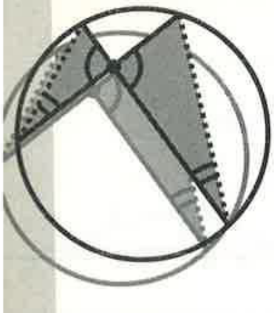


Sui poligoni simili

1. A partire da un quadrato Q con il lato lungo 8 si effettuano le seguenti costruzioni:
a. si toglie a tutti i lati un segmento lungo 2, ottenendo un quadrato Q' di lato 6;
b. si dimezzano i lati ottenendo un quadrato Q" di lato 4.
Spiegare perché sia Q' che Q" sono simili a Q.

2. A partire da un quadrato Q con il lato lungo 9 si effettuano le seguenti costruzioni:
a. si aggiunge ai lati un segmento lungo 3, ottenendo un quadrato Q' di lato 12;
b. si triplicano i lati ottenendo un quadrato Q" di lato 27.
Spiegare perché sia Q' che Q" sono simili a Q.

3. Spiegare perché due quadrati sono sempre simili. Portare qualche esempio.

4. A partire da un rettangolo R che ha le dimensioni lunghe 18 e 12 si effettuano le seguenti costruzioni:
a. si toglie ad entrambe le dimensioni un segmento lungo 2, ottenendo un rettangolo R' che ha le dimensioni lunghe 16 e 10;
b. si dimezzano entrambe le dimensioni ottenendo un rettangolo R" che ha le dimensioni lunghe 9 e 6.
Spiegare perché R" è simile a R, mentre R' non lo è.

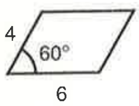
5. A partire da un rettangolo R che ha le dimensioni lunghe 5 e 6 si effettuano le seguenti costruzioni:
a. si aggiunge ad entrambe le dimensioni un segmento lungo 3, ottenendo un rettangolo R' che ha le dimensioni lunghe 8 e 9;
b. si triplicano entrambe le dimensioni ottenendo un rettangolo R" che ha le dimensioni lunghe 15 e 18.
Spiegare perché R" è simile a R, mentre R' non lo è.

6. Dire quali elementi bisogna confrontare per decidere se due rettangoli sono simili. Portare qualche esempio.

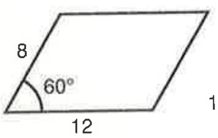
7. A partire dal rettangolo R con le dimensioni lunghe 18 e 12, si toglie un segmento lungo 2 dal lato minore; quanto bisogna togliere all'altro lato per ottenere un rettangolo simile a R?
[*Indicare con* x *la lunghezza del segmento da togliere; si ottiene* x=3]

8. A partire dal rettangolo R con le dimensioni lunghe 5 e 6, si aggiunge un segmento lungo 3 al lato maggiore; quanto bisogna aggiungere all'altro lato per ottenere un rettangolo simile a R?
[*Indicare con* x *la lunghezza del segmento da aggiungere; si ottiene* x=2,5]

Figura 1



1 *a*



1 *b*

9. Disegnare un rombo R con i lati lunghi 4 e l'angolo acuto ampio 30°; disegnare quindi le figure seguenti:
- il rombo R' che si ottiene raddoppiando i lati e l'angolo acuto;
- il rombo R" che si ottiene raddoppiando i lati e lasciando fisso l'angolo acuto.

Spiegare perché R" è simile a R, mentre R' non lo è.

10. Dire quali elementi bisogna confrontare per decidere se sono simili due rombi.

11. Spiegare perché le informazioni della fig. 1 bastano per decidere che i due parallelogrammi P e P' sono simili.

12. Dire quali elementi bisogna confrontare per decidere se sono simili due parallelogrammi.

13. Spiegare perché le informazioni della fig. 2 bastano per decidere che i due trapezi isosceli T e T' sono simili.

14. Quali elementi bisogna confrontare per decidere se sono simili due trapezi isosceli?

15. Spiegare perché le informazioni della fig. 3 bastano per decidere che i due trapezi rettangoli T e T' sono simili.

16. Dire quali elementi bisogna confrontare per decidere se sono simili due trapezi rettangoli.

17. Dire quali elementi bisogna confrontare per decidere se sono simili due trapezi.

18. Dire quali elementi bisogna confrontare per decidere se sono simili due quadrilateri inscritti in due cerchi con lo stesso raggio.

[*Tenere presente che in un quadrilatero inscritto in un cerchio la somma degli angoli opposti è sempre un angolo piatto come è mostrato nel primo volume, pp. 147-148*]

19. Esaminare la coppia di quadrilateri rappresentata in fig. 4 e spiegare perché certamente non sono simili.

20. Esaminare la coppia di quadrilateri simili rappresentata in fig. 5 e calcolare le lunghezze dei lati AD, DC, CB e C'B'.

21. Esaminare la coppia di quadrilateri simili rappresentata in fig. 6 e calcolare le lunghezze dei lati A'B', B'C' e A'D'.

22. Disegnare le seguenti coppie di poligoni:
a. due esagoni equilateri, che non siano simili;
b. due esagoni equiangoli, che non siano simili.
Spiegare perché non è possibile costruire due esagoni regolari che non siano simili.

23. Spiegare perché due esagoni regolari sono sempre simili. Portare qualche esempio.

24. Spiegare perché due poligoni regolari con lo stesso numero di lati sono sempre simili. Portare qualche esempio.

Figura 2

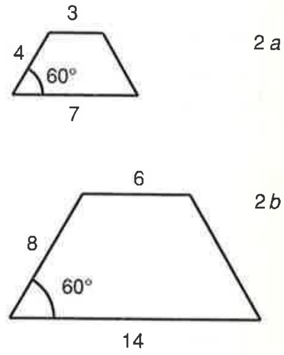


Figura 3

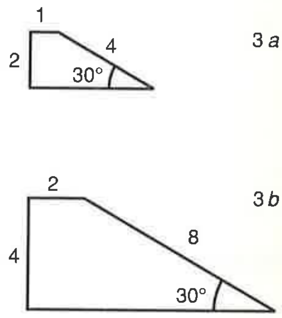


Figura 4

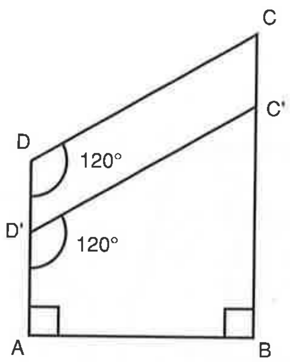


Figura 5

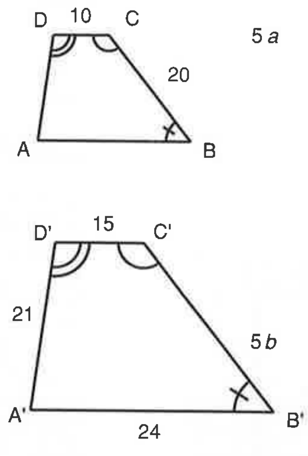


Figura 6

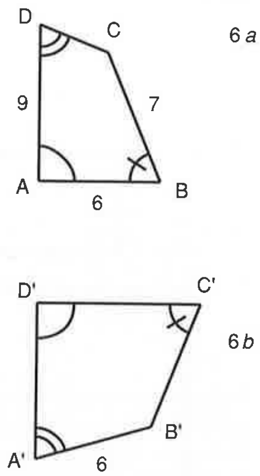
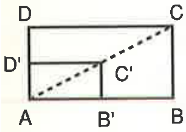
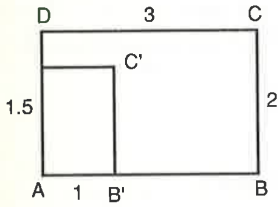


Figura 7



7*a*



7*b*

Sui poligoni omotetici

25. Esaminare i rettangoli di fig. 7 e risolvere i seguenti quesiti:
a. indicare la coppia di rettangoli omotetici;
b. indicare la coppia di rettangoli che sono simili, ma non omotetici;
c. spiegare perché si può trovare una coppia di rettangoli simili, ma non omotetici.

26. Esaminare i trapezi rettangoli di fig. 8 e risolvere i seguenti quesiti:
a. indicare la coppia di trapezi omotetici;
b. indicare la coppia di trapezi che non sono simili.
c. spiegare perché non si trova una coppia di trapezi omotetici, ma non simili.

27. Esaminare i due rettangoli di fig. 9 e risolvere i seguenti quesiti:
a. spiegare perché i due rettangoli sono omotetici;
b. determinare la posizione del punto O, centro di omotetia;
c. determinare il valore del rapporto *r* di omotetia.

Figura 9

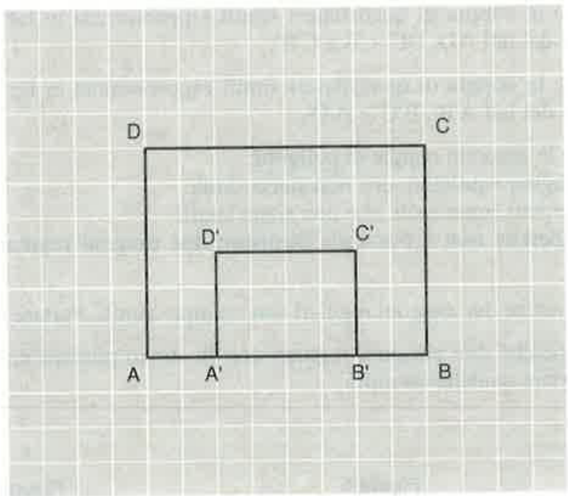
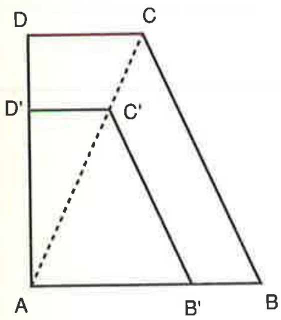
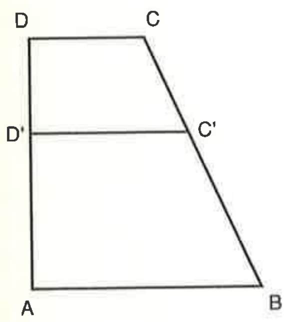


