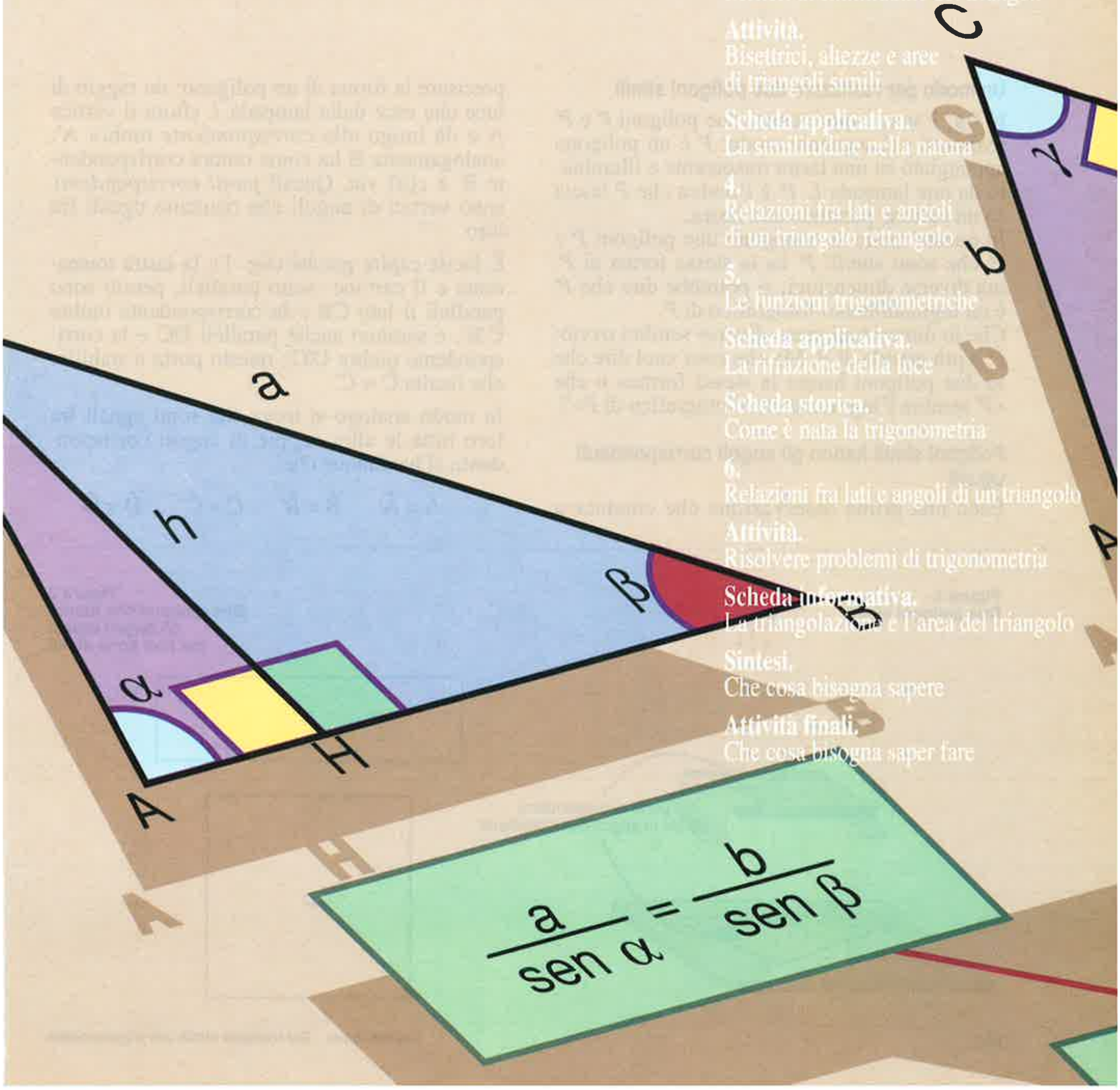
CAPITOLO TERZO

DAI TRIANGOLI SIMILI ALLA TRIGONOMETRIA



1 Poligoni simili

Un modo per realizzare due poligoni simili

In fig. 1 sono rappresentati due poligoni P e P' realizzati nel seguente modo: P è un poligono appoggiato su una lastra trasparente e illuminato da una lampada L, P' è l'ombra che P lascia su un cartone parallelo alla lastra.
In questo modo si ottengono due poligoni P e P' che sono *simili*: P' ha la stessa forma di P, ma diverse dimensioni; si potrebbe dire che P' è un ingrandimento fotografico di P.
Che le dimensioni siano diverse sembra ovvio: P' è più grande di P. Ma che cosa vuol dire che «i due poligoni hanno la stessa forma» o che «P' sembra l'ingrandimento fotografico di P»?

Poligoni simili hanno gli angoli corrispondenti uguali

Ecco una prima osservazione che conduce a precisare la forma di un poligono: un raggio di luce che esce dalla lampada L sfiora il vertice A e dà luogo alla *corrispondente* ombra A'; analogamente B ha come ombra corrispondente B' e così via. Questi *punti corrispondenti* sono vertici di angoli che risultano uguali fra loro.

È facile capire perché (fig. 1): la lastra trasparente e il cartone sono paralleli, perciò sono paralleli il lato CB e la corrispondente ombra C'B', e saranno anche paralleli DC e la corrispondente ombra D'C'; questo porta a stabilire che risulta $\hat{C} = \hat{C}'$.

In modo analogo si trova che sono uguali fra loro tutte le altre coppie di angoli corrispondenti; si ha dunque che:

$$\hat{A} = \hat{A}' \quad \hat{B} = \hat{B}' \quad \hat{C} = \hat{C}' \quad \hat{D} = \hat{D}'$$

Figura 1
Due poligoni simili

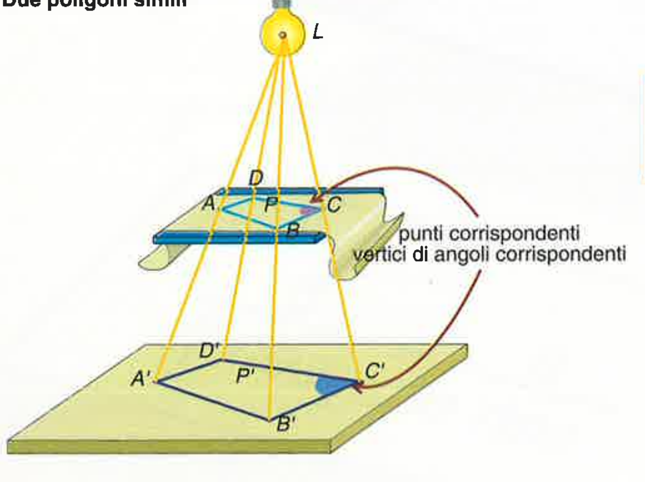
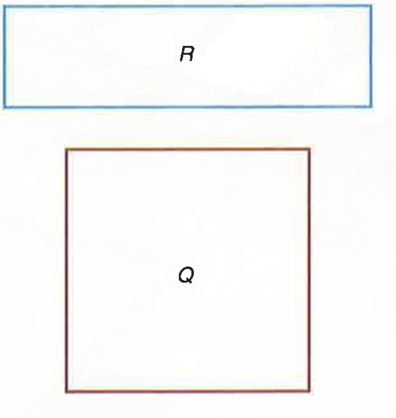


Figura 2
Due poligoni che hanno gli angoli uguali ma non sono simili



È fisso il rapporto fra i lati corrispondenti di poligoni simili

La precedente osservazione, e cioè che gli angoli corrispondenti sono uguali, non basta a precisare «la forma» di due poligoni: il quadrato Q e il rettangolo R di fig. 2 hanno gli angoli corrispondenti uguali fra loro, ma certamente R non si può ottenere proiettando Q su un piano parallelo.

È il teorema di Talete che conduce a scoprire l'altra proprietà che caratterizza due poligoni simili: *in due poligoni simili è costante il rapporto fra i lati corrispondenti, risulta cioè*:

$$\frac{A'B'}{AB}=\frac{B'C'}{BC}=\frac{C'D'}{CD}=\frac{D'A'}{DA}$$

Per esempio se A'B' è doppio di AB, anche B'C' è doppio di BC, e così via.

Ecco come si può ragionare per arrivare a questa conclusione, basandosi sulla fig. 3*a*, che idealizza l'esperienza di fig. 1: i raggi di luce si possono considerare come delle trasversali (LA', LB', etc.) che tagliano coppie di rette parallele come AB e A'B'; si ha allora, per il teorema di Talete:

$$\frac{LA'}{LA}=\frac{LB'}{LB}$$

Si ha pure, considerando le rette B'C' e BC, tagliate LB' e LC':

$$\frac{LB'}{LB}=\frac{LC'}{LC}$$

E, così continuando, si trova ancora una catena di rapporti tutti uguali, e cioè:

$$\frac{LA'}{LA}=\frac{LB'}{LB}=\frac{LC'}{LC}=\frac{LD'}{LD} \qquad (1)$$

Ma in questa catena di rapporti non compaiono i lati corrispondenti dei due poligoni; per questo bisogna fissare l'attenzione sulla fig. 3*b*: nel triangolo LA'B' si è tracciata da B la parallela a LA'; considerando le trasversali B'L e B'A', che tagliano le parallele LA' e BK si ha, sempre in base al teorema di Talete:

$$\frac{LB'}{LB}=\frac{A'B'}{A'K}$$

Infine, essendo A'K=AB perché lati opposti di un parallelogramma (fig. 3*c*), si arriva a scrivere:

$$\frac{LB'}{LB}=\frac{A'B'}{AB}$$

Ripetendo questo procedimento a partire dagli altri triangoli L'B'C', LC'D', LD'A' si trova che:

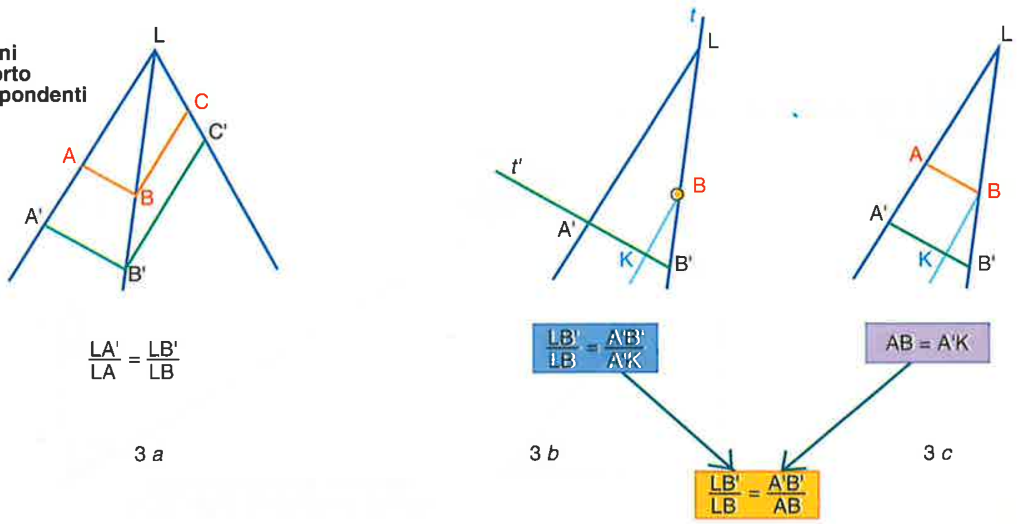
$$\frac{LC'}{LC}=\frac{B'C'}{BC} \quad \frac{LD'}{LD}=\frac{C'D'}{CD} \quad \frac{LA'}{LA}=\frac{D'A'}{DA} \qquad (2)$$

Infine, confrontando le (1) con le (2), si ottiene proprio:

$$\frac{B'C'}{BC}=\frac{B'C'}{BC}=\frac{C'D'}{CD}=\frac{D'A'}{DA}$$

È dunque costante il rapporto fra i lati corrispondenti; in questo caso si dice anche che *i lati corrispondenti sono proporzionali* o *in proporzione.*

Figura 3
In due poligoni simili il rapporto dei lati corrispondenti è costante



Per stabilire se due poligoni sono simili bisogna confrontare sia i lati che gli angoli

Si è già detto che non basta confrontare gli angoli per caratterizzare la forma di due poligoni: il quadrato e il rettangolo di fig. 2 hanno gli angoli ordinatamente uguali, ma non sono simili.

Ma non basta neppure il solo rapporto fra i lati corrispondenti per precisare la forma di due poligoni: in fig. 4 è rappresentato un quadrato Q e un rombo R che ha i lati doppi del quadrato. Le due figure non hanno certamente la stessa forma: R non si potrebbe mai ottenere proiettando Q su un piano parallelo.

Sono invece entrambe le condizioni – uguaglianza degli angoli corrispondenti *e* uguaglianza dei rapporti fra lati corrispondenti – che riescono a precisare la nozione intuitiva di «poligoni con la stessa forma», suggerita dall'ingrandimento fotografico.

Si è così condotti alla seguente definizione: *si dicono simili due poligoni che hanno ordinatamente uguali gli angoli e il rapporto fra i lati corrispondenti.*

Come esaminare due poligoni per riconoscere se sono simili

Raramente due poligoni da esaminare sono dati nella posizione illustrata in fig. 1, posizione che rende molto facile la ricerca di elementi corrispondenti (sono gli elementi del poligono P e le corrispondenti ombre). Ecco un esempio su cui riflettere.
In fig. 5 è rappresentata la seguente situazione: dopo aver disegnato sul piano di cartone l'ombra P', si è appoggiato anche P sullo stesso piano in una posizione qualunque.
I due poligoni P e P' sono ovviamente ancora simili, ma ora in che modo si riescono ad individuare gli elementi corrispondenti?
Conviene procedere nel modo seguente:
1. *Esaminare gli angoli*:
- si fissa l'attenzione su una coppia di angoli certamente uguali, per esempio $\hat{A}$ e $\hat{A}'$;
- si percorre ordinatamente il perimetro dei due poligoni, verificando che anche gli altri angoli corrispondenti siano uguali; nel caso dei poligoni di fig. 5, percorrendo il perimetro dei due poligoni in senso antiorario si trova:

$$\hat{A} = \hat{A}' \qquad \hat{B} = \hat{B}' \qquad \hat{C} = \hat{C}' \qquad \hat{D} = \hat{D}'$$

Figura 4
Due poligoni che hanno costante il rapporto dei lati corrispondenti, ma non sono simili

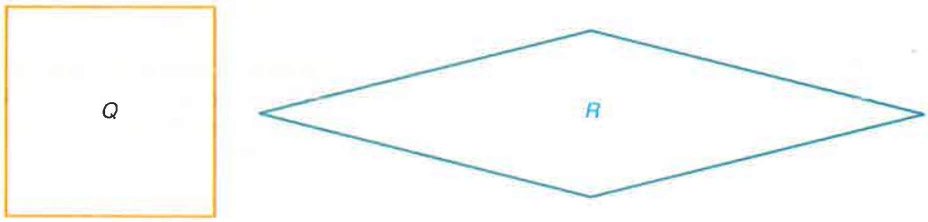
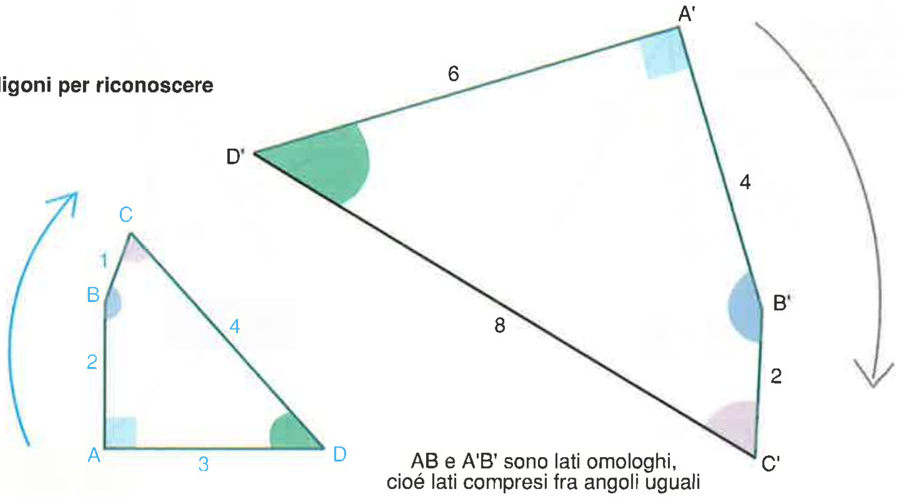


Figura 5
Esaminare due poligoni per riconoscere se sono simili



2. *Esaminare il rapporto fra coppie di lati omologhi*:

- si fissa l'attenzione su una coppia di lati che sono nella stessa posizione rispetto a coppie di angoli uguali; per esempio AB (compreso fra $\hat{A}$ e $\hat{B}$) e A'B' (compreso fra $\hat{A}'$ e $\hat{B}'$) e se ne calcola il rapporto, dato da:

$$\frac{A'B'}{AB}$$

Il valore ottenuto è il *rapporto fra due lati omologhi*, cioè fra due lati che si trovano nella stessa posizione;

- si percorre ordinatamente il perimetro dei due poligoni, verificando che il rapporto di tutte le coppie di lati omologhi sia costante; per i due poligoni di fig. 5 si ottiene per esempio:

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'D'}{CD} = \frac{D'A'}{DA} = 2$$

V e r i f i c h e

Conoscenze

① Qual è il procedimento per stabilire se due poligoni sono simili?

② In due poligoni simili come si trovano le coppie di lati omologhi?

Comprensione

① Spiegare perché non basta confrontare gli angoli di due poligoni per decidere se i poligoni sono simili; portare un esempio diverso da quello portato dal testo.

② Spiegare perché non basta confrontare i lati di due poligoni per decidere se i poligoni sono simili; portare un esempio diverso da quello portato dal testo.

Applicazioni

① Esaminare i poligoni rappresentati in fig. 6 e verificare che sono simili, spiegando il procedimento seguito.

② Esaminare i poligoni di fig. 7 e stabilire quali sono simili fra loro, spiegando il procedimento seguito.

Figura 6
Tre poligoni simili

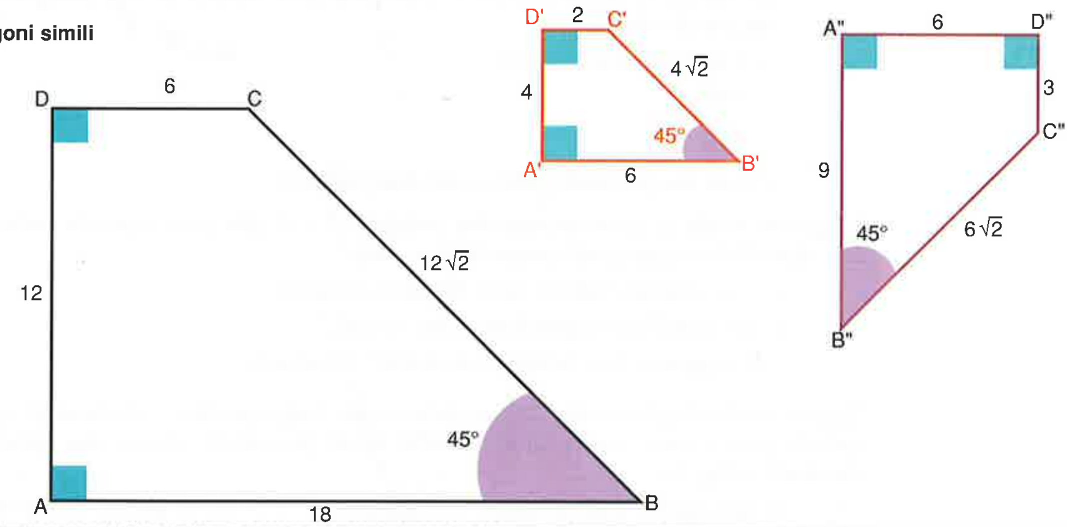
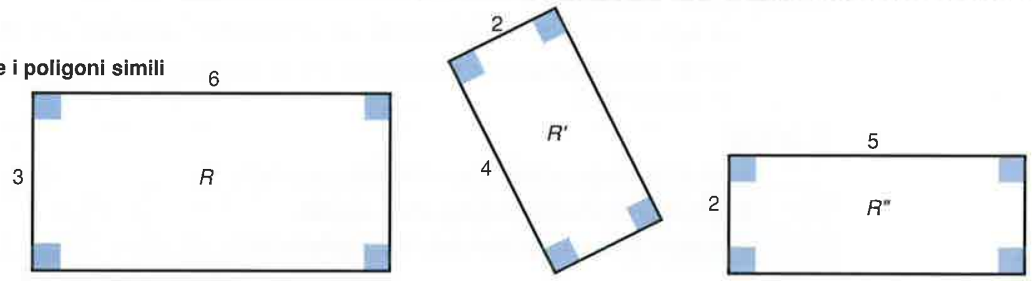


Figura 7
Riconoscere i poligoni simili



Poligoni omotetici e poligoni simili

Poligoni omotetici

In fig. 1*a* è ripreso in altro modo l'esperimento descritto nel paragrafo precedente:

- su un foglio trasparente *f* è appoggiato un poligono *P* di vertici A, B, C, D;
- quattro bastoncini, che passano per uno stesso punto O, bucano il foglio trasparente in A, B, C, D;
- un cartoncino, disposto parallelamente a *f*, viene bucato dai bastoncini in A', B', C', D', determinando un poligono *P*'.

Il collegamento fra i due poligoni *P* e *P*' può essere precisato nel modo seguente:

- al vertice A del poligono *P* corrisponde il vertice A' del poligono *P*' in modo che risulta:
  - A e A' allineati con O;
  - $\dfrac{OA'}{OA} = r$;
- al vertice B del poligono *P* corrisponde il vertice B' del poligono *P*' in modo che risulta:
  - B e B' allineati con O;
  - $\dfrac{OB'}{OB} = r$;
- e così via per tutti i vertici dei due poligoni.

In questo modo si costruiscono due poligoni *P* e *P*' che presentano le caratteristiche descritte nel paragrafo precedente e cioè:

a. i lati corrispondenti sono fra loro paralleli;
b. gli angoli corrispondenti sono uguali;
c. il rapporto fra i lati corrispondenti è costante.

