse delle x e

Figura 2
La funzione $y = \sqrt[3]{x}$

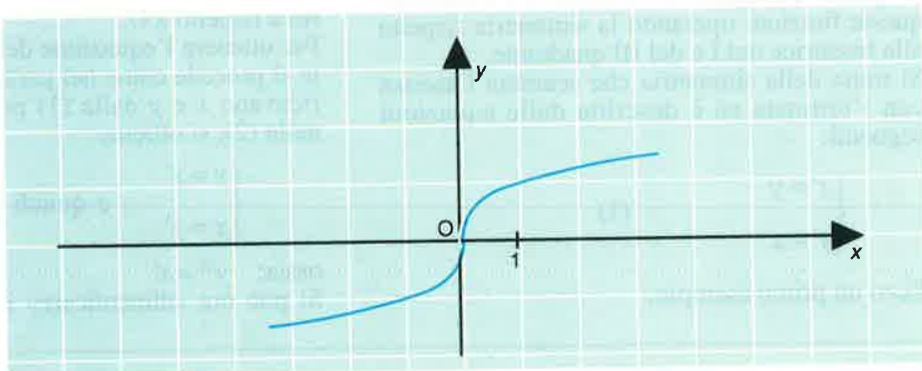
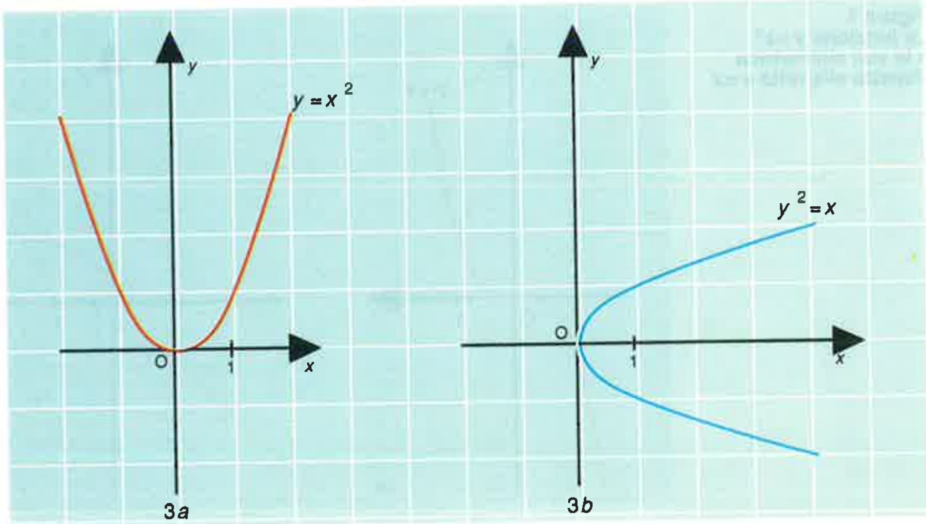


Figura 3
La parabola $y = x^2$ e la sua simmetrica rispetto alla retta $y = x$



perciò i due valori di y che corrispondono ad uno stesso valore di x sono opposti.
Così si trova, per esempio, che ci sono due punti di ascissa 1, per i quali risulta:

$$y^2 = 1$$

I due punti sono (fig. 4*a*):
- P che ha l'ordinata $y = 1$;
- P' che ha l'ordinata opposta $y = -1$.

E, analogamente, ci sono due punti di ascissa 2, per i quali risulta:

$$y^2 = 2$$

I due punti sono (fig. 4*a*):
- Q che ha l'ordinata $y = \sqrt{2}$;
- Q' che ha l'ordinata opposta $y = -\sqrt{2}$.

Più in generale, a una data ascissa x corrispondono le due ordinate seguenti:

$$y = \sqrt{x} \quad \text{e} \quad y = -\sqrt{x}$$

È ancora il grafico a suggerire un'avvertenza: x non può essere scelta come si vuole, perché i punti della curva hanno tutti l'ascissa positiva.

Si arriva così a capire che, *per descrivere la parabola di equazione* $y^2 = x$ *occorrono due funzioni:*
- *la prima che descrive l'arco al disopra dell'asse delle* x *(fig. 4b) e quindi è* $y = \sqrt{x}$;
- *la seconda che descrive l'arco al disotto dell'asse delle* x *(fig. 4c) e quindi è* $y = -\sqrt{x}$.

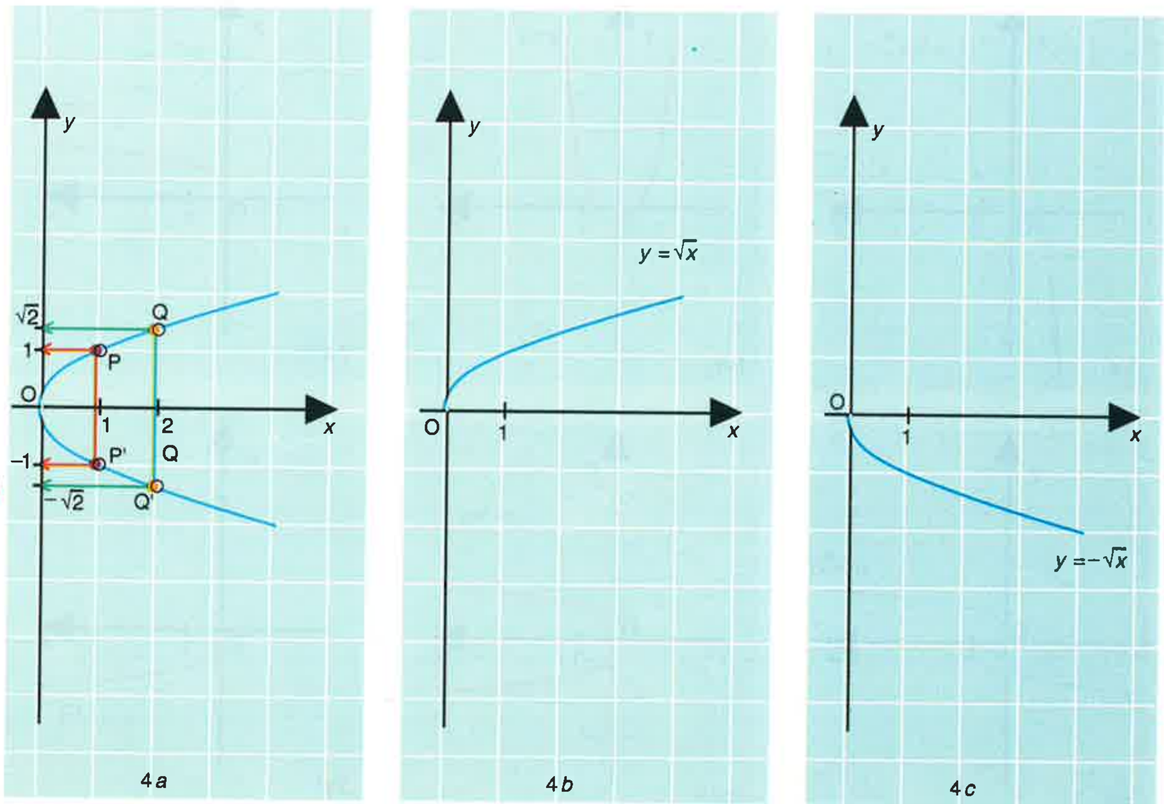
Entrambe le funzioni hanno come dominio l'insieme R^+ *dei reali positivi.*

Le funzioni $y = \sqrt[n]{x}$

Le precedenti considerazioni possono essere ripetute a partire dalle altre funzioni del tipo $y = x^n$; ecco ancora due esempi.
In fig. 5*a* è rappresentata la funzione:

$$y = x^5$$

Figura 4
La parabola $y^2=x$ non è il grafico di una sola funzione



con l'esponente 5 dispari, mentre in fig. 5*b* è rappresentata la curva che si ottiene operando la simmetria rispetto alla bisettrice del I e del III quadrante; la curva è simmetrica rispetto all'origine O e è descritta dalla relazione:

$$y^5 = x$$

La curva di fig. 5*b* può anche essere descritta dalla funzione:

$$y = \sqrt[5]{x}$$

che ha come dominio l'insieme R di tutti i numeri reali.
In fig. 6*a* è poi rappresentata la funzione:

$$y = x^4$$

con l'esponente 4 pari, mentre in fig. 6*b* è rappresentata la curva che si ottiene operando la simmetria rispetto alla bisettrice del I e del III quadrante; la curva è simmetrica rispetto all'asse delle x ed è descritta dalla relazione:

$$y^4 = x$$

Per descrivere quest'ultima curva occorrono però due funzioni; si tratta delle funzioni seguenti (fig. 7):

$$y = \sqrt[4]{x} \quad \text{e} \quad y = -\sqrt[4]{x}$$

che hanno entrambe come dominio l'insieme R^+ dei numeri reali positivi.
Si è così condotti a delle conclusioni di carattere generale: *a partire dalla relazione*

$$y^n = x$$

si ottengono:

- *le due funzioni* $y = \sqrt[n]{x}$ *e* $y = -\sqrt[n]{x}$ *con dominio* R^+ *se* n *è pari;*
- *una sola funzione* $y = \sqrt[n]{x}$ *con dominio R se* n *è dispari.*

Figura 5
Le funzioni $y=x^5$ e $y=\sqrt[5]{x}$

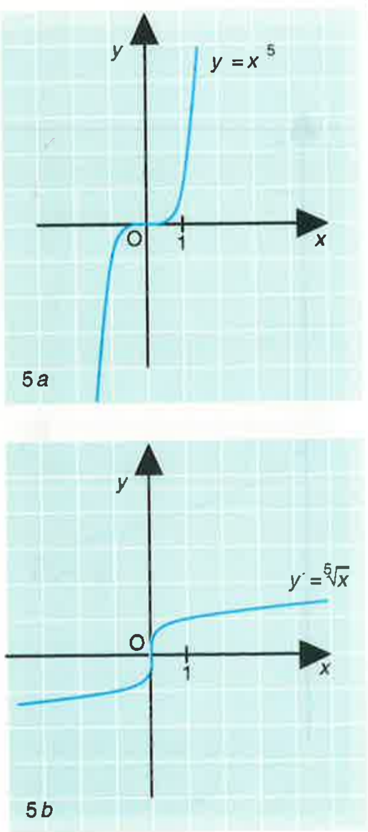


Figura 6
La funzione $y=x^4$ e la curva di equazione $y^4=x$

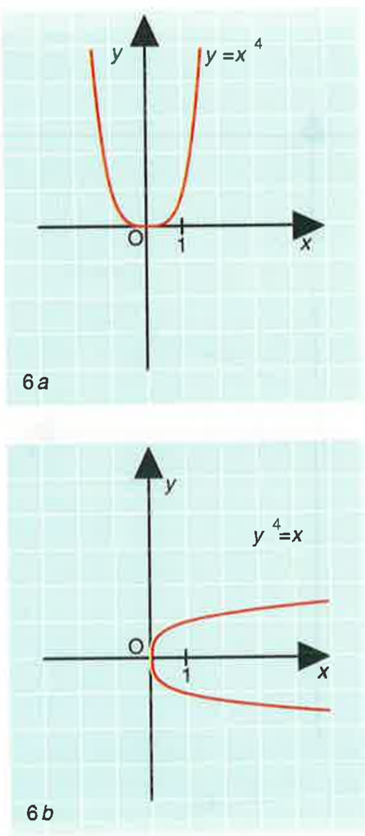
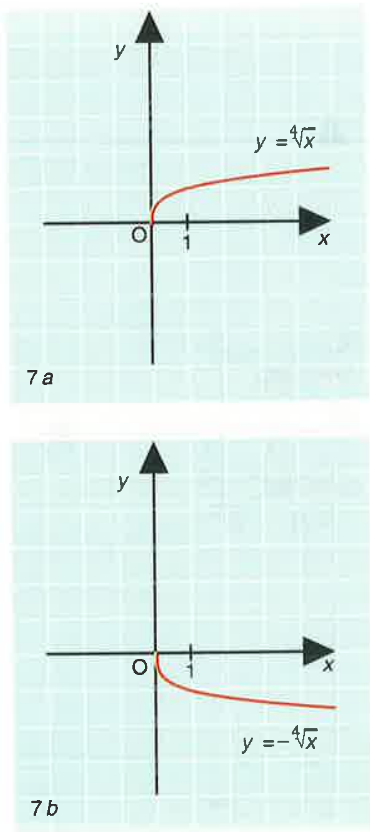


Figura 7
Le funzioni $y = \sqrt[4]{x}$ e $y = -\sqrt[4]{x}$



Le funzioni $y = \sqrt[n]{x}$ e l'operazione di «estrazione di radice»

Ecco qualche esempio di applicazione dei risultati finora ottenuti.

1. *Si esamina la relazione* $y^3 = x$

Si trova che da:

$$y^3 = 4$$

si ricava solo il numero:

$$y = \sqrt[3]{4} \cong 1,59$$

E così da:

$$y^3 = -4$$

si ottiene solo il numero:

$$y = \sqrt[3]{-4} \cong -1,59$$

Questi risultati e gli altri analoghi che si possono ottenere a partire dalla relazione:

$$y^3 = x$$

si descrivono talvolta dicendo che *l'operazione di estrazione di radice cubica di un qualunque numero reale* x *dà sempre un solo risultato indicato da*:

$$y = \sqrt[3]{x}$$

2. *Si esamina la relazione* $y^2 = x$

Si trova che da:

$$y^2 = -4$$

non si ottiene alcun numero reale, perché nella relazione $y^2 = x$ si possono scegliere solo valori positivi di x.

Invece da:

$$y^2 = 4$$

si ottengono i due numeri:

$$y = 2 \quad \text{e} \quad y = -2$$

sintetizzati spesso con la formula:

$$y = \pm 2$$

E così dalla relazione:

$$y^2 = 3$$

si ottengono i due numeri:

$$y = \sqrt{3} \text{ e } y = -\sqrt{3}$$

ossia:

$$y = \pm\sqrt{3}$$

Questi risultati e gli altri analoghi che si possono ottenere a partire dalla relazione:

$$y^2 = x$$

si descrivono talvolta dicendo che *l'operazione di estrazione di radice quadrata di un numero* x *positivo dà sempre due risultati, sintetizzati nella formula*:

$$y = \pm\sqrt{x}$$

Verifiche

Conoscenze

① Tracciare il grafico della curva d'equazione:

$$y^3 = x$$

Scrivere la funzione che la descrive.

② Tracciare il grafico della curva d'equazione:

$$y^2 = x$$

Scrivere le due funzioni che la descrivono.

③ Dire quali sono le funzioni che si ottengono a partire dalle relazioni del tipo:

$$y^n = x$$

Comprensione

① Spiegare perché si può dire che l'estrazione di radice cubica ha sempre un solo risultato.

② Spiegare perché non ha risultato reale la radice quadrata di un numero negativo.

③ Spiegare perché si può dire che l'estrazione di radice quadrata di un numero positivo ha sempre due risultati.

Applicazioni

① Completare le seguenti frasi:

- da $y^2 = 9$
  si ottengono i due numeri $y = \pm$........
- da $y^2 = -9$
  ....
- da $y^3 = 81$
  si ottiene il numero $y =$ ....
- da $y^3 = -81$
  si ottiene il numero $y =$ ....
- da $y^4 = 16$
  si ottengono i due numeri $y = \pm$........
- da $y^4 = -16$
  ....
- da $y^5 = -32$
  si ottiene il numero $y =$ ....

Lavorare con le funzioni $y = \sqrt[n]{x}$

Operare simmetrie a partire dalla funzione $y = \sqrt[3]{x}$

Attività 1

Disegnare il grafico della funzione $y = \sqrt[3]{x}$ e risolvere i seguenti quesiti:

a. operare la simmetria rispetto all'asse delle x, tracciare il grafico della curva trasformata e spiegare perché la corrispondente funzione è:

$$y = -\sqrt[3]{x} \qquad (1)$$

b. operare la simmetria rispetto all'asse delle y e spiegare perché si ottiene di nuovo la funzione (1);

c. operare la simmetria rispetto alla bisettrice del I e del III quadrante e verificare che si ottiene la funzione:

$y = x^3$ con dominio l'insieme R dei reali.

Operare simmetrie a partire dalla funzione $y = \sqrt{x}$

Attività 2

Disegnare il grafico della funzione:

$$y = \sqrt{x} \qquad (2)$$

Risolvere i seguenti quesiti:

a. operare la simmetria rispetto all'asse delle x, tracciare il grafico della curva trasformata e spiegare perché la corrispondente funzione è:

$y = -\sqrt{x}$ con dominio l'insieme R^+ dei reali positivi;

b. sempre a partire dalla funzione (2), operare la simmetria rispetto all'asse delle y, tracciare il grafico della curva trasformata e spiegare perché la corrispondente funzione è:

$y = \sqrt{-x}$ con dominio l'insieme R^- dei reali negativi;

c. spiegare perché l'uguaglianza

$$\sqrt{-x} = -\sqrt{x}$$

è vera solo per $x = 0$ ed *è falsa* per tutti gli altri valori reali di x.