Figura 8



8*a*



8*b*

Figura 10

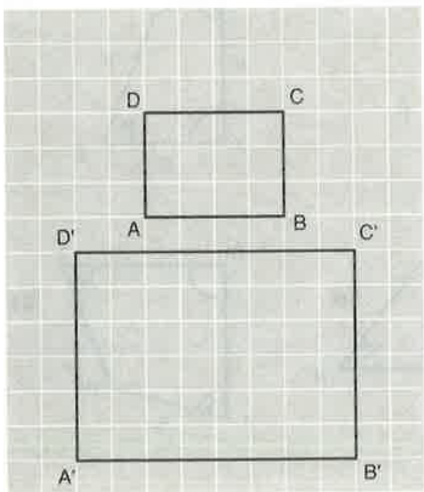
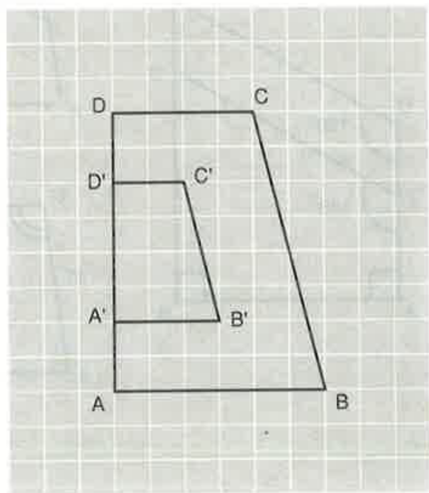


Figura 11



28. Ripetere l'esercizio 27 a partire dai due rettangoli di fig. 10.

29. Ripetere l'esercizio 27 a partire dai due trapezi di fig. 11.

30. Disegnare un rettangolo ABCD a piacere; costruire quindi i seguenti rettangoli omotetici a quello dato:
a. scegliendo il centro di omotetia O in un vertice del rettangolo ed un rapporto di omotetia a piacere;
b. scegliendo il centro di omotetia O nel punto d'incontro delle diagonali ed un rapporto di omotetia a piacere;
c. scegliendo il centro di omotetia O in un punto qualunque interno al rettangolo ed un rapporto di omotetia a piacere;
d. scegliendo il centro di omotetia O in un punto qualunque esterno al rettangolo ed un rapporto di omotetia a piacere.

31. Ripetere l'esercizio 30, a partire da un rombo ABCD disegnato a piacere.

32. Ripetere l'esercizio 30, a partire da un parallelogramma ABCD disegnato a piacere.

33. Disegnare un trapezio rettangolo ABCD a piacere; costruire quindi i seguenti trapezi omotetici a quello dato:
a. scegliendo il centro di omotetia O nel vertice dell'angolo retto ed un rapporto di omotetia a piacere;
b. scegliendo il centro di omotetia O in un altro vertice del trapezio ed un rapporto di omotetia a piacere;
c. scegliendo il centro di omotetia O in un punto qualunque interno al trapezio ed un rapporto di omotetia a piacere;
d. scegliendo il centro di omotetia O in un punto qualunque esterno al trapezio ed un rapporto di omotetia a piacere.

34. Disegnare un quadrilatero a piacere; costruire quindi i seguenti quadrilateri omotetici a quello dato:
a. scegliendo il centro di omotetia O in un vertice del quadrilatero ed un rapporto di omotetia a piacere;
b. scegliendo il centro di omotetia O su un lato del quadrilatero ed un rapporto di omotetia a piacere;
c. scegliendo il centro di omotetia O in un punto qualunque interno al quadrilatero ed un rapporto di omotetia a piacere;
d. scegliendo il centro di omotetia O in un punto qualunque esterno al quadrilatero ed un rapporto di omotetia a piacere.

35. Ripetere l'esercizio 34, a partire da un pentagono disegnato a piacere.

36. Dopo aver svolto gli esercizi 30-35, elencare i numeri che esprimono i rapporti di omotetia scelti; se nell'elenco si trovano solo numeri interi, ripetere gli esercizi scegliendo come rapporti di omotetia anche numeri razionali non interi e numeri irrazionali.

37. Disegnare un rettangolo ABCD a piacere ed effettuare le seguenti costruzioni:
- disegnare un rettangolo A'B'C'D', omotetico a quello dato, scegliendo un centro di omotetia O a piacere ed un rapporto di omotetia a piacere, per esempio $\frac{2}{3}$;
- disegnare un rettangolo A"B"C"D", omotetico a A'B'C'D', scegliendo lo stesso centro di omotetia e un altro rapporto di omotetia, per esempio 2.

Confrontare i rettangoli ABCD e A"B"C"D" e risolvere i seguenti quesiti:
a. spiegare perché i due rettangoli sono omotetici;
b. indicare centro e rapporto dell'omotetia che trasforma ABCD in A"B"C"D".

Figura 12

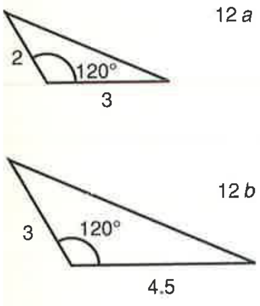


Figura 13

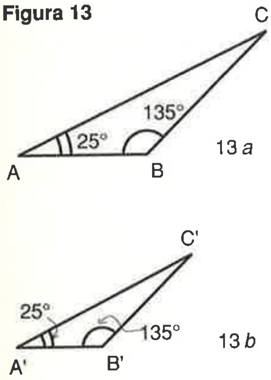
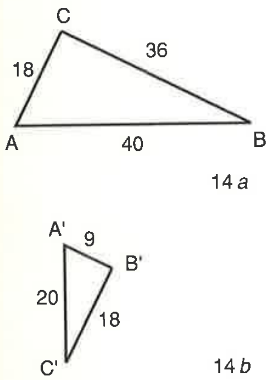


Figura 14



38. Disegnare un rettangolo ABCD a piacere ed effettuare le seguenti costruzioni:
- disegnare un rettangolo A'B'C'D', omotetico a quello dato, scegliendo a piacere il centro di omotetia O e il rapporto di omotetia;
- disegnare un rettangolo A"B"C"D", omotetico a A'B'C'D', scegliendo lo stesso centro di omotetia e il rapporto di omotetia reciproco di quello scelto prima.

Confrontare i due rettangoli ottenuti con quello iniziale, risolvendo in particolare i seguenti quesiti:
a. indicare le coppie di rettangoli omotetici;
b. dire quale particolarità presentano i rettangoli ABCD e A"B'C"D".

39. Disegnare un rettangolo ABCD a piacere ed effettuare le seguenti costruzioni:
- disegnare un rettangolo AB'C'D', omotetico a quello dato, scegliendo il centro di omotetia O coincidente col vertice A ed un rapporto di omotetia a piacere;
- disegnare un rettangolo A"B'C"D", omotetico a AB'C'D', scegliendo il centro O di omotetia coincidente col vertice B' ed il rapporto di omotetia reciproco di quello scelto prima.

Confrontare i due rettangoli ottenuti con quello iniziale, risolvendo in particolare i seguenti quesiti:
a. indicare le coppie di rettangoli omotetici;
b. dire quale particolarità presentano i rettangoli ABCD e A"B'C"D".

40. Disegnare un rettangolo ABCD a piacere ed effettuare le seguenti costruzioni:
- disegnare un rettangolo A'B'C'D', omotetico a quello dato, scegliendo il centro di omotetia O coincidente col punto di incontro delle diagonali ed un rapporto di omotetia a piacere;
- disegnare un rettangolo A"B"C"D", omotetico a A'B'C'D', scegliendo il centro O di omotetia su un lato del rettangolo ed il rapporto di omotetia reciproco di quello scelto prima.

Confrontare i due rettangoli ottenuti con quello iniziale, risolvendo in particolare i seguenti quesiti:
a. indicare le coppie di rettangoli omotetici;
b. dire quale particolarità presentano i rettangoli ABCD e A"B"C"D".

Sui criteri di similitudine dei triangoli

Sui triangoli simili

Gli esercizi dal n. **41** *al n.* **56** *conducono ad applicare i criteri di similitudine per scoprire e studiare dei triangoli simili.*

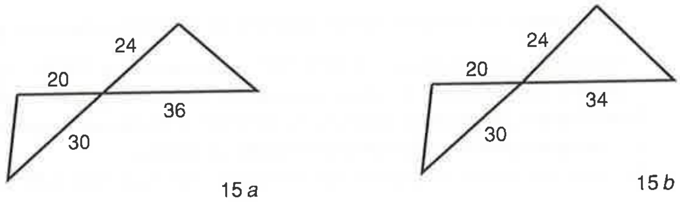
41. Dire in base a quale criterio di similitudine sono simili i due triangoli di fig. 12.

42. Ripetere l'esercizio 41 a partire dai triangoli di fig. 13.

43. Ripetere l'esercizio 41 a partire dai triangoli di fig. 14.

44. Fra i triangoli di fig. 15 scegliere quelli simili, motivando la scelta.

Figura 15



45. Rispondere ai seguenti quesiti:
a. perché sono simili due triangoli isosceli che hanno l'angolo al vertice di 40°?
b. perché sono simili due triangoli isosceli che hanno gli angoli al vertice uguali?

46. Rispondere ai seguenti quesiti:
a. perché sono simili due triangoli isosceli che hanno un angolo alla base di 50°?
b. perché sono simili due triangoli isosceli che hanno gli angoli alla base uguali?

47. Dire quali elementi bisogna confrontare per decidere se due triangoli isosceli sono simili.

48. Spiegare perché sono sempre simili:
a. due triangoli equilateri;
b. due triangoli rettangoli e isosceli.

49. Rispondere ai seguenti quesiti:
a. perché sono simili due triangoli rettangoli che hanno un angolo acuto di 50°?
b. perché sono simili due triangoli rettangoli che hanno un angolo acuto uguale?