Si può ora immaginare di «schiacciare» tutto l'apparecchio sul piano di cartone; questo può essere realizzato in molti modi possibili, alcuni dei quali sono mostrati in fig. 1*b*.

In tutti questi casi si hanno due poligoni *P* e *P*' ed un punto O, che presentano le stesse caratteristiche:

- ad ogni vertice di *P* corrisponde un vertice di *P*' allineato con O;
- ha un valore costante *r* il rapporto fra le distanze di vertici corrispondente dal punto O.

E quindi:

a. i lati corrispondenti sono fra loro paralleli;
b. gli angoli corrispondenti sono uguali;
c. vale *r* il rapporto fra i lati corrispondenti.

I due poligoni P e P' si dicono allora *omotetici*, da un termine greco che significa «stessa posizione».

Poligoni simili

Si può ora riprendere dal paragrafo precedente un'osservazione: il poligono P', che è omotetico a P, è ruotato come in fig. 2, fino a occupare la posizione P''; viene allora a mancare la proprietà (a), cioè i lati di P''non sono più paralleli a quelli del poligono P, ma rimangono sempre le altre due proprietà, cioè:

b. gli angoli corrispondenti sono uguali;

c. vale r il rapporto fra i lati corrispondenti.

In questo caso i due poligoni P e P'' si dicono *simili*.

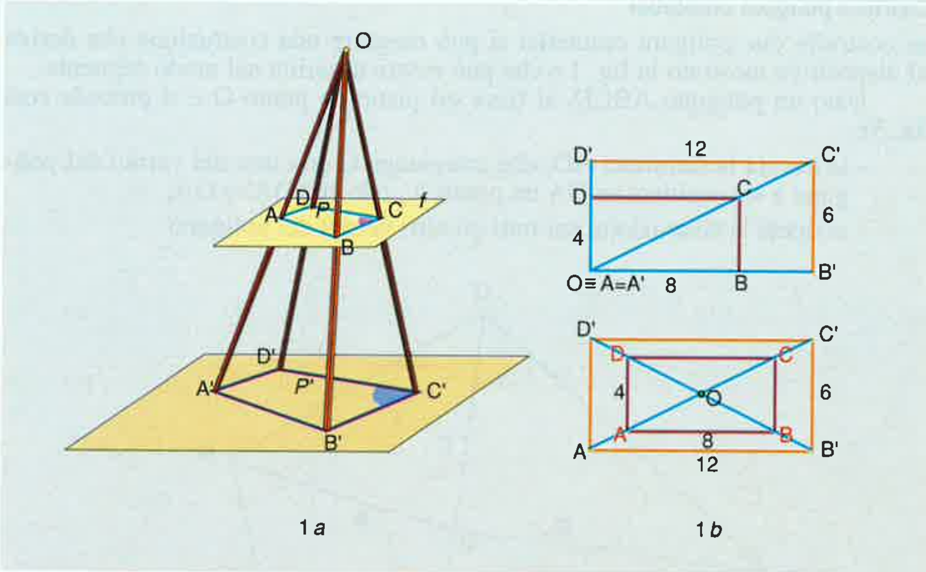


Figura 1
Poligoni omotetici

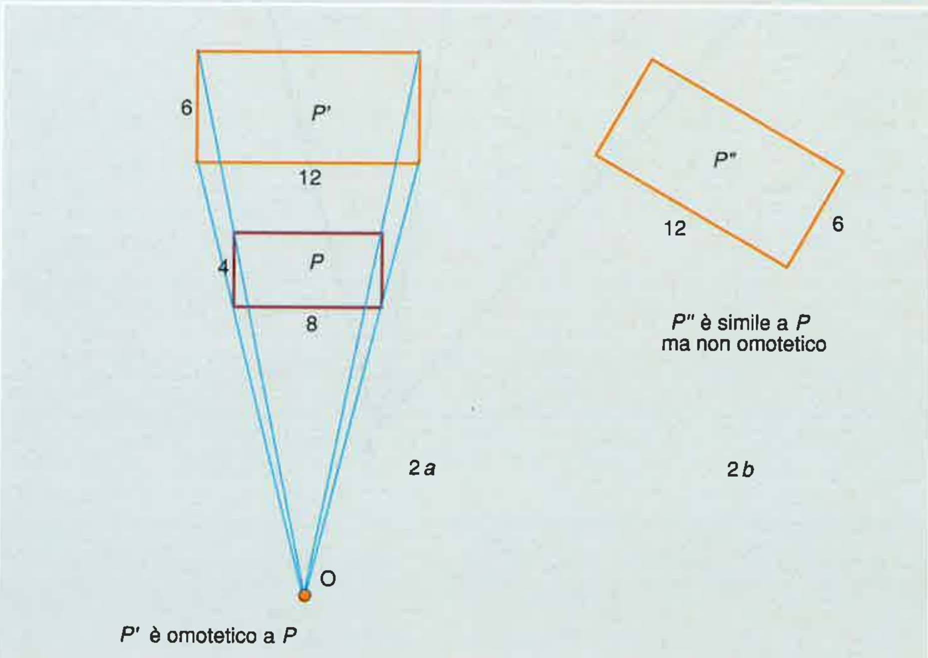


Figura 2
Poligoni omotetici e poligoni simili

Si può quindi dire che:

- *Due poligoni* omotetici *hanno stessa forma e stessa posizione, perché risulta che*:
  a. *i lati corrispondenti sono fra loro paralleli*;
  b. *gli angoli corrispondenti sono uguali*;
  c. *vale* r *il rapporto fra i lati corrispondenti.*

- *Due poligoni* simili *hanno solo la stessa forma, perché risulta che*:
  b. *gli angoli corrispondenti sono uguali*;
  c. *vale* r *il rapporto fra i lati corrispondenti.*

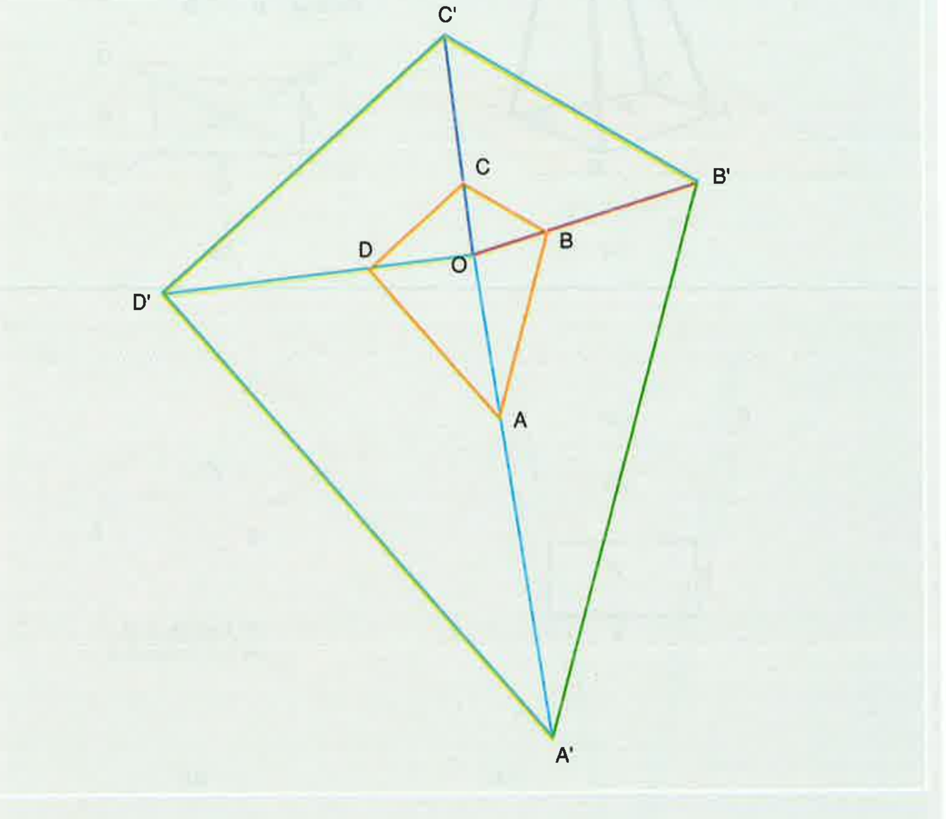
Costruire poligoni omotetici

Per costruire due poligoni omotetici si può eseguire una costruzione che deriva dal dispositivo mostrato in fig. 1 e che può essere descritta nel modo seguente.

Dato un poligono ABCD, si fissa sul piano un punto O e si procede così (fig. 3):

- si traccia la semiretta AO, che congiunge O con uno dei vertici del poligono e si considera su OA un punto A', tale che OA'=*r* OA;
- si ripete la costruzione per tutti gli altri vertici del poligono.

Figura 3
Costruire poligoni omotetici



2 Triangoli simili

Triangoli simili

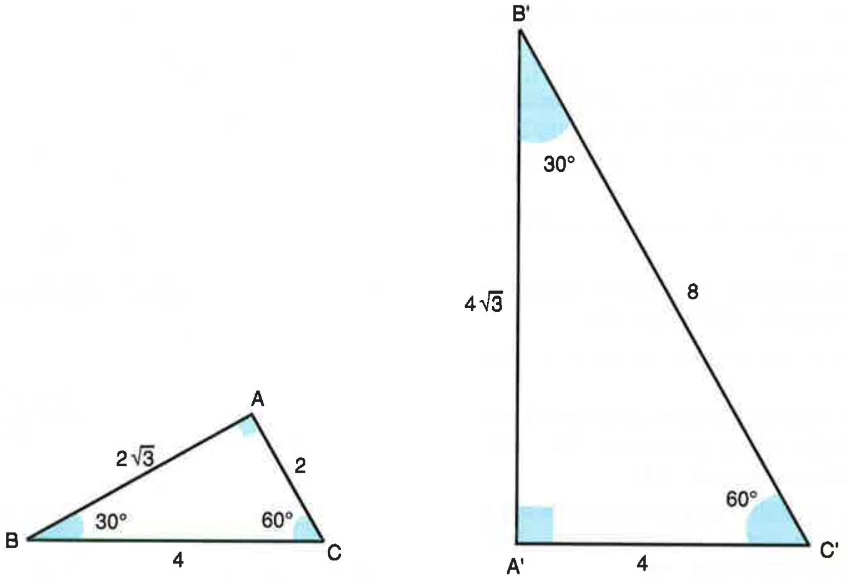
I triangoli sono i poligoni più semplici; si ha dunque che *due triangoli sono simili se hanno gli angoli ordinatamente uguali e i lati omologhi che mantengono lo stesso rapporto.*
Per esempio sono simili i due triangoli di fig. 1, dato che risulta:

$$\hat{A} = \hat{A}' = 90° \quad \hat{B} = \hat{B}' = 30° \quad \hat{C} = \hat{C}' = 60°$$

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{1}{2} \quad \frac{BC}{B'C'} = \frac{1}{2} \quad \frac{AC}{A'C'} = \frac{1}{2}$$

Per scoprire se due triangoli sono simili bisognerebbe dunque confrontare gli angoli e, inoltre, valutare il rapporto delle tre coppie di lati omologhi. Per i triangoli però non è necessario eseguire tutti questi calcoli; appositi criteri permettono di verificare se due triangoli sono simili con procedimenti più brevi.
Questi criteri, che sono presentati nel paragrafo seguente, sono tutti basati su due teoremi che verranno ora richiamati: il primo per riconoscere angoli uguali e il secondo per riconoscere segmenti proporzionali.

Figura 1
Due triangoli simili



Due teoremi fondamentali per la similitudine

Il primo teorema, presentato già nel primo volume, p. 195 («Applicazioni», n. 2), fornisce un criterio per riconoscere angoli uguali, ed è il seguente (fig. 2):

1. *Due rette parallele tagliate da una trasversale formano*:
   - *angoli alterni interni uguali*;
   - *angoli alterni esterni uguali*;
   - *angoli corrispondenti uguali.*

Il secondo teorema, che fornisce il criterio per riconoscere segmenti proporzionali, è il teorema di Talete, presentato nel capitolo secondo, p. 73, di questo volume e cioè (fig. 3):

2. *Se più rette parallele sono intersecate da due trasversali, si mantiene costante il rapporto dei segmenti corrispondenti.*

È opportuno sottolineare che in questi due teoremi si usa l'aggettivo «corrispondenti» con diversi significati:

- *angoli corrispondenti* sono una particolare coppia di angoli uguali formati da due rette parallele tagliate da una trasversale (fig. 2);
- *segmenti corrispondenti* sono segmenti tagliati sulle due trasversali dalle stesse parallele (fig. 3).

Un procedimento per costruire un triangolo simile a uno dato

I due teoremi precedenti conducono, in particolare, a scoprire un procedimento per disegnare un triangolo che è sicuramente simile ad un triangolo dato. Il procedimento è organizzato nel modo seguente.
Dato un qualunque triangolo ABC (fig. 4), dal punto D del lato AB si conduce la retta parallela al lato BC, fino ad incontrare AC nel punto E.
Il triangolo ADE così costruito è simile ad ABC.

Ecco come si dimostra che questo risultato è sempre vero (fig. 5).

1. ADE ha certamente gli angoli uguali a quelli del triangolo ABC, dato che:
   - l'angolo $\hat{A}$ è un angolo comune ai due triangoli;
   - risulta $\hat{D} = \hat{B}$ perché angoli corrispondenti formati dalle rette parallele DE, BC, tagliate dalla trasversale AB;
   - risulta $\hat{E} = \hat{C}$ perché angoli corrispondenti formati dalle rette parallele DE, BC, tagliate dalla trasversale AC.
2. ADE ha i lati proporzionali ad ABC dato che (fig. 5*a*):
   - risulta $\dfrac{AB}{AD} = \dfrac{AC}{AE}$ per il teorema di Talete;
   - tracciando da D la parallela a AC, fino a incontrare BC in K, si può applicare di nuovo il teorema di Talete (fig. 5*b*), trovando:
     $$\frac{AB}{AD} = \frac{BC}{KC}$$
   - risulta KC = DE come lati opposti di un parallelogramma e perciò si trova:
     $$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} = \frac{BC}{DE}$$

In fig. 6 si trova un'applicazione di questo procedimento. Nel triangolo ABC, si è scelto il punto D in modo che risulti:

Figura 2
Un teorema per riconoscere angoli uguali

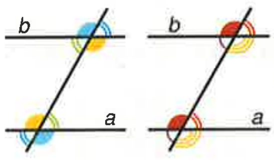
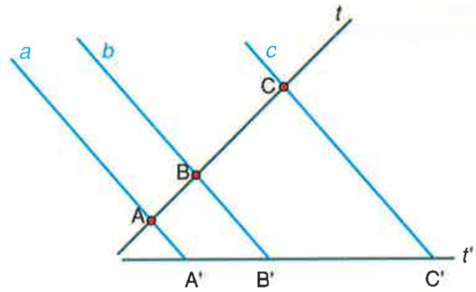


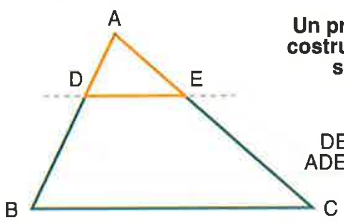
Figura 3
Il teorema per riconoscere segmenti proporzionali



$$\frac{AC}{AB} = \frac{A'C'}{A'B'}$$

AB, AC, A'B', A'C' segmenti proporzionali

Figura 4
Un procedimento per costruire un triangolo simile a uno dato



DE parallela a BC
ADE è simile ad ABC

$$\frac{AB}{AD} = 3 \quad \text{ossia} \quad AB = 3AD$$

Da D si è tracciata la parallela al lato BC fino ad incontrare AC in E, costruendo il triangolo ADE. La precedente dimostrazione assicura che risulta anche:

$$\frac{AC}{AE} = 3 \quad \text{ossia} \quad AC = 3AE$$

$$\frac{BC}{DE} = 3 \quad \text{ossia} \quad BC = 3DE$$

Verifiche

Conoscenze

① Quali sono i due teoremi fondamentali per lo studio della similitudine, e in particolare per lo studio dei triangoli simili?

② Quale procedimento si può seguire per costruire un triangolo simile ad uno dato?

Comprensione

① Spiegare perché il procedimento indicato nel testo per costruire un triangolo simile ad uno dato è certamente valido.

② Dato un triangolo ABC qualunque, come si potrebbe costruire un triangolo simile ma con i lati tripli?

Applicazioni

① Disegnare un qualunque triangolo ABC e costruire un triangolo ad esso simile e che abbia i lati lunghi $\frac{1}{4}$ di quelli del triangolo dato.

Figura 5
Dimostrare che i due triangoli sono simili

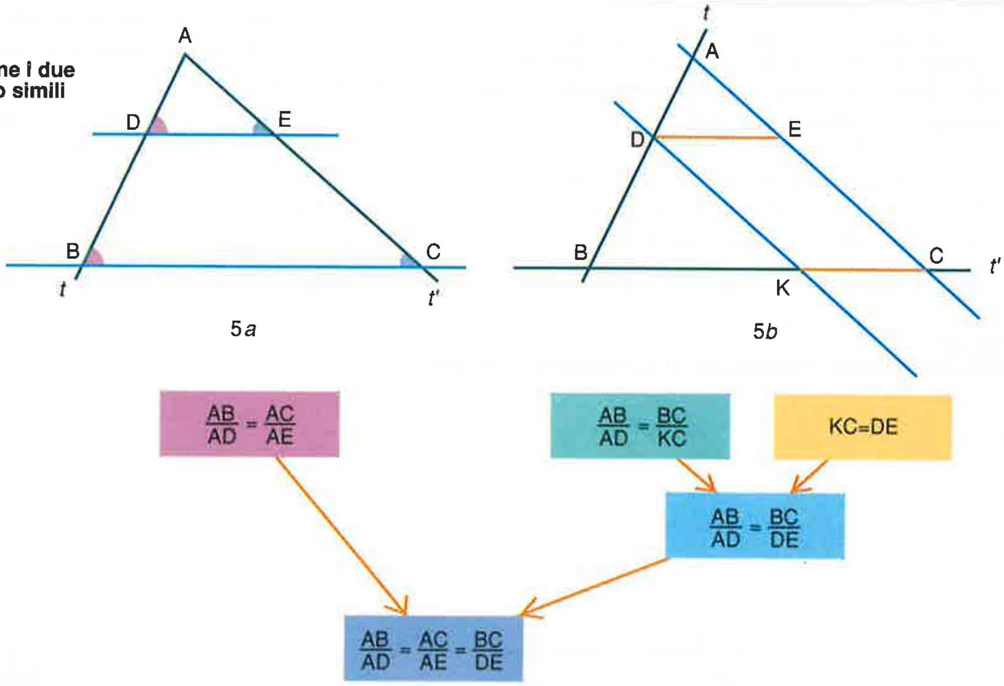
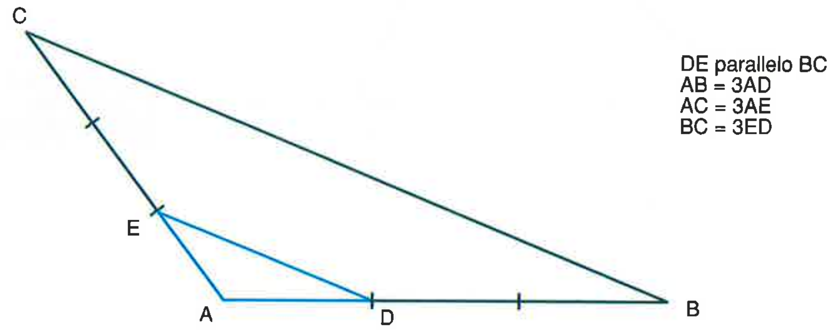


Figura 6
Due triangoli simili



3

I criteri di similitudine dei triangoli

I tre criteri di similitudine

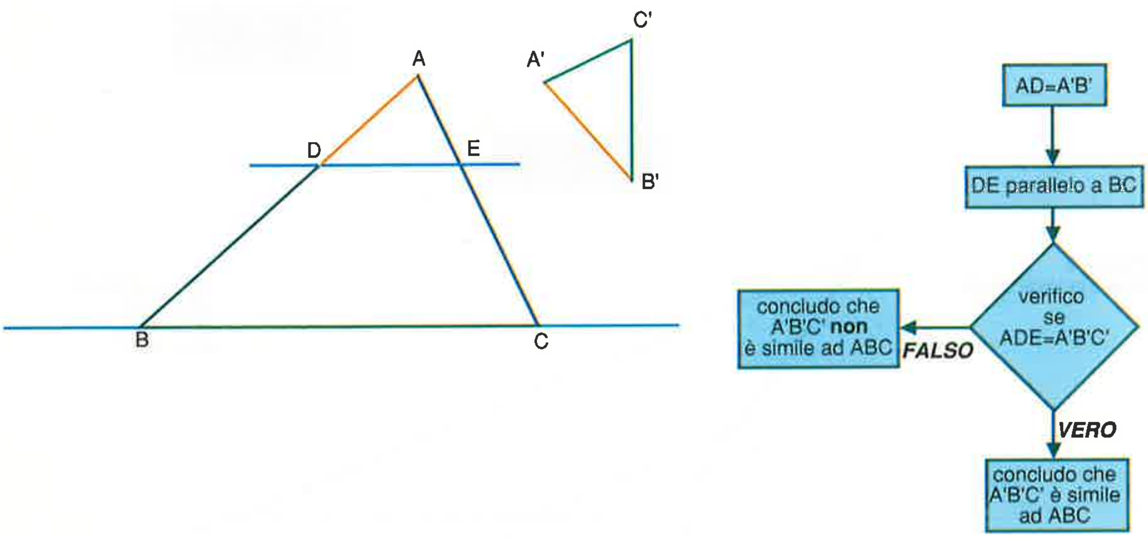
Per stabilire se due triangoli ABC e A'B'C' sono simili si può procedere così (fig. 1):

- si considera sul lato AB un segmento AD uguale a A'B' e da D si conduce la parallela a BC, fino a formare il triangolo ADE; questo triangolo è simile ad ABC, come si è visto nel paragrafo precedente;
- si verifica se il triangolo ADE è uguale ad A'B'C'; in caso affermativo, si può essere sicuri che A'B'C' è simile ad ABC.