Attività 3

Disegnare il grafico della funzione:

$$y=\sqrt{x} \qquad (2)$$

Risolvere i seguenti quesiti:

a. operare la simmetria rispetto all'origine O, tracciare il grafico della curva trasformata e spiegare perché la corrispondente funzione è: $y=-\sqrt{-x}$ con dominio l'insieme R^- dei reali negativi;

b. spiegare perché l'uguaglianza $-\sqrt{-x}=\sqrt{x}$ è vera solo per $x = 0$ e *è falsa* per tutti gli altri valori reali di x;

c. sempre a partire dalla funzione (2) operare la simmetria rispetto alla bisettrice del I e del III quadrante, tracciare il grafico della curva trasformata e spiegare perché la corrispondente funzione è: $y = x^2$ con dominio l'insieme R^+ dei reali positivi.

Le funzioni composte $y=\sqrt{x^2}$ e $y=(\sqrt{x})^2$

Il fatto che, operando la simmetria rispetto alla bisettrice del I e del III quadrante a partire dalla funzione $y=\sqrt{x}$, si ottiene la funzione $y = x^2$ che ha come dominio l'insieme R^+ dei reali positivi e *non l'insieme R dei reali,* porta varie conseguenze che conviene conoscere.

Il primo caso da esaminare è la funzione: $y=\sqrt{x^2}$ che può essere ottenuta, per esempio, utilizzando i tasti $\boxed{x^2}$ e $\boxed{\sqrt{\ }}$ del calcolatore tascabile nel seguente modo:

$$x \xrightarrow{\boxed{x^2}} x^2 \xrightarrow{\boxed{\sqrt{\ }}} \sqrt{x^2}$$

La funzione così ottenuta si dice anche *funzione composta.*

Attività 4

Completare la seguente tabella come mostrato nella prima riga.

x	x^2	$\sqrt{x^2}$
–2	$(-2)^2 = 4$	$\sqrt{4} = 2$
2		
0		

Risolvere i seguenti quesiti:

a. spiegare perché la funzione $y=\sqrt{x^2}$ ha come dominio l'insieme R;

b. verificare che la funzione $y=\sqrt{x^2}$ fornisce il valore assoluto di un qualunque numero reale x, cioè risulta:

$$\sqrt{x^2}=|x|$$

c. tracciare il grafico della funzione:

$$y=\sqrt{x^2} \text{ ossia } y=|x|$$

Attività 5

Esaminare in modo analogo la funzione:

$$y = (\sqrt{x})^2$$

che può essere ottenuta utilizzando sempre i tasti $\boxed{x^2}$ e $\boxed{\sqrt{\ }}$ del calcolatore tascabile, ma cambiando l'ordine nel seguente modo:

$$x \xrightarrow{\boxed{\sqrt{\ }}} \sqrt{x} \xrightarrow{\boxed{x^2}} (\sqrt{x})^2$$

Anche questa è una *funzione composta* e, rispetto alla funzione esaminata prima, cambia solo l'ordine di composizione.

Completare la seguente tabella come mostrato nelle prime righe.

x	$\sqrt{x}$	$(\sqrt{x})^2$
−5	non reale	
5	$\sqrt{5}$	$(\sqrt{5})^2 = 5$
4		
−4		
0		

Risolvere i seguenti quesiti:

a. spiegare perché la funzione $y = (\sqrt{x})^2$ ha come dominio l'insieme R^+ dei reali positivi;

b. verificare che la funzione $y = (\sqrt{x})^2$ riproduce il valore x di un qualunque numero positivo, cioè risulta:

$(\sqrt{x})^2 = x$ solo se x è positivo

c. tracciare il grafico della funzione:

$y = (\sqrt{x})^2$ ossia $y = x$ con dominio l'insieme R^+

Le funzioni $y = \sqrt[3]{x^3}$ e $y = (\sqrt[3]{x})^3$

Nell'attività 1 si è trovato che, operando la simmetria rispetto alla bisettrice del I e del III quadrante a partire dalla funzione $y = \sqrt[3]{x}$, si ottiene la funzione $y = x^3$ che ha come dominio l'insieme R dei reali.

Questo fatto porta alcune notevoli conseguenze nelle funzioni composte $y = \sqrt[3]{x^3}$ e $y = (\sqrt[3]{x})^3$ da esaminare nelle attività 6 e 7.

Attività 6

Completare la seguente tabella come mostrato nella prima riga.

x	x^3	$\sqrt[3]{x^3}$
-2	$(-2)^2 = -8$	$\sqrt[3]{-8} = -2$
2		
0		

Risolvere i seguenti quesiti:

a. spiegare perché la funzione $y = \sqrt[3]{x^3}$ ha come dominio l'insieme R;

b. verificare che la funzione $y = \sqrt[3]{x^3}$ fornisce il valore x di un qualunque numero reale, cioè risulta:

$$\sqrt[3]{x^3} = x$$

c. tracciare il grafico della funzione:

$$y = \sqrt[3]{x^3} \qquad \text{ossia} \qquad y = x$$

Attività 7

Completare la seguente tabella come mostrato nella prima riga.

x	$\sqrt[3]{x}$	$(\sqrt[3]{x})^3$
-8	$\sqrt[3]{-8} = -2$	$(-2)^3 = -8$
8		
1		
-1		
0		

Risolvere i seguenti quesiti:

a. spiegare perché la funzione $y = (\sqrt[3]{x})^3$ ha come dominio l'insieme R;

b. verificare che la funzione $y = (\sqrt[3]{x})^3$ fornisce il valore x di un qualunque numero reale, cioè risulta:

$$(\sqrt[3]{x})^3 = x$$

c. tracciare il grafico della funzione:

$$y = (\sqrt[3]{x})^3 \qquad \text{ossia} \qquad y = x$$

8 Le funzioni $y = ax^2$ e $y = \frac{k}{x}$

Trasformare la funzione $y = x^2$ con affinità

Nei paragrafi 6 e 7 si è visto come la parabola d'equazione:

$$y = x^2 \qquad (1)$$

(fig. 1) cambia posizione nel piano quando si operano delle simmetrie. In tal caso però la forma della parabola rimane inalterata.

È solo operando delle dilatazioni o delle contrazioni che si modifica la forma della curva. Ecco alcuni esempi, da cui trarre delle conclusioni di carattere generale.

1. Si opera la contrazione nella direzione dell'asse delle y descritta dalle seguenti equazioni:

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = \dfrac{1}{4}y \end{cases} \qquad (2)$$

In conseguenza di questa trasformazione la parabola diventa «più larga» (fig. 2*a*). Per ricavare la funzione che descrive questa curva si può ripetere il procedimento seguito nei paragrafi 6 e 7: si ricavano x e y dalle (2) per poterle sostituire nella (1); si ha:

$$\begin{cases} x = x' \\ y = 4y' \end{cases} \quad \text{e quindi} \quad 4y' = x'^2$$

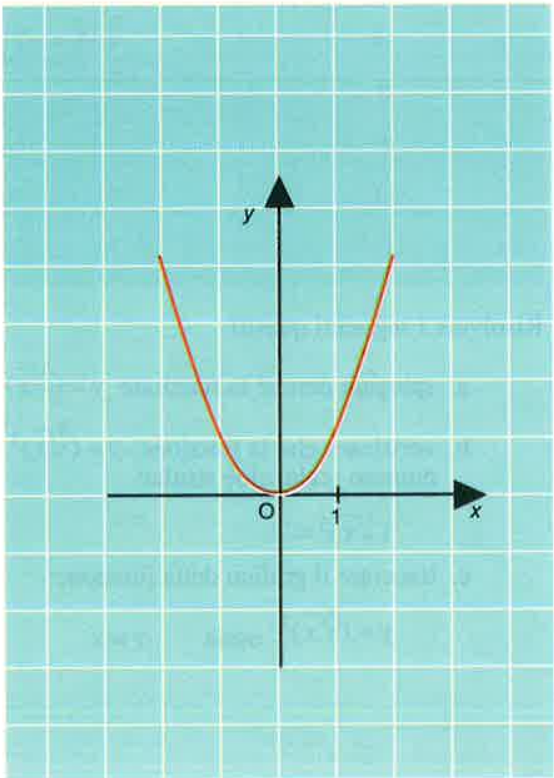
La parabola di fig. 2*a* ha dunque l'equazione:

$$y' = \frac{1}{4}x'^2$$

2. Si opera la dilatazione nella direzione dell'asse delle y descritta dalle seguenti equazioni:

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = 2y \end{cases} \qquad (3)$$

Figura 1
La parabola di equazione $y = x^2$



In conseguenza di questa trasformazione la parabola diventa «più stretta» (fig. 2*b*). Per ricavare la funzione che descrive questa curva si ricavano x e y dalle (3) per poterle sostituire nella (1); si ha:

$$\begin{cases} x = x' \\ y = \frac{1}{2}y' \end{cases} \quad \text{e quindi} \quad \frac{1}{2}y' = x'^2$$

La parabola di fig. 2*b* ha dunque equazione:

$$y' = 2x'^2$$

3. Dopo la dilatazione lungo l'asse delle y, si opera anche la simmetria rispetto all'asse delle x, ottenendo la curva che è rappresentata in fig. 3 e ha la seguente equazione:

$$y' = -2x'^2$$

Le parabole di equazione $y = ax^2$

I procedimenti finora svolti si possono sempre ripetere quando si opera un'affinità descritta da equazioni del tipo

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = ay \end{cases} \qquad (4)$$

Così si può concludere che, *operando le trasformazioni descritte dalle equazioni* (4), *si ottiene sempre una parabola d'equazione*:

$$y' = ax'^2$$

che risulta:

- *«più larga» della parabola* (1) *se è dato* $0 < a < 1$ (come nel caso $a = \frac{1}{4}$, fig. 2*a*);
- *«più stretta» della parabola* (1) *se è dato* $a > 1$ (come nel caso $a = 2$, fig. 2*b*);
- *con la concavità verso il basso se è dato* $a < 0$ (come nel caso $a = -2$, fig. 3).

Queste trasformazioni hanno però lasciato immutate due caratteristiche della parabola:

- la curva è simmetrica rispetto all'asse delle y ;
- il vertice è sempre l'origine O.

Si possono ora esaminare le curve delle figure

Figura 2
La parabola viene trasformata con un'affinità

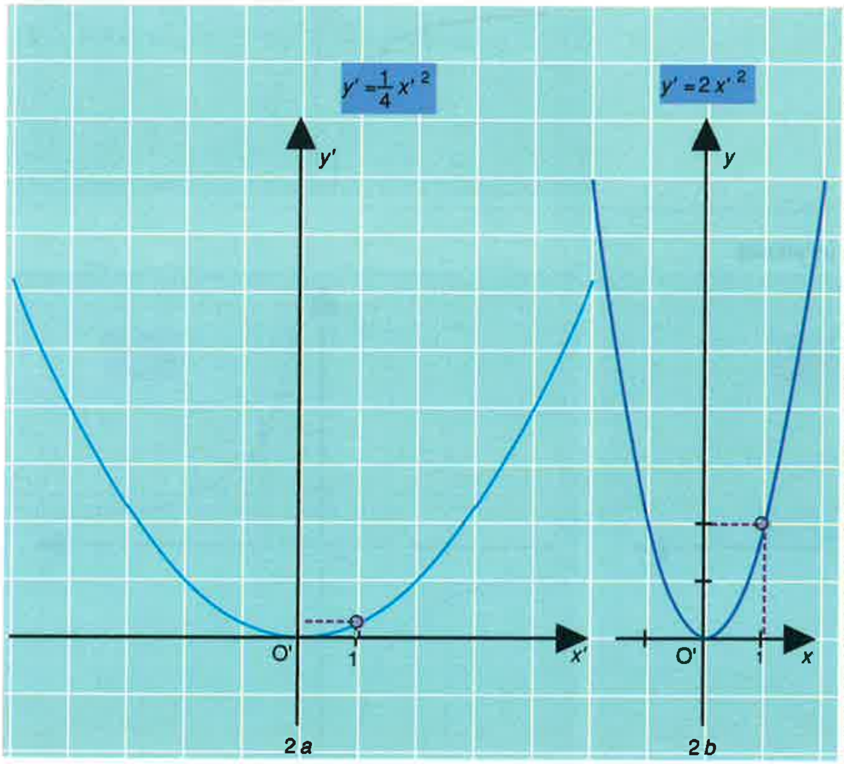
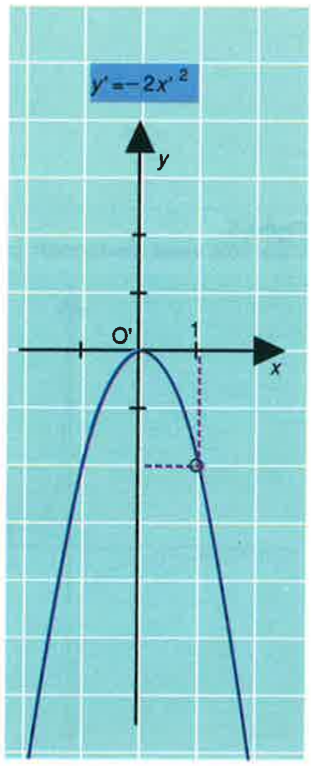


Figura 3
La parabola viene trasformata con la simmetria rispetto all'asse delle x



2 e 3 «dimenticando» il procedimento che ha portato a disegnarle; si possono omettere gli apici e si trova che *un'equazione del tipo*:

$$y = ax^2$$

rappresenta una parabola che ha il vertice nell'origine O e l'asse delle y *come asse di simmetria.*
La parabola presenta:

- *la concavità rivolta verso l'alto se è dato* $a > 0$;
- *la concavità verso il basso se è dato* $a < 0$.

Trasformare la funzione $y = \frac{1}{x}$ con affinità

Considerazioni analoghe a quelle finora svolte si possono ripetere a partire dalla funzione:

$$y = \frac{1}{x} \qquad (5)$$

che ha come grafico l'iperbole di fig. 4.
Ecco alcuni esempi, da cui trarre delle conclusioni di carattere generale.

1. Si opera la contrazione nella direzione dell'asse delle y descritta dalle equazioni (2). In conseguenza di questa trasformazione l'iperbole «si schiaccia» avvicinandosi all'asse delle x (fig. 5*a*). Per ricavare la funzione che descrive questa curva si ricavano x e y dalle (3) per poterle sostituire nella (5); si ha:

$$\begin{cases} x = x' \\ y = 4y' \end{cases} \quad \text{e quindi} \quad 4y' = \frac{1}{x'}$$

Figura 4
L'iperbole di equazione $y = \frac{1}{x}$

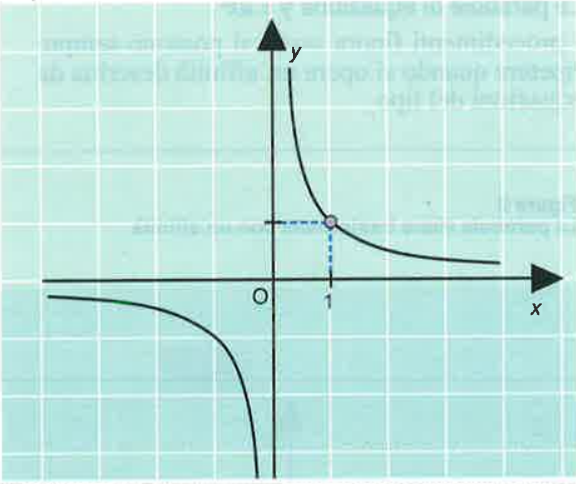
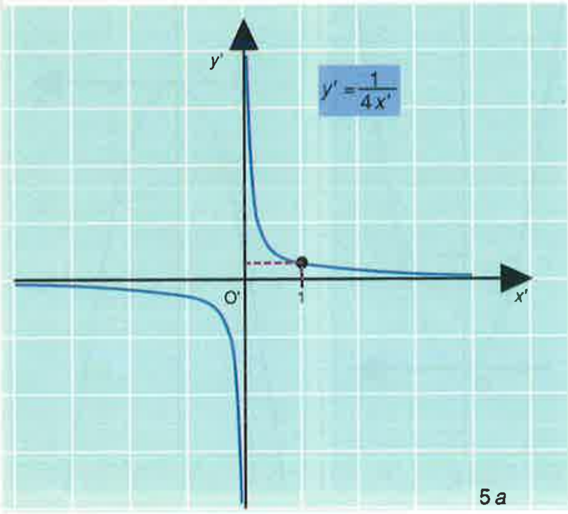
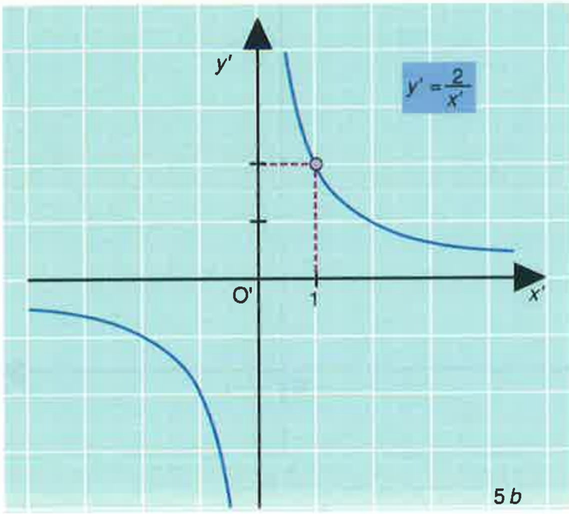