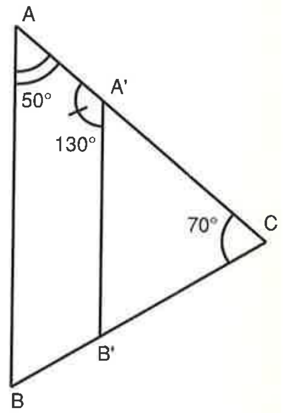
50. Risolvere i seguenti quesiti:
a. un triangolo rettangolo T ' ha i cateti doppi di quelli di un triangolo T; spiegare perché T e T ' sono simili;
b. spiegare perché sono simili due triangoli rettangoli che hanno i cateti in proporzione.

51. Dire quali elementi bisogna confrontare per stabilire se due triangoli rettangoli sono simili.

52. Spiegare perché sono simili due triangoli isosceli che hanno in proporzione le basi e le altezze relative alle basi.

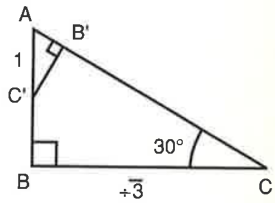
53. Esaminare i due triangoli ABC e A'B'C di fig. 16 e risolvere i seguenti quesiti:
a. dire in base a quale criterio di similitudine i due triangoli sono simili;
b. determinare tutti gli angoli di ciascun triangolo.

Figura 16



54. Esaminare i due triangoli ABC e AB'C' di fig. 17 e risolvere i seguenti quesiti:
a. dire in base a quale criterio di similitudine i due triangoli sono simili;
b. determinare tutti i lati e tutti gli angoli di ciascun triangolo.

Figura 17



55. In triangoli simili ABC e A'B'C' disegnare due mediane corrispondenti CM e CM'; risolvere i seguenti quesiti:
a. dimostrare che sono simili i triangoli ACM e A'C'M';
b. dimostrare che risulta

$$\frac{CM}{C'M'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'};$$

c. enunciare a parole l'ultima proprietà dimostrata.

56. Disegnare due triangoli ABC e DEF con le seguenti caratteristiche:
- i lati BC ed EF sono sulla stessa retta *r*;
- le altezze AH e DK sono uguali.

Tagliare quindi questi due triangoli e le altezze con una retta *r'* parallela a *r*, ottenendo i punti B', H', C', e E', K', F'. Risolvere i seguenti quesiti:
a. dimostrare che risulta $\frac{BC}{B'C'} = \frac{AH}{A'H'}$ e $\frac{EF}{E'F'} = \frac{DK}{D'K'}$;
b. dimostrare che risulta $\frac{B'C'}{E'F'} = \frac{BC}{EF}$;
c. esprimere a parole l'ultima proprietà dimostrata.

[*Per risolvere il quesito* (b) *tenere presente che sono uguali le altezze AH, DK e anche AH', DK'*]

Proprietà dei poligoni

Gli esercizi dal n. **57** *al n.* **69** *conducono ad applicare i criteri di similitudine per scoprire proprietà dei poligoni.*

57. In un triangolo rettangolo ABC inscrivere un quadrato DEFG con il lato ED sull'ipotenusa AC, il vertice F sul cateto AB e il vertice G sul cateto BC; il triangolo rettangolo viene così scomposto nel quadrato DEFG e nei tre triangoli rettangoli AFE, BFG, CDG. Risolvere i seguenti quesiti:

a. dimostrare che i tre triangoli rettangoli sono simili al triangolo ABC;
b. dimostrare che risulta AE:ED=ED:DC;
c. enunciare a parole l'ultima proprietà dimostrata.

[*Per il quesito* (b) *esaminare in particolare i triangoli simili AFE, GDC e ricordare che i lati di un quadrato sono tutti uguali*]

58. Disegnare un triangolo ABC isoscele sulla base BC e costruire le seguenti altezze:
- l'altezza AH relativa alla base BC;
- l'altezza BK relativa al lato AC.

Risolvere i seguenti quesiti:

a. spiegare perché sono simili i due triangoli AHC e BKC;
b. dimostrare che risulta $K\hat{B}C=H\hat{A}C$;
c. enunciare a parole l'ultima proprietà dimostrata.

59. Disegnare un qualunque triangolo ABC e costruire le seguenti altezze:
- l'altezza AH, relativa al lato BC;
- l'altezza BK, relativa al lato AC.

Risolvere i seguenti quesiti:

a. dimostrare che sono simili i triangoli CKB e CAH;
b. dimostrare che risulta KB:AH=BC:AC;
c. enunciare a parole l'ultima proprietà dimostrata.

60. Disegnare un triangolo rettangolo ABC e, da un punto P scelto a piacere sull'ipotenusa BC, tracciare la perpendicolare all'ipotenusa stessa, fino ad incontrare la retta AB in M e la retta AC in N; risolvere i seguenti quesiti:

a. descrivere tutti i triangoli simili che si formano con la costruzione indicata;
b. scegliere opportunamente le coppie di triangoli simili per dimostrare che valgono le seguenti relazioni:

PM:PB=PC:PN MA:MP=MN:MB NA:NP=NM:NC

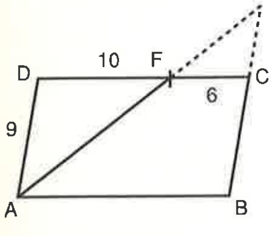
61. Disegnare un angolo acuto di vertice A a piacere; effettuare quindi le seguenti costruzioni:
- scegliere un punto B a piacere su uno dei lati dell'angolo e condurre la perpendicolare al lato stesso, fino ad incontrare l'altro lato in D;
- scegliere un punto C a piacere sul lato AD e condurre la perpendicolare al lato stesso, fino ad incontrare AB in E;
- indicare con M il punto di incontro delle rette CE e DB.

Risolvere i seguenti quesiti:

a. descrivere tutti i triangoli simili che si formano con la costruzione indicata;
b. scegliere opportunamente le coppie di triangoli simili per dimostrare che valgono le seguenti relazioni:

AB:AC=AD:AE MB:MC=ME:MD

Figura 18



62. In fig. 18 si è disegnato un parallelogramma ABCD, si è fissato un punto F sul lato DC, si è congiunto A con F e si è indicato con E il punto di incontro fra la retta AF e la retta BC. Risolvere i seguenti quesiti:

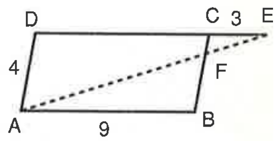
a. descrivere tutti i triangoli simili che si sono formati con la costruzione indicata;
b. basandosi sulle informazioni date dalla figura, calcolare la lunghezza dei segmenti AF, FE, EC, AB.

63. In fig. 19 si è disegnato un parallelogramma ABCD, si è prolungato il lato DC di un segmento CE, si è congiunto A con E. Risolvere i seguenti quesiti:

a. descrivere tutti i triangoli simili che si sono formati con la costruzione indicata;

b. basandosi sulle informazioni date dalla figura, calcolare la lunghezza dei segmenti BF, CF, AF, FE.

Figura 19



64. Disegnare un trapezio ABCD a piacere, indicare con M il punto medio del lato AD e con N il punto medio del lato BC e effettuare la seguente costruzione:
- congiungere M con N;
- disegnare la diagonale AC che incontra MN in P.

Risolvere i seguenti quesiti:

a. dimostrare che i due triangoli ADC e APM sono simili;

b. dimostrare che P è il punto medio della diagonale AC.

65. Dopo aver svolto l'esercizio 64, dimostrare la seguente proprietà: in un qualunque trapezio la retta che passa per i punti medi dei lati obliqui taglia le diagonali nel loro punto medio.

66. Disegnare un trapezio ABCD e le sue due diagonali che si incontrano nel punto P; risolvere i seguenti quesiti:

a. dimostrare che i triangoli ABP e CDP sono simili;

b. dimostrare che risulta AP:PC=PB:DP=AB:DC;

c. enunciare a parole l'ultima proprietà dimostrata.

67. A partire dal trapezio ABCD disegnato nell'esercizio 66, condurre per P la parallela alle basi del trapezio, fino ad incontrare AD in E e BC in F; risolvere i seguenti quesiti:

a. dimostrare che sono simili i triangoli ADB e AEP;

b. dimostrare che sono simili i triangoli ABC e PCF;

c. dimostrare che risulta EP=FP.

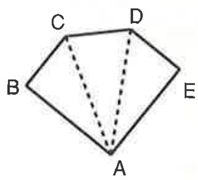
[*Per risolvere il quesito* (c) *ricordare che in due triangoli simili il rapporto di due lati è uguale al rapporto delle corrispondenti altezze, come mostrato nel testo, p. 103; applicare questa proprietà alle due coppie di triangoli simili individuate nei quesiti* (a) *e* (b)]

68. In fig. 20 sono disegnati due poligoni simili ABCDE e A'B'C'D'E', in cui sono state tracciate tutte le diagonali che escono da due vertici omologhi; dimostrare che sono simili i seguenti triangoli:

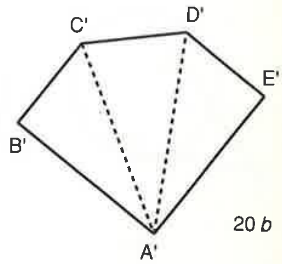
ADE e A'D'E' ADC e A'D'C' ABC e A'B'C'

69. Dopo aver svolto l'esercizio 68 dimostrare la seguente proprietà: due poligoni simili vengono decomposti dalle diagonali condotte da due vertici omologhi in triangoli simili ed ugualmente disposti.

Figura 20



20 *a*



20 *b*

Proprietà del cerchio

Gli esercizi dal n. **70** *al n.* **78** *conducono ad applicare i criteri di similitudine per scoprire proprietà relative alla circonferenza*

70. Disegnare una circonferenza e due sue corde AB e BC; tracciare quindi le seguenti rette:
- la retta t, tangente alla circonferenza in B;
- una retta r, parallela a t, che incontra la corda AB in M e la corda BC in N.

Dimostrare che i triangoli ACB e MNB sono simili.