In questo modo, invece di verificare se i due triangoli ABC e A'B'C' sono simili, si verifica se i due triangoli A'B'C' e ADE sono uguali. Per effettuare quest'ultima verifica ci si vale dei 3 criteri di uguaglianza dei triangoli richiamati qui sotto:

1. Due triangoli sono uguali se hanno ordinatamente uguali due lati e l'angolo fra essi compreso;
2. Due triangoli sono uguali se hanno uguali due angoli e il lato fra essi compreso;

Figura 1
Il procedimento per riconoscere se due triangoli sono simili



3. Due triangoli sono uguali se hanno uguali i tre lati.

Così, a partire dai 3 criteri di uguaglianza si ottengono i seguenti *3 criteri di similitudine:*

1. *Due triangoli sono simili se hanno due lati in proporzione e l'angolo compreso uguale*;
2. *Due triangoli sono simili se hanno ordinatamente uguali gli angoli*;
3. *Due triangoli sono simili se hanno i lati in proporzione.*

Dimostrazione del primo criterio di similitudine

Sono dati due triangoli ABC e A'B'C' (fig. 2), che hanno due lati in proporzione e l'angolo compreso uguale.
Per esempio si ha (fig. 2*a*):

$$\hat{A} = \hat{A}' \qquad \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = 3$$

Si avrà dunque:

$$AB = 3A'B' \qquad (1)$$
$$AC = 3A'C' \qquad (2)$$

Si costruisce il triangolo ADE con il procedimento che è già stato descritto nel paragrafo precedente (fig. 2*b*); risulta dunque:

- AD = A'B'

e quindi per la (1):

$$AB = 3AD$$

- DE parallela a BC

e quindi per il teorema di Talete:

$$AC=3AE$$

Confrontando con la (2) si ricava allora che deve essere anche:

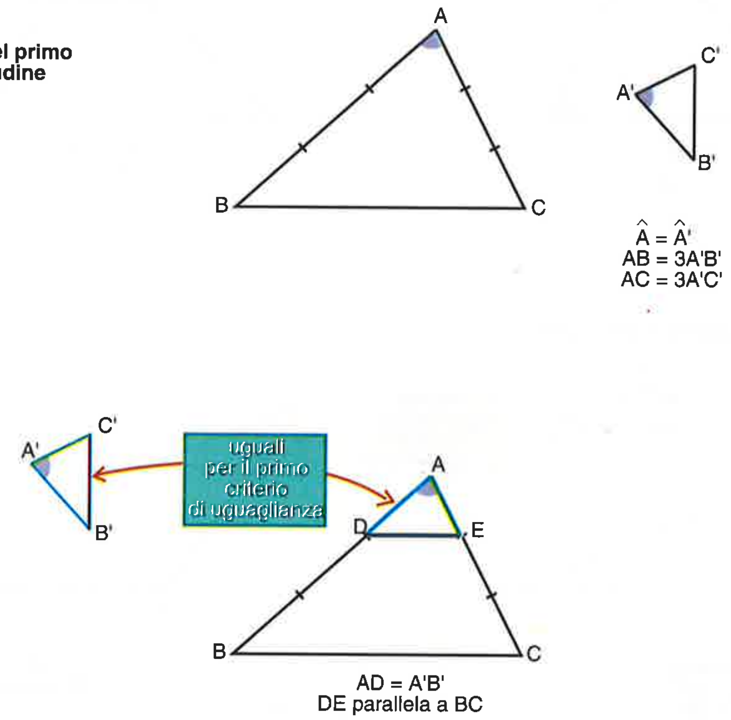
$$AE=A'C'$$

Così il primo criterio di uguaglianza dei triangoli garantisce che sono uguali A'B'C' e ADE, perché hanno uguali due lati (A'B'=AD e A'C'=AE) e l'angolo fra essi compreso $\hat{A}=\hat{A}'$).
Questo porta a concludere che sono certamente simili i due triangoli assegnati ABC e A'B'C'.
È chiaro che la stessa dimostrazione si può ripetere qualunque sia il valore del rapporto costante fra i due lati del triangolo e, dunque, dal primo criterio di uguaglianza dei triangoli si ottiene il primo criterio di similitudine.

Dimostrazione del secondo criterio di similitudine

Sono dati due triangoli ABC e A'B'C' (fig. 3), che hanno gli angoli ordinatamente uguali. Dato che la somma degli angoli interni di un triangolo vale 180°, basta fissare l'attenzione solo su due coppie di angoli.

Figura 2
Dimostrazione del primo criterio di similitudine



2*a*

2*b*

Per esempio si ha (fig. 3*a*):

$$\hat{A} = \hat{A}' \quad (3)$$
$$\hat{B} = \hat{B}' \quad (4)$$

e quindi anche:

$$\hat{C} = \hat{C}' \quad (5)$$

Si costruisce il triangolo ADE con il procedimento che è stato descritto nel paragrafo precedente (fig. 3*b*); risulta dunque:

- AD = A'B';
- DE parallela a BC e quindi $\hat{D} = \hat{B}$, che sono angoli uguali perché le rette DE, BC sono parallele e tagliate dalla trasversale AB.

Confrontando con la (4) si ricava allora che deve essere anche $\hat{D} = \hat{B}'$.
Così il secondo criterio di uguaglianza dei triangoli garantisce che sono uguali A'B'C' e ADE, perché hanno uguali due angoli ($\hat{A} = \hat{A}'$ e $\hat{D} = \hat{B}'$) e il lato fra essi compreso (AD = A'B').
Questo porta a concludere che sono simili i due triangoli assegnati ABC e A'B'C' e, dunque, dal secondo criterio di uguaglianza dei triangoli si ottiene il secondo criterio di similitudine.

Dimostrazione del terzo criterio di similitudine

Sono dati due triangoli ABC e A'B'C' (fig. 4), che hanno i tre lati in proporzione; per esempio si ha (fig. 4*a*):

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} = 3$$

Si avrà dunque:

$$AB = 3A'B' \quad (6)$$
$$AC = 3A'C' \quad (7)$$
$$BC = 3B'C' \quad (8)$$

Si costruisce ora il triangolo ADE con il procedimento descritto nel paragrafo precedente; risulta dunque (fig. 4*b*):

- AD = A'B', quindi per la (6) AB = 3AD;
- DE parallela a BC, perciò ABC simile a ADE.

Basandosi in particolare sull'applicazione illustrata in fig. 6 di p. 97, si trova che:

$$AC = 3AE \quad (7')$$
$$BC = 3DE \quad (8')$$

Figura 3
Dimostrazione del secondo criterio di similitudine

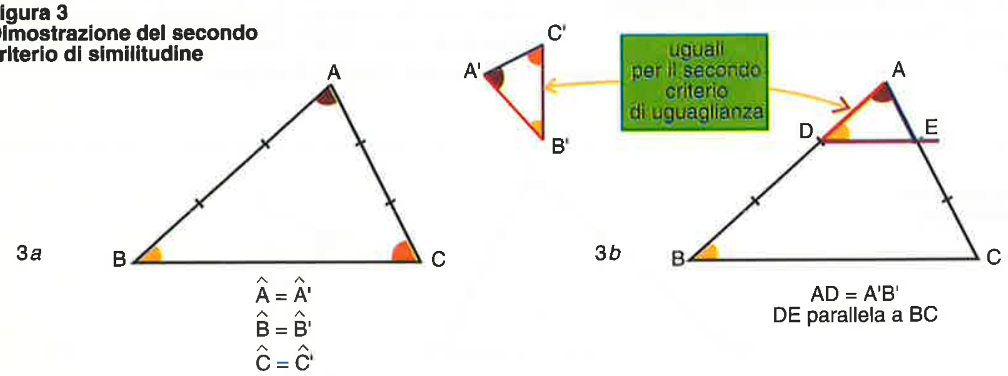
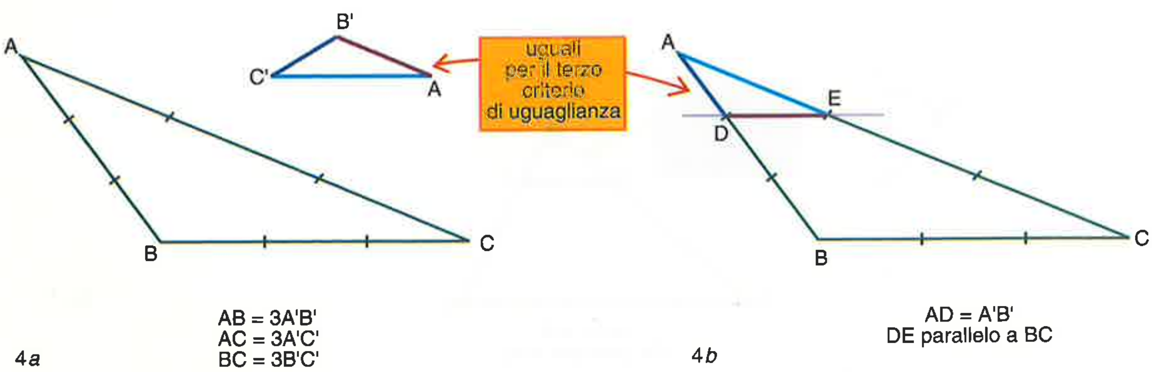


Figura 4
Dimostrazione del terzo criterio di similitudine



Confrontando poi le relazioni (7) e (7') si ha:

$$AE = A'C'$$

Infine, confrontando (8) e (8'), si ricava:

$$DE = B'C'$$

Così si trova che A'B'C' e ADE hanno i tre lati uguali e perciò il terzo criterio di uguaglianza garantisce che questi due triangoli sono uguali. Questo porta a concludere che sono certamente simili i due triangoli assegnati ABC e A'B'C'.
È chiaro che la stessa dimostrazione si può ripetere qualunque sia il valore del rapporto costante fra i due lati del triangolo e, dunque, dal terzo criterio di uguaglianza dei triangoli si ottiene il terzo criterio di similitudine.

Criteri di uguaglianza e di similitudine

La tabella A riassume le condizioni richieste dai criteri di uguaglianza e di similitudine, per riconoscere se due triangoli ABC e A'B'C' sono uguali o simili. Si osserva così che si passa da un criterio di uguaglianza all'analogo criterio di similitudine togliendo una condizione.

Verifiche

Conoscenze

① Esporre i tre criteri di similitudine dei triangoli.

Comprensione

① Spiegare come è organizzata la dimostrazione dei tre criteri di similitudine dei triangoli.

② Spiegare perché da ogni criterio di uguaglianza scaturisce un criterio di similitudine dei triangoli.

Applicazioni

① Due triangoli rettangoli hanno i cateti in proporzione; questo basta per dire che i due triangoli sono simili?

② Due triangoli isosceli hanno gli angoli al vertice uguali; questo basta per dire che i due triangoli sono simili?

Tabella A
I criteri di uguaglianza e di similitudine

Criteri di uguaglianza	Criteri di similitudine
1. Un angolo uguale e i lati che lo comprendono uguali *3 condizioni* $\begin{cases} \hat{A} = \hat{A}' \\ AB = A'B' \\ AC = A'C' \end{cases}$	**1.** Un angolo uguale e i lati che lo comprendono in proporzione *2 condizioni* $\begin{cases} \hat{A} = \hat{A}' \\ \dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{AC}{A'C'} \end{cases}$
2. Uguali due angoli e il lato fra essi compreso *3 condizioni* $\begin{cases} \hat{A} = \hat{A}' \\ \hat{B} = \hat{B}' \\ AB = A'B' \end{cases}$	**2.** Uguali due angoli *2 condizioni* $\begin{cases} \hat{A} = \hat{A}' \\ \hat{B} = \hat{B}' \end{cases}$
3. I tre lati uguali *3 condizioni* $\begin{cases} AB = A'B' \\ AC = A'C' \\ BC = B'C' \end{cases}$	**3.** I tre lati in proporzione *2 condizioni* $\begin{cases} \dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{AC}{A'C'} \\ \dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{BC}{B'C'} \end{cases}$

Bisettrici, altezze e aree di triangoli simili

Le bisettrici di due triangoli simili

Attività 1

In fig. 1 sono rappresentati due triangoli simili ABC e A'B'C'; l'angolo $\hat{B}$ è stato diviso in due parti uguali, tracciando la bisettrice BK; analogamente, nel triangolo A'B'C', si è tracciata la bisettrice B'K'.

Osservando la figura, completare le seguenti frasi:

- Dato che i due triangoli ABC, A'B'C' sono ...., risulta:

  $\hat{A}$ = ... = $\hat{C}'$ .... = ...

- Anche i due triangoli ABK e A'B'K' sono .... per il .... criterio di similitudine, perché hanno:

  $\hat{A} = \hat{A}'$ perché ....

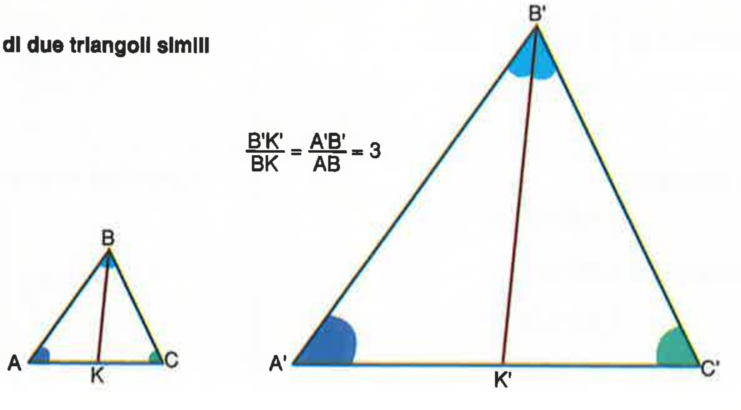
  $A\hat{B}K = A'\hat{B}'K'$ perché ....

- Dato che i due triangoli ABK e A'B'K' sono simili, avranno i .... in proporzione; perciò risulta:

$$\frac{B'K'}{BK} = \frac{A'B'}{AB} = 3$$

- In fig. 1, il triangolo A'B'C' ha i lati tripli di quelli del triangolo ABC; perciò anche la bisettrice B'K' è .... della bisettrice BK.

Figura 1
Le bisettrici di due triangoli simili



Le altezze di due triangoli simili

Attività 2

In fig. 2 sono rappresentati due triangoli simili ABC e A'B'C'; dal vertice B si è tracciata l'altezza BH nel triangolo ABC e, nel triangolo A'B'C', si è tracciata l'altezza B'H'.

Osservando la figura, completare le seguenti frasi:

- Dato che i due triangoli ABC, A'B'C' sono ...., risulta:

  $\hat{A}$ = ... = $\hat{C}'$ .... = ...

- Anche i due triangoli ABH e A'B'H' sono .... per il .... criterio di similitudine, perché hanno:

  $\hat{A}$ = ... perché ....

  $\hat{H}$ = ... perché ....

- Dato che i due triangoli ABH e A'B'H' sono simili, avranno i .... in proporzione; perciò risulta:

$$\frac{B'H'}{BH} = \frac{A'B'}{AB} = 3$$

- In fig. 2, il triangolo A'B'C' ha i lati tripli di quelli del triangolo ABC; perciò anche l'altezza B'H' è .... dell'altezza BH.

Le aree di triangoli simili

Attività 3

Esaminare i triangoli ABC e A'B'C' di fig. 2 e indicare:

- con b la lunghezza di AC e con b' la lunghezza di A'C';
- con h la lunghezza di BH e con h' la lunghezza di B'H'.

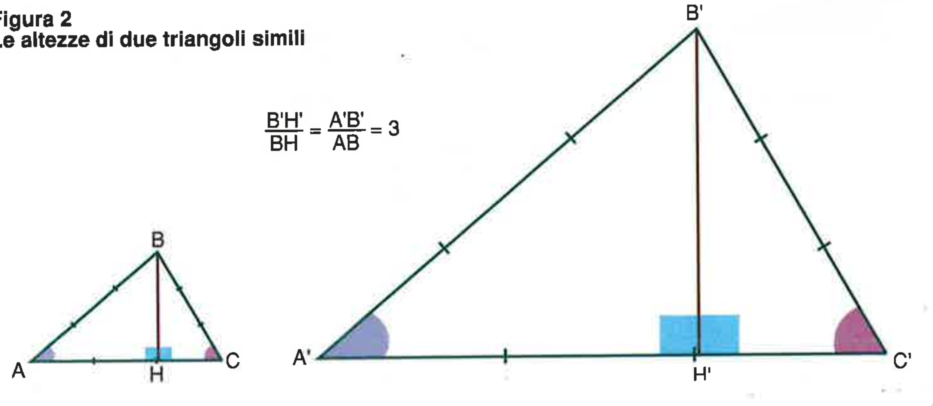
Completare le seguenti frasi:

- l'area S di ABC è $S = \frac{1}{2} bh$;
- l'area S' di A'B'C' è S' = ...;
- risulta $b' = 3b$ e h = ...

Si ha dunque:

$$S' = \frac{1}{2} 3b \cdot 3h \quad \text{cioè} \quad S' = \text{..........}$$

Figura 2
Le altezze di due triangoli simili



In definitiva si ha:

$$S' = 3^2 S$$

Generalizzare il risultato ottenuto al caso di due triangoli simili ABC e A'B'C', in cui A'B'C' ha i lati che sono r volte quelli di ABC.
Si troverà che risulta:

$$S' = r^2 S \quad \text{ossia} \quad \frac{S'}{S} = r^2$$

Attività 4

In fig. 3 sono disegnati due triangoli simili ABC e A'BC'; A'B'C' ha i lati tripli di ABC. Il lato A'B' è stato diviso in tre parti uguali e dai punti di divisione sono state condotte le parallele ai lati B'C' e A'C'; analogamente EL e GM sono parallele ad A'B'.

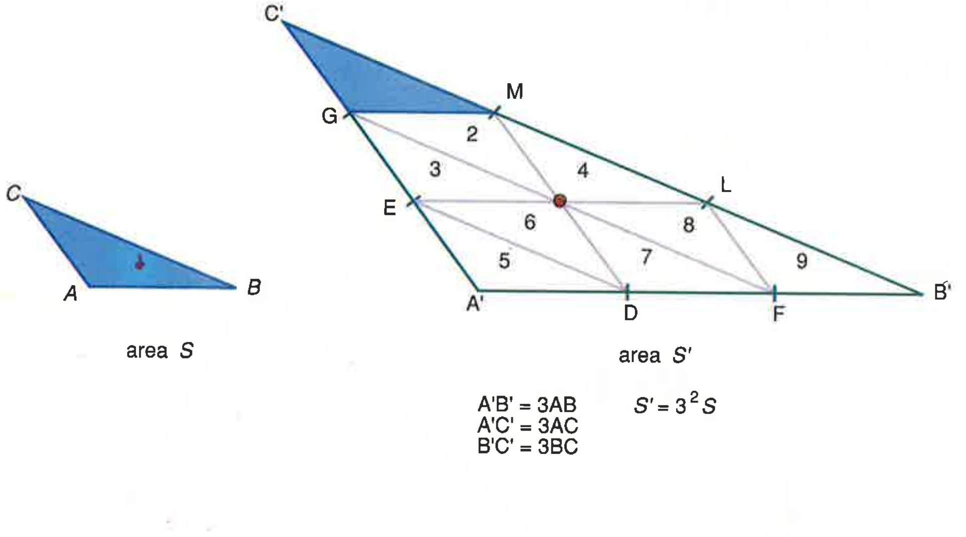
- Esaminare la figura e spiegare perché in questo modo il triangolo A'B'C' è stato diviso in 9 parti tutte uguali ad ABC.
- Ripetere una costruzione analoga a partire da un altro triangolo A"B"C", simile ad ABC, ma con i lati quadrupli; contare quanti triangoli uguali ad ABC sono contenuti in A"B"C".

Segmenti e aree nei triangoli simili

Il lavoro svolto conduce a due conclusioni di carattere generale:

1. *in due triangoli simili tutte le coppie di segmenti corrispondenti hanno lo stesso rapporto* r, *chiamato anche* rapporto di similitudine;
2. *il rapporto delle aree di due triangoli simili è* r^2, *cioè è il quadrato del rapporto di similitudine.*

Figura 3
Le aree di due triangoli simili



La similitudine nella natura

L'uomo non cresce mantenendo la stessa forma

L'essere umano non cresce mantenendo la stessa forma: il neonato non è simile all'uomo adulto. Questa esperienza comune viene precisata dalla fig. 1, in cui è riprodotto il corpo di un uomo a varie età, a 2, 12 e 25 anni.

Si vede subito che la forma cambia durante la crescita; per esempio, la lunghezza della testa è circa $\frac{1}{4}$ di tutto il corpo nel bambino piccolo, ma questa proporzione cambia notevolmente nell'uomo adulto, diventando circa $\frac{1}{8}$.

La crescita non avviene dunque per similitudine e questo vuol dire che il numero delle cellule non aumenta in modo uniforme nelle varie parti del corpo.