Figura 5
L'iperbole viene trasformata con un'affinità





L'iperbole di fig. 5*a* ha dunque equazione:

$$y' = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{x'}$$

che si può scrivere anche nelle forme seguenti:

$$y' = \frac{\frac{1}{4}}{x'} \qquad y' = \frac{1}{4x'}$$

2. Si opera la dilatazione nella direzione dell'asse delle *y* descritta dalle equazioni (3). In conseguenza di questa trasformazione l'iperbole «si stira» allontanandosi dall'asse delle *x* (fig. 5*b*). Per ricavare la funzione che descrive questa curva si ricavano *x* e *y* dalle (2) per poterle sostituire nella (5); si ha:

$$\begin{cases} x = x' \\ y = \frac{1}{2} y' \end{cases} \quad \text{e quindi} \quad \frac{1}{2} y' = \frac{1}{x'}$$

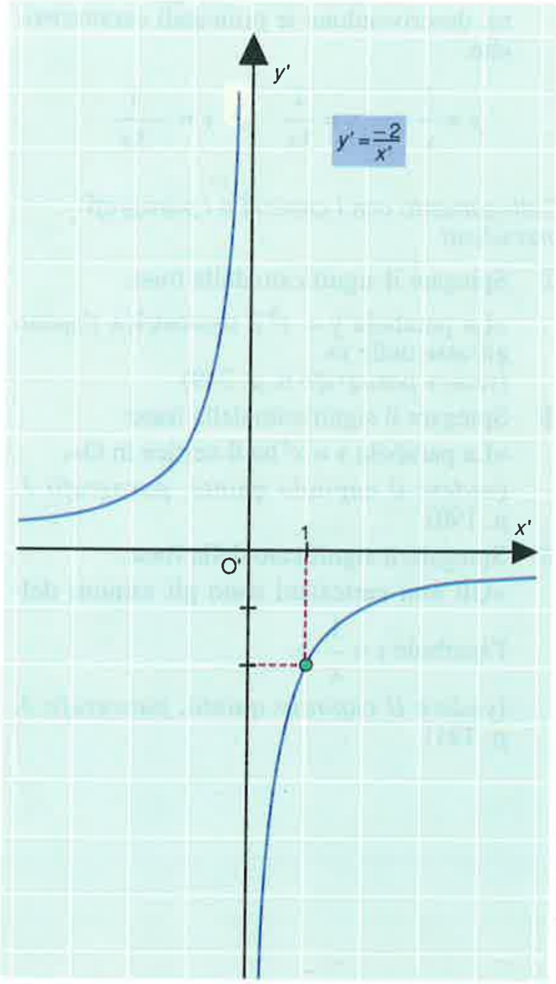
L'iperbole di fig. 5*b* ha dunque l'equazione:

$$y' = 2 \cdot \frac{1}{x'} \quad \text{o anche} \quad y' = \frac{2}{x'}$$

3. Dopo la dilatazione lungo l'asse delle *y* si opera la simmetria rispetto all'asse delle x, ottenendo la curva che è rappresentata in fig. 6: occupa il II e il IV quadrante e ha la seguente equazione:

$$y' = \frac{-2}{x'}$$

Figura 6
L'iperbole viene trasformata con la simmetria rispetto all'asse delle *x*



Le iperboli di equazione $y = \frac{k}{x}$

I procedimenti finora svolti si possono sempre ripetere quando si opera un'affinità descritta da equazioni del tipo:

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = ky \end{cases} \qquad (6)$$

Si conclude che, *operando le trasformazioni descritte dalle equazioni* (6), *si ottiene sempre un'iperbole di equazione*:

$$y' = \frac{k}{x'}$$

che risulta:

- *«più schiacciata» dell'iperbole* (5) *se è dato* $0 < k < 1$ (come nel caso $k = \frac{1}{4}$, fig. 5*a*);
- *«più allungata» dell'iperbole* (5) *se è dato* $k > 1$ (come nel caso $k = 2$, fig. 5*b*);
- *contenuta nel II e nel IV quadrante se è dato* $k < 0$ (come nel caso $k = -2$, fig. 6).

Queste trasformazioni hanno però lasciato immutata una caratteristica dell'iperbole: gli assi cartesiani sono gli asintoti della curva.

Si possono ora esaminare le curve delle figure 5 e 6 «dimenticando» il procedimento che ha portato a disegnarle; così si possono omettere gli apici e si trova che *un'equazione del tipo*:

$$y = \frac{k}{x}$$

rappresenta un'iperbole che ha gli assi cartesiani come asintoti.
L'iperbole occupa:
- *il I e il III quadrante se è dato* $k > 0$;
- *il II e il IV quadrante se è dato* $k < 0$.

Verifiche

Conoscenze

① Esaminare le funzioni $y = ax^2$ e descriverne il grafico, sostituendo alla lettera a un numero positivo a piacere.

② Esaminare le funzioni $y = ax^2$ e descriverne il grafico sostituendo alla lettera a un numero negativo a piacere.

③ Esaminare le funzioni $y = \frac{k}{x}$ e descriverne il grafico, sostituendo alla lettera k un numero positivo a piacere.

④ Esaminare le funzioni $y = \frac{k}{x}$ e descriverne il grafico sostituendo alla lettera k un numero negativo a piacere.

Comprensione

① Descrivere la trasformazione che porta dalla parabola di equazione $y = x^2$ alla parabola di equazione $y' = \frac{1}{2}x'^2$.

② Descrivere la trasformazione che porta dalla parabola d'equazione $y = x^2$ alla parabola d'equazione $y' = 2x'^2$.

③ Descrivere la trasformazione che porta dall'iperbole di equazione $y = \frac{1}{x}$ all'iperbole di equazione $y' = \frac{1}{3x'}$.

④ Descrivere la traformazione che porta dall'iperbole $y = \frac{1}{x}$ all'iperbole di equazione $y' = \frac{3}{x'}$.

Applicazioni

① Tracciare il grafico delle seguenti funzioni, descrivendone le principali caratteristiche.

$$y = 3x^2 \qquad y = \frac{1}{2}x^2 \qquad y = -\frac{1}{2}x^2$$

② Tracciare il grafico delle seguenti funzioni, descrivendone le principali caratteristiche.

$$y = \frac{3}{x} \qquad y = \frac{1}{3x} \qquad y = -\frac{1}{3x}$$

Collegamento con i capitoli o i paragrafi precedenti

① Spiegare il significato della frase:
«La parabola $y = x^2$ è simmetrica rispetto all'asse delle y».
(*vedere paragrafo 6, p.* 249)

② Spiegare il significato della frase:
«La parabola $y = x^2$ ha il vertice in O».
(*vedere il capitolo quinto, paragrafo 3, p.* 190)

③ Spiegare il significato della frase:
«Gli assi cartesiani sono gli asintoti dell'iperbole $y = \frac{1}{x}$ ».
(*vedere il capitolo quinto, paragrafo 3, p.* 191)

L'ellisse

Trasformando il cerchio con un'affinità si ottiene un'ellisse

Le trasformazioni affini modificano la forma di una parabola o di un'iperbole, come si è visto nel paragrafo precedente; vediamo ora come si modifica un cerchio «sotto l'azione» di un'affinità.

In fig. 1*a* è disegnato, su una tela elastica, il cerchio d'equazione:

$$x^2 + y^2 = 1 \qquad (1)$$

già studiato nel capitolo quinto, paragrafo 1, pp. 174-175.

In fig. 1*b* la tela viene dilatata nella direzione dell'asse delle x: il cerchio si trasforma in una curva che prende il nome di *ellisse*.

Dunque, *l'ellisse è la curva che si ottiene trasformando un cerchio con un'affinità.*

L'equazione dell'ellisse

In fig. 1*b* la trasformazione raddoppia le ascisse e quindi è descritta dall'equazione:

$$\begin{cases} x' = 2x \\ y' = y \end{cases} \qquad (2)$$

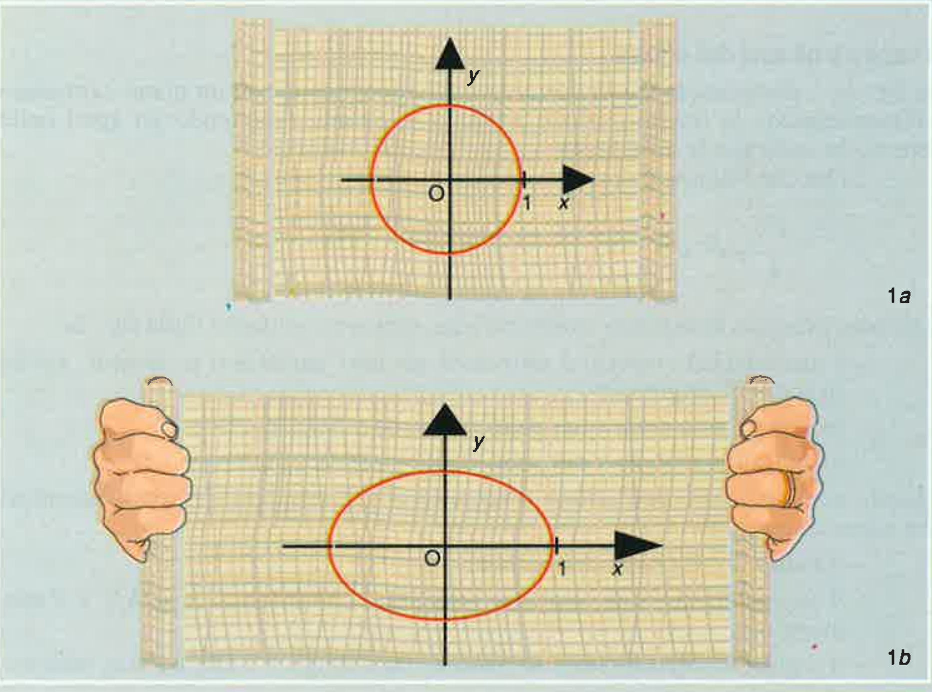


Figura 1
Trasformando un cerchio con un'affinità si ottiene un'ellisse

Perciò, per ottenere l'equazione dell'ellisse, si dovrà ripetere il procedimento seguito nel paragrafo precedente: si ricavano x e y dalle (2) per poterle sostituire nella (1); si ha:

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{2}x' \\ y = y' \end{cases} \quad \text{e quindi} \quad \left(\frac{x'}{2}\right)^2 + y'^2 = 1$$

Eseguendo l'elevazione al quadrato indicata, si ha che l'equazione dell'ellisse è data da:

$$\frac{x'^2}{4} + y'^2 = 1$$

Più in generale, se il piano viene trasformato con un'affinità descritta dalle equazioni:

$$\begin{cases} x' = ax \\ y' = by \end{cases} \quad \text{ossia} \quad \begin{cases} x = \dfrac{x'}{a} \\ y = \dfrac{y'}{b} \end{cases}$$

il cerchio si trasforma nell'ellisse che ha equazione:

$$\left(\frac{x'}{a}\right)^2 + \left(\frac{y'}{b}\right)^2 = 1 \qquad (4)$$

ossia:

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1$$

Il centro e gli assi dell'ellisse

In fig. 2*a* è disegnata la curva descritta dall'equazione (3) su un piano cartesiano «dimenticando» la trasformazione eseguita e, quindi, omettendo gli apici nelle lettere che indicano le coordinate.

Si ha che l'ellisse è descritta dall'equazione:

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \qquad (3)$$

La curva presenta le seguenti caratteristiche, messe in evidenza dalla fig. 2*a*:

- è simmetrica rispetto a entrambi gli assi cartesiani e, quindi, anche rispetto all'origine O;
- incontra l'asse delle x nei punti A'(–2; 0) e A(2;0);
- incontra l'asse delle y nei punti B(0; 1) e B'(0; –1).

Queste caratteristiche dell'ellisse d'equazione (3) vengono descritte valendosi dei seguenti termini:

- il punto O è il centro dell'ellisse;
- il segmento OA è il semiasse maggiore, che è lungo 2, e AA' è l'asse maggiore;
- il segmento OB è il semiasse minore, che è lungo 1, e BB' è l'asse minore.

In modo analogo la curva di fig. 2*b*, che ha equazione:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

si può descrivere più in generale dicendo che *è un'ellisse con il centro nell'origine* O, *il semiasse maggiore* OA *che ha lunghezza* a *e il semiasse minore* OB *che ha lunghezza* b.

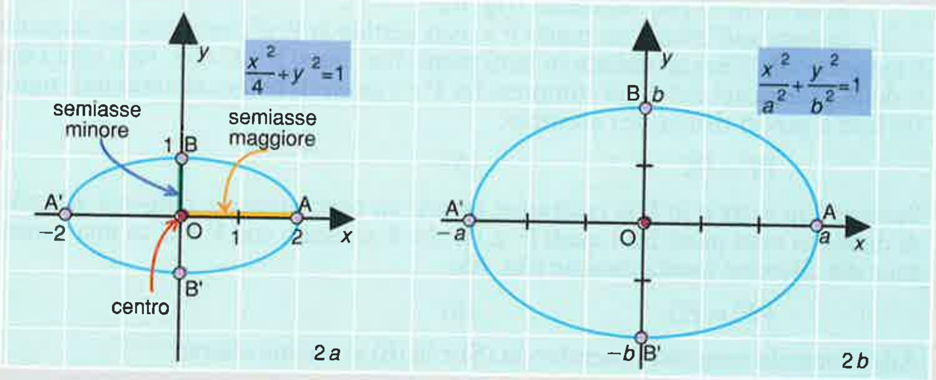


Figura 2
Le caratteristiche di un'ellisse

Una proprietà che caratterizza l'ellisse

L'ellisse è caratterizzata da una proprietà che si può scoprire trasformando il cerchio con un'affinità realizzata dai raggi del Sole (fig. 3*a*): si espone un disco al Sole e se ne osserva l'ombra, che è un'ellisse, perché è la curva trasformata di un cerchio per affinità.

L'esperienza di fig. 3*a* può essere anche interpretata nel modo seguente: i raggi del Sole che «si appoggiano» al disco formano un cilindro e si forma l'ombra quando questo cilindro è tagliato da un piano (fig. 3*b*).

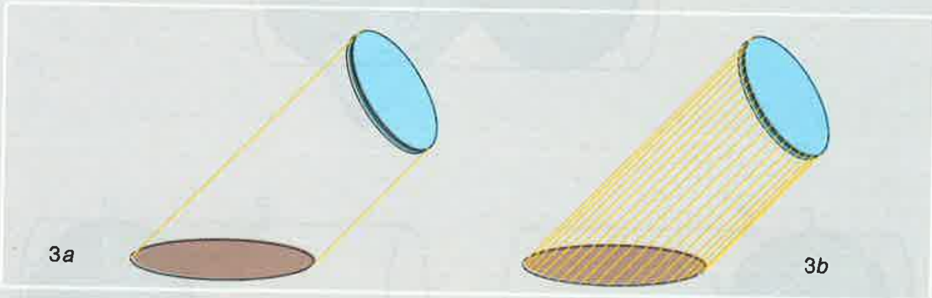


Figura 3
L'ellisse ottenuta come ombra di un cerchio data dai raggi del Sole

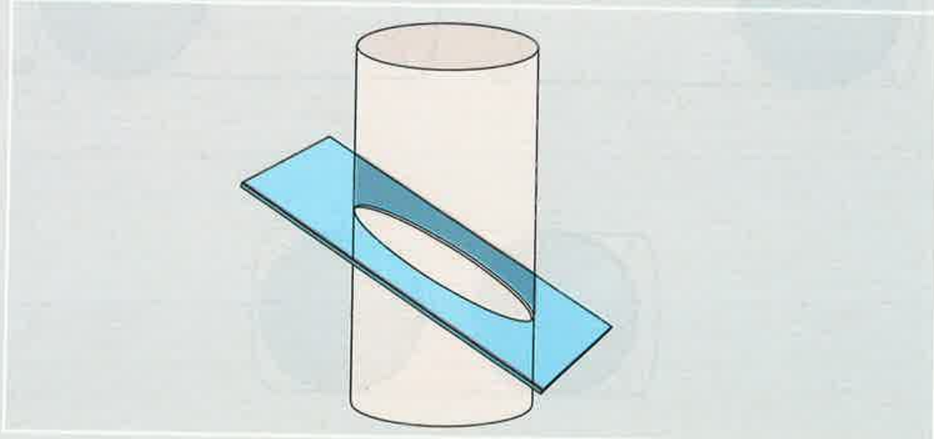


Figura 4
L'ellisse si può ottenere tagliando un cilindro con un piano

L'ellisse si può dunque ottenere tagliando un cilindro con un piano (fig. 4).

In fig. 5 è rappresentato un modello che permette di esaminare meglio la situazione: il cilindro è costruito con un foglio di carta trasparente e il piano secante è un cartoncino.

All'interno del cilindro sono inserite due sferette che hanno lo stesso diametro del cilindro, in modo che ciascuna sferetta tocchi il piano in un punto; si ottengono così, all'interno dell'ellisse, due punti indicati con le lettere F e F'.

Sono proprio questi punti a dare una proprietà caratteristica dell'ellisse.

Ecco come si può ragionare (fig. 6).