[*Tenere presente che l'angolo fra la tangente* t *e la corda BC è uguale all'angolo* $B\hat{A}C$ *perché sono angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco, come mostrato nel primo volume, p. 146*]

Figura 21

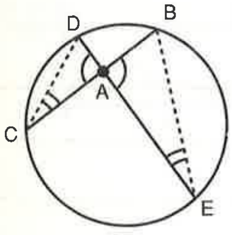
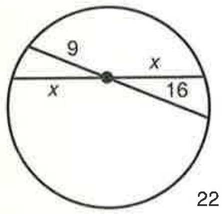
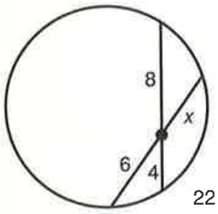


Figura 22

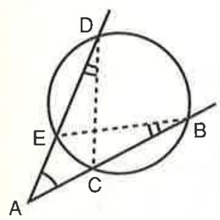


22 *a*



22 *b*

Figura 23



71. Disegnare un qualunque quadrilatero ABCD inscritto in una circonferenza e disegnarne le diagonali DB e AC, che si incontrano in un punto P; risolvere i seguenti quesiti:
a. dimostrare che sono simili i triangoli ADP e CBP;
b. dimostrare che sono simili i triangoli DCP e ABP;
[*Tenere presente che sono uguali angoli opposti al vertice e angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco, come mostrato nel primo volume, pp. 126 e 146*]

72. Dopo aver svolto l'esercizio 71, dimostrare che un qualunque quadrilatero inscritto in un cerchio è diviso dalle sue diagonali in due coppie di triangoli simili.

73. In fig. 21 è disegnato un cerchio e due sue corde BC e DE che si incontrano in un punto A; si è quindi unito D con C e B con E, formando i due triangoli ACD e ABE; risolvere i seguenti quesiti:
a. dimostrare che i due triangoli sono simili;
b. dimostrare che vale la proporzione AB:AE=AD:AC;
c. enunciare a parole la proprietà appena dimostrata.
[*Per il quesito* (a) *vedere il suggerimento dato nell'esercizio 70*]

74. Applicare la relazione ottenuta nel quesito (b) dell'esercizio 73 per determinare le lunghezze indicate con x nella fig. 22.

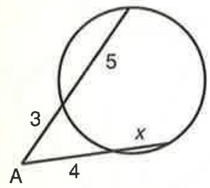
75. In fig. 23 è disegnato un cerchio e, da un punto esterno A, si sono condotte due secanti AB e AD; si è quindi unito D con C e B con E, formando i due triangoli ACD e ABE; risolvere i seguenti quesiti:
a. dimostrare che i due triangoli sono simili;
b. dimostrare che vale la proporzione AB:AD=AE:AC;
c. enunciare a parole la proprietà appena dimostrata.
[*Per il quesito* (a) *vedere il suggerimento dato nell'esercizio 70*]

76. Applicare la relazione ottenuta nel quesito (b) dell'esercizio 75 per determinare le lunghezze indicate con x nella fig. 24.

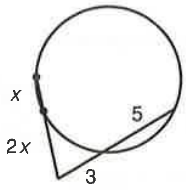
77. In fig. 25 è disegnato un cerchio e, da un punto esterno A, si è condotta una secante AD e una tangente AB; si è quindi unito B con D e con C, formando i due triangoli ACB e ABD; risolvere i seguenti quesiti:
a. dimostrare che i due triangoli sono simili;
b. dimostrare che vale la proporzione AD:AB=AB:AC;
c. enunciare a parole la proprietà appena dimostrata.
[*Per il quesito* (a) *tenere presente che sono uguali due angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco, come mostrato nel primo volume, p. 146*]

78. Applicare la relazione ottenuta nel quesito (b) dell'esercizio 77 per determinare le lunghezze indicate con x nella fig. 26.

Figura 24



24 *a*



24 *b*

Figura 25

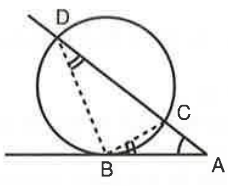
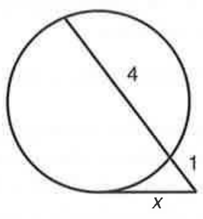
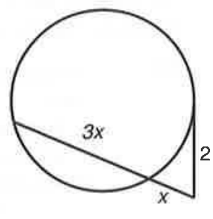


Figura 26



26 *a*



26 *b*

Sul rapporto di similitudine

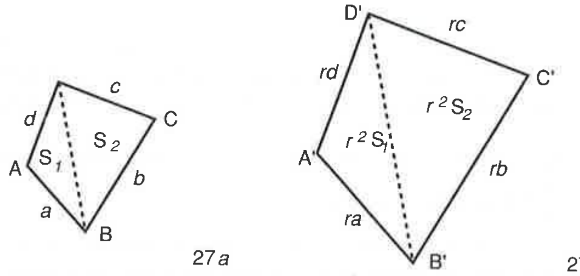
Gli esercizi dal n. **79** *al n.* **90** *richiedono di applicare i seguenti risultati (p. 104):*

1. *in due triangoli simili tutte le coppie di segmenti corrispondenti hanno lo stesso rapporto* r, *detto rapporto di similitudine;*
2. *il rapporto delle aree di due triangoli simili è* r^2, *cioè il quadrato del rapporto di similitudine.*

79. Disegnare due triangoli simili ABC e A'B'C'; dimostrare che:
a. il rapporto dei perimetri è uguale al rapporto di due lati corrispondenti;
b. il rapporto delle aree è uguale al quadrato del rapporto di due lati corrispondenti.
[*Indicare con* a, b, c, h *le lunghezze dei lati e di un'altezza in ABC e con* ra, rb, rc, rh *le lunghezze degli elementi corrispondenti di A'B'C'*]

80. In fig. 27 sono disegnati due poligoni simili ABCD e A'B'C'D'; risolvere i seguenti quesiti:
a. dimostrare che il rapporto dei perimetri è uguale al rapporto di due lati corrispondenti;
b. dimostrare che il rapporto delle aree dei due poligoni è uguale al quadrato del rapporto di due lati corrispondenti.
[*Tenere anche presenti le conclusioni degli esercizi 69 e 79*]

Figura 27



81. Sono dati due triangoli equilateri, uno con il lato lungo 15 e l'altro con il lato lungo 20; determinare il rapporto delle loro aree.
[*Attenzione: non sono richieste le aree, ma il loro rapporto*]

82. Sono dati due triangoli equilateri, uno con l'area ampia 45 e l'altro con l'area ampia 20; determinare il rapporto dei loro lati.
[*Attenzione: non sono richiesti i lati, ma il loro rapporto*]

83. Un pentagono regolare ha il lato lungo 10; risolvere i seguenti quesiti:
a. calcolare il perimetro del pentagono di area doppia;
b. calcolare il perimetro del pentagono di area tripla.

84. È dato un triangolo rettangolo ABC con il cateto AB lungo 45 e il cateto AC lungo 22. Da un punto P del cateto AB si traccia la parallela all'altro cateto, fino ad incontrare l'ipotenusa BC in Q. Stabilire a quale distanza dal vertice B si deve fissare P per avere un triangolo BPQ di area 220.
[*Indicata con* x *la distanza PB, si ottiene una rapida soluzione calcolando il rapporto fra le aree dei due triangoli simili APB e ABC e tenendo presente che il rapporto di due lati omologhi...*]

85. È dato un triangolo isoscele ABC con la base AB lunga 10 e l'altezza CH lunga 8. Si traccia una retta *r* parallela alla base, che incontra il lato AC in D e il lato CB in E, determinando il triangolo CDE e il trapezio ABDE.
Stabilire a quale distanza dal vertice C deve essere tracciata la retta *r* perché l'area del trapezio sia i $\frac{7}{9}$ dell'area del triangolo CDE.
[*Calcolare prima il rapporto fra l'area dei triangoli simili ABC e CDE; si ottiene* $\frac{16}{9}$. *Indicare con* x *la distanza della corda dal vertice e tenere presente che il rapporto delle altezze deve essere... Si trova* x=6]

86. È dato un triangolo ABC con l'altezza CH lunga 12. Si traccia una retta r parallela ad AB, che incontra il lato AC in D e il lato CB in E, determinando il triangolo CDE e il trapezio ABDE.
Stabilire a quale distanza dal vertice C deve essere tracciata la retta r perché l'area del trapezio sia i $\frac{7}{9}$ dell'area del triangolo CDE.

[*Calcolare prima il rapporto fra l'area dei triangoli simili ABC e CDE. Indicare con* x *la distanza della corda dal vertice A e tenere presente che il rapporto delle altezze deve essere... Si trova* x=16]

87. È dato un triangolo rettangolo ABC con il cateto AB lungo 24 e il cateto AC lungo 18. Da un punto P del cateto AB si conduce la perpendicolare PQ all'ipotenusa BC, determinando il triangolo PQB e quadrilatero APQC.
Stabilire a quale distanza dal vertice B deve essere scelto P perché l'area del quadrilatero sia i $\frac{5}{4}$ dell'area del triangolo PQB.

[*Calcolare prima il rapporto fra l'area dei triangoli simili ABC e PQB. Indicare con* x *la distanza PB e tenere presente che il rapporto di due lati omologhi deve essere... Si trova* x=20]

88. È dato un triangolo rettangolo ABC con il cateto AB lungo 9 e il cateto AC lungo 12. Da un punto P del cateto AB si conduce la parallela all'ipotenusa BC fino a incontrare in Q il cateto AC; si determinano così il triangolo APQ e il trapezio PQBC.
Stabilire a quale distanza dal vertice A deve essere scelto P perché l'area del trapezio sia i $\frac{5}{4}$ dell'area del triangolo PQA.