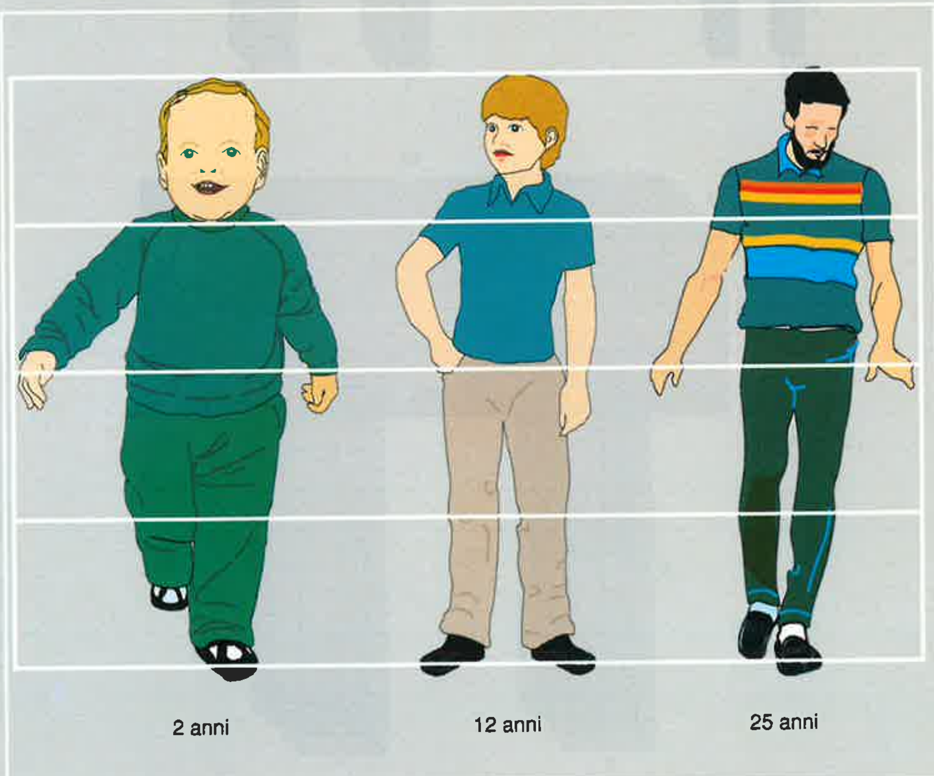


Figura 1
Come cambia la forma dell'uomo durante la crescita

Molti animali non crescono mantenendo la stessa forma

Analogamente, non accade che un cane, un gatto o un cavallo crescano per similitudine. Perché questa mancanza di similitudine, che sembrerebbe il più armonioso dei modi di crescere?

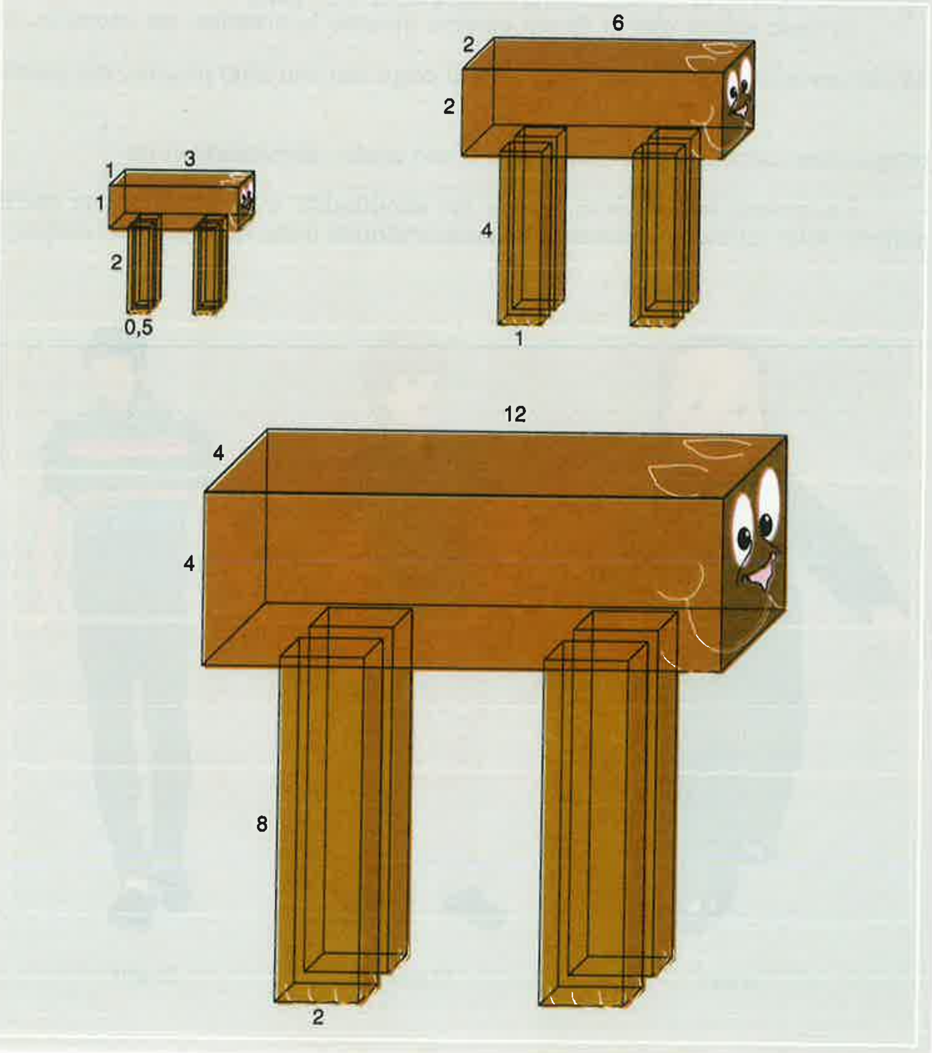
Per capire le «scelte» della natura, si può provare a costruire un modello di un animale a varie età, supponendo che la crescita avvenga per similitudine. In fig. 2 si trovano questi modelli: il corpo e le quattro zampe sono schematizzati con parallelepipedi vuoti a base quadrata; si ha che:

1. nell'animale neonato il corpo ha dimensioni 1, 1 e 3 e le quattro zampe tutte uguali hanno dimensioni 0,5, 0,5 e 2;
2. nell'animale giovane tutte le dimensioni sono raddoppiate;
3. nell'animale adulto le dimensioni sono di nuovo tutte raddoppiate, diventando quindi quadruple rispetto a quelle del neonato.

Riempiendo di sabbia i tre «animali» si osserva che:

- l'animale neonato è ben stabile;
- l'animale giovane sembra già piuttosto malfermo sulle zampe;
- l'animale adulto crolla a terra, perché le zampe non riescono a reggere il peso del corpo.

Figura 2
Un modello per capire perché molti animali non crescono mantenendo la stessa forma



Per capire meglio questo fenomeno basta calcolare, in ogni caso, il volume V del parallelepipedo-corpo e la superficie A del quadrato-base della zampa; ecco che cosa si ottiene:

1. $V_1=1^2 \cdot 3=3$ $\quad A_1=0{,}5^2=0{,}25$
2. $V_2=2^2 \cdot 6=24$ $\quad A_2=1^2=1$
3. $V_3=4^2 \cdot 12=192$ $\quad A_3=2^2=4$

Si può dunque pensare che, una volta riempito di sabbia, il peso del corpo si distribuirà sulle quattro zampe, secondo i seguenti rapporti:

$$\frac{V_1}{4 \cdot A_1}=\frac{3}{1}=3 \qquad \frac{V_2}{4 \cdot A_2}=\frac{24}{4}=6 \qquad \frac{V_3}{4 \cdot A_3}=\frac{192}{16}=12$$

Si vede così che i rapporti non sono sempre costanti e questo vuol dire che un peso via via più grande premerà sulle zampe, che non aumentano abbastanza per poterlo sostenere.

Sulla crescita negli animali c'è una bella pagina di Galileo Galilei nei *Discorsi intorno a due nuove scienze* (1638); Galileo dice fra l'altro: «La natura non potrebbe fare un cavallo grande per venti cavalli, né un gigante dieci volte più alto di un uomo se non miracolosamente o con l'alterare assai le proporzioni delle membra e in particolare delle ossa, ingrossandole molto sopra la simmetria delle ossa comuni».

La natura dunque – dice Galileo – non potrebbe produrre animali molto grandi, se tutte le loro membra aumentassero in proporzione: l'animale non riuscirebbe a sostenersi sulle zampe.

È per questo che il più grande animale vivente, la balena, vive nell'acqua; è per questo, si dice, che il più grande dei dinosauri poteva vivere solo immerso parzialmente nell'acqua, che sosteneva parte del suo peso.

Figura 3
Foglie di una rosa che crescono mantenendo la stessa forma

Le foglie di una pianta crescono mantenendo la stessa forma

Nelle piante, invece, si può trovare la crescita per similitudine; l'esempio più comune si trova rappresentato in fig. 3: sono cinque foglie di rosa prese dallo stesso ramo, cioè sottoposte alle stesse condizioni ambientali. Ci sono foglie piccole, cioè molto giovani, e foglie più grandi, cioè più anziane.

In queste foglie si osserva una notevole analogia nella forma; per precisare queste osservazioni, per ogni foglia si è misurata la lunghezza massima y e la larghezza massima x e si è calcolato il rapporto delle dimensioni corrispondenti; ecco alcuni risultati ottenuti:

$$\left.\begin{array}{l} 1^a \text{ foglia: } x_1=2{,}1 \quad \text{e} \quad y_1=2{,}8 \\ 2^a \text{ foglia: } x_2=2{,}6 \quad \text{e} \quad y_2=3{,}5 \end{array}\right\} \frac{x_2}{x_1} \cong 1{,}2 \quad \frac{y_2}{y_1} \cong 1{,}2$$

$$\left.\begin{array}{l} 2^a \text{ foglia: } x_2=2{,}6 \quad \text{e} \quad y_2=3{,}5 \\ 5^a \text{ foglia: } x_5=4{,}2 \quad \text{e} \quad y_5=5{,}5 \end{array}\right\} \frac{x_5}{x_2} \cong 1{,}6 \quad \frac{y_5}{y_2} \cong 1{,}6$$

Anche per le altre misure, si trova che le dimensioni lineari della foglia aumentano, ma mantenendo sempre lo stesso rapporto (vengono moltiplicate per uno stesso numero entrambe).

Dunque, la foglia di rosa e di molte altre piante cresce per similitudine; dal punto di vista biologico questo vuol dire che il numero delle cellule aumenta uniformemente in tutte le direzioni.

4

Relazioni fra lati e angoli di un triangolo rettangolo

Per i triangoli – si è detto nel paragrafo 3 – si trova una situazione particolare: un criterio di similitudine assicura che due triangoli con gli angoli uguali sono simili; questo vuol dire che bastano gli angoli a determinare la forma di un triangolo.
Ci deve allora essere una relazione fra i lati e gli angoli di un triangolo, relazione che «obbliga» un triangolo ad assumere una data forma, quando ne siano fissati gli angoli.

I triangoli rettangoli metà di un triangolo equilatero

Ecco come si può trovare questa relazione a partire dai triangoli rappresentati in fig. 1*a*, che sono tutti rettangoli e simili fra loro, perché hanno l'angolo $\hat{B}$ ampio 30° e, quindi, l'altro angolo acuto ampio 60°.

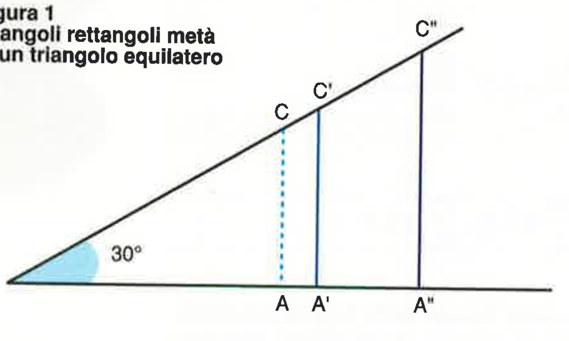
Si può osservare che ogni triangolo è metà di un triangolo equilatero, e per questo si può sempre calcolare la lunghezza dei cateti non appena si conosce la lunghezza dell'ipotenusa.
Per esempio, il triangolo ABC (fig. 1*b*), che ha l'ipotenusa BC lunga 2, ha il cateto AC che è la metà di BC e perciò è lungo 1, mentre il cateto AB si può ricavare applicando il teorema di Pitagora (vedi p. 2); si trova dunque che il triangolo ha i seguenti lati:

$$AB = \sqrt{3} \quad AC = 1 \quad BC = 2$$

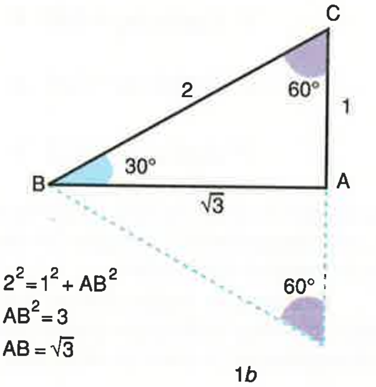
Confrontando i lati AC e A'C', BC e BC' dei triangoli simili ABC e A'BC', si troverà allora (fig. 1*a*):

$$\frac{A'C'}{AC} = \frac{BC'}{BC} \quad \text{cioè} \quad \frac{A'C'}{1} = \frac{BC'}{2}$$

Figura 1
Triangoli rettangoli metà di un triangolo equilatero



1*a*



1*b*

da cui si ha:

$$\frac{A'C'}{BC'} = \frac{1}{2}$$

Analogamente, considerando le altre coppie di lati omologhi, si trova:

$$\frac{A'B}{BC'} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \frac{A'C'}{A'B} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Il procedimento si può ripetere per gli altri triangoli simili A"BC" e così via; si troveranno per tutti questi triangoli rettangoli che sono «metà di un triangolo equilatero» i seguenti risultati:

$$\frac{\text{cateto opposto all'angolo di } 30^\circ}{\text{ipotenusa}} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\text{cateto adiacente all'angolo di } 30^\circ}{\text{ipotenusa}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{\text{cateto opposto all'angolo di } 30^\circ}{\text{cateto adiacente all'angolo di } 30^\circ} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Seno, coseno e tangente dell'angolo di 30°

Si sono così individuati dei rapporti fra i lati di un triangolo rettangolo, rapporti che rimangono costanti una volta fissato un angolo acuto del triangolo. Questi rapporti non dipendono dalla lunghezza dei lati, ma solo dall'ampiezza dell'angolo acuto; per questo ai tre rapporti è stato dato un nome particolare, che li collega direttamente all'angolo: seno, coseno e tangente dell'angolo di 30°. Si scrive (fig. 2):

$$\frac{\text{cateto opposto all'angolo di } 30^\circ}{\text{ipotenusa}} = \mathbf{sen\ 30^\circ}$$

$$\frac{\text{cateto adiacente all'angolo di } 30^\circ}{\text{ipotenusa}} = \mathbf{cos\ 30^\circ}$$

$$\frac{\text{cateto opposto all'angolo di } 30^\circ}{\text{cateto adiacente all'angolo di } 30^\circ} = \mathbf{tg\ 30^\circ}$$

Si ha dunque:

$$\text{sen } 30^\circ = \frac{1}{2} \qquad \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \text{tg } 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

I simboli ora introdotti si leggono così:
- *sen 30°* si legge «seno dell'angolo di 30°» o «seno di 30°»;
- *cos 30°* si legge «coseno dell'angolo di 30°» o «coseno di 30°»;
- *tg 30°* si legge «tangente dell'angolo di 30°» o «tangente di 30°».

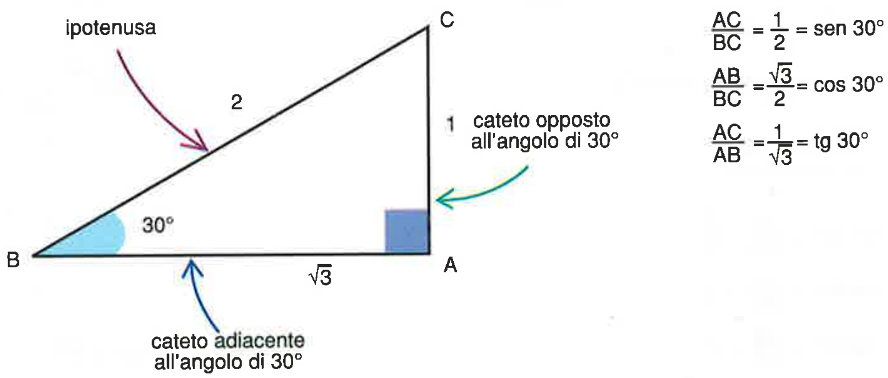
Relazioni fra lati ed angoli dei triangoli metà di un triangolo equilatero

Per tutti i triangoli che sono «metà di un triangolo equilatero» si scriverà quindi (fig. 2):

$$\frac{AC}{BC} = \text{sen } 30^\circ \qquad \frac{AB}{BC} = \cos 30^\circ \qquad \frac{AC}{AB} = \text{tg } 30^\circ \quad (1)$$

Si sono così trovate delle relazioni che legano lati ed angoli di un triangolo rettangolo; sono relazioni non immediate a scoprirsi e che richiedono di usare questi simboli: sen 30°, cos 30°, tg 30°.

Figura 2
Seno, coseno e tangente dell'angolo di 30°



A questo proposito è importante un'osservazione: nel calcolo letterale un'espressione come

$$abc30$$

indica abitualmente un monomio, risultato della moltiplicazione del monomio *abc* per il numero 30. Invece *l'espressione sen 30°* ***non*** *indica un prodotto*.
Si tratta piuttosto di una sigla, destinata a ricordare in modo conciso il procedimento per determinare il seno di un angolo.
Invece di fissare l'attenzione sull'angolo di 30° si può ovviamente considerare l'altro angolo acuto complementare, ampio 60°. In tal caso si scrive (fig. 3):

$$\frac{AB}{BC} = \operatorname{sen} 60^o \quad \frac{AC}{BC} = \cos 60^o \quad \frac{AB}{AC} = \operatorname{tg} 60^o \; (2)$$

Si ha dunque:

$$\operatorname{sen} 60^o = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \operatorname{sen} 60^o = \frac{1}{2} \quad \operatorname{tg} 60^o = \sqrt{3}$$

L'origine storica dei nomi seno, coseno, tangente

Il nome «seno di un angolo» ha un'origine curiosa, perché è legato a un errore di traduzione: in un'antica opera indiana, scritta in sanscrito intorno al 400 d.C., si collegava il segmento AH, metà corda di un cerchio, con la metà dell'angolo al centro sotteso dalla corda (fig. 4).
Il nome dato alla lunghezza di AH era una parola che significava appunto «corda»; ma in sanscrito non si scrivono le vocali e perciò, quando l'opera fu tradotta prima in arabo e poi in latino, nella parola vennero inserite vocali diverse da quelle originali e con queste nuove vocali si formò la parola *sinus*, che in latino significa «baia, insenatura». E così è rimasto in matematica il termine «seno di un angolo».
Il nome «coseno» invece è l'abbreviazione di «seno dell'angolo complementare» e deriva dal confronto delle relazioni (1) e (2); si trova infatti:

$$\frac{AB}{BC} = \cos 30^o \quad e \quad \frac{AB}{BC} = \operatorname{sen} 60^o$$

Cioè:

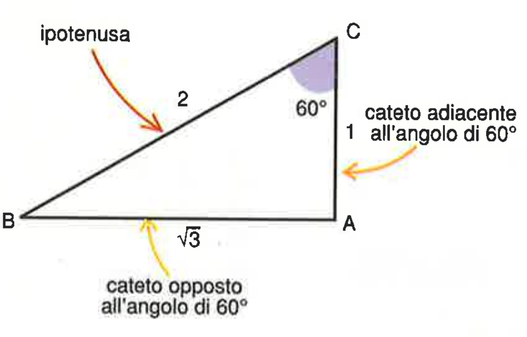
coseno di 30°=seno del complementare di 30°

Infine, più semplice è l'origine del termine «tangente di un angolo»: gli arabi avevano l'abitudine di ottenere la tangente di un angolo a partire dalla retta tangente ad un cerchio di raggio unitario (fig. 5).

Relazioni fra lati ed angoli di un qualunque triangolo rettangolo

Il procedimento seguito finora sembra valido solo per i triangoli rettangoli che sono metà di un triangolo equilatero; e per gli altri triangoli rettangoli che cosa si può dire?
Fissare gli angoli significa sempre fissare la forma del triangolo, ma in generale non si riesce a calcolare la lunghezza dei lati con procedimenti geometrici; si potranno però ricavare

Figura 3
Seno, coseno e tangente dell'angolo di 60°

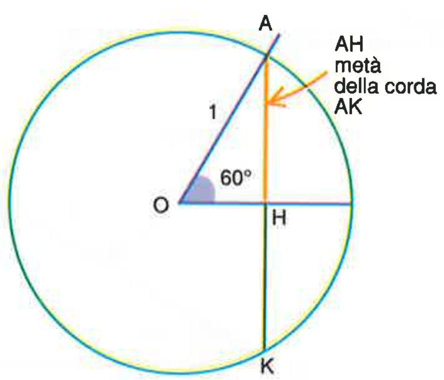


$$\operatorname{sen} 60° = \frac{AB}{BC} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60° = \frac{AC}{BC} = \frac{1}{2}$$

$$\operatorname{tg} 60° = \frac{AB}{AC} = \sqrt{3}$$

Figura 4
L'origine del termine «seno di un angolo»



$$\operatorname{sen} 60° = \frac{AH}{1}$$

queste informazioni misurando direttamente gli elementi del triangolo.
Così, per esempio, nel triangolo di fig. 6 si trova:

$$\hat{B} = 70° \quad BC = 5 \quad AB = 1{,}71 \quad AC = 4{,}70$$

Si può quindi scrivere:

$$\frac{AC}{BC} = \operatorname{sen} 70° \quad \frac{AB}{BC} = \cos 70° \quad \frac{AC}{AB} = \operatorname{tg} 70°$$

e risulta:

$$\operatorname{sen} 70° = \frac{4{,}70}{5} = 0{,}94$$

$$\cos 70° = \frac{1{,}71}{5} = 0{,}34$$

$$\operatorname{tg} 70° = \frac{4{,}70}{1{,}71} = 2{,}75$$

Quest'ultimo è un procedimento di carattere generale; dato un triangolo rettangolo ABC con:

$$\hat{B} = \beta \quad AC = b \quad AB = c \quad BC = a$$

si scrive:

$$\frac{AC}{BC} = \operatorname{sen}\beta \quad \frac{AB}{BC} = \cos\beta \quad \frac{AC}{AB} = \operatorname{tg}\beta$$

e risulta:

$$\operatorname{sen}\beta = \frac{b}{a} \quad \cos\beta = \frac{c}{a} \quad \operatorname{tg}\beta = \frac{b}{c}$$

Verifiche

Conoscenze

① Disegnare un triangolo rettangolo con un angolo di 30° e scrivere le relazioni che legano lati ed angoli del triangolo.

② Disegnare un triangolo rettangolo che ha $\hat{B} = \beta$, $AC = b$, $AB = c$, $BC = a$; scrivere le relazioni che legano lati ed angoli del triangolo.