Si fissa sull'ellisse un punto P e, con vertice in P, si costruisce un cono che è tangente alla sfera di sinistra in tanti punti, fra i quali F e C (fig. 6*a*); così i tratti delle generatrici del cono compresi fra P e i punti di tangenza sono tutti uguali fra loro e perciò risulta, per esempio:

$$PF = PC \qquad (5)$$

Sempre con vertice in P si costruisce quindi un cono analogo, tangente alla sfera di destra in tanti punti fra i quali F' e D, che è allineato con P e C su una generatrice del cilindro; risulta dunque (fig. 6*b*):

$$PF' = PD \qquad (6)$$

Addizionando membro a membro la (5) e la (6) si ottiene allora:

$$PF + PF' = CD$$

Per arrivare alla conclusione basta ora osservare la fig. 7 e rendersi conto che il

Figura 5
Un modello per scoprire una proprietà dell'ellisse

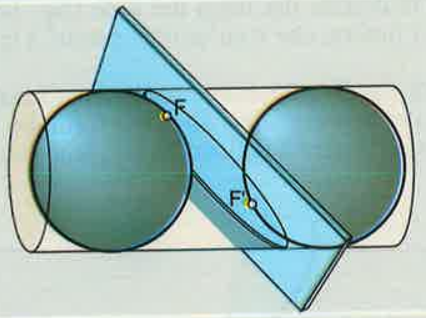


Figura 6
Una proprietà caratteristica delle tangenti a una sfera

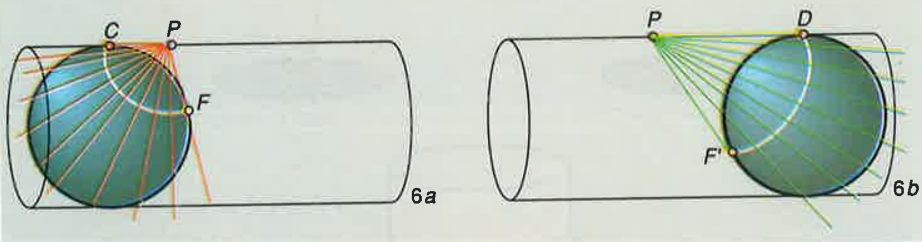
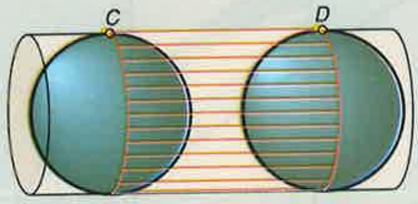


Figura 7
La distanza CD è costante



tratto CD ha sempre la stessa lunghezza comunque si scelga P sull'ellisse.

Si arriva così a scoprire la seguente proprietà (fig. 8): *esistono all'interno dell'ellisse due punti F e F', tali che, per qualunque punto P della curva, resta costante la somma delle distanze PF e PF'.*

La costruzione dell'ellisse col «metodo del giardiniere»

La proprietà ora scoperta caratterizza l'ellisse come figura piana (fig. 9) e conduce a una semplice costruzione dell'ellisse (fig. 10): su una tavoletta si piantano due chiodi nei punti F e F' e vi si fissa un pezzo di spago; tenendo ben teso lo spago con l'aiuto di una matita, si riesce a tracciare l'ellisse. Questa costruzione è detta «metodo del giardiniere», perché usata dai giardinieri per tracciare il contorno di aiuole di forma ellittica.

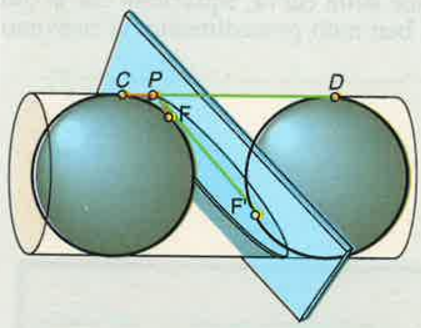
La matita infatti congiunge tutti i punti per cui la somma PF + PF' è data dalla lunghezza dello spago.

Questa costruzione suggerisce anche come trovare il valore della somma PF + PF': quando il punto P coincide con il punto A, risulta (fig. 11):

$$AF' + AF = AA' = 2a$$

La proprietà che caratterizza tutti i punti P *dell'ellisse che ha l'asse maggiore lungo* 2a *è dunque:*

$$\mathbf{PF + PF' = 2}\boldsymbol{a}$$



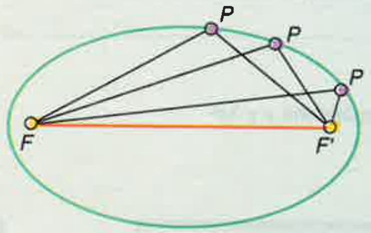
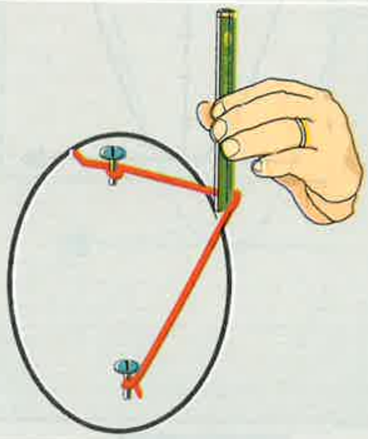


Figura 8 (a sinistra)
Una proprietà caratteristica dell'ellisse

Figura 9 (a destra)
La proprietà che caratterizza l'ellisse come figura piana



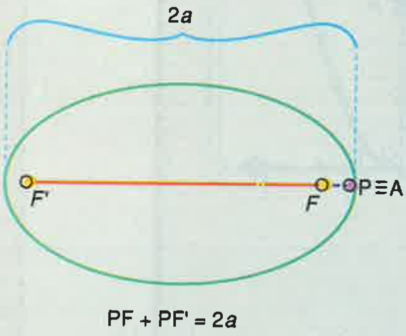


Figura 10 (a sinistra)
L'ellisse costruita con il «metodo del giardiniere»

Figura 11 (a destra)
Il valore della somma costante PF + PF'

9

Le parabole di equazione $y = ax^2 + bx + c$

Traslare una parabola di equazione $y = ax^2$

Ecco un esempio da cui si possono trarre delle conclusioni di carattere generale (fig. 1): su una lastra trasparente, che realizza il riferimento Oxy, è disegnata la parabola d'equazione:

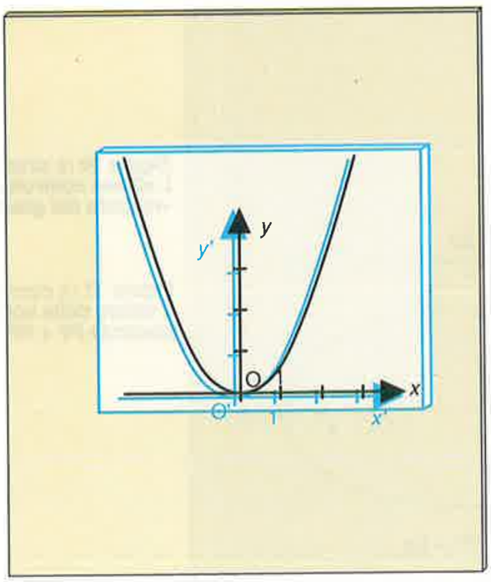
$$y = 3x^2 \qquad (1)$$

La lastra trasparente viene quindi traslata lungo il cartone che realizza il riferimento fisso O'$x'y'$ con la traslazione descritta dalle equazioni seguenti (fig. 1b):

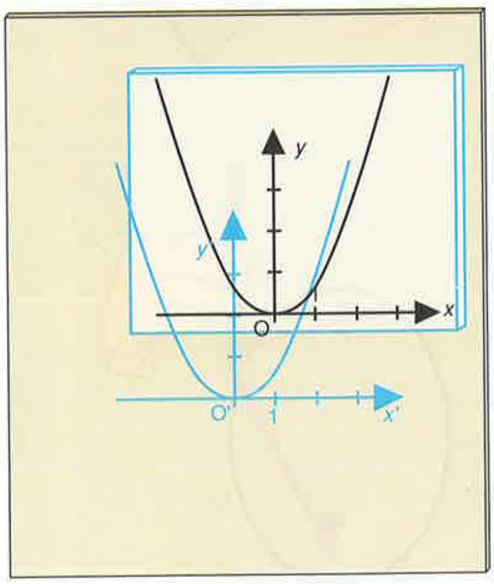
$$\begin{cases} x' = x + 1 \\ y' = y + 2 \end{cases} \qquad (2)$$

Questo cambiamento di posizione modifica l'equazione della curva, equazione che si ottiene con il ben noto procedimento: si ricavano x

Figura 1
Traslare una parabola di equazione $y = 3x^2$



1 a



1 b

$y' = 3(x' - 1)^2 + 2$

e y dalla (2) per poterle sostituire nella (1); si ha:

$$\begin{cases} x = x'-1 \\ y = y'-2 \end{cases} \quad \text{e quindi} \quad y'-2 = 3(x'-1)^2$$

Si ottiene dunque l'equazione:

$$y' = 3(x'-1)^2 + 2$$

Conviene fissare l'attenzione sull'equazione ottenuta, confrontandola con il corrispondente grafico; si nota, fra l'altro, che:

- la parabola non ha ovviamente cambiato forma, e perciò è rimasto inalterato il coefficiente 3 di x'^2, coefficiente che «decide» la forma della curva;
- il vertice è il punto O(1; 2);
- l'asse di simmetria è la retta d'equazione $x' = 1$.

Si possono ora svolgere le operazioni indicate ricordando lo sviluppo del quadrato di un binomio (vedi il primo volume, p. 270); si ha:

$$(x'-1)^2 = x'^2 + 1-2x'$$

e perciò si ottiene:

$$y' = 3(x'^2 + 1-2x') + 2$$

L'equazione diventa infine:

$$y' = 3x'^2-6x' + 5$$

Una parabola traslata ha equazione del tipo $y = ax^2 + bx + c$

I procedimenti finora svolti possono essere ripetuti più in generale (fig. 2); si considera sul piano Oxy una parabola d'equazione:

$$y = ax^2$$

che ha:

- il vertice nel punto O(0; 0);
- l'asse di simmetria che è l'asse delle y, di equazione $x = 0$.

Si effettua quindi la traslazione descritta dalle seguenti equazioni:

$$\begin{cases} x' = x + p \\ y' = y + q \end{cases}$$

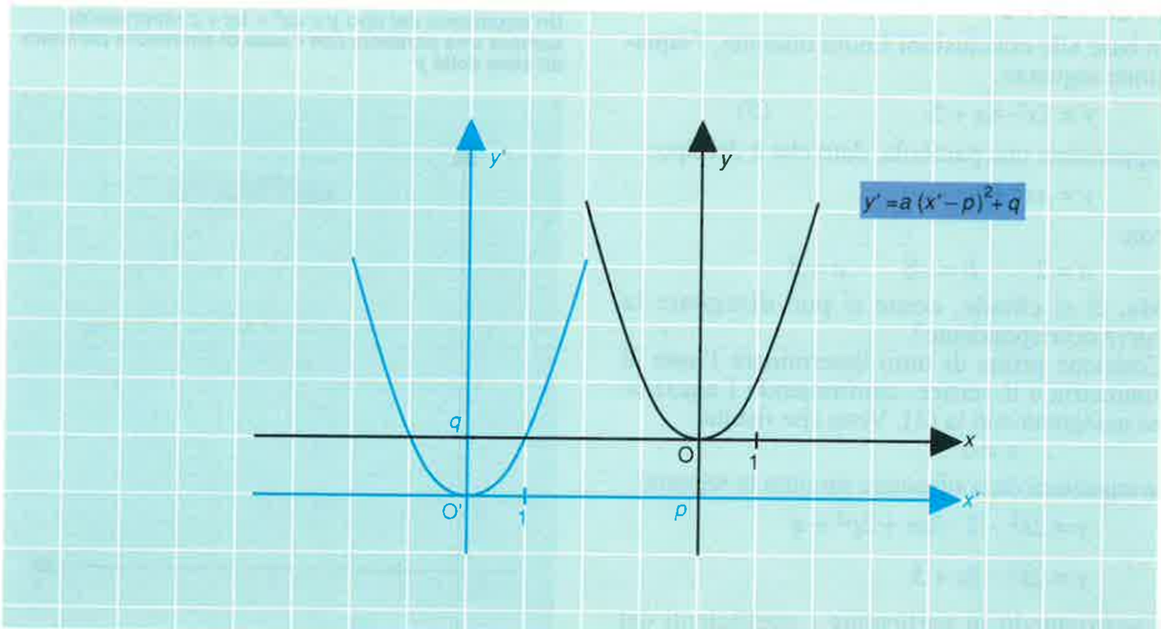
In questo modo si ottiene una curva che ha, nel riferimento O'$x'y'$, l'equazione data da:

$$y'-q = a(x'-p)^2$$

ossia:

$$y' = a(x'-p)^2 + q \qquad (3)$$

Figura 2
Traslare una parabola di equazione $y = ax^2$



Questa parabola ha la stessa forma di quella iniziale, ma ha:

- il vertice nel punto $O(p; q)$;
- l'asse di simmetria che è la retta s, di equazione $x = p$.

Svolgendo nella (3) i calcoli indicati, si ottiene l'equazione:

$$y' = ax'^2 - 2apx' + ap^2 + q$$

Si può ora esaminare la parabola «dimenticando» la traslazione che ha portato a disegnarla; si possono così omettere gli apici nelle lettere che indicano le coordinate (fig. 3); si ha che *un'equazione del tipo*:

$$y = ax^2 - 2apx + ap^2 + q \qquad (4)$$

rappresenta una parabola che ha:

- *il vertice nel punto* $V(p; q)$;
- *l'asse di simmetria che è la retta* s, *di equazione* $x = p$.

L'equazione (4) si scrive abitualmente in forma più semplice, introducendo le lettere b e c che hanno il seguente significato:

$$b = -2ap \qquad\qquad c = ap^2 + q$$

Si può così concludere che *un'equazione del tipo*:

$$y = ax^2 + bx + c$$

rappresenta sempre una parabola con l'asse di simmetria parallelo all'asse delle y.

Tracciare il grafico di una funzione del tipo $y = ax^2 + bx + c$

In base alle conclusioni finora ottenute, l'equazione seguente:

$$y = 2x^2 - 8x + 5 \qquad (5)$$

rappresenta una parabola, dato che è del tipo:

$$y = ax^2 + bx + c$$

con:

$$a = 2 \qquad b = -8 \qquad c = 5$$

Ma, ci si chiede, come si può disegnare la curva corrispondente?
Conviene prima di tutto determinare l'asse di simmetria e il vertice, confrontando l'equazione assegnata con la (4). Visto che risulta:

$$a = 2$$

le equazioni da confrontare saranno le seguenti:

$$y = 2x^2 - 2 \cdot 2px + 2p^2 + q$$

$$y = 2x^2 - 8x + 5$$

Confrontando in particolare i coefficienti dei monomi che presentano la lettera x (in blu), si trova che deve essere:

$$-4p = -8$$

e perciò l'ascissa p del vertice è data da:

$$p = \frac{-8}{-4} = 2$$

Ora, conoscendo l'ascissa del vertice è facile calcolarne l'ordinata q: basta sostituire 2 al posto di x nell'equazione della parabola. Si ha dunque:

$$q = 2 \cdot 2^2 - 8 \cdot 2 + 5 = -3$$

Il vertice V della parabola è dunque il punto

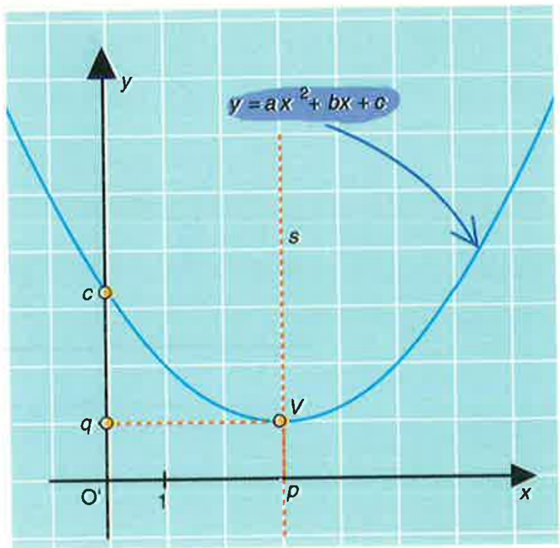
$$V(2; -3)$$

e l'asse di simmetria s, che passa per V e è parallelo all'asse delle y, ha l'equazione data da:

$$x = 2$$

Tracciati questi elementi sul piano cartesiano (fig. 4*a*), si prevede una curva formata da due archi simmetrici rispetto a s; basta quindi disegnare uno solo di questi archi e ottenere poi l'altro per simmetria.
Volendo disegnare, per esempio, l'arco a sinistra di s, se ne determinano alcuni punti con il procedimento già seguito per disegnare una retta (vedi il primo volume, p. 349): nell'equazione (5) si sostituiscono a x alcune ascisse più

Figura 3
Un'equazione del tipo $y = ax^2 + bx + c$ rappresenta sempre una parabola con l'asse di simmetria parallelo all'asse delle y



piccole di 2 e si ricavano le ordinate corrispondenti.
Si trovano, per esempio, i seguenti punti:

x	$y = 2x^2 – 8x + 5$	Punti
1	$y = 2 \cdot 1^2 – 8 \cdot 1 + 5 = \mathbf{–1}$	A(1; –1)
0	$y = 2 \cdot 0^2 – 8 \cdot 0 + 5 = \mathbf{5}$	B(0; 5)

Raccordando questi punti con una curva si ottiene un arco di parabola e, completando per simmetria il disegno, si ottiene la curva di fig. 4*b*.
Il procedimento seguito ha carattere generale e può essere sempre ripetuto per disegnare una parabola che ha l'equazione del tipo:

$$y = ax^2 + bx + c$$

Si procederà dunque nel modo seguente:

1. *si ricava l'ascissa del vertice* confrontando l'equazione assegnata con la (4); confrontando in particolare i coefficienti dei monomi in x, si ricava che deve essere:

   $$b = -2ap$$

   e quindi *l'ascissa* p *del vertice è data da:*

   $$p = \frac{-b}{2a}$$

2. *si ricava l'ordinata* q *del vertice* sostituendo l'ascissa p nell'equazione assegnata;
3. *si determina qualche altro punto della parabola*, assegnando opportuni valori a x e ricavando i corrispondenti valori di y;
4. *si raccordano i punti ottenuti.*

V e r i f i c h e

Conoscenze

① Quale forma assume l'equazione di una parabola con l'asse di simmetria parallelo all'asse delle y?