[*Calcolare prima il rapporto fra l'area dei triangoli simili ABC e APQ. Indicare con* x *la distanza AP e tenere presente che il rapporto di due lati omologhi deve essere... Si trova* x=6]

89. In fig. 28 è disegnata una piramide retta, che ha il vertice nel punto V, l'altezza VO lunga h e il quadrilatero ABCD come base; la piramide è stata quindi segata con un piano parallelo alla base e distante h' dal vertice V, determinando un quadrilatero A'B'C'D'; risolvere i seguenti quesiti:

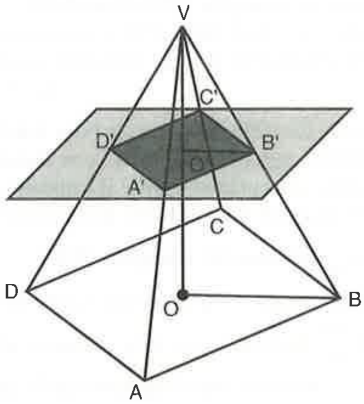
a. riprendere i ragionamenti esposti nel testo a p. 93 per dimostrare che i due quadrilateri ABCD e A'B'C'D' sono simili;
b. esaminare i triangoli VO'B' e VOB per dimostrare che vale la relazione:

   $O'B':OB=h':h$

c. indicare con S e S' le aree dei due quadrilateri e dimostrare che risulta:

   $S':S=h'^2:h^2$

Figura 28

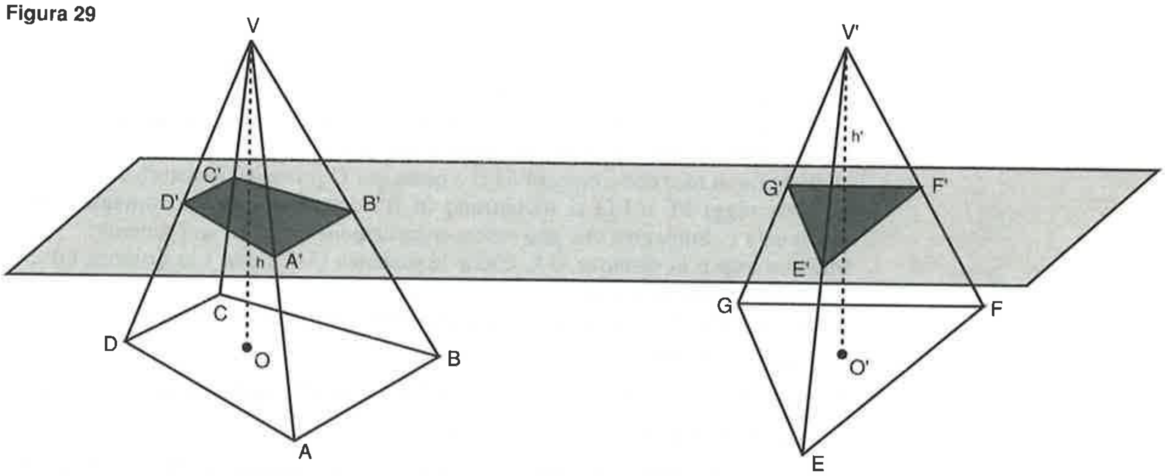


90. Esaminare le due piramidi di fig. 29, che presentano le seguenti caratteristiche:
- le basi ABCD e EFG si trovano su uno stesso piano;
- le basi sono equivalenti, cioè che hanno la stessa area S;
- le altezze VO e V'O' hanno la stessa lunghezza h.

Le due piramidi sono state tagliate con un piano parallelo a quello delle basi, determinando i due poligoni A'B'C'D' e E'F'G'.
Risolvere i seguenti quesiti:

a. basarsi sul risultato indicato nel quesito (c) dell'esercizio 89 per dimostrare che i due poligoni A'B'C'D' e E'F'G' sono ancora equivalenti;
b. valersi del precedente risultato per concludere che le due piramidi hanno uguale volume.

Figura 29



La similitudine nella realtà

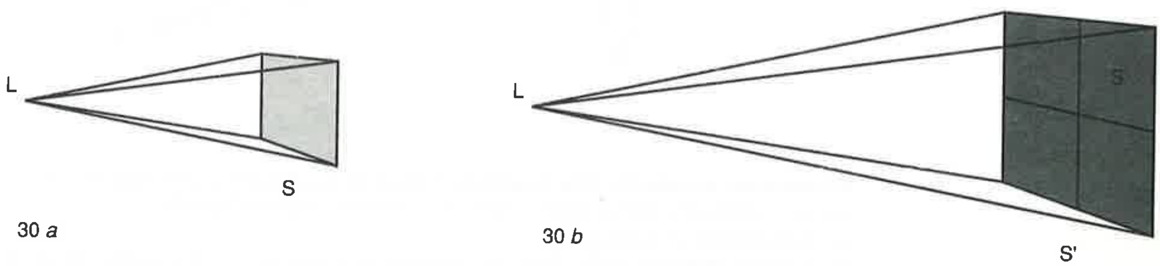
Problemi di fisica

Gli esercizi dal n. **91** *al n.* **94** *conducono ad applicare la similitudine in problemi di fisica.*

91. In fig. 30*a* è rappresentata una sorgente luminosa L che illumina un foglio quadrato di area S=10 cm^2 posto a distanza 1 m; in fig. 30*b* un altro foglio quadrato di area S' è stato disposto a distanza doppia da L. Risolvere i seguenti quesiti:

a. valersi del risultato indicato nel quesito (c) dell'esercizio 89 per determinare l'area S' del secondo quadrato;
b. formulare la legge che lega l'area S' di un foglio alla distanza h dalla candela L.

Figura 30



92. L'esercizio 91 suggerisce un risultato: disponendo un foglio a distanza doppia, la luce della stessa candela L «si disperde» su una superficie $S'=4S$, perciò la superficie S' riceve un'intensità luminosa che è $\frac{1}{4}$ di quella ricevuta da S.

Queste osservazioni conducono alla legge: *l'intensità d'illuminazione di una superficie è proporzionale all'inverso del quadrato della distanza dalla sorgente.*

Dire in quali dei seguenti casi un foglio viene illuminato quanto il foglio di fig. 30*a*:

a. si mette un foglio a distanza di 2 m, ma vicino a L si accende un'altra candela uguale, raddoppiando la luce emessa;
b. si mette un foglio a distanza di 2 m, ma vicino a L si accendono altre tre candele uguali, quadruplicando la luce emessa.

93. La fig. 31 rappresenta schematicamente una lente convergente (cioè una comune lente d'ingrandimento), davanti alla quale è disposta una candela AB; sperimentalmente si possono trovare le proprietà:

- il raggio di luce emesso da B e parallelo all'asse AA' viene deviato quando attraversa la lente, in modo da tagliare AA' in F;
- il raggio di luce che è emesso da B e passa per O prosegue indisturbato;
- i due raggi PF e LO si incontrano in B', determinando un'immagine della candela L, immagine che può essere colta disponendo in B' uno schermo.

Indicare con p la distanza OA, con q la distanza OA' e con f la distanza OF e e risolvere i seguenti quesiti:

a. dimostrare che sono simili i triangoli ABO e A'B'O' e spiegare perché risulta:

$$q:p = A'B':AB \qquad (1)$$

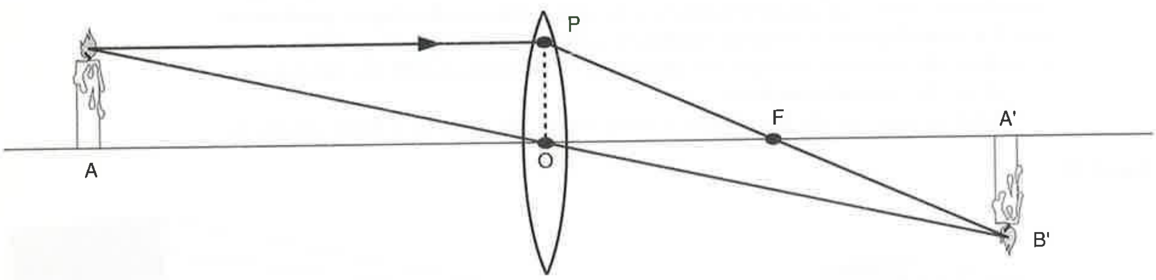
b. dimostrare che sono simili i triangoli POF e B'A'F e spiegare perché risulta:

$$(q-f):f = A'B':AB \qquad (2)$$

c. confrontare opportunamente la (1) con la (2) per ricavare la seguente relazione, detta *formula dei punti coniugati*:

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{f}$$

Figura 31



94. Disponendo un oggetto alla distanza p=0,125 m da una lente convergente, se ne forma l'immagine alla distanza q=0,5 m; risolvere i seguenti quesiti:

a. determinare la distanza f;
b. a quale distanza dalla lente si formerà l'immagine di un oggetto posto a distanza di 0,2 m dalla lente?

[*Tenere presente la formula dei punti coniugati ottenuta nell'esercizio 93*]

Problemi vari

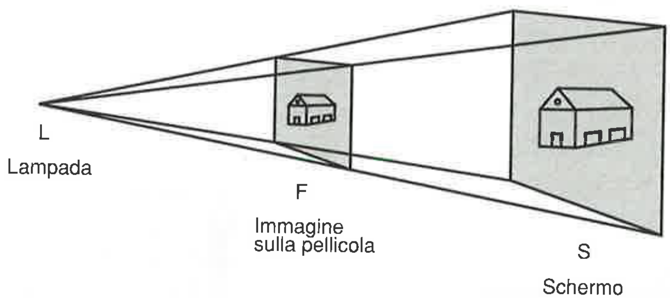
Gli esercizi dal n. **95** *al n.* **101** *richiedono di valersi delle proprietà delle figure simili per risolvere problemi vari tratti dalla realtà.*

95. In fig. 32 è rappresentato schematicamente un proiettore cinematografico; la pellicola posta in F viene proiettata dalla lampada L sullo schermo S; risolvere i seguenti quesiti:

a. sapendo che la distanza LF vale 6 cm, la distanza LS vale 24 m e l'immagine sullo schermo è alta 2,2 m, dire quanto è alta l'immagine sulla pellicola;
b. se la distanza LS si dimezza, come si modifica l'immagine sullo schermo?