Comprensione

① Disegnare un triangolo rettangolo che ha $\hat{C} = \gamma$, $AC = b$, $AB = c$, $BC = a$; scrivere le relazioni che legano lati ed angoli del triangolo.

Applicazioni

① Disegnare un triangolo rettangolo isoscele; scrivere le relazioni che legano lati ed angoli del triangolo e calcolare seno, coseno e tangente dell'angolo di 45°.

② Riprendere il triangolo di fig. 6 e scrivere le relazioni che legano i lati del triangolo al seno, coseno e tangente dell'angolo di 20°; calcolare seno, coseno e tangente dell'angolo di 20°.

Figura 5
L'origine del termine «tangente di un angolo»

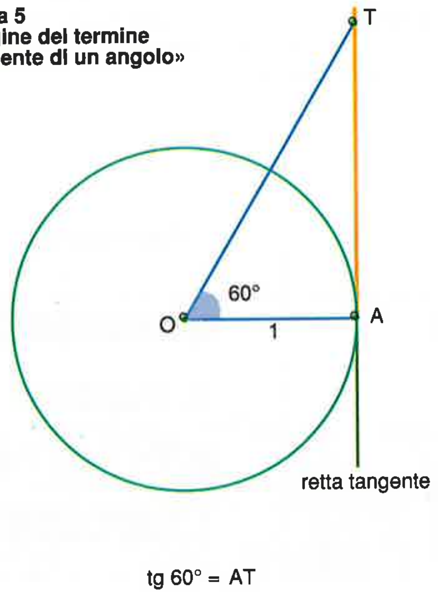
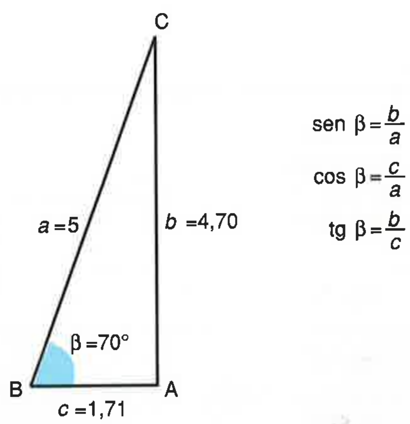


Figura 6
Seno, coseno e tangente di un angolo



5 Le funzioni trigonometriche

Come si calcolano seno, coseno e tangente di un angolo

Nel paragrafo precedente si è determinato il valore di seno, coseno e tangente dell'angolo di 70°, calcolando i rapporti fra le lunghezze dei lati di un triangolo rettangolo.

È chiaro che un'analoga costruzione permette di determinare seno, coseno e tangente di qualunque altro angolo acuto. Ma è certo inutile ripetere tante volte questo metodo costruttivo che richiede tempo e precisione; si può farlo una volta per tutte scrivendo i risultati ottenuti in una tabella.

Oggi tabelle di questo tipo sono inserite in tutti i calcolatori tascabili per uso scientifico, che sono molto facili da usare, purché si tenga presente qualche semplice avvertenza, in particolare le due seguenti.

1. I calcolatori hanno la possibilità di esprimere la misura degli angoli con unità differenti, fra le quali si trovano:
   - *il grado sessagesimale*, usato in questo testo e indicato con DEG, abbreviazione del termine inglese *degree*; in questo modo l'angolo giro misura 360° e l'angolo retto 90°;
   - *il grado centesimale*, indicato con GRAD, abbreviazione del termine inglese *grade*; con questa unità di misura l'angolo giro misura 400° e l'angolo retto 100°.
2. I tasti per calcolare seno, coseno e tangente di un angolo sono contrassegnati dai simboli seguenti:

   [sen] o [sin] [cos] [tg] o [tan]

Comunque, per usare correttamente il calcolatore è sempre opportuno leggere le relative istruzioni per l'uso. Dopo aver accertato che il calcolatore sia predisposto a misurare i gradi sessagesimali, si può calcolare seno, coseno e tangente di un angolo valendosi delle indicazioni della tabella A.

Tabella A
Il calcolo di seno, coseno e tangente col calcolatore tascabile

Valore richiesto	Sequenza dei tasti	Visualizzatore
sen 70°	[7] [0] [sen]	0.9396926
cos 70°	[7] [0] [cos]	0.3420201
tg 70°	[7] [0] [tan]	2.7474774
tg 60°	[6] [0] [tan]	1.7320508

Seno, coseno e tangente di un angolo sono generalmente numeri irrazionali

Conviene fissare l'attenzione sull'ultimo risultato della tabella A. Nel paragrafo precedente si era trovato che risultava:

$$\mathrm{tg}\,60^\circ = \sqrt{3}$$

Si sa che $\sqrt{3}$ è un numero irrazionale, di cui il calcolatore fornisce solo un valore approssimato, in genere con 7 cifre dopo la virgola; si scriverà quindi:

$$\mathrm{tg}\ 60^\circ \cong 1{,}7320508$$

Di questo si deve tener conto quando si risolvono i problemi, dato che la precisione richiesta dipende proprio dal tipo di questione esaminata. Per esempio, il seno dell'angolo di rientro nell'atmosfera di una capsula spaziale deve essere calcolato con almeno 8 cifre decimali, se non si vuole rischiare di distruggere il veicolo.

Le considerazioni svolte conducono ad una conclusione di carattere generale: *seno, coseno e tangente di un angolo sono rapporti fra segmenti generalmente incommensurabili e quindi sono generalmente dei numeri irrazionali.*

Si è detto *generalmente*, perché in alcuni casi si trovano dei risultati razionali; si ha per esempio:

$$\mathrm{sen}\,30^\circ = \frac{1}{2} \qquad \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

Come varia il seno di un angolo al variare dell'angolo

Usando il calcolatore tascabile è facile compilare una tabella come quella presentata in fig. 1, dove si trova il valore del seno di alcuni angoli fornito dal calcolatore, ma arrotondato in modo da avere solo quattro cifre decimali.

Nella stessa figura la tabella è visualizzata dai triangoli rettangoli con l'ipotenusa BC lunga 1 e con l'angolo β crescente; in questo modo il valore di senβ è visualizzato dalla lunghezza del cateto AC opposto all'angolo, dato che risulta:

$$\mathrm{sen}\,\beta = \frac{AC}{BC}$$

La figura e la tabella mettono in evidenza due fatti:

1. l'angolo β deve essere acuto, cioè variare fra 0° e 90°;
2. il corrispondente valore di senβ aumenta da 0 a 1 mentre l'angolo cresce da 0° a 90°, e, in particolare:

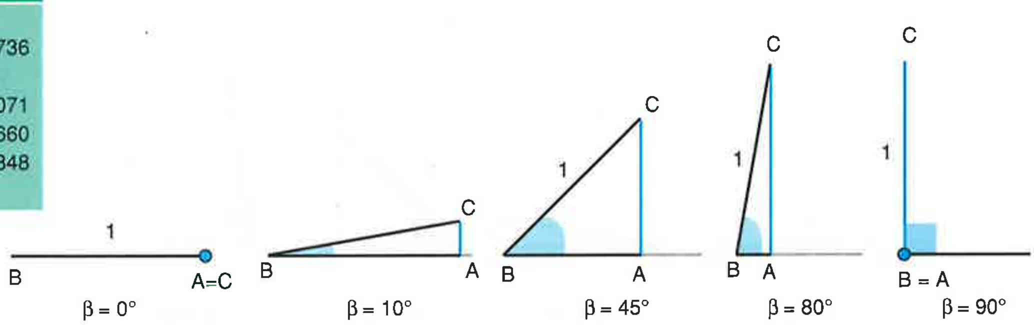
- il valore minimo è sen 0°= 0;
- il valore massimo è sen 90°=1.

Per capire meglio la situazione la tabella può essere arricchita, usando il calcolatore tascabile, come è indicato nello schema seguente:

Angolo β	Tasto	sen β
2°	sin $\longrightarrow$	0,035
15°	sin $\longrightarrow$	0,259
78°	sin $\longrightarrow$	0,978

Figura 1
Come varia il seno di un angolo al variare dell'angolo

β	sen β
0°	0
10°	0,1736
30°	0,5
45°	0,7071
60°	0,8660
80°	0,9848
90°	1



Si è così individuato un procedimento che permette di associare a un angolo β un valore del seno di quell'angolo.
La corrispondenza:

$$\beta \xrightarrow{\boxed{\text{sin}}} \text{sen}\beta$$

è una *funzione*, cioè una legge che fa corrispondere ad ogni valore di β, compreso fra 0° e 90°, un solo numero reale compreso fra 0 e 1, numero che prende il nome di senβ.

Come varia il coseno di un angolo al variare dell'angolo

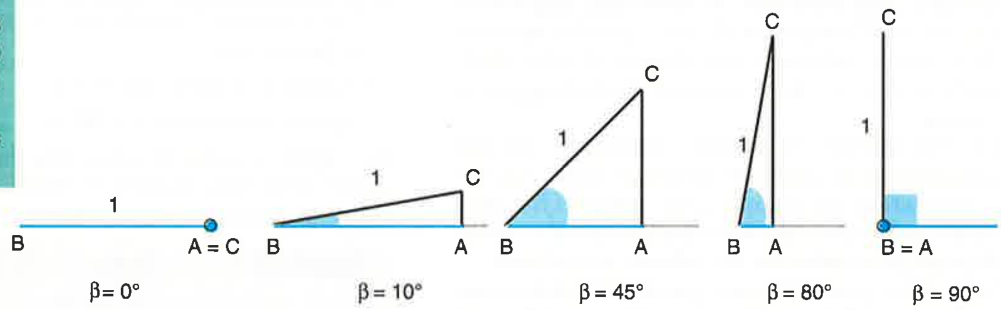
Considerazioni analoghe possono essere ripetute a partire dalla fig. 2, dove si è riportato (nella tabella) qualche angolo β ed il corrispondente valore di cosβ, visualizzato dalla lunghezza del cateto adiacente all'angolo β in un triangolo rettangolo con l'ipotenusa unitaria.
Anche in questo caso si trova che:

1. l'angolo β deve essere acuto, cioè variare fra 0° e 90°;

ma ora il precedente punto 2 deve essere così riformulato:

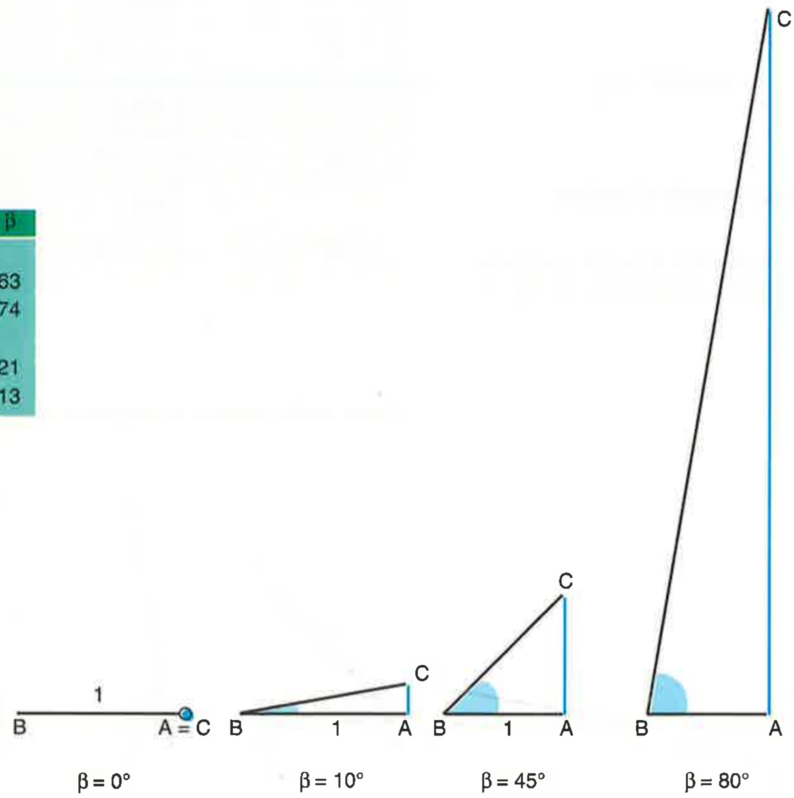
β	cos β
0°	1
10°	0,9848
30°	0,8660
45°	0,7071
60°	0,5
80°	0,1736
90°	0

Figura 2
Come varia il coseno di un angolo al variare dell'angolo



β	tg β
0°	0
10°	0,1763
30°	0,5774
45°	1
60°	1,7321
80°	5,6713

Figura 3
Come varia la tangente di un angolo al variare dell'angolo



2. il corrispondente valore di $\cos\beta$ diminuisce da 1 a 0 mentre l'angolo cresce da 0° a 90°, e in particolare:
   - il valore massimo è $\cos 0° = 1$;
   - il valore minimo è $\cos 90° = 0$.

Come varia la tangente di un angolo al variare dell'angolo

Infine, la fig. 3 è dedicata alla tangente di un angolo β, visualizzata costruendo dei triangoli rettangoli con il cateto AB unitario; così si ha che:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{AC}{AB}$$

viene visualizzata dalla lunghezza del cateto AC, mentre nella tabella sono riportati alcuni valori di $\operatorname{tg}\beta$ al variare dell'angolo β.
Ora si trova ancora una volta che:

1. l'angolo β deve essere acuto, cioè varia fra 0° e 90°;

   però si ha che:

2. mentre l'angolo cresce da 0° a 90°, il corrispondente valore di $\operatorname{tg}\beta$ aumenta a partire dal valore minimo $\operatorname{tg} 0° = 0$, ma non si trova un valore massimo; $\operatorname{tg}\beta$ può diventare grande quanto si vuole, perché il cateto opposto all'angolo può diventare anche molto più grande del cateto adiacente.

Le funzioni trigonometriche

Le tre funzioni ora esaminate, e cioè:

$$\beta \xrightarrow{\boxed{\mathbf{sin}}} \operatorname{sen}\beta$$

$$\beta \xrightarrow{\boxed{\mathbf{cos}}} \cos\beta$$

$$\beta \xrightarrow{\boxed{\mathbf{tan}}} \operatorname{tg}\beta$$

prendono il nome di *funzioni trigonometriche*, per ricordare che la legge di corrispondenza è costruita basandosi su misure relative a triangoli (dal greco *trigonon* = «triangolo», *metron* = «misura»).

Verifiche

Conoscenze

① Che cosa si intende con il termine «funzioni trigonometriche»?

② Come si calcolano il seno, il coseno e la tangente di un angolo?

Comprensione

① Spiegare perché il seno ed il coseno di un angolo non possono superare 1, mentre la tangente può diventare grande quanto si vuole.

② Disegnare l'angolo α il cui seno vale $\frac{1}{3}$.

③ Disegnare l'angolo β il cui coseno vale $\frac{1}{3}$.

④ Disegnare l'angolo γ la cui tangente vale 3.

Applicazioni

① Completare la seguente tabella valendosi di un calcolatore tascabile.

Angolo β	**senβ**	**cosβ**	**tgβ**
15°			
30°			
45°			
60°			
75°			

Collegamento col paragrafo precedente

① Nella tabella precedente indicare quali sono i valori esatti di seno, coseno e tangente degli angoli di 30°, 45° e 60°.

La rifrazione della luce

La rifrazione della luce

Il fenomeno fisico della rifrazione avviene quando la luce passa da un mezzo trasparente ad un altro di diversa densità: per esempio, quando la luce passa dall'aria all'acqua o dall'aria al vetro; in tal caso la luce, passando da un mezzo all'altro, cambia direzione.

In fig. 1 è rappresentato l'apparecchio che si può usare per studiare questo fenomeno: un sottile raggio di luce si propaga nell'aria sfiorando un cerchio graduato; quindi attraversa una spessa lastra di vetro e cambia direzione.

Lo studio della rifrazione

Per descrivere il fenomeno si traccia la perpendicolare p alla superficie di separazione s dei due mezzi e si misura l'angolo di incidenza $\hat{i}$ e l'angolo di rifrazione $\hat{r}$ (fig. 2).

L'esperienza mostra subito che i due angoli non sono ovviamente uguali, ma all'aumentare di $\hat{i}$ aumenta pure $\hat{r}$; perciò si pensa subito che i due angoli siano direttamente proporzionali.

Così pensarono gli scienziati medievali e così pensò anche il grande Keplero, fermando la sua attenzione su piccoli valori di $\hat{i}$.

Invece, misurando $\hat{i}$ e $\hat{r}$ in un adeguato numero di casi si trovano i risultati esposti nella tabella seguente, dove si trova anche il rapporto $\frac{\hat{i}}{\hat{r}}$, arrotondato in modo da avere una sola cifra decimale.

$\hat{i}$	$\hat{r}$	$\frac{\hat{i}}{\hat{r}}$
10°	6°30'	1,5
20°	12°30'	1,6
30°	18°30'	1,6
40°	24°	1,7
50°	29°	1,7
60°	33°30'	1,8
70°	36°30'	1,9

La tabella mostra subito che $\hat{i}$ e $\hat{r}$ non sono direttamente proporzionali, dato che il loro rapporto non si mantiene costante.

Ma allora quale relazione lega i due angoli $\hat{i}$ e $\hat{r}$?

La legge della rifrazione

Solo nel XVII secolo si è trovata la formulazione corretta della legge della rifrazione; sembra infatti che questa legge sia stata trovata per la prima volta nel 1621 dall'olandese Willebrod Snell, che però non pubblicò i suoi risultati. Fu successivamente formulata in modo strettamente empirico da Isaac Voss e, finalmente, fu pubblicata da Cartesio.

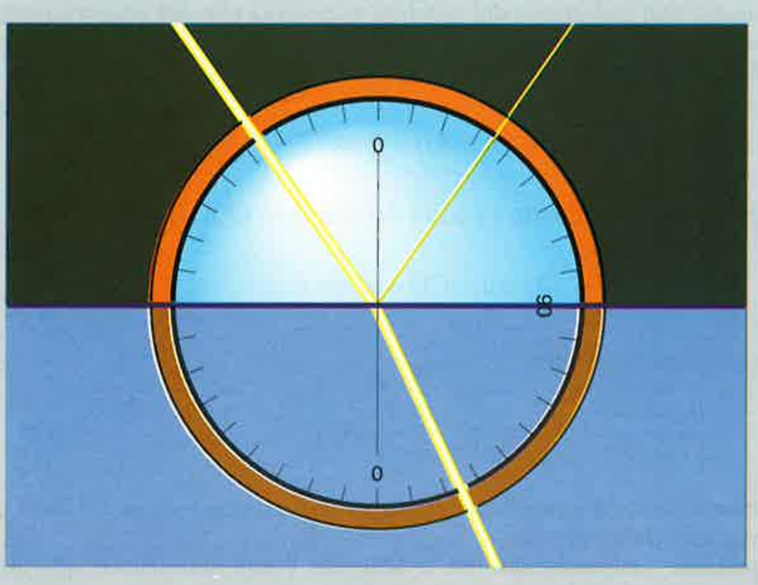


Figura 1
Un esperimento per studiare la rifrazione della luce

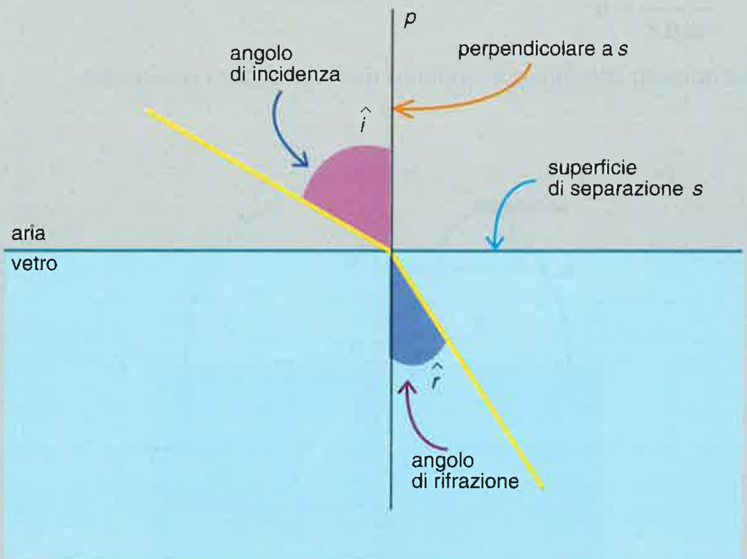


Figura 2
Angolo di incidenza e angolo di rifrazione

È facile spiegare la legge di Snell aiutandosi con un cerchio graduato come quello di fig. 3: misurando le semicorde AB e CD, relative a diverse ampiezze di $\hat{i}$ e di $\hat{r}$, si osserva che, nel passaggio della luce dall'aria al vetro, risulta sempre:

$$\frac{AB}{CD} = 1{,}5 \qquad (1)$$

Si scopre così che sono le semicorde AB e CD a essere direttamente proporzionali.

Questa legge non è però del tutto soddisfacente, perché non lega gli angoli $\hat{i}$ e $\hat{r}$ ma le relative semicorde. Bisogna valersi delle funzioni trigonometriche per arrivare ad una legge pienamente soddisfacente. Ecco come si può ragionare.