Comprensione

① Spiegare perché le seguenti equazioni *non rappresentano* parabole con l'asse di simmetria parallelo all'asse delle x:

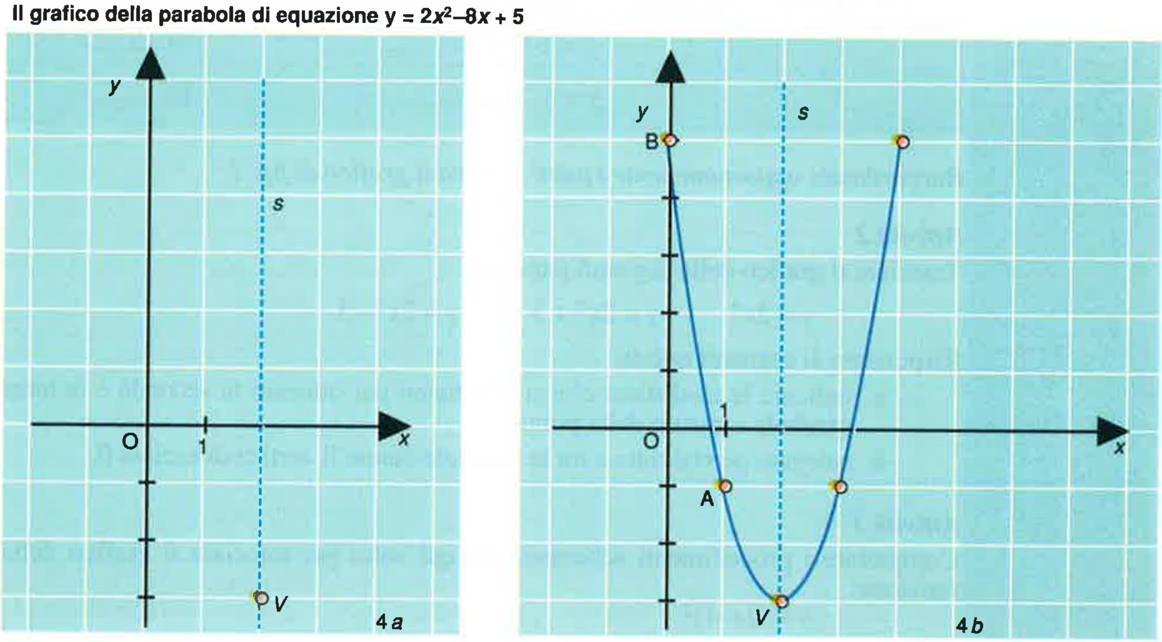
$$y = 4x + 1 \qquad y = 4x^3 – 2x + 5$$

Applicazioni

① Fra le seguenti equazioni scegliere quella che rappresenta una parabola con l'asse di simmetria parallelo all'asse delle x e disegnare la curva corrispondente.

$$y = 2x^2 + 4x – 3 \qquad y = 4x – 3$$
$$y = 2x^3 + 4x – 3 \qquad y = 4x^2 – 3$$

Figura 4
Il grafico della parabola di equazione $y = 2x^2 – 8x + 5$



Disegnare parabole di equazione $y = ax^2 + bx + c$

Attività 1

Completare il procedimento schematizzato qui sotto per tracciare il grafico della parabola:

$$y = 2x^2 - 1$$

Nell'equazione si ha: $a = ...$ $\quad b = 0 \quad$ $c = ...$

1. *L'ascissa* p *del vertice è data da:* $p = \frac{...}{...} = 0$
2. *L'ordinata* q *del vertice è data da:* $q = 2 \cdot .... -1 = -1$
   La parabola ha:
   - *il vertice* V(......... ; ....);
   - *l'asse di simmetria che ha equazione* x = ...
3. *Determinare altri punti della parabola completando la seguente tabella*:

x	$y = 2x^2 - 1$	**Punti**
1	$y = 2 \cdot 1^2 - 1 =$	A(.....; .....)
2	$y =$	B(.....; .....)

Raccordando opportunamente i punti si trova il grafico di fig. 1.

Attività 2

Tracciare il grafico delle seguenti parabole:

$$y = 2x^2 \qquad y = 2x^2 + 3 \qquad y = 2x^2 - 3$$

Rispondere ai seguenti quesiti:

a. indicare le traslazioni che si effettuano per ottenere la seconda e la terza parabola a partire dalla prima;
b. spiegare perché tutte e tre le parabole hanno il vertice di ascissa 0.

Attività 3

Completare i procedimenti schematizzati qui sotto per tracciare il grafico della funzione:

$$y = 2(x-1)^2$$

1. *Si osserva che l'equazione è del tipo:*
   $y = a(x-p)^2 + q$
   con:
   $a = ...$ $\qquad p = 1 \qquad q = 0$
   e perciò la parabola deve avere vertice V(.....; .....)
2. *Si determinano altri punti della parabola completando la seguente tabella:*

x	$y = 2(x-1)^2$	**Punti**
0	$y = 2\cdot(0-1)^2 = ...$	A(.....; .....)
–1	$y = ...$	B(.....; .....)

Raccordando opportunamente i punti si trova il grafico di fig. 2.

Attività 4

Tracciare il grafico delle seguenti parabole:

$y = 2x^2 \qquad y = 2(x+3)^2 \qquad y = 2(x-3)^2$

Rispondere ai seguenti quesiti:

a. indicare le traslazioni che si effettuano per ottenere la seconda e la terza parabola a partire dalla prima;
b. spiegare perché tutte e tre le parabole hanno il vertice di ordinata 0;
c. sviluppare i calcoli indicati nella seconda e nella terza equazione.

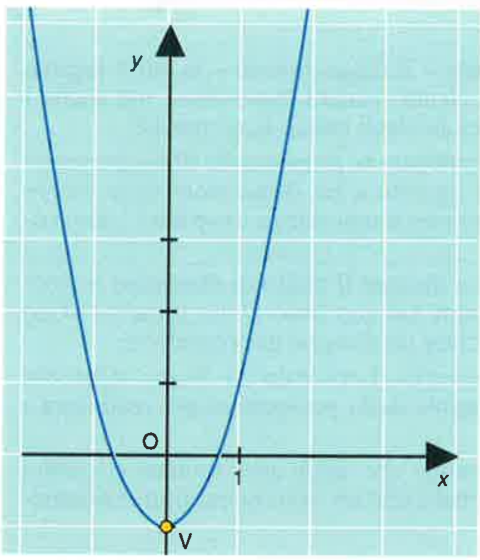
Attività 5

Tracciare il grafico delle seguenti parabole:

$y = -x^2 \qquad y = -x^2 + 2 \qquad y = -(x+2)^2$

Rispondere ai seguenti quesiti:

a. indicare le traslazioni che si effettuano per ottenere la seconda e la terza parabola a partire dalla prima;
b. spiegare perché la seconda parabola ha il vertice di ascissa 0, mentre la terza ha il vertice di ordinata 0.
c. sviluppare i calcoli indicati nella seconda e nella terza equazione.



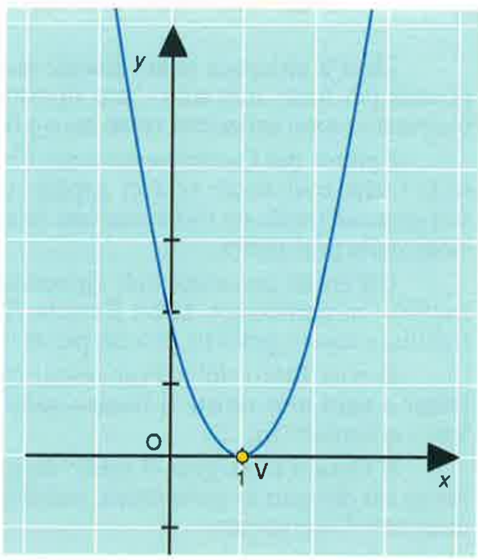


Figura 1 (a sinistra)
La parabola di equazione $y = 2x^2 - 1$

Figura 2 (a destra)
La parabola di equazione $y = 2(x-1)^2$

Le trasformazioni nella storia

Nel Rinascimento, dall'arte nasce la geometria proiettiva

Particolarmente forte è stato fin dall'antichità il legame fra geometria e arte: la decorazione dei vasi, i pavimenti a mosaico, motivi architettonici e decorativi, sia nelle arti maggiori che nell'artigianato di numerosi popoli (fig. 1), si ispirano alla geometria e sembrano utilizzarne alcuni risultati.

Figura 1
Un tappeto caucasico con motivi geometrici

Ma c'è un'epoca relativamente recente – il Rinascimento – in cui il legame diventa più forte: non solo l'arte riprende alcuni risultati matematici, ma anche i matematici sono sollecitati verso nuove ricerche dagli artisti. Ecco perché.

I pittori del Quattrocento e del Cinquecento si propongono di rappresentare la realtà così come essa ci appare: un oggetto a tre dimensioni deve essere disegnato in modo da farne risaltare lo spessore e una stanza deve dare l'impressione della profondità.

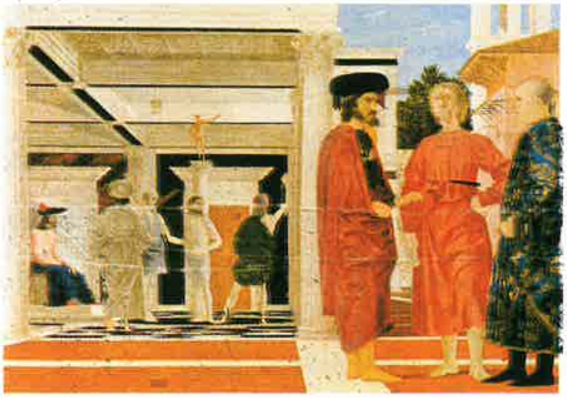
Gli artisti rinascimentali «inventano» dunque il modo di disegnare *in prospettiva*; in particolare, Leon Battista Alberti nel suo libro *Della pittura* (1435) stabilisce regole grafiche precise per realizzare un disegno in prospettiva.

E così Piero della Francesca, Masaccio, Leonardo da Vinci, Albrecht Dürer e tanti altri artisti si basano sulle regole della prospettiva per realizzare i loro capolavori (fig. 2).

È Gerard Desargues il primo matematico che, dopo aver studiato a fondo i lavori sul disegno in prospettiva, pubblica nel 1639 un libro in cui tratta matematicamente l'argomento.

Figura 2
Alcuni dipinti rinascimentali realizzati «in prospettiva»

2*a*. *Veduta di città ideale*, di anonimo italiano del XV secolo



2*b*. *La flagellazione*, di Piero della Francesca

2*c*. *La consegna delle chiavi*, di Piero Perugino

Nell'Ottocento si passa dalla geometria proiettiva alle trasformazioni geometriche

Ma si deve aspettare fino all'Ottocento per trovare ripresi e approfonditi, in Francia, gli studi matematici nati dalla prospettiva: è dovuto soprattutto a Gaspard Monge l'insegnamento della geometria *descrittiva*, vale a dire largamente basata sulle tecniche di proiezione rinascimentali. La geometria descrittiva viene così a costituire un corso fondamentale per i matematici e gli ingegneri francesi di quell'epoca.

Uno degli alunni di Monge, Jean-Victor Poncelet, riprende le idee del suo maestro, le riordina e le arricchisce, introducendovi l'idea del movimento progressivo e continuo delle figure; il suo libro *Trattato delle proprietà proiettive delle figure* (1822) segna la nascita della geometria proiettiva come ramo della matematica.

Contemporaneamente si sviluppa, in Germania, lo studio della geometria proiettiva con il metodo delle coordinate: particolarmente originali e innovativi sono i lavori di August Ferdinand Möbius e Julius Plücker, ripresi poi da Hermann Grassmann. Si arriva così a studiare le trasformazioni geometriche con i metodi della geometria analitica, cioè con delle equazioni.

Nello stesso periodo, in Italia, il matematico Luigi Cremona pubblica importanti contributi, fra cui il fondamentale *Sulle trasformazioni delle figure piane* (1865) in cui si legge: «Per mezzo di raggi ... si possono proiettare i punti di un piano sopra un secondo piano e così trasformare una figura data in quello in una figura data in questo».

Nasce così uno studio sistematico delle trasformazioni geometriche e degli *invarianti*, cioè delle proprietà delle figure che restano immutate quando si operano le trasformazioni.

Nell'ambito di questi studi sulle trasformazioni, si considerano anche le trasformazioni affini come caso particolare delle trasformazioni proiettive (come si è visto nel paragrafo 1).

Le trasformazioni affini sembrano dunque avere una storia assai «scialba», come se fossero offuscate dal ricco sviluppo delle trasformazioni proiettive, di cui sono un caso particolare.

Ma, alla fine dell'Ottocento, queste trasformazioni trovano uno sviluppo autonomo, legato ad importanti applicazioni: si scopre infatti che proprio con le trasformazioni affini si possono descrivere le deformazioni elastiche subite da un materiale in seguito a stiramenti o compressioni.

Nel Novecento si sviluppa lo studio delle isometrie

Insieme alle trasformazioni affini vengono studiate anche le *isometrie*, cioè i movimenti che cambiano solo la posizione di una figura nel piano, e in particolare le simmetrie.

Figura 3
La composizione di due simmetrie assiali con assi incidenti dà una rotazione

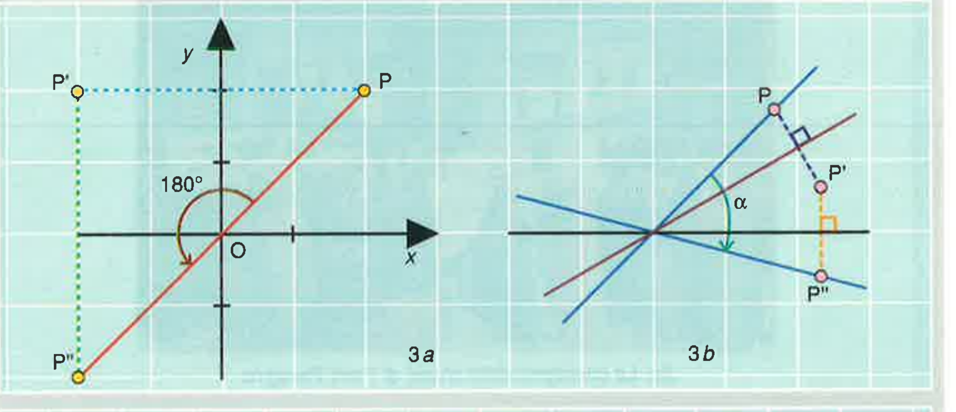
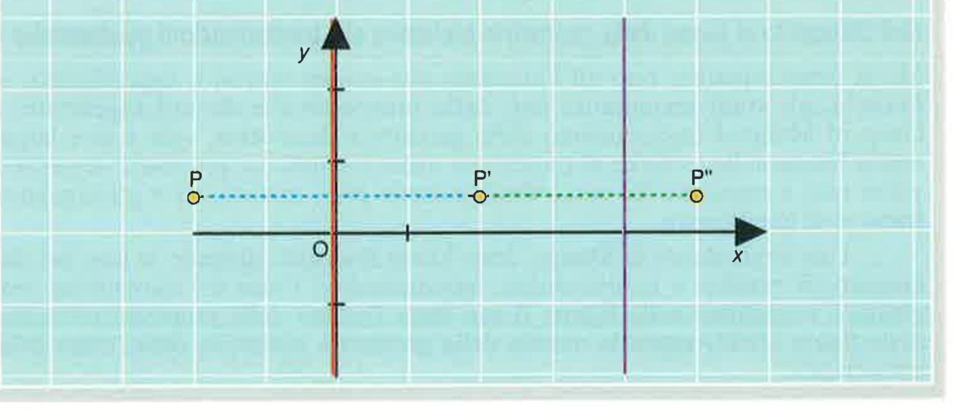


Figura 4
La composizione di due simmetrie assiali con assi paralleli dà una traslazione



Le isometrie assumono un ruolo importante non tanto nelle applicazioni, quanto in un'opera di revisione e riordinamento della geometria, legata alla fine dell'Ottocento al nome di Felix Klein e poi sviluppata nel Novecento.