[(a) 0.55 cm]

Figura 32



96. Disegnare su un foglio a quadretti un poligono a piacere, con i vertici sui nodi del quadrettato.
Disegnare poi un reticolato a maglie doppie e riprodurvi il poligono iniziale.
Risolvere i seguenti quesiti:

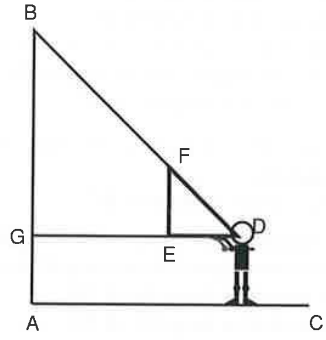
a. spiegare perché i due poligoni sono simili;
b. calcolare il rapporto di similitudine.

97. Ripetere l'esercizio precedente, modificando:
- la figura disegnata nel quadrettato iniziale;
- le maglie del reticolato finale, per esempio triplicandole o dimezzandole.

98. Per misurare l'altezza AB di una collina o di un palazzo si può usare una squadra a cateti uguali, come FED di fig. 33, spostandosi fino ad arrivare ad una posizione D in cui il raggio visuale DF passa per B.
Risolvere i seguenti quesiti:

a. quali misure occorre eseguire per determinare l'altezza AB?
b. quale procedimento si deve seguire per determinare la distanza AB, se la squadra ha il cateto ED doppio del cateto FE?

Figura 33



99. In fig. 34 un giocatore di pallacanestro MN alto 2 m è disposto davanti ad un palo AB in modo che la sua ombra e quella del palo finiscano nello stesso punto P.
L'ombra del palo è lunga 4,4 m, mentre quella del giocatore è lunga 1,6 m; quanto è alto il palo? [5,5 m]

100. In fig. 35 viene misurata l'altezza di un palo AB disponendo in terra uno specchio S: l'osservatore OO', alto circa 1,6 m, è disposto in modo da vedere, riflessa nello specchio, la cima del palo; così la legge della riflessione (vedere primo volume, p. 190) garantisce che gli angoli i e r sono uguali fra loro.
Sapendo che lo specchio dista 4,5 m dal palo e 1,2 m dall'osservatore, quanto è alto il palo? [circa 6 m]

Figura 34

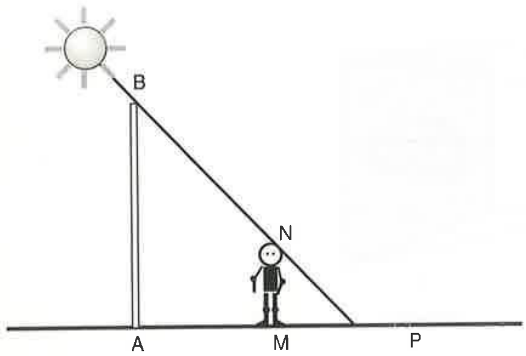
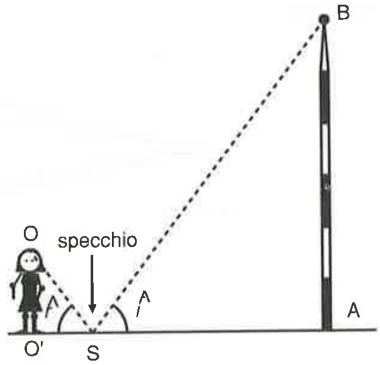
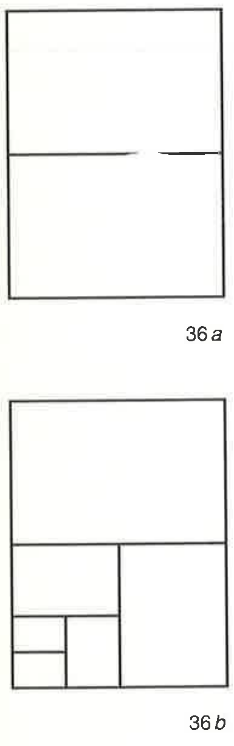


Figura 35



101. Fra i fogli di carta per scrivere a macchina c'è in commercio un formato che viene detto «UNI». Questi fogli hanno una singolare proprietà (fig. 36*a*): tagliando un foglio a metà parallelamente alla dimensione minore, si ottengono due fogli simili a quello di partenza.
Risolvere i seguenti quesiti:
a. calcolare il rapporto fra le dimensioni di un foglio UNI;
b. misurare le dimensioni di un foglio UNI e calcolarne il rapporto;
c. spiegare perché la divisione può continuare su rettangoli sempre più piccoli, ottenendo sempre rettangoli simili a quello di partenza (fig. 36*b*).

Figura 36



Sulle relazioni fra lati e angoli di un triangolo rettangolo

Gli esercizi dal n. **102** *al n.* **106** *conducono a riflettere sulle relazioni fra lati ed angoli di un triangolo rettangolo.*

102. Disegnare un triangolo ABC rettangolo ed isoscele con i due cateti AB e AC lunghi 3 cm; risolvere i seguenti quesiti:
a. calcolare la lunghezza dell'ipotenusa BC;
b. spiegare perché gli angoli acuti sono ampi entrambi 45°;
c. scrivere le relazioni che legano lati ed angoli del triangolo;
d. determinare seno, coseno e tangente di 45°.

103. Disegnare un triangolo ABC con il cateto AB lungo 6 cm e il cateto AC lungo 3 cm; risolvere i seguenti quesiti:
a. calcolare la lunghezza dell'ipotenusa BC;
b. spiegare perché l'angolo $\hat{B}$ è ampio 30° e l'angolo $\hat{C}$ è ampio 60°;
c. scrivere le relazioni che legano lati ed angoli del triangolo;
d. determinare seno, coseno e tangente di 30°;
e. determinare seno, coseno e tangente di 60°.

104. Disegnare un triangolo ABC con il cateto AB lungo 3 cm e il cateto AC lungo 4 cm; risolvere i seguenti quesiti:

a. calcolare la lunghezza dell'ipotenusa BC;
b. misurare con il goniometro l'ampiezza β dell'angolo $\hat{B}$ e l'ampiezza γ dell'angolo $\hat{C}$;
c. scrivere le relazioni che legano lati ed angoli del triangolo;
d. determinare seno, coseno e tangente di β;
e. determinare seno, coseno e tangente di γ.

105. Ripetere l'esercizio 104 a partire da un triangolo rettangolo ABC disegnato a piacere.

106. Disegnare un triangolo rettangolo e disporre le lettere nel modo seguente:
- indicare con A il vertice dell'angolo retto e con a la misura dell'ipotenusa;
- indicare con β l'ampiezza dell'angolo $\hat{B}$ e con b la misura di AC (opposto a B);
- indicare con γ l'ampiezza dell'angolo $\hat{C}$ e con c la misura di AB (opposto a C).

Risolvere i seguenti quesiti:

a. scrivere le relazioni che legano lati e angoli del triangolo valendosi di seno, coseno e tangente di β;
b. scrivere le relazioni che legano lati e angoli del triangolo valendosi di seno, coseno e tangente di γ.

Sulle funzioni trigonometriche

Gli esercizi dal n. **107** *al n.* **114** *conducono a determinare seno, coseno e tangente di un angolo valendosi di un calcolatore tascabile.*

107. Completare le seguenti tabelle, valendosi di un calcolatore tascabile:

α	Tasti	senα
10°	$\boxed{1}\boxed{0}\boxed{\text{sen}}$	sen 10°≅0,174
20°		
30°		
40°		
50°		
60°		
80°		
90°		

senα	Tasti	α
0	$\boxed{0}\boxed{\text{INV}}\boxed{\text{sen}}$	α=0°
0,15		α≅9°
0,30		
0,45		
0,60		
0,75		
0,90		
1,00		

108. Completare le seguenti tabelle, valendosi di un calcolatore tascabile:

α	Tasti	cosα
10°	$\boxed{1}\boxed{0}\boxed{\text{cos}}$	cos 10°≅0,98
20°		
30°		
40°		
50°		
60°		
80°		
90°		

cosα	Tasti	α
0	$\boxed{0}\boxed{\text{INV}}\boxed{\text{cos}}$	α=90°
0,15		α≅81°
0,30		
0,45		
0,60		
0,75		
0,90		
1,00		

109. Completare le seguenti tabelle, valendosi di un calcolatore tascabile:

α	**Tasti**	**tgα**
5°	$\boxed{5}\ \boxed{tg}$	tg 5°≅0,09
15°		
25°		
35°		
45°		
55°		
65°		
75°		
85°		

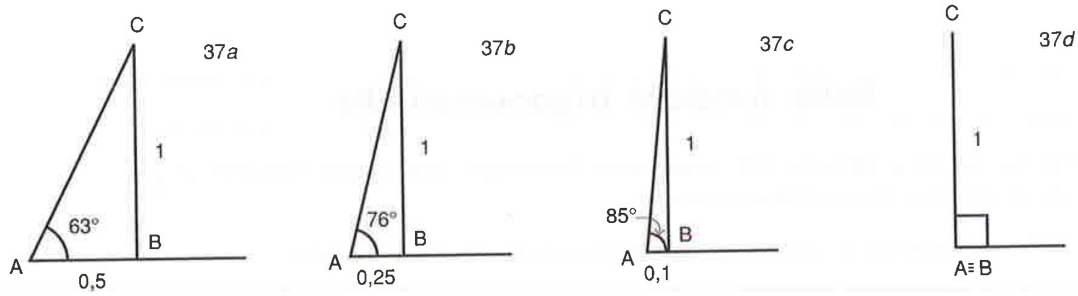
tgα	**Tasti**	α
0	$\boxed{0}\ \boxed{INV}\ \boxed{tg}$	α=0°
0,5		α≅26°
1		
1,5		
2		
2,5		
5		
50		
500		

110. Valendosi sempre di un calcolatore tascabile, ripetere il procedimento seguito nell'esercizio 109 per calcolare la tangente degli angoli che hanno le seguenti ampiezze (misurate in gradi sessagesimali):

89 89,9 89,99 89,99999 90

Osservare la fig. 37 per spiegare perché il calcolatore dà un messaggio d'errore quando si chiede la tangente di 90°.