Indicato con b il raggio del cerchio, si osserva che nel triangolo rettangolo AOB la semicorda AB è il cateto opposto all'angolo $\hat{i}$ e il raggio AO è l'ipotenusa; perciò risulta (fig. 3):

$$\operatorname{sen}\hat{i} = \frac{AB}{b} \quad \text{da cui} \quad AB = b \cdot \operatorname{sen}\hat{i}$$

Analoghe considerazioni, fatte a partire dal triangolo COD, conducono a scrivere:

$$\operatorname{sen}\hat{r} = \frac{CD}{b} \quad \text{da cui} \quad CD = b \cdot \operatorname{sen}\hat{r}$$

Così la relazione (1) diventa:

$$\frac{b \cdot \operatorname{sen}\hat{i}}{b \cdot \operatorname{sen}\hat{r}} = 1{,}5 \quad \text{ossia} \quad \frac{\operatorname{sen}\hat{i}}{\operatorname{sen}\hat{r}} = 1{,}5$$

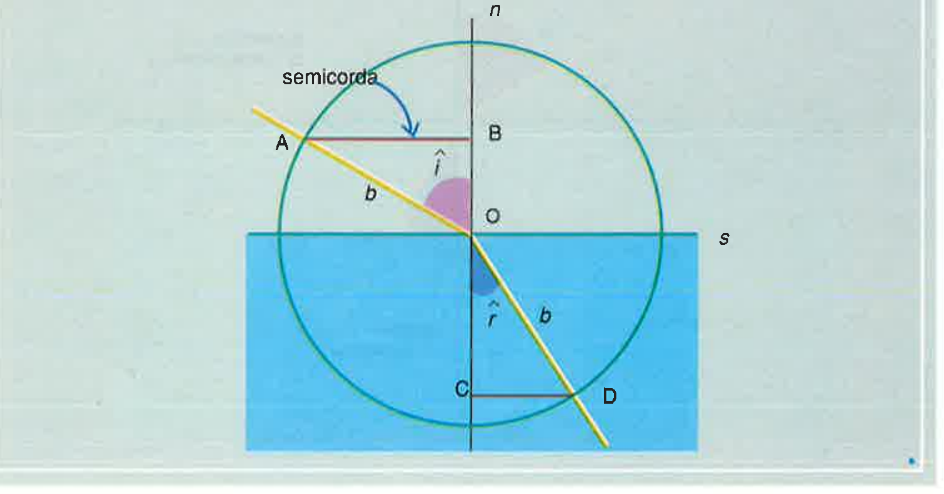
Nel fenomeno della rifrazione sono dunque direttamente proporzionali non gli angoli, ma i seni degli angoli.

Ripetendo l'esperimento con la luce che passa dall'aria ad altri mezzi di densità diversa si trova la seguente *legge della rifrazione*:

$$\boldsymbol{\frac{\operatorname{sen}\hat{i}}{\operatorname{sen}\hat{r}} = n}$$

dove n è un numero che dipende appunto dalle sostanze considerate.

Figura 3
La legge della rifrazione



Come è nata la trigonometria

La trigonometria nasce insieme all'astronomia

Nel paragrafo 5 si è parlato delle funzioni trigonometriche, che sono alla base della *trigonometria*, parola di origine greca che sta a indicare la «misura degli elementi di un triangolo». Dunque la trigonometria è il ramo della matematica che si occupa delle relazioni fra lati ed angoli di un triangolo.

Ma le origini della trigonometria si confondono con le origini dell'astronomia.

Non è certo strano che sia stata l'astronomia ad aver eccitato la fantasia degli uomini fin dai tempi più remoti e in tanti paesi diversi. Il sorgere del Sole, l'alternarsi dei giorni e delle notti, il succedersi sempre uguale delle fasi della Luna sono fenomeni che non potevano sfuggire neanche all'occhio meno attento.

Sulla volta celeste due sono gli astri che colpiscono maggiormente l'attenzione: il Sole e la Luna. Quanto distano dalla Terra? Quanto sono grandi? È con queste domande che ha inizio l'astronomia, ma anche la trigonometria.

L'astronomo greco Aristarco di Samo (III secolo d.C.) affronta il seguente problema (fig. 1):

«Quando la Luna si presenta come una perfetta mezzaluna, l'angolo fra le visuali del Sole e della Luna è inferiore ad un angolo retto per un trentesimo di quadrante; quanto è più lontano dalla Terra il Sole rispetto alla Luna?»

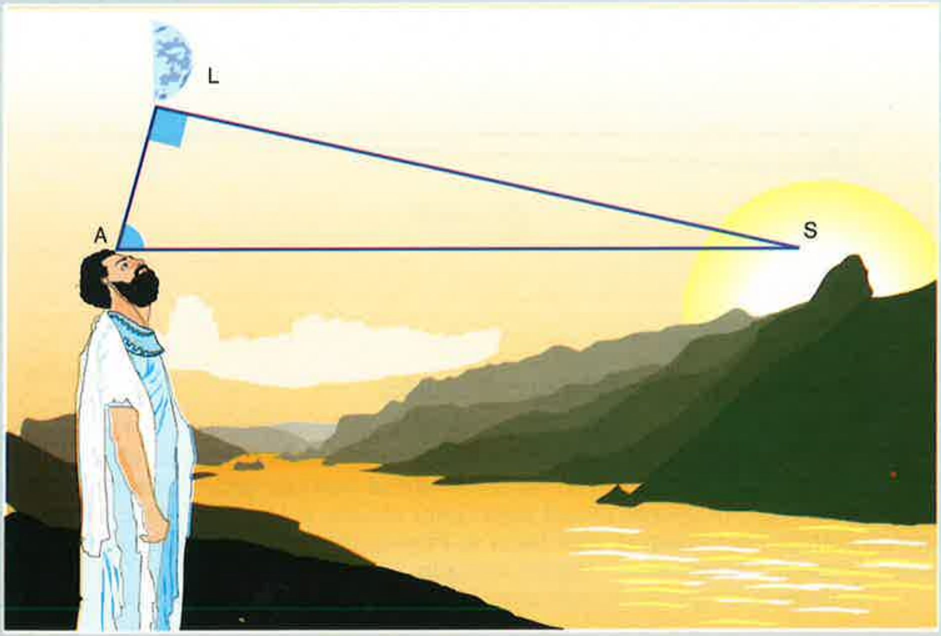


Figura 1
Il problema di Aristarco

Il problema così descritto sembra di difficile comprensione soprattutto perché al tempo di Aristarco non era usata la misura degli angoli in gradi sessagesimali. Questa suddivisione del cerchio in 360° sembra invece fosse nota all'astronomo greco Ipparco di Nicea (II secolo d.C) che, probabilmente, aveva preso l'idea, come i babilonesi, dal ciclo delle stagioni di 360 giorni.

Questa suddivisione si trova poi nelle opere di Tolomeo d'Alessandria (II secolo d.C.) che, riprendendo l'uso babilonese, suddivise il grado in 60 *partes minutae primae* e ciascuna di queste in 60 *partes minutae secundae*.

Ed è da queste espressioni latine che i traduttori derivarono le espressioni «primo» e «secondo» ancora oggi in uso.

Traducendo dunque in linguaggio attuale il problema di Aristarco, si ha che:

- il quadrante è un angolo di 90°;
- un trentesimo di quadrante è un angolo ampio $\frac{90°}{30} = 3°$;
- l'angolo «inferiore ad un angolo retto per un trentesimo di quadrante» è ampio un quadrante meno un trentesimo e cioè è di 87°.

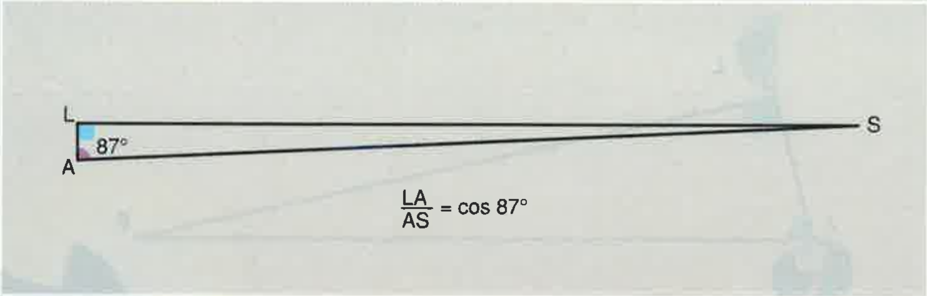
Perciò il problema può essere schematizzato con il triangolo rettangolo LAS (fig. 2), di cui si conosce l'angolo $\hat{A} = 87°$ e si vuole calcolare il rapporto $\frac{LA}{AS}$, rapporto che è legato all'angolo da una funzione trigonometrica; si ha infatti:

$$\frac{LA}{AS} = \cos 87°$$

Ma le investigazioni di Aristarco non erano «nate dal nulla»; risentivano certamente di osservazioni e di studi condotti, lungo molti secoli, dagli egizi e dai babilonesi.

Rimane però ben poco delle ricerche trigonometriche di questi popoli e, del resto, nulla rimane direttamente delle opere di Aristarco e di Ipparco; è solo attraverso gli scritti dell'astronomo Tolomeo d'Alessandria (fig. 3) che si sa qualcosa delle ricerche dei due astronomi greci.

Figura 2
La soluzione del problema di Aristarco



La trigonometria si sviluppa nella cultura islamica

Dopo Tolomeo occorre fare un salto di secoli per giungere, con la rivoluzione islamica dell'VIII secolo, a nuove ricerche nel campo della trigonometria.

La cultura islamica riuscì ad assorbire la scienza greca, ormai in piena decadenza, e a svilupparne alcuni importanti settori. Il territorio dove si diffuse questa cultura era immenso: dall'India ai Pirenei, un territorio dunque ancor più vasto di quello che era stato l'impero romano.

È proprio in questo mondo musulmano, dove s'incrociavano correnti culturali provenienti da paesi tanto diversi come la Grecia, la Siria, la Persia e l'India, che lo studio della trigonometria raggiunse un alto livello. E sono queste conoscenze che, attraverso la Spagna, mediante numerose traduzioni in arabo (fig. 4), arrivarono in Europa nell'XI secolo.

La trigonometria arriva in Europa

Passarono altri secoli prima che l'Europa assorbisse compiutamente la cultura araba, fino a saper produrre dei lavori originali. Si deve al matematico tedesco Johann Müller, detto il Regiomontano (fig. 5), il primo libro dedicato esclusivamente alla trigonometria: è *De triangulis omnimodis*, scritto nel 1464; la trigonometria troverà poi il suo assetto definitivo con Eulero, nel XVIII secolo (fig. 6).

Ma già alla fine del Cinquecento lo sviluppo dell'algebra, e cioè la nascita del simbolo per sostituire un segno a una parola e una formula ad una frase, conduce i matematici ad unificare varie scoperte di trigonometria fatte in epoche diverse. Furono così messe in rilievo le idee fondamentali che erano alla base della trigonometria e che vengono ancora oggi applicate per risolvere i problemi più vari.

Figura 3 (a sinistra)
Il frontespizio di un'edizione cinquecentesca di un libro di Tolomeo d'Alessandria

Figura 4 (a destra)
Una pagina di un trattato arabo del 1297

Figura 5 (a sinistra)
Il frontespizio di un'opera del Regiomontano (1496)

Figura 6 (a destra)
Ritratto del matematico svizzero Leonardo Eulero

6 Relazioni fra lati e angoli di un triangolo

Nel paragrafo 4 si sono trovate delle relazioni che collegano lati ed angoli di un triangolo rettangolo; in particolare (fig. 1):

$$\frac{b}{a} = \operatorname{sen}\beta \qquad \frac{c}{a} = \cos\beta$$

Ci si chiede ora: si può trovare una via per estendere queste relazioni anche ai triangoli acutangoli o ottusangoli?
Una prima idea che viene in mente è quella di dividere un triangolo qualunque in due triangoli rettangoli, tracciando un'altezza; si potranno così applicare le relazioni note per trovarne altre più generali. Ma per seguire meglio il procedimento conviene separare i due casi che si possono presentare e cioè:

A. triangolo acutangolo;

B. triangolo ottusangolo.

A. TRIANGOLO ACUTANGOLO

Il teorema dei seni nel triangolo acutangolo

Si disegna un qualunque triangolo acutangolo ABC, si traccia l'altezza CH, lunga h, e si considerano i due triangoli rettangoli ottenuti (fig. 2*a*).

- Considerando il triangolo CHA, si ha:

$$\frac{h}{b} = \operatorname{sen}\alpha \quad \text{da cui} \quad h = b \cdot \operatorname{sen}\alpha \tag{1}$$

- Considerando il triangolo CHB, si ha:

$$\frac{h}{a} = \operatorname{sen}\beta \quad \text{da cui} \quad h = a \cdot \operatorname{sen}\beta \tag{2}$$

Confrontando la (1) con la (2) si ottiene dunque:

$$b \cdot \operatorname{sen}\alpha = a \cdot \operatorname{sen}\beta$$

ossia:

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta} \tag{3}$$

Questa relazione lega fra loro due lati e due angoli dello stesso triangolo; ma è facile ottenere una formula in cui intervengano anche il terzo lato e il terzo angolo: basta tracciare un'altra altezza.
Se, ad esempio, si conduce l'altezza AK, lunga k, si ottiene (fig. 2*b*):

$$k = b \cdot \operatorname{sen}\gamma \qquad \text{(dal triangolo AKC)}$$
$$k = c \cdot \operatorname{sen}\beta \qquad \text{(dal triangolo AKB)}$$

da cui:

$$b \cdot \operatorname{sen}\gamma = c \cdot \operatorname{sen}\beta$$

ossia:

$$\frac{c}{\operatorname{sen}\gamma} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta} \tag{4}$$

Confrontando infine le relazioni (3) e (4), si può scrivere che, *per qualunque triangolo acutangolo*, vale la seguente relazione:

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{c}{\operatorname{sen}\gamma}$$

Questa relazione, detta *teorema dei seni*, si enuncia nel modo seguente: *in un qualunque triangolo acutangolo è costante il rapporto fra un lato ed il seno dell'angolo opposto.*

Il teorema del coseno nel triangolo acutangolo

Il teorema del coseno si limita ad aggiungere il punto di vista della trigonometria ad un teorema già trovato come generalizzazione del teorema di Pitagora (vedi p. 18): in un triangolo acutangolo ABC (fig. 3*a*) risulta:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2bp \qquad (5)$$

Basta ora osservare il triangolo rettangolo BHC (fig. 3*b*), per ricavare che deve essere:

$$\frac{p}{a} = \cos\gamma \qquad \text{e quindi} \qquad p = a \cdot \cos\gamma$$

Sostituendo l'ultima espressione ottenuta nella (5), si ottiene:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab{\cdot}\cos\gamma$$

in cui compaiono l'angolo γ, che è opposto al lato c, ed i lati a, b, che comprendono l'angolo γ. È chiaro che si può ripetere il procedimento a partire da un'altra altezza del triangolo ABC; si scopre così che, per un qualunque triangolo acutangolo, valgono le tre relazioni seguenti:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc{\cdot}\cos\alpha$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac{\cdot}\cos\beta$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab{\cdot}\cos\gamma$$

Queste tre relazioni costituiscono il *teorema del coseno*, che si enuncia nel modo seguente: *in un qualunque triangolo acutangolo il quadrato di un lato è uguale alla somma dei quadrati degli altri due lati diminuita del doppio prodotto di questi lati per il coseno dell'angolo fra essi compreso.*

Figura 1
Relazioni fra lati ed angoli di un triangolo rettangolo

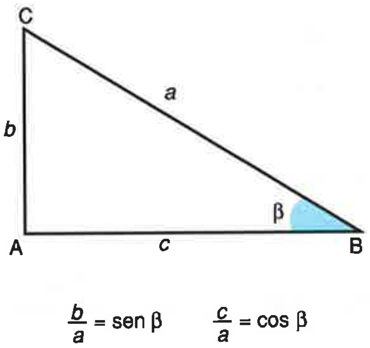


Figura 2
Il teorema dei seni per un triangolo acutangolo

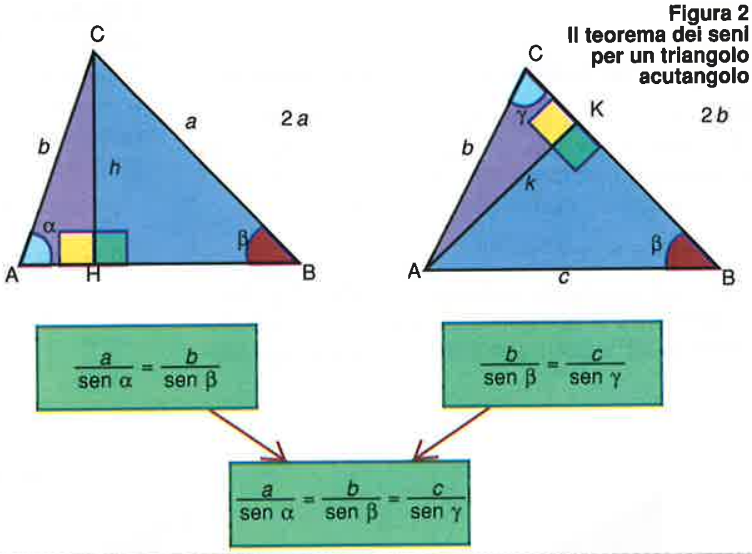
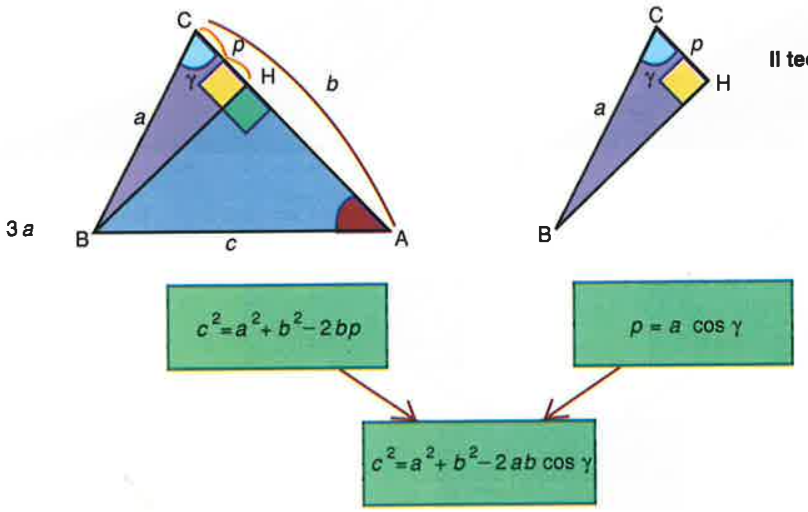


Figura 3
Il teorema del coseno per un triangolo acutangolo



B. TRIANGOLO OTTUSANGOLO

Il teorema dei seni nel triangolo ottusangolo

Si disegna un qualunque triangolo ottusangolo ABC, che ha l'angolo di vertice A ottuso, si traccia l'altezza CH, lunga h, e si considerano i due triangoli rettangoli ottenuti (fig. 4a):

- CHB, in cui BC è l'ipotenusa e CH è il cateto opposto all'angolo β;
- CHA, in cui AC è l'ipotenusa e CH è il cateto opposto all'angolo $\alpha' = 180° - \alpha$.

Si potrà quindi ripetere lo stesso procedimento seguito per i triangoli acutangoli (vedi fig. 4b), arrivando a scrivere:

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha'} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{c}{\operatorname{sen}\gamma} \qquad \text{con } \alpha' = 180° - \alpha$$

Il teorema del coseno nel triangolo ottusangolo

Riprendendo la generalizzazione del teorema di Pitagora (vedi p. 19) nel caso del triangolo ottusangolo, si trova che, in un triangolo ABC con l'angolo γ ottuso (fig. 5a), risulta:

$$c^2 = a^2 + b^2 + 2bp \qquad (6)$$

Ora, nel triangolo rettangolo BHC (fig. 5b), l'ipotenusa è sempre BC, ma BH è il cateto opposto all'angolo $\gamma' = 180° - \gamma$; si avrà quindi:

$$\frac{p}{a} = \cos\gamma' \quad \text{e quindi} \quad p = a\cdot\cos\gamma'$$

Sostituendo l'ultima espressione nella (5), si ottiene:

$$c^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cdot\cos\gamma' \quad \text{con } \gamma' = 180° - \gamma$$

Rimangono invece invariate le altre due relazioni, ottenute a partire da triangoli rettangoli che hanno come angolo acuto uno dei due angoli acuti del triangolo; si trovano quindi, per un triangolo ottusangolo qualunque, le relazioni seguenti:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cdot\cos\alpha$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cdot\cos\beta$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cdot\cos\gamma' \quad \text{con } \gamma' = 180° - \gamma$$

Il teorema dei seni e il teorema del coseno valgono per tutti i triangoli

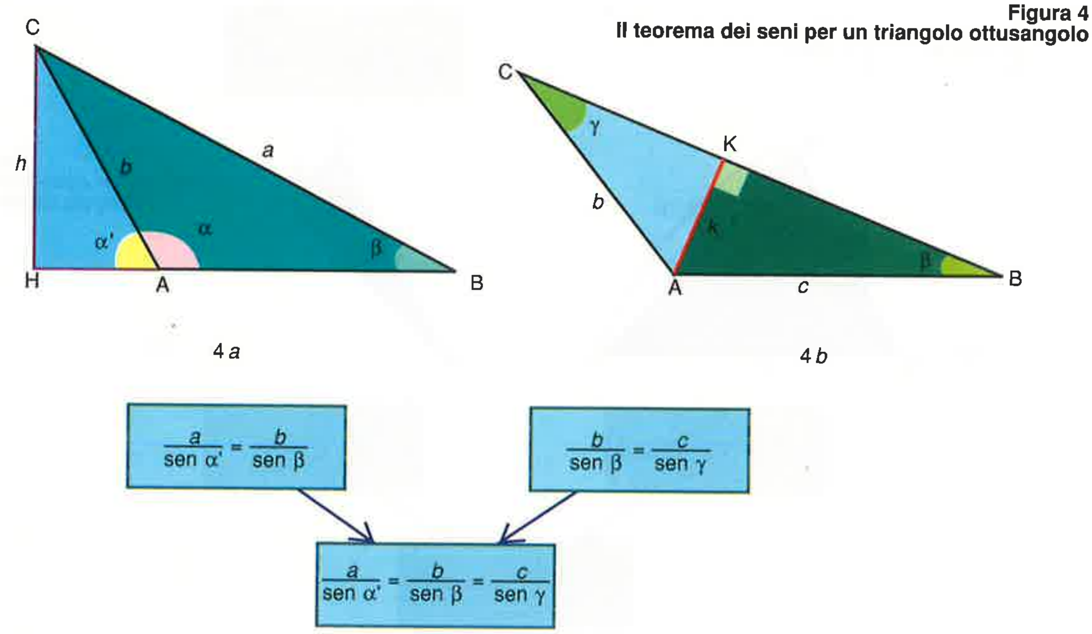
È importante osservare che i due teoremi dei seni e del coseno valgono anche per i triangoli rettangoli. Consideriamo, per esempio un triangolo ABC in cui è dato:

$$\alpha = 90° \text{ e quindi } \operatorname{sen}\alpha = 1 \quad \cos\alpha = 0$$

- Il teorema dei seni diventa:

$$\frac{a}{1} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{c}{\operatorname{sen}\gamma}$$

Figura 4
Il teorema dei seni per un triangolo ottusangolo



da cui si ricavano le note relazioni:

$$b = a \cdot \text{sen}\,\beta \qquad c = a \cdot \text{sen}\,\gamma$$

- Il teorema del coseno fornisce, in questo caso particolare:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Si ritrova cioè il teorema di Pitagora.