In particolare, nel XX secolo si studia la *composizione di isometrie*, arrivando a risultati di grande eleganza e generalità, come quelli esposti dal matematico tedesco Friedrich Bachmann nel libro *Costruzione della geometria a partire dalla simmetria* (1959). Bachmann mostra fra l'altro come tutte le isometrie possono essere ottenute componendo più simmetrie assiali.

Per avere un'idea di questo risultato, si possono ricordare alcune considerazioni svolte in questo capitolo.

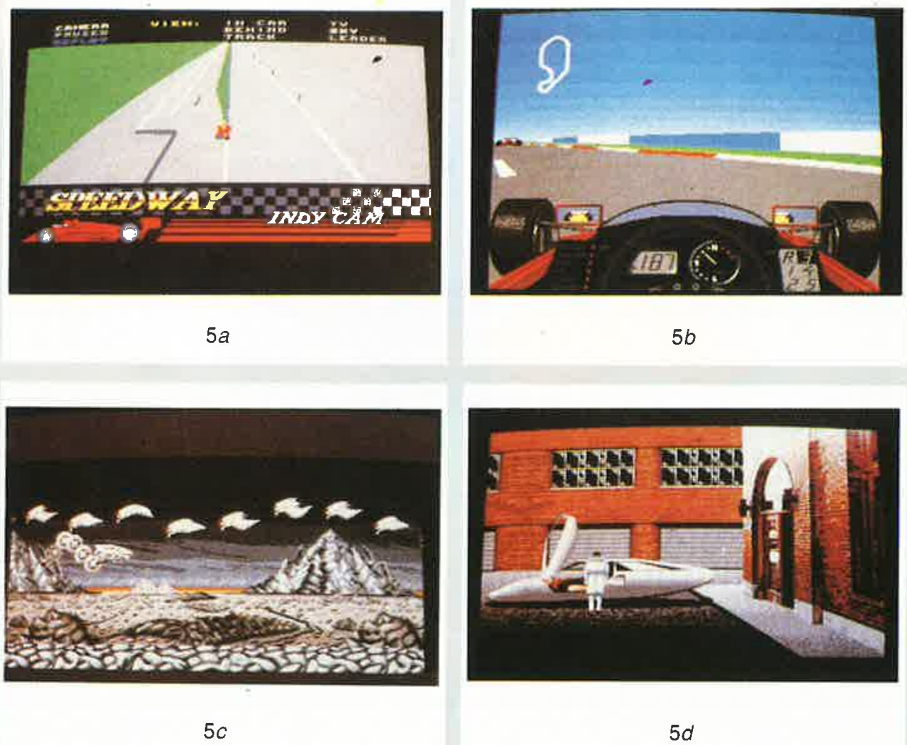
Si è trovato (fig. 3*a*) che, componendo la simmetria rispetto all'asse delle x con quella rispetto all'asse delle y, si ottiene la simmetria rispetto a O, che può essere anche considerata una rotazione di 180°.

E così, componendo due simmetrie assiali con assi incidenti (fig. 3*b*), si possono ottenere altre rotazioni.
Invece, componendo due simmetrie con assi paralleli, si ottengono le traslazioni (fig. 4).

Le trasformazioni e la grafica col calcolatore

Insieme allo sviluppo teorico delle isometrie si ritrova, nella seconda metà del nostro secolo, un rinnovato interesse per le trasformazioni affini e proiettive in seguito al diffondersi dei calcolatori elettronici e, quindi, della grafica col calcolatore.

Sono proprio queste trasformazioni che permettono, fra l'altro, di disegnare un palazzo e vedere l'impressione che darà quando sarà osservato da diversi punti di vista o di realizzare giochi elettronici con i loro strabilianti effetti prospettici (fig. 5).



5*a* 5*b*

5*c* 5*d*

Figura 5
Alcuni scenari di videogames

Le equazioni delle trasformazioni proiettive

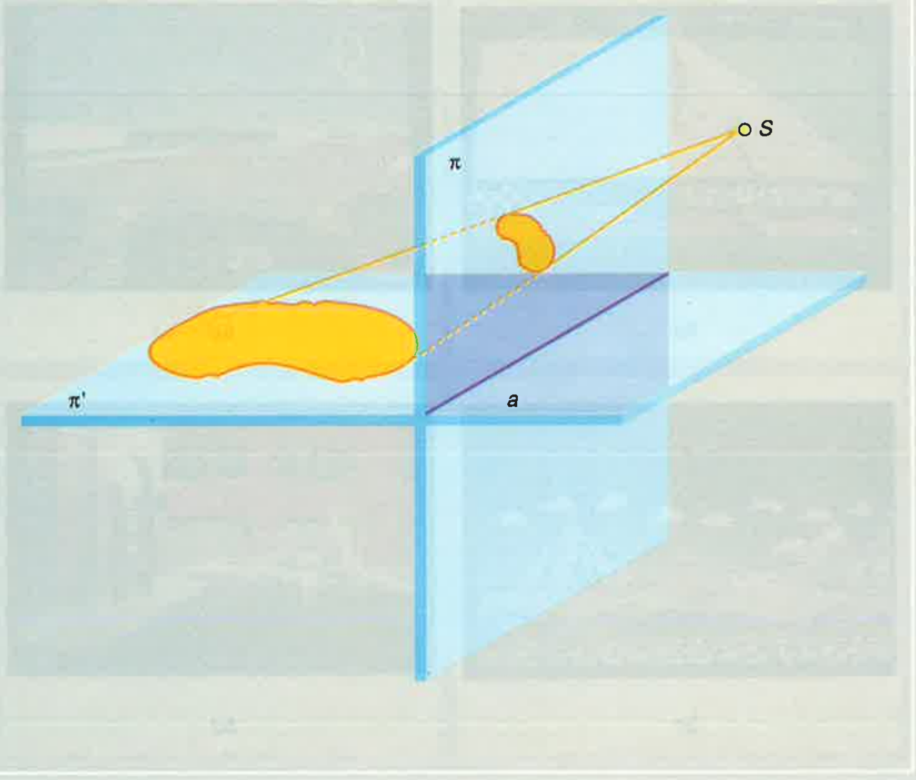
Un modello per realizzare una trasformazione proiettiva

Una trasformazione proiettiva – si è detto nel paragrafo 1 – si ottiene per esempio in questo modo: si espone un telaio quadrettato alla luce di un piccolo proiettore (vedi fig. 7, p. 220) e si esamina l'ombra prodotta su un tavolino; l'ombra è la figura trasformata del telaio in una *trasformazione proiettiva*, detta anche *proiettività*.

Per scoprire le relazioni che legano i punti del telaio alle ombre corrispondenti, conviene realizzare il seguente esperimento (fig. 1): si illumina con un proiettore S una lastra trasparente che è tagliata perpendicolarmente da un cartone; la lastra e il cartone realizzano due piani π e π', che si tagliano lungo la retta a.

Così, disegnando una figura su π, se ne potrà osservare l'ombra su π'.

Figura 1
Un modello per studiare le trasformazioni proiettive



Le rette limite di una proiettività

Si osserva, in particolare, che ogni retta r del piano π dà come ombra una retta r' del piano π' (fig. 2): r' si ottiene intersecando π' con il piano che contiene S e r.

Analogamente si può trovare che una retta r' di π' è l'ombra di una retta r di π.

Ci sono però due rette particolari (fig. 3):

- il piano che passa per S e è parallelo a π', taglia π lungo la retta h che non può avere ombra su π' (fig. 3*a*);
- il piano che passa per S e è parallelo a π, taglia π' lungo una retta k' che non può essere l'ombra di una retta di π (fig. 3*b*).

Le due rette h e k' prendono il nome di *rette limite*.

Le equazioni della proiettività

Finora la corrispondenza fra il piano π e il piano π' è stata stabilita solo dal modello di fig. 1 o dalla sua schematizzazione grafica (fig. 2); ma la stessa corrispondenza può anche essere descritta con delle equazioni che legano le coordinate $(x; y)$ di un punto A di π alle coordinate $(x'; y')$ della sua ombra A' su π'.

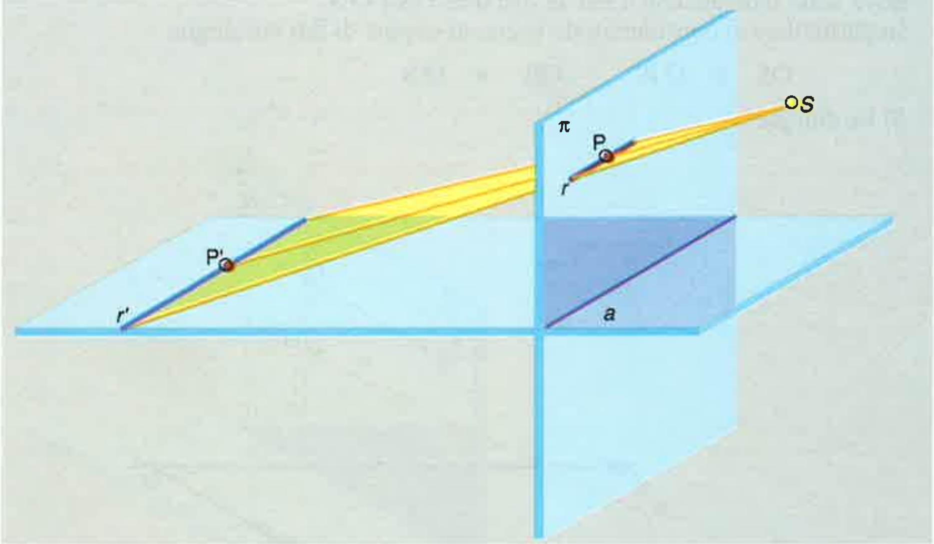


Figura 2
Una retta di π dà come ombra una retta di π'

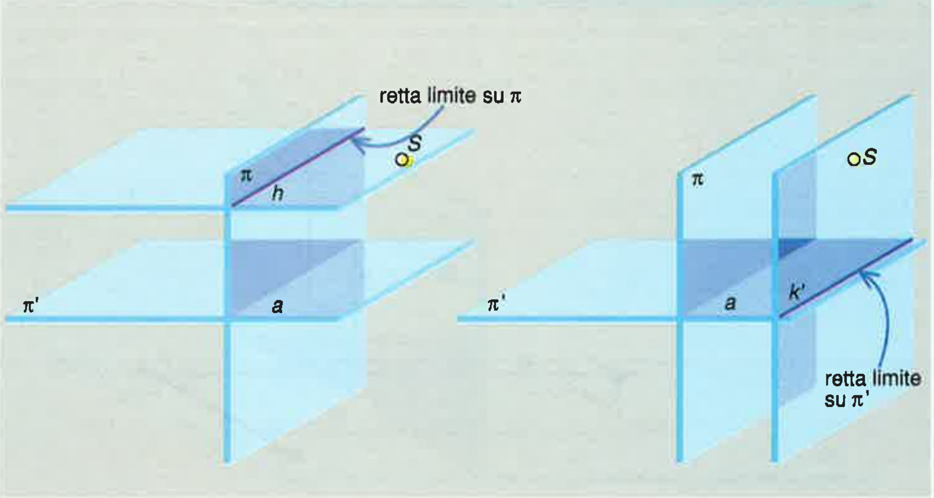


Figura 3
Le rette limite

Per questo occorre stabilire sui due piani due riferimenti cartesiani Oxy e O'x'y' che conviene scegliere nel modo seguente:

- *l'asse delle* x sul piano π è la retta limite h e *l'asse delle* x' sul piano π' è la retta limite k', orientate come in fig. 4;
- si considera il piano che passa per S e è perpendicolare sia a π che a π'; questo piano determina su π *l'asse delle* y e su π' *l'asse delle* y', orientati come in fig. 4.

Sui due assi il verso è scelto in modo che (fig. 4) un punto P che occupa il I quadrante del piano π dia un'ombra P' nel I quadrante del piano π'. La fig. 5 visualizza le coordinate di P(x; y) e P'(x'; y'):

$$x = \overline{OA} = \overline{PB} = \overline{ML} \quad y = \overline{OB} \quad x' = \overline{O'A'} = \overline{P'B'} \quad y' = \overline{OB'}$$

Ecco allora come si può ragionare per scoprire il legame fra le coordinate (x; y) e (x'; y') (fig. 6).

1. *Relazione fra* y *e* y'

Si fissa l'attenzione su due triangoli rettangoli simili (fig. 6*a*):

OBS e O'B'S

dove sono indicate con d e d' le distanze OS e O'S.
In particolare si considerano le seguenti coppie di lati omologhi:

OS e O'B' OB e O'S

Si ha dunque:

Figura 4
Il riferimento cartesiano su π e π'

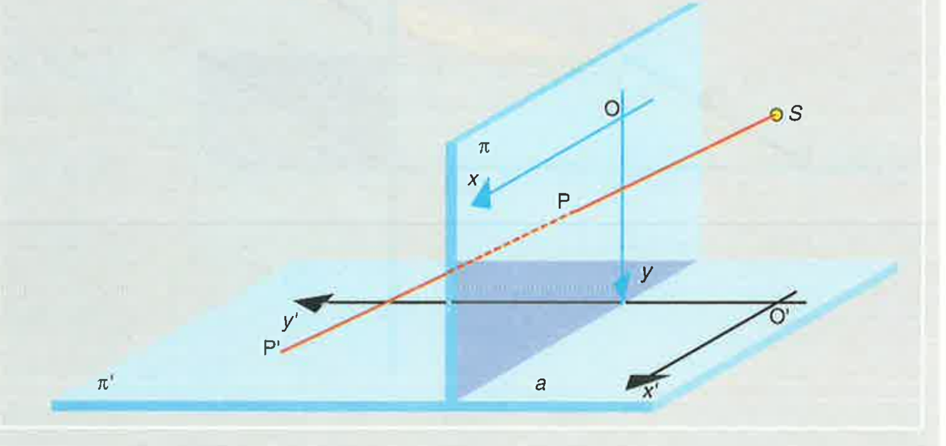
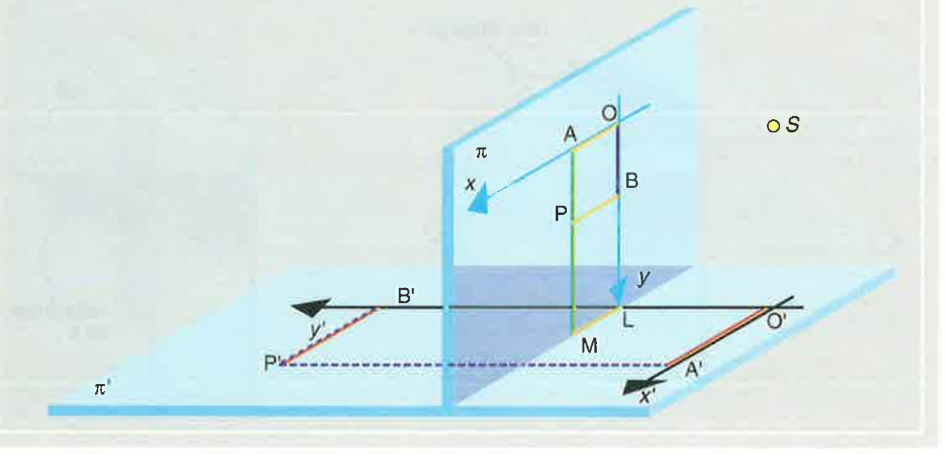


Figura 5
Le coordinate di un punto P e della sua ombra P'



$$\frac{O'B'}{OS}=\frac{O'S}{OB} \quad \text{ossia} \quad \frac{y'}{d}=\frac{d'}{y}$$

Ricavando quindi y', si trova:

$$y'=\frac{dd'}{y} \qquad (1)$$

2. *Relazione fra* x *e* x'
Si fissa l'attenzione su altri due triangoli rettangoli simili (fig. 6*b*):

$$O'B'P' \qquad e \qquad O'LM$$

dove O'L è ancora lungo d.
In particolare si considerano le seguenti coppie di lati omologhi:

$$P'B' \text{ e } LM \qquad O'B' \text{ e } O'L$$

Si ha:

$$\frac{P'B'}{LM}=\frac{O'B'}{O'L} \quad \text{ossia} \quad \frac{x'}{x}=\frac{y'}{d}$$

Ricavando quindi x', si trova:

$$x'=\frac{x}{d}\cdot y'$$

e, sostituendo a y' l'espressione (1) si ha:

$$x'=\frac{x}{d}\cdot\frac{dd'}{y} \quad \text{ossia} \quad x'=\frac{d'x}{y} \qquad (2)$$

Le (1) e le (2) insieme forniscono le *equazioni della proiettività*, che sono dunque le seguenti:

$$\begin{cases} x'=\dfrac{d'x}{y} \\[2ex] y'=\dfrac{dd'}{y} \end{cases} \qquad (3)$$

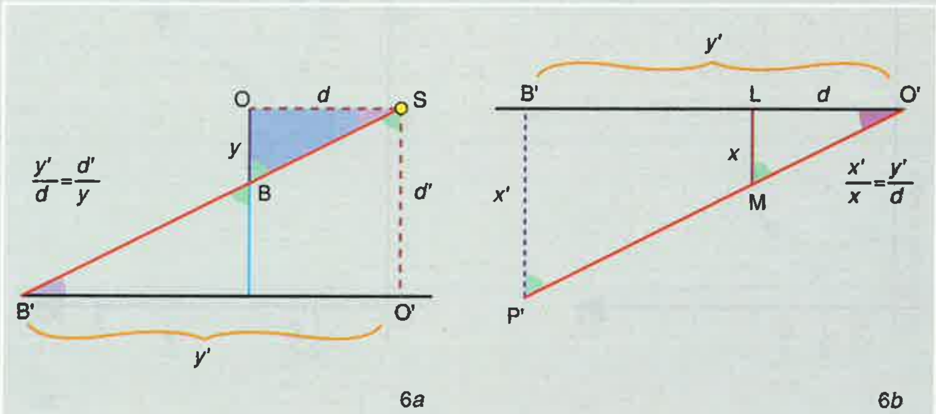


Figura 6
Le equazioni della proiettività

Costruire l'ombra di una figura applicando le equazioni della proiettività

Le equazioni appena trovate possono essere usate per determinare l'ombra di una figura, sostituendo l'esperimento con i calcoli. Ecco un esempio.