Figura 37



111. Valersi di un calcolatore tascabile per determinare seno e coseno delle seguenti coppie di angoli complementari:

5° e 85° 15° e 75° 20° e 70°

Valersi della definizione di seno e coseno di un angolo per spiegare perché risulta sempre:

$\operatorname{sen}\beta=\cos\gamma$ con $\gamma=90°-\beta$

112. Valersi di un calcolatore tascabile per calcolare la tangente delle stesse coppie di angoli complementari date nell'esercizio 111 e moltiplicare fra loro i valori ottenuti.
Valersi della definizione di tangente di un angolo per spiegare perché risulta sempre:

$\operatorname{tg}\beta\cdot\operatorname{tg}\gamma=1$ con $\gamma=90°-\beta$

113. Valersi di un calcolatore tascabile per calcolare il valore delle seguenti espressioni:

$(\operatorname{sen}10°)^2+(\cos 10°)^2$ $(\operatorname{sen}30°)^2+(\cos 30°)^2$ $(\operatorname{sen}70°)^2+(\cos 70°)^2$

Valersi della definizione di seno e coseno di un angolo per spiegare perché risulta per qualunque angolo α:

$(\operatorname{sen}\alpha)^2+(\cos\alpha)^2=1$

114. Valersi di un calcolatore tascabile per calcolare il valore delle seguenti espressioni:

$\frac{\text{sen } 15°}{\cos 15°}$ e $\text{tg } 15°$ $\frac{\text{sen } 45°}{\cos 45°}$ e $\text{tg } 45°$ $\frac{\text{sen } 75°}{\cos 75°}$ e $\text{tg } 75°$

Valersi della definizione di seno, coseno e tangente di un angolo per spiegare perché risulta per qualunque angolo α:

$$\frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha} = \text{tg } \alpha$$

Problemi sui triangoli rettangoli

Problemi di geometria

Gli esercizi dal n. **115** *al n.* **127** *conducono a valersi delle relazioni fra lati ed angoli di un triangolo rettangolo per risolvere problemi di geometria; in alcuni casi è proposto un confronto fra i procedimenti della geometria elementare e quelli trigonometrici.*

115. Un triangolo ABC, rettangolo in A, ha il cateto AC lungo 2 e l'altezza AH lunga 1,4. Risolvere i seguenti quesiti:

a. determinare gli angoli e i lati del triangolo valendosi della trigonometria;
b. determinare i lati del triangolo valendosi dei teoremi di Pitagora e di Euclide;
c. confrontare i risultati ottenuti, indicando in particolare i risultati che si possono ottenere solo con la trigonometria.

[$\hat{B} \cong 46°$; $\hat{C} \cong 44°$; $AB \cong 1{,}96$; $BC \cong 2{,}8$]

116. Un triangolo rettangolo ABC ha le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa che sono:

$CH = 10$ $HB = 40$

Risolvere i seguenti quesiti:

a. determinare l'altezza AH valendosi del secondo teorema di Euclide;
b. determinare gli angoli e i lati del triangolo valendosi della trigonometria;
c. determinare i lati del triangolo valendosi del teorema di Pitagora;
d. confrontare i risultati ottenuti.

[$AH = 20$; $AB = 10\sqrt{5}$; $AC = 20\sqrt{5}$]

117. Un triangolo ABC, rettangolo in A, ha l'altezza relativa all'ipotenusa lunga 12 e la proiezione del cateto AB sull'ipotenusa lunga 9. Risolvere i seguenti quesiti:

a. determinare gli angoli e i lati del triangolo valendosi della trigonometria;
b. determinare i lati del triangolo valendosi dei teoremi di Pitagora e di Euclide;
c. confrontare i risultati ottenuti.

[$\hat{B} \cong 53°$; $\hat{C} \cong 37°$; $AB = 15$; $BC = 25$; $AC = 20$]

118. È dato un triangolo ABC, rettangolo in A, con l'ipotenusa lunga 15 e la proiezione del cateto AB sull'ipotenusa lunga 3. Risolvere i seguenti quesiti:

a. determinare il cateto AB valendosi del primo teorema di Euclide;
b. determinare i lati del triangolo valendosi dei teoremi di Pitagora e di Euclide;
c. determinare gli angoli e i lati del triangolo valendosi della trigonometria;
d. confrontare i risultati ottenuti.

[$\hat{B} \cong 72°$; $\hat{C} \cong 18°$; $AB = 3\sqrt{5}$; $AC = 6\sqrt{5}$]

119. È dato un triangolo ABC, rettangolo in A, con il cateto AC lungo 15 e la proiezione del cateto AC sull'ipotenusa lunga 5. Risolvere i seguenti quesiti:

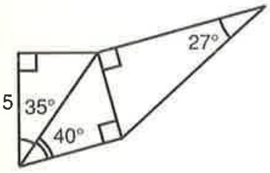
a. determinare l'ipotenusa valendosi del primo teorema di Euclide;
b. determinare i lati del triangolo valendosi dei teoremi di Pitagora e di Euclide;
c. determinare gli angoli e i lati del triangolo valendosi della trigonometria;
d. confrontare i risultati ottenuti, indicando quali si possono ottenere solo con la trigonometria.

[$\hat{B} \cong 72°$; $\hat{C} \cong 18°$; $BC = 45$; $AB = 30\sqrt{2}$]

120. Un rettangolo ABCD ha i lati lunghi 10 e 5; risolvere i seguenti quesiti:
a. tracciare la diagonale AC e valersi della trigonometria per calcolare l'angolo che essa forma con AB;
b. calcolare la lunghezza della diagonale AC valendosi della trigonometria;
c. calcolare la lunghezza della diagonale AC valendosi del teorema di Pitagora;
d. confrontare i risultati ottenuti nei quesiti (b) e (c). [$AC = 5\sqrt{5}$]

121. Un rombo ABCD ha le diagonali lunghe 2 e 5; risolvere i seguenti quesiti:
a. valersi della trigonometria per calcolare gli angoli del rombo;
b. valersi della trigonometria per calcolare la lunghezza del lato del rombo;
c. calcolare il lato del rombo valendosi del teorema di Pitagora;
d. confrontare i risultati ottenuti nei quesiti (b) e (c). [$\hat{A} \cong 136°$; $\hat{B} \cong 44$]

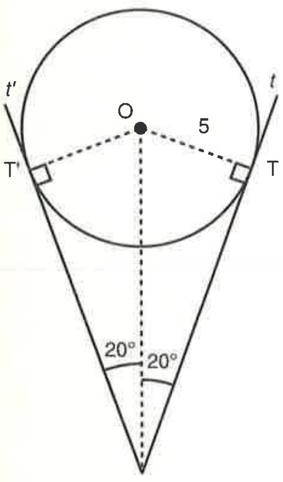
Figura 38



122. Calcolare l'area S e il perimetro $2p$ della piastra poligonale rappresentata in fig. 38, valendosi dei dati indicati in figura. [$2p \cong 29{,}4$; $S \cong 32{,}73$]

123. Un cerchio ha centro O e il raggio lungo 5; dal punto esterno A sono condotte due tangenti che formano un angolo di 40° (fig. 39); rispondere ai seguenti quesiti:
a. calcolare la distanza AO;
b. calcolare l'area S del quadrilatero ATOT '.
[*Tenere presenti le proprietà delle tangenti ad una circonferenza esposte nel primo volume, p. 199; si ottiene* AO≅14,6; S≅73]

Figura 39



124. Disegnare un cerchio di centro O, scegliendo un raggio r a piacere, fissare un punto A che disti dal centro O il triplo del raggio e condurre da A le due tangenti alla circonferenza; risolvere i seguenti quesiti:
a. calcolare l'angolo α formato dalle tangenti;
b. spiegare perché l'angolo non dipende dal raggio del cerchio.

125. Disegnare una semicirconferenza di centro O e diametro AB lungo 8, disegnare una corda AT che formi con AB un angolo di 15° e risolvere i seguenti quesiti:
a. perché il triangolo ABT è rettangolo in T;
b. calcolare la lunghezza della corda.
[*Per il quesito* (a) *ricordare che un angolo alla circonferenza è sempre la metà del corrispondente angolo al centro, come mostrato nel primo volume, pp. 144-146; si ottiene* AT ≅ 7,73]

126. Disegnare la semicirconferenza di centro O e diametro AB lungo 8; costruire quindi:
- la corda AT, che forma con AB un angolo di 25°;
- la tangente in T alla semicirconferenza, fino ad incontrare la retta AB in C.

Risolvere i seguenti quesiti:
a. determinare l'ampiezza dell'angolo $C\hat{O}T$;
b. determinare la lunghezza dei segmenti OC e TC.
[*Tenere presente l'esercizio 25; si ottiene:* OC≅2,57; TC≅4,77]

127. A partire dalla stessa semicirconferenza disegnata nell'esercizio 126, costruire:
- la corda AT, che forma con AB un angolo di 15°;
- la tangente in T alla semicirconferenza, fino ad incontrare la retta AB in C.