Si conclude dunque che *il teorema dei seni e il teorema del coseno forniscono delle relazioni fra lati e angoli che sono valide per qualunque triangolo.*

Applicando questi due teoremi, in particolare, ad un triangolo rettangolo, si ha che:

- con il teorema dei seni si ritrovano le relazioni fra lati ed angoli di un triangolo rettangolo;
- con il teorema del coseno si ritrova il teorema di Pitagora.

Verifiche

Conoscenze

① Disegnare un triangolo acutangolo, indicare con opportune lettere le lunghezze dei lati e le ampiezze degli angoli e scrivere le relazioni contenute nel teorema dei seni e nel teorema del coseno.

② Disegnare un triangolo ottusangolo, indicare con opportune lettere le lunghezze dei lati e le ampiezze degli angoli e scrivere le relazioni contenute nel teorema dei seni e nel teorema del coseno.

Comprensione

① Spiegare qual è la principale differenza fra il teorema dei seni per triangoli acutangoli e quello per triangoli ottusangoli.

② Spiegare qual è la principale differenza fra il teorema del coseno per triangoli acutangoli e quello per triangoli ottusangoli.

③ Spiegare che cosa si ottiene applicando il teorema del coseno e il teorema dei seni a un triangolo rettangolo.

Applicazioni

① Di un triangolo acutangolo ABC sono dati i seguenti elementi:

$$a = 10 \qquad b = 20 \qquad \gamma = 60°$$

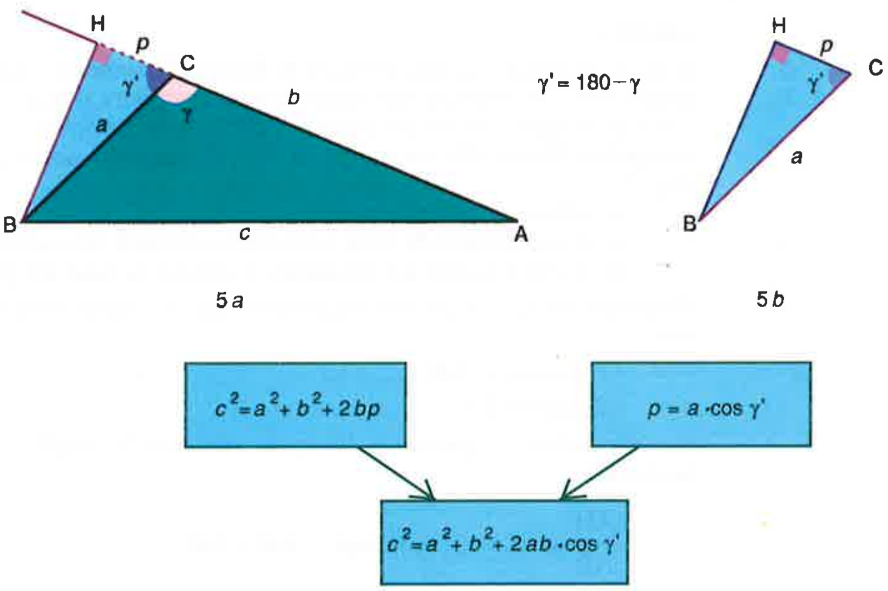
Applicare il teorema del coseno per calcolare la lunghezza del terzo lato.

② Di un triangolo ottusangolo ABC sono dati i seguenti elementi:

$$a = 10 \qquad b = 20 \qquad \gamma = 120°$$

Applicare il teorema del coseno per calcolare la lunghezza del terzo lato.

Figura 5
Il teorema del coseno per un triangolo ottusangolo



Risolvere problemi di trigonometria

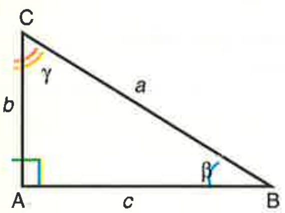
La trigonometria è nata e si è sviluppata per risolvere problemi nei campi più vari.

Questa «Attività» è destinata appunto alla risoluzione di problemi, che sono divisi in due grandi categorie:

A. problemi sui triangoli rettangoli;

B. problemi sui triangoli non rettangoli.

Figura 1
Gli elementi di un triangolo rettangolo



A. Problemi sui triangoli rettangoli

Tutti i problemi sui triangoli rettangoli si risolvono applicando opportunamente le seguenti relazioni, valide per qualunque triangolo ABC che abbia retto l'angolo di vertice A (fig. 1):

$$\beta + \gamma = 90° \qquad a^2 = b^2 + c^2$$

$$\frac{b}{a} = \operatorname{sen}\beta \qquad \frac{c}{a} = \cos\beta \qquad \frac{b}{c} = \operatorname{tg}\beta$$

Attività 1

Si vuole installare su una terrazza di Roma un pannello solare quadrato, con il lato lungo 3 m. I costruttori raccomandano di installare il pannello in modo che formi con il piano orizzontale un angolo di 10° inferiore rispetto alla latitudine del luogo; trovandosi Roma alla latitudine di 41°, il pannello dovrà essere inclinato di 31° (fig. 2).

Risolvere i seguenti quesiti:

a. A che altezza da terra arriverà la sommità del pannello?

b. A che distanza dal parapetto si troverà la base del pannello?

Osservare la fig. 2 *e fissare l'attenzione sul triangolo rettangolo AHB, di cui sono noti*:

- *l'ipotenusa* AB = ...
- *l'angolo* β = ...

Per rispondere al quesito a, *bisogna calcolare la lunghezza di AH, tenendo presente che*:

$$\frac{AH}{AB} = \text{............} \quad \textit{e quindi} \quad AH = AB \cdot \text{............}$$

Si ottiene:

$$AH \cong 1{,}5 \text{ m}$$

Per rispondere al quesito b, *bisogna calcolare la lunghezza di HB, tenendo presente che:*

$$\frac{BH}{AB} = \ldots\ldots\ldots \quad \textit{e quindi} \quad BH = AB \cdot \ldots\ldots\ldots$$

Si ottiene:

$$BH \cong 2{,}6 \text{ m}$$

Attività 2

La fig. 3 rappresenta una strada che sale di 20 m su una distanza orizzontale di 100 m; in questo caso si dice che la pendenza è del 20%.

Quanto vale l'angolo di inclinazione β della strada?

Osservare la fig. 3 *ed esaminare il triangolo rettangolo ABC, che ha:*

- *il cateto adiacente all'angolo* β, *cioè* AB = ...
- *il cateto opposto all'angolo* β, *cioè* BC = ...

Per rispondere al quesito, basta ricordare che:

$$\frac{BC}{AB} = \ldots\ldots\ldots \quad \textit{e quindi} \quad \text{tg}\beta = 0{,}2$$

Per determinare β *con il calcolatore tascabile si preme la sequenza di tasti:*

$\boxed{0}\ \boxed{.}\ \boxed{2}\ \boxed{\text{INV}}\ \boxed{\text{tan}}$

o sequenze analoghe usate da un calcolatore tascabile per invertire *la funzione tangente, cioè per avere l'angolo a partire dal valore della tangente.*

Si ottiene:

$$\beta \cong 11°$$

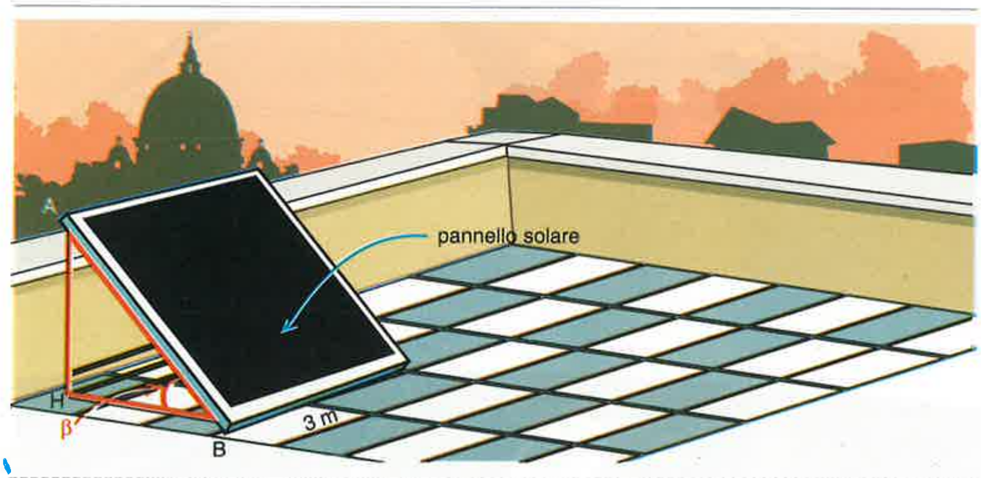


Figura 2
L'istallazione di un pannello solare

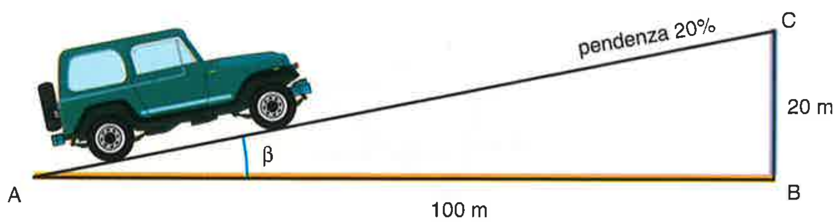
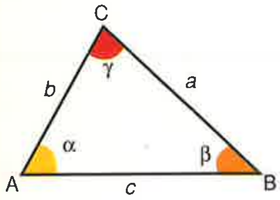


Figura 3
La pendenza di una strada

Figura 4
Gli elementi di un triangolo acutangolo



B. Problemi sui triangoli non rettangoli

Risolviamo due problemi sui triangoli acutangoli, che si risolvono applicando opportunamente le seguenti relazioni, valide per qualunque triangolo acutangolo ABC (fig. 4):

$$\alpha+\beta+\gamma=180^\circ \qquad \frac{a}{\operatorname{sen}\alpha}=\frac{b}{\operatorname{sen}\beta}=\frac{c}{\operatorname{sen}\gamma} \qquad \begin{cases} a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos\alpha \\ b^2=a^2+c^2-2ac\cdot\cos\beta \\ c^2=a^2+b^2-2ab\cdot\cos\gamma \end{cases}$$

Attività 3

Per guidare un missile antiaereo, la stazione radar da terra deve valutare, in ogni istante, la distanza fra l'aereo da colpire e il missile (fig. 5*a*). Il radar, disposto in R, misura la distanza RA dell'aereo e quella RM del missile M; misura inoltre l'angolo α fra queste due direzioni, ottenendo per esempio:

$$\mathrm{RA}=b=12\ \mathrm{km} \qquad \mathrm{RM}=c=20\ \mathrm{km} \qquad \alpha=65^\circ$$

Quanto vale la distanza AM?

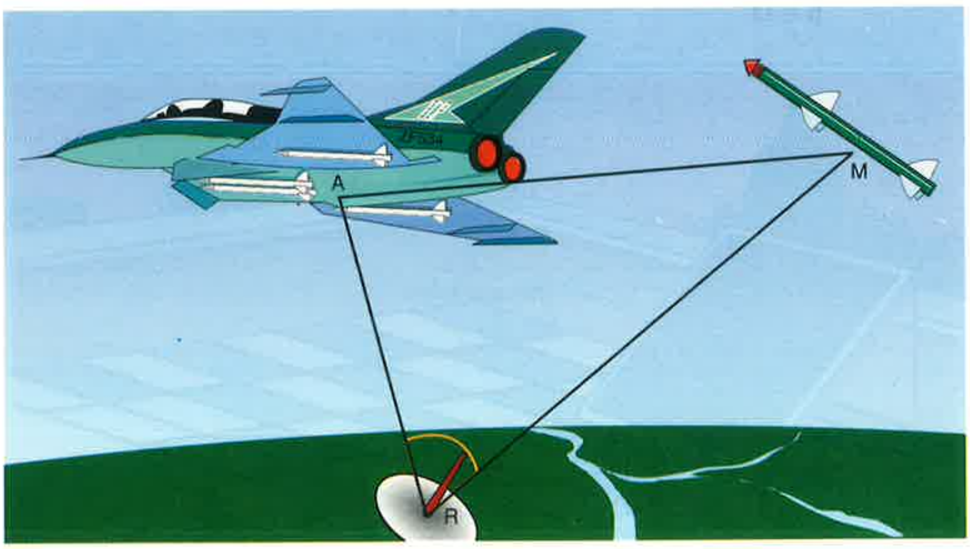
Il problema è schematizzato in fig. 5*b*: *del triangolo RAM sono noti due lati e l'angolo compreso e si vuole calcolare il terzo lato; per questo, basta valersi del teorema del coseno. Indicare con* x *la lunghezza incognita di AM e completare il seguente procedimento*:

$$x^2=(\ldots\ldots\ldots)^2+(\ldots\ldots\ldots)^2-2\cdot(\ldots\ldots\ldots)\cdot(\ldots\ldots\ldots)\cdot\cos\ldots\ldots\ldots\cong\ldots\ldots\ldots$$

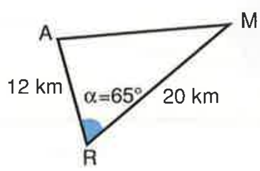
Si ottiene quindi:

$$x=\sqrt{\ldots\ldots}\cong 18{,}5\ \mathrm{km}$$

Figura 5
La guida di un missile antiaereo



5*a*



5*b*

Attività 4

Una nave N avverte di trovarsi in difficoltà (fig. 6*a*) e il segnale viene ricevuto da due capitanerie di porto, A e B, che distano fra loro 40 km in linea d'aria.

Con un apposito strumento (il radiogoniometro) le due capitanerie rilevano gli angoli $\alpha = 85°$ e $\beta = 50°$.

Quanto dista la nave da A e da B?

Il problema è schematizzato in fig. 6*b*: *del triangolo ABN sono noti due angoli e il lato compreso, cioè si ha:*

$$\alpha = 85° \qquad \beta = 50° \qquad AB = c = 40$$

e si vogliono calcolare gli altri due lati.

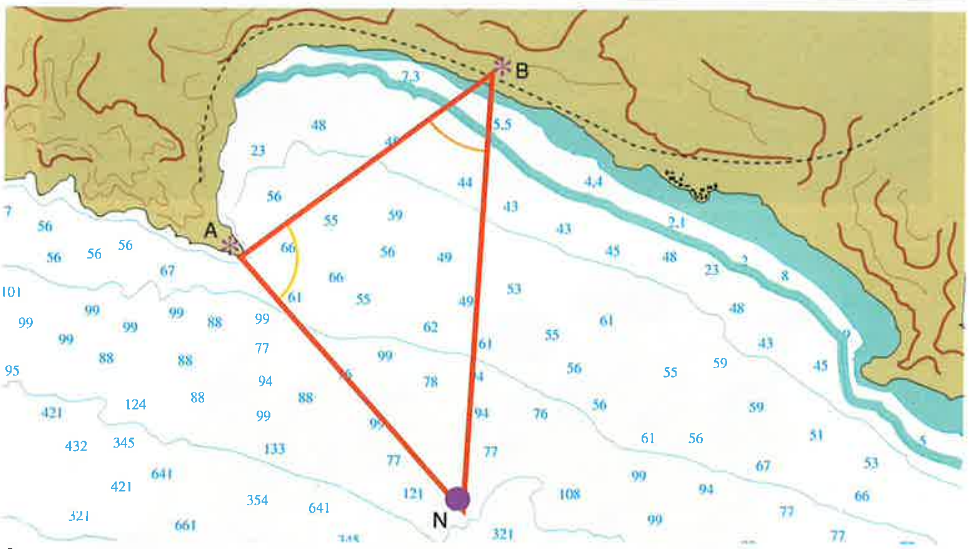
Per questo, bisogna valersi del teorema dei seni. Indicare con x *la lunghezza incognita di AN, con* y *la lunghezza incognita di BN e completare il seguente procedimento*:

$$\gamma = 180° - \ldots\ldots\ldots \qquad \text{cioè} \qquad \gamma = 45°$$

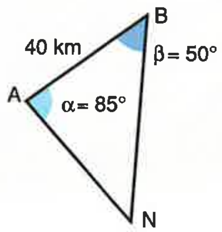
$$\begin{cases} \dfrac{40}{\text{sen}\ldots\ldots} = \dfrac{x}{\text{sen}\ldots\ldots} \\[2ex] \dfrac{40}{\text{sen}\ldots\ldots} = \dfrac{y}{\text{sen}\ldots\ldots} \end{cases} \qquad \text{cioè} \qquad \begin{cases} \dfrac{x}{\ldots\ldots\ldots} = \ldots\ldots\ldots \\[2ex] \dfrac{y}{\ldots\ldots\ldots} = \ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Si ottiene in definitiva:

$$AN = x \cong 43 \text{ km} \qquad BN = y \cong 56 \text{ km}$$



6*a*



6*b*

Figura 6
Come calcolare la distanza di una nave in difficoltà

La triangolazione e l'area del triangolo

La triangolazione

La foto da satellite di fig. 1 mostra una parte dei Paesi Bassi, e in particolare l'isola artificiale di Flevoland, ottenuta mediante il prosciugamento di antiche paludi. Ci si chiede come si potrebbe misurare l'area della zona in questione, che ha la forma di un poligono irregolare.

Un problema analogo può presentarsi anche in altre circostanze, per esempio quando si vuole valutare l'estensione di un terreno o di un parco.

Figura 1
L'area di un poligono irregolare in una foto da satellite

Figura 2
La triangolazione effettuata sulla pianta topografica di un parco pubblico

In questi casi l'area richiesta si ottiene ricoprendo la zona con una rete di triangoli i cui vertici siano dei punti ben determinati: nel caso del parco, ad esempio, un albero, una pietra, un cartello o altro (fig. 2). In questo modo si effettua una *triangolazione* e il problema si riduce al calcolo dell'area di tanti triangoli, di cui bisogna misurare lati e angoli direttamente sul terreno.

Queste misure, dette *rilevamenti topografici*, spesso non sono tutte possibili: qualche volta è facile misurare gli angoli ed è addirittura impossibile riuscire a misurare tutti i lati, mentre altre volte è più facile misurare i lati.

Si è perciò condotti ad affrontare il seguente problema: determinare l'area di un triangolo di cui si conoscono solo alcuni elementi.

I casi che si presentano più frequentemente sono i seguenti:

A. Area di un triangolo di cui sono noti due lati e l'angolo compreso;

B. Area di un triangolo di cui sono noti due angoli e il lato compreso;

C. Area di un triangolo di cui sono noti i tre lati.

Questa scheda è dedicata appunto ad affrontare i tre casi indicati.

Area di un triangolo di cui sono noti due lati e l'angolo compreso

Del triangolo ABC di fig. 3 sono noti:

- le lunghezze b, c di due lati;
- l'ampiezza α dell'angolo compreso fra i due lati.

Ma l'area S del triangolo è data da:

$$S = \frac{1}{2} ch$$

e perciò bisogna calcolare la lunghezza h dell'altezza CH.

In questo caso basta esaminare il triangolo rettangolo ACH per ricavare:

$$\frac{h}{b} = \operatorname{sen}\alpha \quad \text{da cui} \quad h = b \cdot \operatorname{sen}\alpha$$

L'area S è dunque data da:

$$\boldsymbol{S = \frac{1}{2} cb \cdot \operatorname{sen}\alpha} \qquad (1)$$

E così, per esempio, il triangolo di cui sono noti:

$$c = 4 \quad b = 5 \quad \alpha = 30^{\circ} \quad \text{e quindi} \quad \operatorname{sen}30^{\circ} = \frac{1}{2}$$

ha l'area S data da:

$$S = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 5 \cdot \frac{1}{2} = 5$$

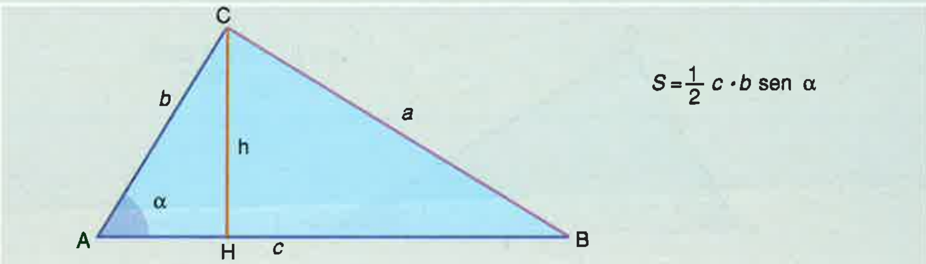


Figura 3
L'area di un triangolo di cui sono noti due lati e l'angolo compreso

Area di un triangolo di cui sono noti due angoli e il lato compreso

Del triangolo ABC di fig. 4 sono noti:

- la lunghezza c di un lato;
- le ampiezze α e β degli angoli che comprendono il lato.

Si osserva subito che del triangolo si conosce pure il terzo angolo, dato che risulta:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180° \qquad \text{e quindi} \qquad \gamma = 180° - \alpha - \beta$$

Però non si conosce l'altezza h e nemmeno l'altro lato b, perciò non si può applicare la formula (1) appena trovata.