Sul piano π si disegna il quadrato che ha i seguenti vertici (fig. 7*a*):

$$A\left(\frac{1}{2};\frac{1}{4}\right)\quad B\left(\frac{3}{4};\frac{1}{2}\right)\quad C\left(\frac{1}{2};\frac{3}{4}\right)\quad D\left(\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right)$$

Questo quadrato viene proiettato sul piano π' da una sorgente di luce S che dista 1 metro dai due piani. Quale sarà l'ombra su π'? Non c'è bisogno di eseguire l'esperimento per disegnare l'ombra; basta valersi delle equazioni (3) in cui si ha:

$$d = d' = 1$$

Per esempio, l'ombra A' del punto A avrà le coordinate seguenti:

$$x' = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} = 2 \qquad y' = \frac{1}{\frac{1}{4}} = 4$$

Si ha dunque: A'(2; 4)

In modo del tutto analogo si possono ricavare le coordinate dei punti trasformati degli altri vertici del quadrato; si ha:

$$B'\left(\frac{3}{2};2\right)\quad C'\left(\frac{2}{3};\frac{4}{3}\right)\quad D'\left(\frac{1}{2};2\right)$$

Si ottiene così il disegno di fig. 7*b*.

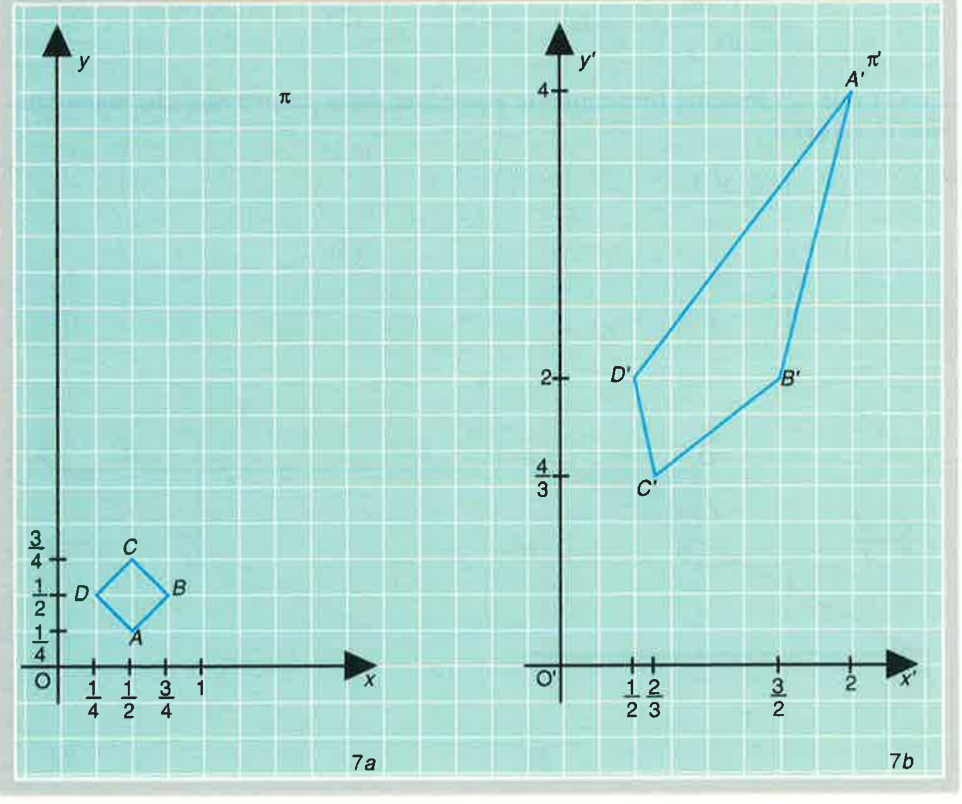


Figura 7
Costruire l'ombra di una figura valendosi delle equazioni della proiettività

Disegnare in prospettiva con le equazioni della proiettività

Le equazioni della proiettività possono essere anche utilizzate per un altro scopo: tradurre in formule il procedimento grafico seguito dai pittori per disegnare in prospettiva. Questo metodo è illustrato in fig. 8 da una stampa di Albrecht Dürer, celebre pittore tedesco del XV-XVI secolo.

Nella stampa di fig. 8 si riconosce subito il dispositivo di fig. 1 (p. 282), che viene ora utilizzato «in senso inverso»: i raggi di luce provengono dall'oggetto disposto su π' e attraversano il piano π prima di arrivare al punto S.

Perciò al dispositivo si possono sostituire le equazioni della proiettività (3) in cui ora sono note le coordinate $(x'; y')$ e si debbono ricavare le coordinate $(x; y)$; si dovranno cioè utilizzare *le equazioni della trasformazione inversa* e cioè:

$$\begin{cases} x = \dfrac{dx'}{y'} \\[2ex] y = \dfrac{dd'}{y'} \end{cases} \qquad (4)$$

Sono proprio formule come queste che permettono oggi di realizzare con il calcolatore dei disegni in prospettiva come quello di fig. 9, che può essere realizzato con il seguente procedimento.

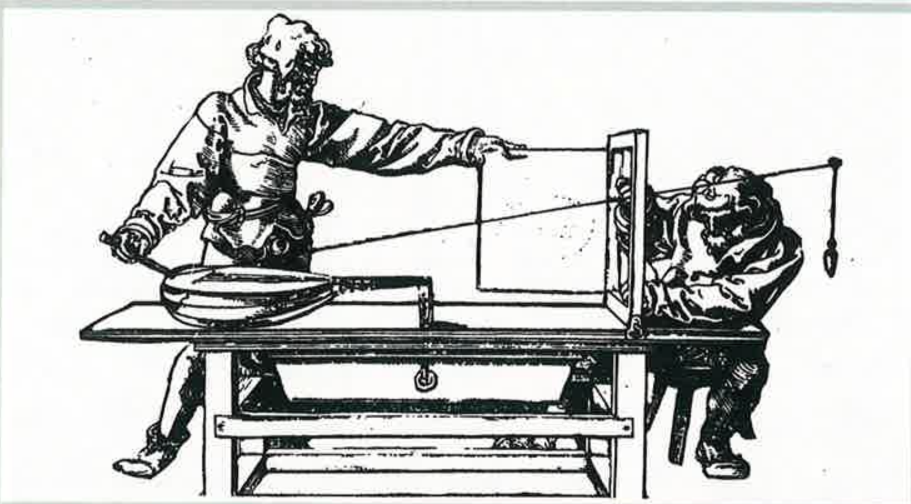


Figura 8
Il metodo per disegnare in prospettiva secondo Dürer

Si immagina che il campo reale sia sul piano π' disposto come in fig. 10, così i solchi paralleli diventano tante rette parallele all'asse delle y'. Il foglio da disegno è invece il piano π, disposto, per esempio, a 0,5 metri dall'occhio S, che guarda il campo dall'altezza di 2 metri. Così nelle equazioni (4) si considera:

$$d = \frac{1}{2} \qquad d' = 2$$

e le equazioni (4) diventano dunque:

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{x'}{y'} \\[2ex] y = \dfrac{1}{y'} \end{cases} \qquad (5)$$

Le rette del piano π' che si vogliono disegnare su π sono parallele all'asse delle y', rette che hanno dunque equazioni del tipo:

$$x' = a$$

Perciò un punto $P'(a; y')$, che percorre una di queste rette, avrà come corrispondente sul disegno un punto P che ha le seguenti coordinate:

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{a}{y'} \\ y = \dfrac{1}{y'} \end{cases} \quad \text{ossia} \quad \begin{cases} x = \dfrac{a}{2} \cdot \dfrac{1}{y'} \\ y = \dfrac{1}{y'} \end{cases}$$

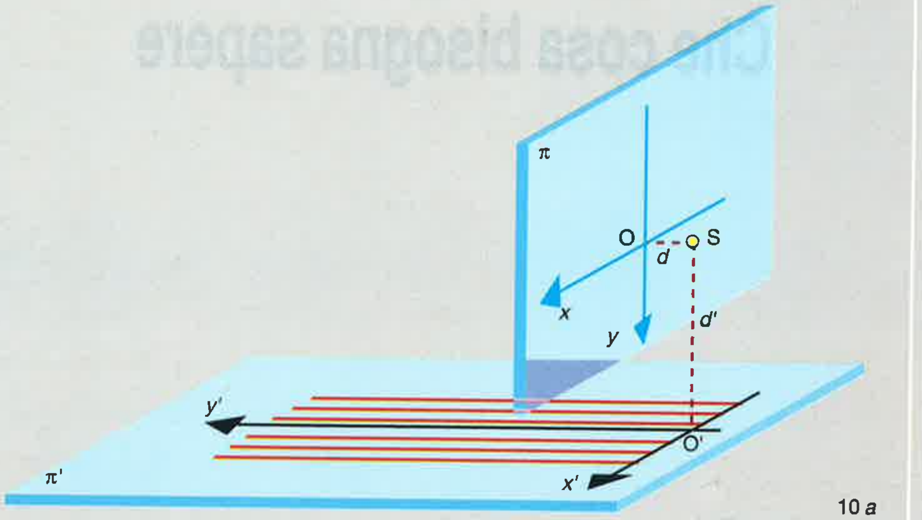
Figura 9
Irrigazione a goccia,
immagine realizzata col calcolatore da Tom Prentiss

Si trova così che il punto P ha le coordinate $(x; y)$ legate dall'equazione:

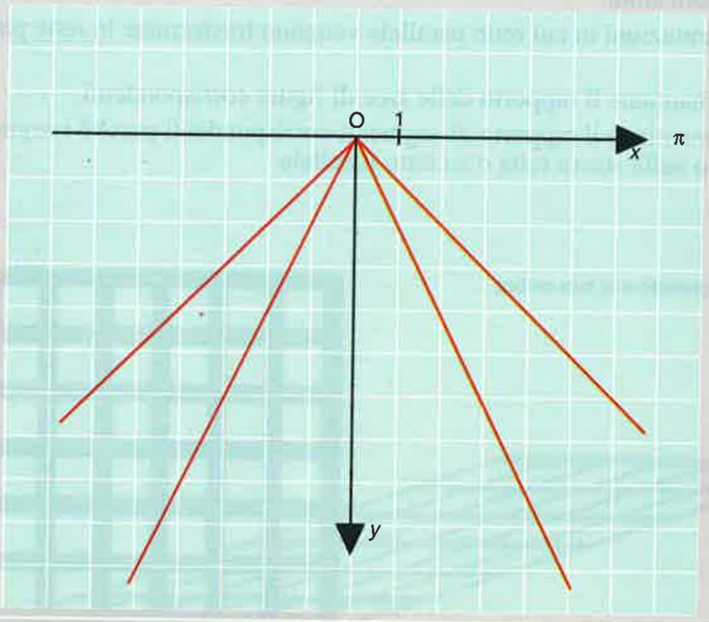
$$x = \frac{a}{2} y$$

Ecco qualche esempio che permette di tracciare il disegno di fig. 10*b*:

- la retta di equazione $x' = 0$ diventa $x = 0$



10 *a*



10 *b*

Figura 10
Disegno in prospettiva realizzato con le equazioni della proiettività

- la retta di equazione $x' = 1$ diventa $x = \frac{1}{2}y$ ossia $y = 2x$
- la retta di equazione $x' = 2$ diventa $x = y$ ossia $y = x$
- la retta di equazione $x' = -1$ diventa $x = -\frac{1}{2}y$ ossia $y = -2x$
- la retta di equazione $x' = 2$ diventa $x = -y$ ossia $y = -x$

Si trova dunque che *alle rette di π' parallele all'asse delle ordinate corrispondono, su π, rette passanti per l'origine O.*

Questa conclusione esprime matematicamente un ben noto fatto visivo: guardando da S i solchi paralleli sembrano incontrarsi in un punto.

Che cosa bisogna sapere

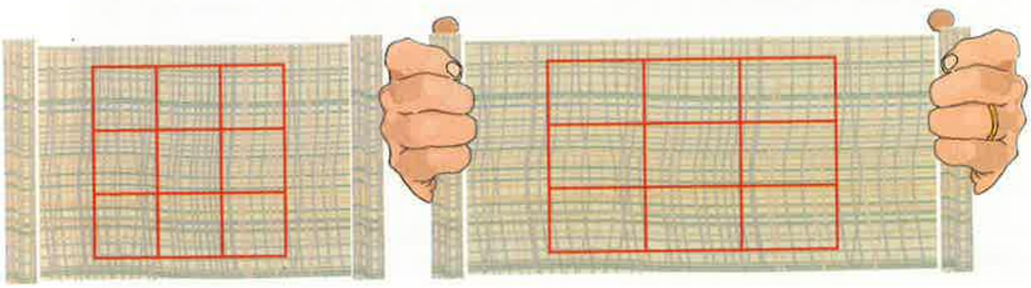
Trasformazioni affini

Sono trasformazioni in cui rette parallele vengono trasformate in rette parallele.
Invarianti:

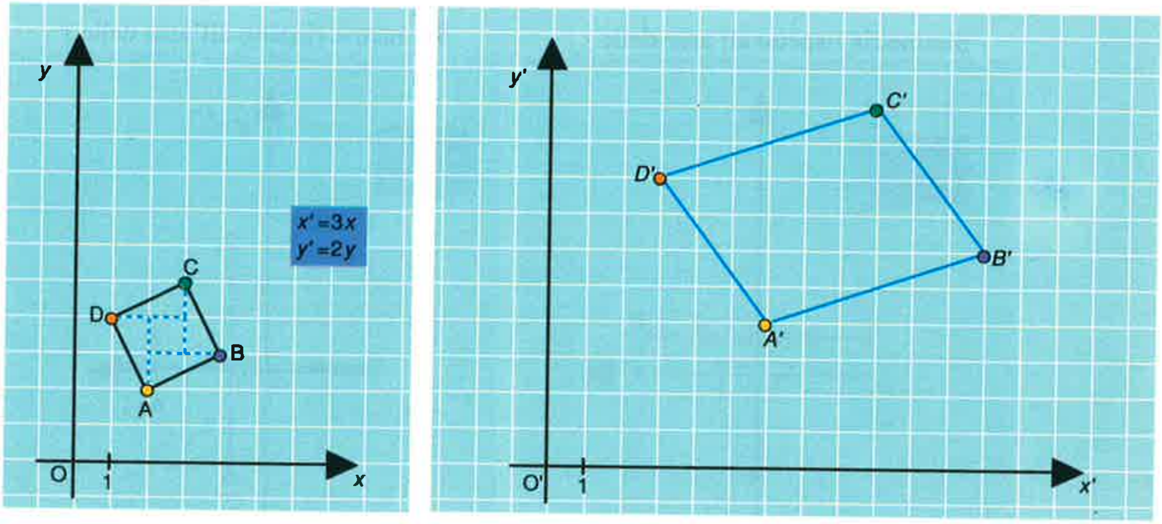
- Si mantiene il rapporto delle aree di figure corrispondenti.
- Si mantiene il rapporto di segmenti corrispondenti purché i segmenti si trovino sulla stessa retta o su rette parallele.