Viene allora l'idea di calcolare il lato b valendosi del teorema dei seni; si ha, in particolare:

$$\frac{b}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{c}{\operatorname{sen}\gamma} \qquad \text{da cui} \qquad b = \frac{c \cdot \operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\gamma}$$

Sostituendo l'ultima espressione ottenuta nella (1), si trova:

$$S = \frac{1}{2}c^2 \frac{\operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\gamma} \qquad (2)$$

Ecco un'applicazione immediata di questa formula: per il triangolo che ha i seguenti elementi:

$$c = 2 \qquad \alpha = 50° \qquad \beta = 70° \qquad \text{e quindi} \qquad \gamma = 60°$$

l'area S è data da:

$$S = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \frac{\operatorname{sen}50° \cdot \operatorname{sen}70°}{\operatorname{sen}60°} \cong 1,66$$

Area di un triangolo di cui si conoscono i tre lati

Del triangolo di fig. 5 sono note le lunghezze dei tre lati; come calcolare l'area S ?

Conviene cominciare a lavorare su un esempio numerico. Il triangolo di cui sono noti i seguenti elementi:

$$a = 58 \qquad b = 28 \qquad c = 64$$

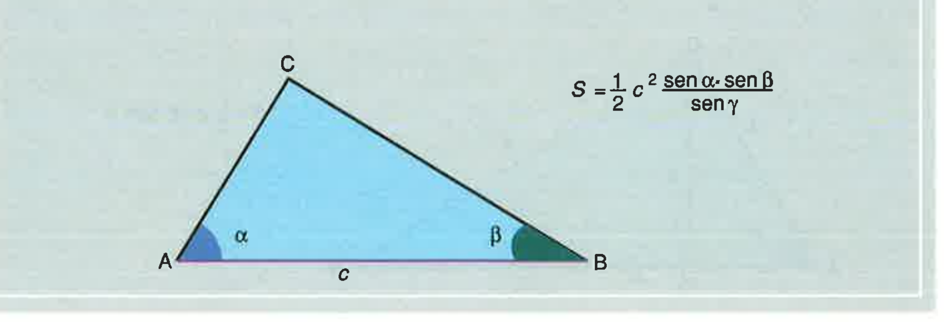
Si osserva subito che converrebbe applicare la formula (1), ma manca l'ampiezza dell'angolo α, che si potrebbe però ricavare basandosi sul teorema del coseno; risulta infatti:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha$$

e cioè, nel caso assegnato:

$$58^2 = 28^2 + 64^2 - 2 \cdot 28 \cdot 64 \cdot \cos\alpha$$

Figura 4
L'area di un triangolo di cui sono dati due angoli e il lato compreso



Da qui si può ricavare:

$$\cos\alpha = \frac{28^2+64^2-58^2}{2\cdot 28\cdot 64} \cong 0,423 \quad \text{e quindi} \quad \alpha \cong 65^o$$

Ora si può finalmente applicare la formula (1), trovando che l'area S è data da:

$$S \cong \frac{1}{2}\ 64\cdot 28\cdot \text{sen}\ 65^o \cong 811,052$$

Si osserva subito che in questo procedimento si ricorre più volte ai calcoli approssimati, e cioè:

- nel calcolo dei cos α come risultato di una divisione;
- nel calcolo del corrispondete valore di α;
- nel calcolo di sen α.

Si può però trovare un altro procedimento che fornisce l'area di un triangolo di lati noti con migliore precisione: si tratta della *formula di Erone*, dovuta al matematico alessandrino Erone, attivo intorno al 100 d.C.

La formula di Erone

Erone trovò per via geometrica la seguente formula per calcolare l'area S di un triangolo di lati noti:

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

dove:

- a, b, c sono le misure dei lati;
- $2p = a + b + c$ è la misura del perimetro.

Applicando questa formula al precedente triangolo si trova:

$2p = 58 + 28 + 64$ da cui $p = 75$

e quindi:

$$S=\sqrt{75(75-58)(75-28)(75-64)} \cong 811,896$$

La dimostrazione della formula di Erone

Per ricavare la formula che da lui prese il nome, Erone si basò su un sottile ragionamento geometrico, che può essere notevolmente abbreviato dall'uso della trigonometria e del calcolo letterale, restando tuttavia piuttosto lungo e complicato rispetto alla formula finale, semplice ed elegante.

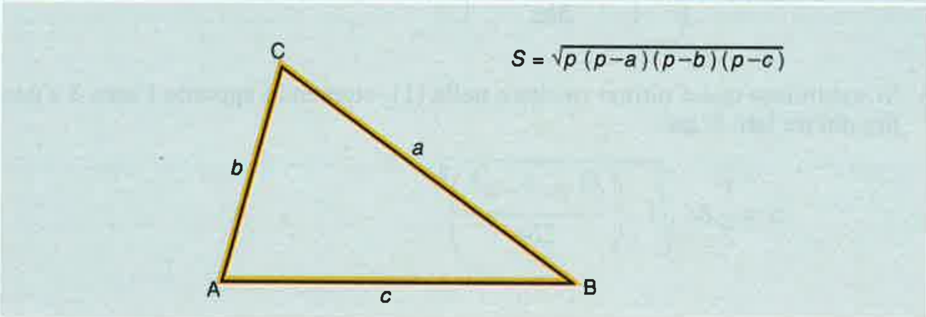


Figura 5
L'area di un triangolo di cui sono noti i tre lati

Ecco come si può procedere per calcolare l'area S di un triangolo ABC, di cui si conoscono solo i lati (fig. 6), valendosi della formula:

$$S = \frac{1}{2} bc \cdot \operatorname{sen} \alpha \qquad (1)$$

1. Si ricava il valore del coseno dell'angolo α, valendosi del teorema del coseno; si ha:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha \quad \text{da cui} \quad \cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

2. Per ricavare il seno dell'angolo α, si esamina il triangolo rettangolo CAH di fig. 5, trovando che risulta:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{h}{b} \qquad (\operatorname{sen}\alpha)^2 = \frac{h^2}{b^2}$$

e quindi anche:

$$\cos\alpha = \frac{p}{b} \qquad (\cos\alpha)^2 = \frac{p^2}{b^2}$$

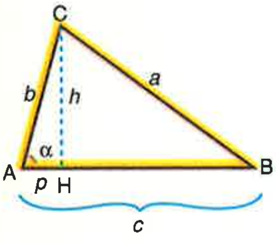
da cui, addizionando membro a membro le due uguaglianze, si può ricavare:

$$(\operatorname{sen}\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = \frac{h^2 + p^2}{b^2}$$

Dato che, per il teorema di Pitagora applicato al triangolo CAH, risulta:

$$h^2 + p^2 = b^2 \quad \text{e quindi} \quad \frac{h^2 + p^2}{b^2} = 1$$

Figura 6
La dimostrazione della formula di Erone



si avrà pure:

$$(\operatorname{sen}\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = 1 \qquad \text{da cui} \qquad (\operatorname{sen}\alpha)^2 = 1 - (\cos\alpha)^2$$

e finalmente:

$$\operatorname{sen}\alpha = \sqrt{1 - (\cos\alpha)^2}$$

che, nel caso esaminato, diventa:

$$\operatorname{sen}\alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right)^2}$$

3. Si sostituisce quest'ultimo risultato nella (1), ottenendo appunto l'area S a partire dai tre lati; si ha:

$$S = \frac{1}{2} bc \sqrt{1 - \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right)^2}$$

L'espressione ora ottenuta sembra molto lontana dall'elegante formula di Erone, cui però ci si può ricondurre con i seguenti non brevi, ma semplici, passaggi di calcolo letterale.

4. Si sviluppa il radicando, svolgendo alcune delle operazioni indicate; si ha:

$$1-\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)^2=1-\frac{(b^2+c^2-a^2)^2}{(2bc)^2}=\frac{(2bc)^2-(b^2+c^2-a^2)^2}{(2bc)^2}$$

e quindi:

$$S=\frac{1}{2}bc\,\frac{\sqrt{(2bc)^2-(b^2+c^2-a^2)^2}}{2bc}=\frac{1}{4}\sqrt{(2bc)^2-(b^2+c^2-a^2)^2} \qquad (3)$$

5. Si lavora sul nuovo radicando così ottenuto, tenendo in particolare presenti le seguenti identità, esposte nel primo volume, rispettivamente alle pp. 267, 269 e 273:

$$x^2-y^2=(x-y)(x+y) \qquad (4)$$

$$x^2+y^2+2xy=(x+y)^2 \qquad (5)$$

$$x^2+y^2-2xy=(x-y)^2 \qquad (6)$$

Si ottiene:

$$\begin{aligned}&(2bc)^2-(b^2+c^2-a^2)^2=\\&=[2bc-(b^2+c^2-a^2)][2bc+(b^2+c^2-a^2)]= && \text{per la (4)}\\&=[2bc-b^2-c^2+a^2][2bc+b^2+c^2-a^2]=\\&=[a^2-(b^2+c^2-2bc)][(b^2+c^2+2bc)-a^2]=\\&=[a^2-(b-c)^2][(b+c)^2-a^2]= && \text{per la (5) e la (6)}\\&=[a-(b-c)][a+(b-c)][b+c+a][b+c-a] && \text{per la (4)}\end{aligned}$$

Si ottiene infine:

$$(2bc)^2-(b^2+c^2-a^2)^2=(a+c-b)(a+b-c)(a+b+c)(b+c-a)$$

Indicato poi

$$2p=a+b+c$$

si ha:

$$a+c-b=a+c+b-2b=2p-2b=2\,(p-b)$$

e analogamente:

$$a+b-c=2\,(p-c) \qquad\qquad b+c-a=2\,(p-a)$$

Risulta perciò:

$$(2bc)^2-(b^2+c^2-a^2)^2=16p\,(p-a)(p-b)(p-c)$$

e quindi:

$$\sqrt{(2bc)^2-(b^2+c^2-a^2)^2}=4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Sostituendo quest'ultima espressione nella (3), si ottiene appunto la formula di Erone:

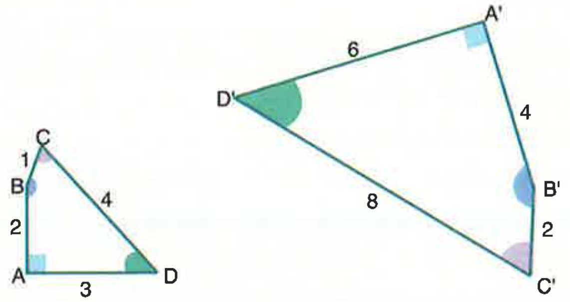
$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Che cosa bisogna sapere

A. Similitudine

Poligoni simili

Si dicono simili due poligoni che hanno ordinatamente uguali gli angoli e il rapporto dei lati corrispondenti.

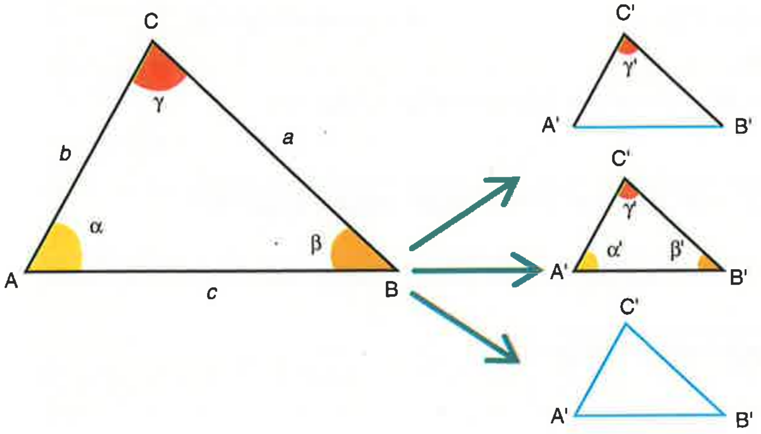


$\hat{A} = \hat{A}'$
$\hat{B} = \hat{B}'$
$\hat{C} = \hat{C}'$
$\hat{D} = \hat{D}'$
$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'D'}{CD} = \frac{D'A'}{DA}$

Criteri di similitudine dei triangoli

Due triangoli sono simili se hanno:

1. due lati in proporzione e l'angolo compreso uguale;
2. i tre angoli uguali;
3. i tre lati in proporzione.

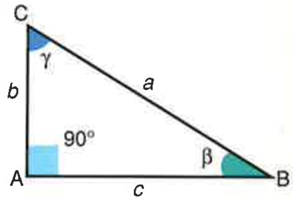


1
$\frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$
$\gamma = \gamma'$

2
$\alpha = \alpha'$
$\beta = \beta'$
$\gamma = \gamma'$

3
$\frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AB}{A'B'}$

B. Trigonometria

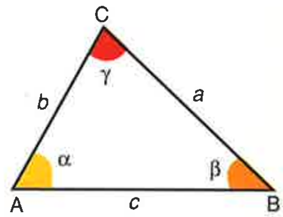


Relazioni fra lati e angoli di un triangolo rettangolo

Per un triangolo ABC, rettangolo in A, e con i lati lunghi a, b, c e gli angoli acuti ampi α e β, valgono le seguenti relazioni:

$$\frac{b}{a} = \operatorname{sen}\beta \qquad \frac{c}{a} = \cos\beta \qquad \frac{b}{c} = \operatorname{tg}\beta$$

$$\frac{c}{a} = \operatorname{sen}\gamma \qquad \frac{b}{a} = \cos\gamma \qquad \frac{c}{b} = \operatorname{tg}\gamma$$

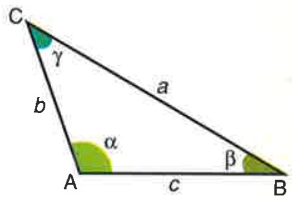


Relazioni fra lati e angoli di un triangolo acutangolo

Per un triangolo acutangolo ABC, con i lati lunghi a, b, c e gli angoli ampi α, β, γ, valgono le seguenti relazioni:

teorema dei seni $\dfrac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \dfrac{b}{\operatorname{sen}\beta} = \dfrac{c}{\operatorname{sen}\gamma}$

teorema del coseno $\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\beta \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma \end{cases}$



Relazioni fra lati e angoli di un triangolo ottusangolo

Per un triangolo ABC, ottusangolo in A, con i lati lunghi a, b, c e gli angoli acuti ampi β e γ, valgono le seguenti relazioni:

teorema dei seni $\dfrac{a}{\operatorname{sen}\alpha'} = \dfrac{b}{\operatorname{sen}\beta} = \dfrac{c}{\operatorname{sen}\gamma}$ con $\alpha' = 180° - \alpha$

teorema del coseno $\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 + 2bc \cdot \cos\alpha' \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\beta \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma \end{cases}$ con $\alpha' = 180° - \alpha$

Che cosa bisogna saper fare

Questo capitolo è dedicato a due temi:

A. le figure simili;
B. le relazioni fra lati e angoli di un triangolo.

Le applicazioni di questi temi sono molto numerose e varie e possono essere riunite in due grandi categorie:

I. scoperta di proprietà delle figure;
II. risoluzione di problemi.

Ecco qualche esempio su cui lavorare.

A. Figure simili

I. Scoprire proprietà delle figure

Attività 1

In fig. 1 è rappresentato un qualunque triangolo ABC, a partire dal quale si è eseguita la seguente costruzione:

- si è tracciata la bisettrice AD dell'angolo $B\hat{A}C$;
- da C si è tracciata la parallela a AD, fino ad incontrare la retta AB in E.

Risolvere i seguenti quesiti:

a. Dimostrare che il triangolo EAC è isoscele sulla base EC;
b. Dimostrare che vale la proporzione:

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AE} \qquad (1)$$

c. Dimostrare che vale la seguente proprietà: in un qualunque triangolo la bisettrice di un angolo interno divide il lato opposto all'angolo in parti proporzionali ai lati.

Quesito (a)

Per dimostrare che il triangolo EAC è isoscele sulla base EC, bisogna dimostrare che sono uguali gli angoli ....

Esaminando le due parallele AD e EC, tagliate dalla trasversale AC, si trova che sono uguali gli angoli alterni interni *e perciò risulta:*

$E\hat{C}A$ = ...

Esaminando le due parallele AD e EC, tagliate dalla trasversale BE, si trova che sono uguali gli angoli corrispondenti *e perciò risulta:*

$A\hat{E}C$ = ...

Il triangolo è dunque isoscele e perciò risulta:

$$AE = AC \qquad (2)$$

Quesito (b)

Considerare le due parallele AD e EC, tagliate dalle trasversali BC e BE, e applicare il teorema di Talete.

Quesito (c)

Considerare insieme la (1) *e la* (2).

II. Risoluzione di problemi

Attività 2

Il triangolo rettangolo ABC di fig. 2 ha i cateti lunghi 6 e 15. Nel triangolo si vuole inscrivere un rettangolo che abbia il perimetro lungo 24; quanto debbono essere lunghi i lati del rettangolo?

Eseguito il disegno, si passa a:

1. *scelta delle incognite e loro limitazione; si può scegliere, per esempio:*

   AF = x con .... < x < ....

   FE = y con .... < y < ....

2. *Essendo due le incognite, occorrono due relazioni che leghino queste due incognite.*

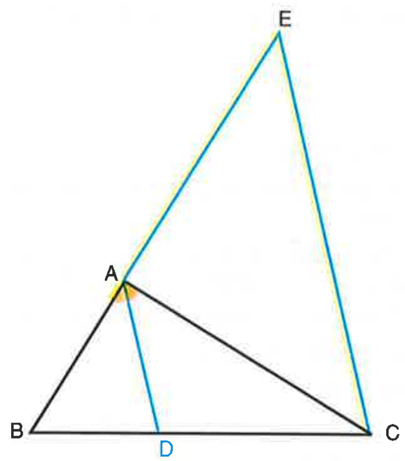


Figura 1
La bisettrice di un triangolo

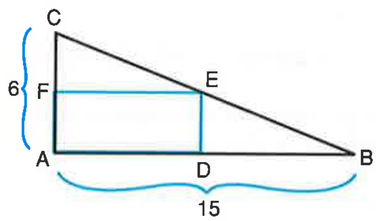


Figura 2
Inscrivere un rettangolo in un triangolo

- *La prima è data direttamente dal problema:*

$2x + 2y =$ .... ossia $x + y =$ ....

- *La seconda si può ricavare osservando che sono simili i triangoli ABC e CFE, che hanno* .... *e perciò si ha:*

$$\frac{CA}{CF} = \frac{AB}{FE} \quad \text{cioè} \quad \frac{\text{............}}{\text{............}} = \frac{\text{............}}{\text{............}}$$

che conviene scrivere nella forma:

$2y =$ ....

3. *Per determinare le due incognite bisogna dunque risolvere il seguente sistema:*

$$\begin{cases} x + y = \text{........} \\ 5x + 2y = \text{........} \end{cases}$$

4. *Risolvendo il sistema si ottiene:*

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 10 \end{cases}$$

B. Relazioni fra lati e angoli di un triangolo

I. Scoprire proprietà delle figure

Attività 3

Dimostrare il seguente *teorema della corda*: la lunghezza L di una corda AB di un cerchio è sempre data da:

$$L = 2r \cdot \text{sen}\ \alpha$$

dove:

- r è il raggio della circonferenza;
- α è l'ampiezza di uno qualunque degli angoli alla circonferenza acuti che insistono sulla corda AB.

In fig. 3*a sono rappresente una corda AB di una circonferenza di centro O e raggio* r *e il diametro AC che passa per uno degli estremi della corda.*

- *Il triangolo ABC ha l'angolo di vertice B retto, perché* ....
- *Esaminando il triangolo ABC, si trova che:*
  - *l'angolo* $A\hat{C}B$ *è ampio* α;
  - *l'ipotenusa è*.....................;
  - *il cateto opposto all'angolo* α *è* ....

Perciò risulta:

$$\text{sen}\ \alpha = \frac{\text{..........}}{\text{..........}} \qquad \textit{e quindi} \qquad AB = 2r \cdot \text{sen}\ \alpha$$

La dimostrazione del teorema si conclude osservando la fig. 3b, dove sono rappresentati altri angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco AB; tutti questi angoli sono uguali, perché .... *(vedi il primo volume, p. 146).*

Attività 4

Dimostrare il seguente teorema: in un qualunque triangolo acutangolo il rapporto fra un lato e il seno dell'angolo opposto è uguale al diametro del cerchio circoscritto.

Esaminare la fig. 4 e osservare che, nel triangolo ABC, si ha che c *è la lunghezza della corda su cui insiste l'angolo ampio* γ*, perciò si ha:*

$$c = 2r \cdot \operatorname{sen}\gamma \quad \text{ossia} \quad \frac{c}{\operatorname{sen}\gamma} = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Esaminare in modo analogo le altre coppie lato-seno dell'angolo opposto.

II. Risoluzione di problemi

Attività 5

Si sta progettando una galleria rettilinea che deve collegare due paesi A e B situati su due versanti opposti di una montagna. Per prevedere la lunghezza della galleria si può procedere così (fig. 5):

- si fissa una località C facile da raggiungere;
- si misurano le distanze CA = 1,125 km e CB = 2,456 km;
- si misura l'angolo $A\hat{C}B = 50°30'$;
- si calcola la lunghezza della galleria AB valendosi del teorema del coseno.

Per usare il calcolatore tascabile, tenere presente che:

$$50°\,30' = 50° + \left(\frac{30}{60}\right)^{\circ} = (50{,}5)°$$

Si ottiene:

$$AB \cong 1{,}945 \text{ km}$$

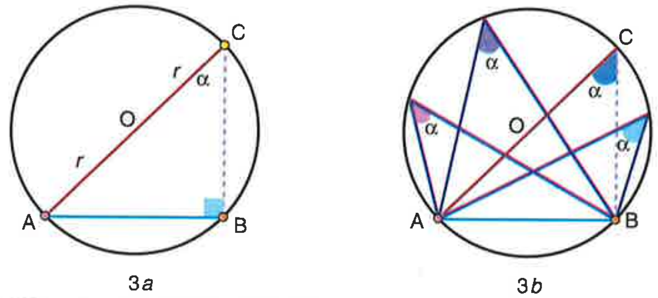


Figura 3
Il teorema della corda

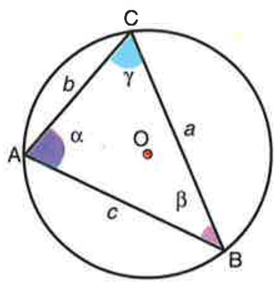


Figura 4 (a sinistra)
Il diametro del cerchio circoscritto a un triangolo acutangolo

Figura 5 (a destra)
Calcolare la lunghezza di una galleria