Un telaio quadrettato e la sua ombra

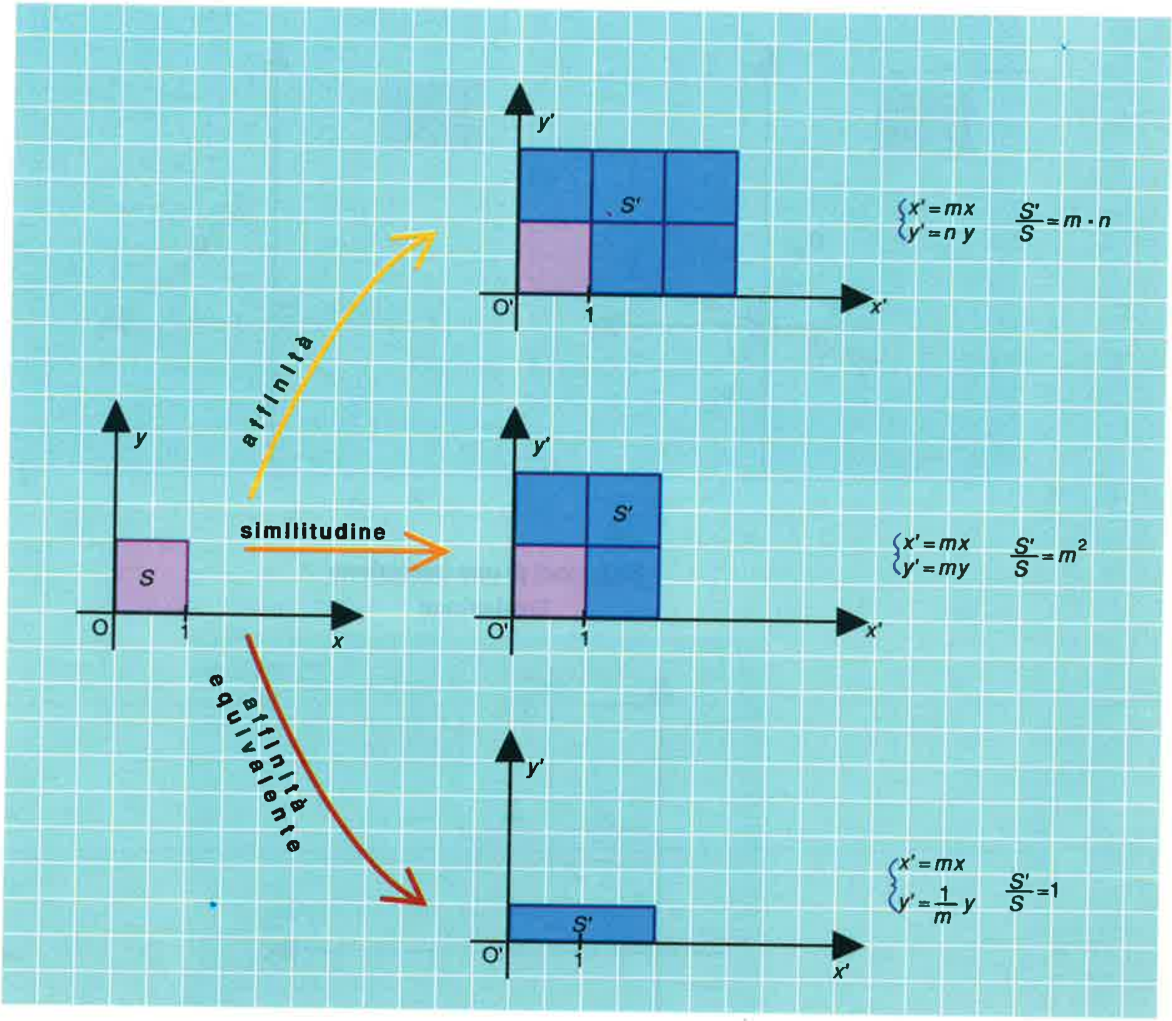
Una figura su una tela elastica che viene tirata



Un quadrato e il parallelogramma trasformato per affinità

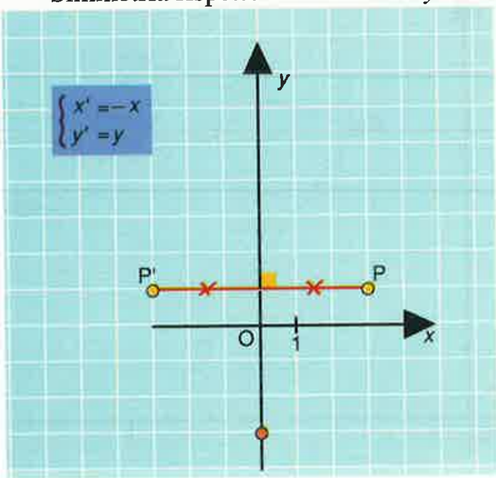


Aree di figure affini

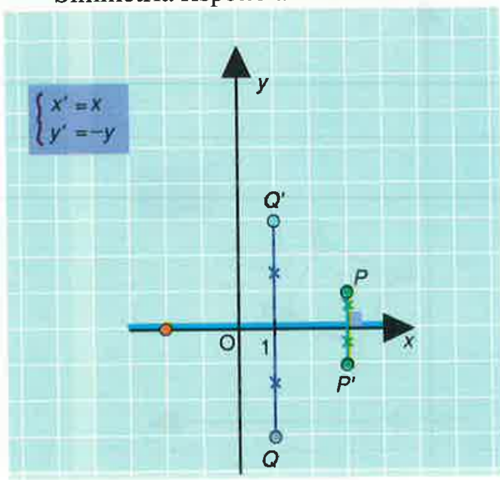


Equazioni di una simmetria

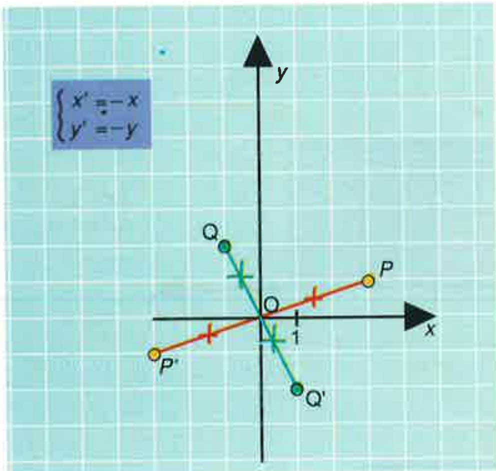
Simmetria rispetto all'asse delle y



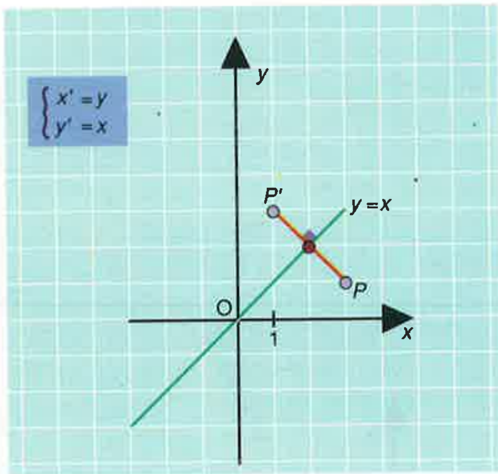
Simmetria rispetto all'asse delle x



Simmetria rispetto all'origine O

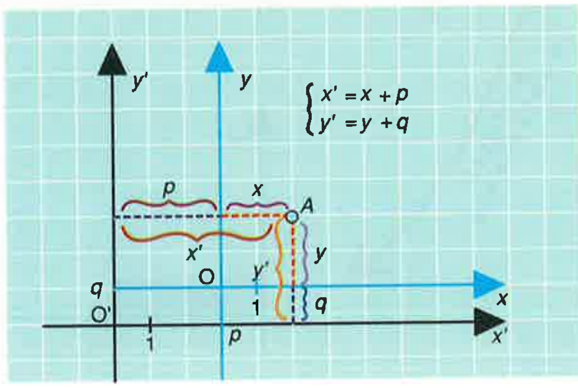


Simmetria rispetto alla bisettrice del I e III quadrante

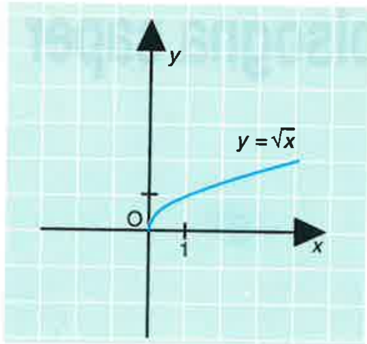


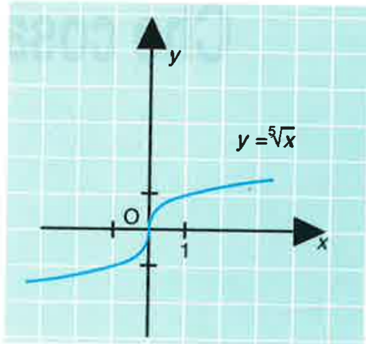
Equazioni di una traslazione

Traslazione

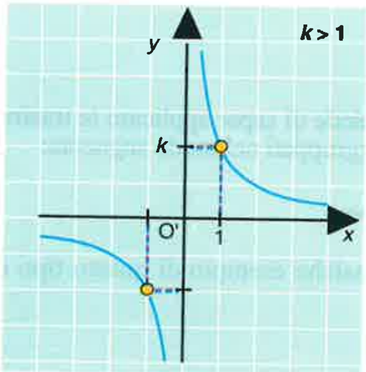


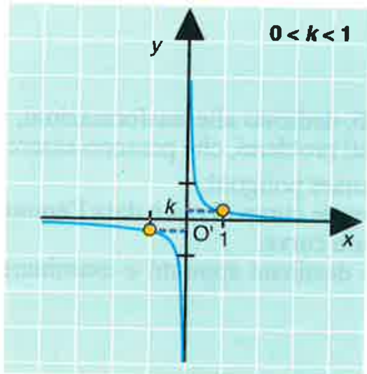
Curve esaminate con le trasformazioni

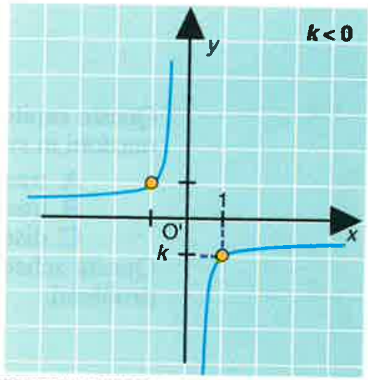




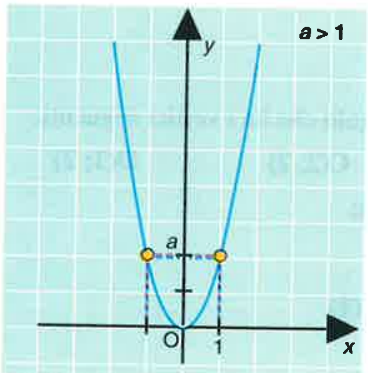
$y = \frac{k}{x}$

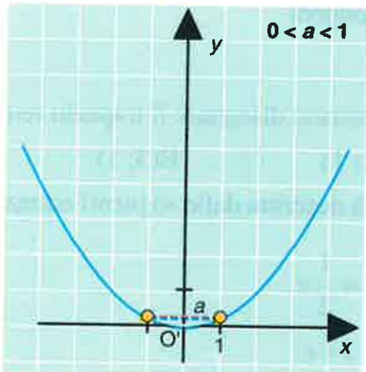


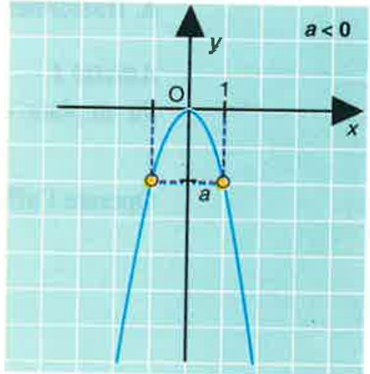




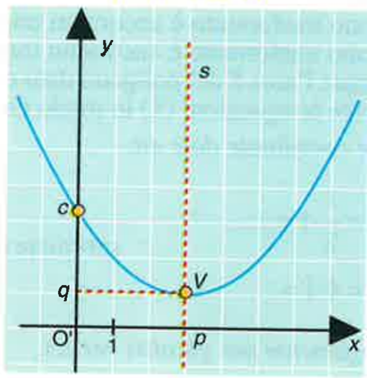
$y = ax^2$







$y = ax^2 + bx + c$



Che cosa bisogna saper fare

Questo capitolo 6, dedicato alle trasformazioni, richiede di saper applicare le trasformazioni in svariati problemi, che possono essere raggruppati nel modo seguente:

A. trasformare poligoni;
B. trasformare curve di cui è data l'equazione;
C. disegnare curve.

Questa scheda è destinata appunto a esaminare qualche esempio di questo tipo di problemi.

A. Trasformare poligoni

Attività 1

Su un piano cartesiano disegnare il trapezio rettangolo che ha i vertici seguenti:

A(1; 1) B(3; 1) C(2; 2) D(1; 2)

Operare l'affinità descritta dalle seguenti equazioni:

$$\begin{cases} x' = \dfrac{1}{2}x \\ y' = 4y \end{cases} \qquad (1)$$

Disegnare il poligono trasformato A'B'C'D' e risolvere i seguenti quesiti:

a. il poligono trasformato è ancora un trapezio?
b. il poligono trasformato è ancora un trapezio rettangolo?
c. determinare l'area S del poligono dato e l'area S' del poligono trasformato;
d. modificare le equazioni (1) in modo da ottenere un'affinità equivalente.

Il vertice A' ha le coordinate date da:

$$\begin{cases} x' = \dfrac{1}{2} \cdot 1 = \ldots\ldots \\ y' = 4 \cdot 1 = \ldots\ldots \end{cases}$$ *si ottiene dunque* A'(.........; ....)

Procedere analogamente per gli altri vertici.

Attività 2

Modificare le equazioni (1) in modo da ottenere una similitudine; disegnare il poligono trasformato e rispondere ai seguenti quesiti:

a. il poligono trasformato è ancora un trapezio rettangolo?
b. determinare l'area S del poligono dato e l'area S' del poligono trasformato.

Attività 3

Disegnare i poligoni che si ottengono trasformando il precedente trapezio ABCD con le seguenti isometrie:

a. simmetria rispetto all'asse delle y;
b. simmetria rispetto all'asse delle x;
c. simmetria rispetto all'origine O;
d. simmetria rispetto alla retta d'equazione $y = x$;
e. traslazione descritta dalle equazioni $\begin{cases} x' = x + 1 \\ y' = y + 2 \end{cases}$

B. Trasformare curve

Attività 4

Disegnare sul piano cartesiano la parabola di equazione $y = x^2$; disegnare le curve che si ottengono trasformando la curva data con una sola delle trasformazioni seguenti, determinandone vertice e asse di simmetria:

a. affinità che dimezza le ordinate;
b. traslazione di 2 unità lungo l'asse delle y verso l'alto;
c. traslazione di 4 unità lungo l'asse delle x verso destra.

Scrivere le equazioni delle curve ottenute.

a. *l'affinità è descritta dalle equazioni*:

$$\begin{cases} x' = \ldots\ldots \\ y' = \dfrac{1}{2} y \end{cases} \qquad (2)$$

Per trasformare l'equazione bisogna ricavare dalle (2) x *e* y *per poterle sostituire nell'equazione assegnata. Si ottiene l'equazione*:

$$y' = \frac{1}{2} x'^2$$

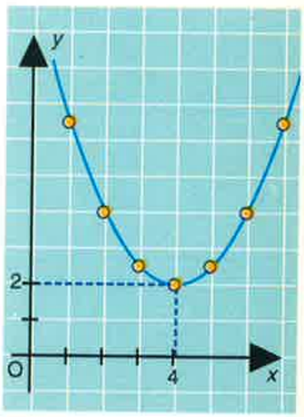
Attività 5

Disegnare sul piano cartesiano la parabola di equazione $y = x^2$; spiegare perché, operando successivamente le tre trasformazioni date nell'esercizio precedente, si ottiene la curva disegnata in fig. 1, che ha l'equazione seguente:

$$y = \frac{1}{2}(x-4)^2 + 2 \qquad \text{ossia} \qquad y = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 10$$

Determinare il vertice e l'asse di simmetria della curva trasformata.

Figura 1



C. Disegnare curve

Attività 6

Esaminare le seguenti equazioni:

$$y = -x^2 + 2x \qquad y = -x^3 + 2x^2 \qquad y = -x + 2 \qquad y = -x^2 + 2$$

Risolvere i seguenti quesiti:

a. indicare le equazioni che rappresentano parabole con l'asse di simmetria parallelo all'asse delle y, motivando la scelta;
b. disegnare le corrispondenti parabole.

a. *l'equazione di una parabola con l'asse di simmetria parallelo all'asse delle* y *è sempre del tipo:*

$$y = ax^2 + bx + c \qquad (3)$$

rappresenta quindi una parabola l'equazione

$$y = -x^2 + 2x$$

del tipo (3) *con:*

$$a = -1 \qquad b = \ldots\ldots \qquad c = \ldots\ldots$$

E analogamente rappresenta una parabola l'ultima equazione perché del tipo .... con ....
Non *rappresentano parabole le altre due equazioni perché ....*

b. *per disegnare la parabola d'equazione*

$$y = -x^2 + 2x$$

completare il seguente procedimento:

1. *si calcola l'ascissa* p *del vertice, data da:*

$$p = \frac{-\ldots\ldots}{2(\ldots\ldots)} = 1$$

2. *si calcola l'ordinata* q *del vertice, data da:*

$$q = -(\ldots\ldots)^2 + 2 \cdot \ldots\ldots = 1$$

3. *si disegna il vertice* V (......; ......) *e l'asse di simmetria* s;
4. *si determina qualche altro punto della parabola, per esempio a sinistra dell'asse di simmetria completando la seguente tabella:*

x	$y=-x^2+2x$	**Punti**
0	$y=-0^2+2\cdot 0=$......	A(......; ......)
–1	$y=$........................	B(......; ......)

5. *si rappresentano i punti e, raccordandoli, si disegna l'arco di parabola a sinistra dell'asse di simmetria;*
6. *si completa il grafico con il ramo simmetrico.*