Risolvere i seguenti quesiti:
a. determinare l'ampiezza dell'angolo $C\hat{O}T$;
b. determinare la lunghezza dei segmenti OC e TC, valendosi della trigonometria;
c. spiegare perché in questo caso si può risolvere il problema anche valendosi del teorema di Pitagora;
d. calcolare la lunghezza dei segmenti OC e OT valendosi del teorema di Pitagora e confrontare i risultati ottenuti con quelli ottenuti risolvendo il quesito (b).
[OC ≅ 4,6; TC ≅ 2,3]

Determinare lati e angoli di triangoli rettangoli valendosi del calcolatore tascabile

Gli esercizi dal n. **128** *al n.* **135** *conducono a determinare tutti gli elementi di un triangolo rettangolo (lati e angoli), a partire da alcuni elementi assegnati. Per risolvere gli esercizi conviene tenere presenti le seguenti considerazioni:*

a. *per calcolare gli elementi incogniti di un triangolo, occorre che gli elementi noti determinino un solo triangolo. Gli elementi indispensabili per determinare un triangolo rettangolo sono fissati dai criteri di uguaglianza dei triangoli rettangoli (vedere primo volume, p. 187); si hanno perciò due casi possibili:*
   I. *sono dati due lati;*
   II. *sono dati un lato ed un angolo;*

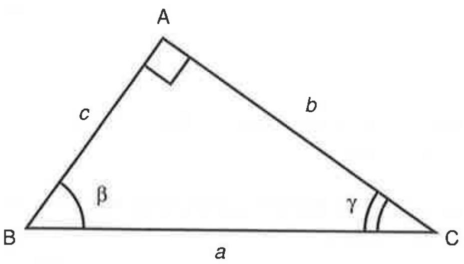
b. *le relazioni fra gli elementi di un triangolo rettangolo sono riunite in fig. 40;*

c. *per svolgere i calcoli conviene valersi il più possibile dei dati originali per ridurre gli errori di approssimazione.*

128. I due cateti di un triangolo rettangolo ABC, con le lettere disposte come in fig. 40, hanno le seguenti lunghezze: $b=10$, $c=7$
Calcolare l'ipotenusa e gli angoli del triangolo completando la seguente tabella:

Relazione	Tasti	Risultato
(2) $a=\sqrt{10^2+7^2}$	$\boxed{(}\ \boxed{1}\ \boxed{0}\ \boxed{x^2}\ \boxed{+}\ \boxed{7}\ \boxed{x^2}\ \boxed{)}\ \boxed{\sqrt{}}$	
(5) $\text{tg}\,\gamma=\frac{7}{10}$	$\boxed{(}\ \boxed{7}\ \boxed{\div}\ \boxed{1}\ \boxed{0}\ \boxed{)}\ \boxed{\text{INV}}\ \boxed{\text{tg}}$	
(1) $\beta=90°-\gamma$		

Figura 40



$\beta+\gamma=90°$ (1)

$a^2=b^2+c^2$ (2)

$\frac{b}{a}=\text{sen}\,\beta=\cos\gamma$ (3)

$\frac{c}{a}=\text{sen}\,\gamma=\cos\beta$ (4)

$\frac{b}{c}=\text{tg}\,\beta=\frac{1}{\text{tg}\,\gamma}$ (5)

129. I due cateti di un triangolo rettangolo ABC, con le lettere disposte come in fig. 40, hanno le seguenti lunghezze: $b=3$, $c=4$.
Calcolare l'ipotenusa e gli angoli del triangolo. [$a=5$; $\beta\cong 53°$; $\gamma\cong 37°$]

130. L'ipotenusa e un cateto di un triangolo rettangolo ABC, con le lettere disposte come in fig. 40, hanno le seguenti lunghezze: $a=35$, $b=13$.
Calcolare l'altro cateto e gli angoli del triangolo completando la seguente tabella:

Relazione	Tasti	Risultati
(2)		$c\cong 32$
(3) $\text{sen}\,\beta=\frac{13}{35}$		$\beta\cong 22°$
(1)		$\gamma\cong 68°$

131. L'ipotenusa e un cateto di un triangolo rettangolo ABC, con le lettere disposte come in fig. 40, hanno le seguenti lunghezze: a=10, b=6. Calcolare l'altro cateto e gli angoli del triangolo. [c=8; $\beta \cong 53°$; $\gamma \cong 37°$]

132. Un cateto e un angolo di un triangolo rettangolo ABC, con le lettere disposte come in fig. 40, hanno le seguenti misure: b=40, β=15°. Calcolare l'altro angolo, l'ipotenusa e l'altro cateto, completando la seguente tabella:

Relazione	Tasti	Risultati
(1)		γ=75°
(4) $a=\dfrac{40}{\text{sen}\,15°}$	$\boxed{4}\boxed{0}\boxed{\div}\boxed{1}\boxed{5}\boxed{\text{sen}}\boxed{=}$	
(4) $c=\dfrac{40}{\text{tg}\,15°}$		$c \cong 149$

133. Un cateto e un angolo di un triangolo rettangolo ABC, con le lettere disposte come in fig. 40, hanno le seguenti misure: b=50, β=55°. Calcolare l'altro angolo, l'ipotenusa e l'altro cateto. [β=35°; $c \cong 71{,}4$; $a \cong 87{,}2$]

134. L'ipotenusa ed un angolo di un triangolo rettangolo ABC, con le lettere disposte come in fig. 40, hanno le seguenti misure: a=120, γ=10°. Calcolare l'altro angolo e i cateti, completando la seguente tabella:

Relazione	Tasti	Risultati
(1)		β=80°
(3) $b=120\cdot\cos 10°$	$\boxed{1}\boxed{2}\boxed{0}\boxed{\times}\boxed{1}\boxed{0}\boxed{\cos}\boxed{=}$	
(3) $c=120\cdot\text{sen}\,10°$		$c \cong 21$

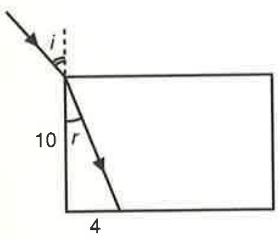
135. L'ipotenusa ed un angolo di un triangolo rettangolo ABC, con le lettere disposte come in fig. 40, hanno le seguenti misure: a=70, γ=65°. Calcolare l'altro angolo e i cateti. [β=25°; $b \cong 29{,}6$; $c \cong 63{,}4$]

Problemi di fisica

Gli esercizi dal n. **136** *al n.* **139** *conducono ad applicare le relazioni fra lati e angoli di un triangolo per risolvere problemi sulla legge della rifrazione.*

136. Gli angoli di incidenza e di rifrazione di un raggio luminoso che passa dall'aria ad un altro mezzo trasparente misurano rispettivamente 50° e 25°; calcolare l'indice n di rifrazione del mezzo. [$n \cong 1{,}2$]

Figura 41



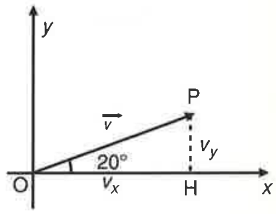
137. Un raggio luminoso incide con un angolo $\hat{i}$=70° sulla superficie di separazione fra l'aria ed un altro mezzo trasparente; calcolare l'angolo di rifrazione nei seguenti casi, quando il secondo mezzo è:
a. l'acqua, con indice n=1,33;
b. il vetro, con indice n=1,50;
c. il diamante, con indice n=2,42. [(a)≅45°; (b)≅39°; (c)≅23°]

138. Un recipiente rettangolare profondo 10 cm è pieno d'acqua fino all'orlo. Un raggio di luce attraversa la superficie superiore dell'acqua esattamente in un punto in corrispondenza di un lato del recipiente (fig. 41). Dopo aver subito la rifrazione, il raggio incide in un punto del fondo del recipiente a 4 cm di distanza dallo stesso lato. Tenendo presente che l'indice di rifrazione n dell'acqua vale 1,3, calcolare l'angolo di rifrazione e l'angolo di incidenza. [$\hat{r} \cong 22°$; $\hat{i} \cong 30°$]

139. Lo stesso recipiente di fig. 41 viene riempito con un liquido diverso dall'acqua. Il raggio rifratto incide sullo stesso punto a 4 cm dal lato, quando l'angolo d'incidenza del raggio che entra nel liquido è ampio 41°; calcolare l'indice n del liquido. [$n \cong 1{,}75$]

Gli esercizi dal n. **140** *al n.* **142** *richiedono di applicare le relazioni fra lati ed angoli di un triangolo rettangolo per studiare le componenti di un vettore.*

Figura 42



140. In fig. 42 è rappresentato un vettore $\vec{v}$, che ha modulo $v=10$ e forma con l'asse delle x un angolo $\alpha=20°$; il vettore è stato proiettato sugli assi cartesiani, ottenendo le componenti v_x e v_y; valersi delle relazioni fra lati ed angoli di un triangolo rettangolo, applicate al triangolo OHP, per calcolare la lunghezza delle componenti. [$v_x \cong 9{,}4$; $v_y \cong 3{,}4$]

141. Dopo aver svolto l'esercizio 140, disegnare dei vettori che hanno il modulo v e l'ampiezza dell'angolo α assegnati qui sotto e calcolarne le componenti.

$$\begin{cases} v=4 \\ \alpha=15° \end{cases} \quad \begin{cases} v=5 \\ \alpha=30° \end{cases} \quad \begin{cases} v=6 \\ \alpha=45° \end{cases} \quad \begin{cases} v=8 \\ \alpha=60° \end{cases} \quad \begin{cases} v=20 \\ \alpha=85° \end{cases}$$

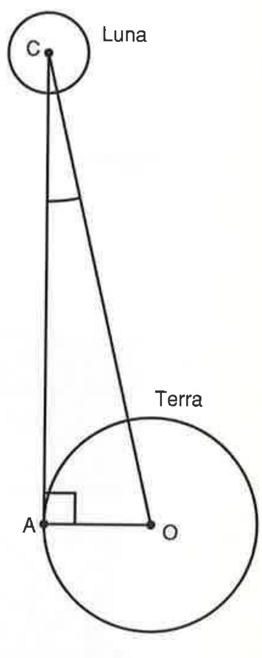
142. Sono assegnate le seguenti componenti di quattro vettori:

$$\vec{v}\begin{cases} v_x=3 \\ v_y=4 \end{cases} \quad \vec{w}\begin{cases} w_x=4 \\ w_y=3 \end{cases} \quad \vec{r}\begin{cases} r_x=4 \\ r_y=4 \end{cases} \quad \vec{s}\begin{cases} s_x=4 \\ s_y=12 \end{cases}$$

Risolvere i seguenti quesiti:

a. disegnare i quattro vettori;
b. calcolare il modulo e l'angolo che ogni vettore forma con l'asse delle x.

Figura 43



Problemi vari

Gli esercizi dal n. **143** *al n.* **145** *conducono ad applicare le relazioni fra lati ed angoli di un triangolo rettangolo per risolvere problemi di astronomia.*

143. Un osservatore posto in A (fig. 43) vuole calcolare la distanza OC fra il centro O della Terra e il centro C della Luna; perciò aspetta che l'angolo $C\hat{A}O$ sia retto e quindi misura l'angolo $A\hat{C}O$, trovando che misura 0° 57'. Sapendo che il raggio OA della Terra misura 6376,755 km, calcolare la distanza OC. [$OC \cong 3{,}8 \cdot 10^5$ km]

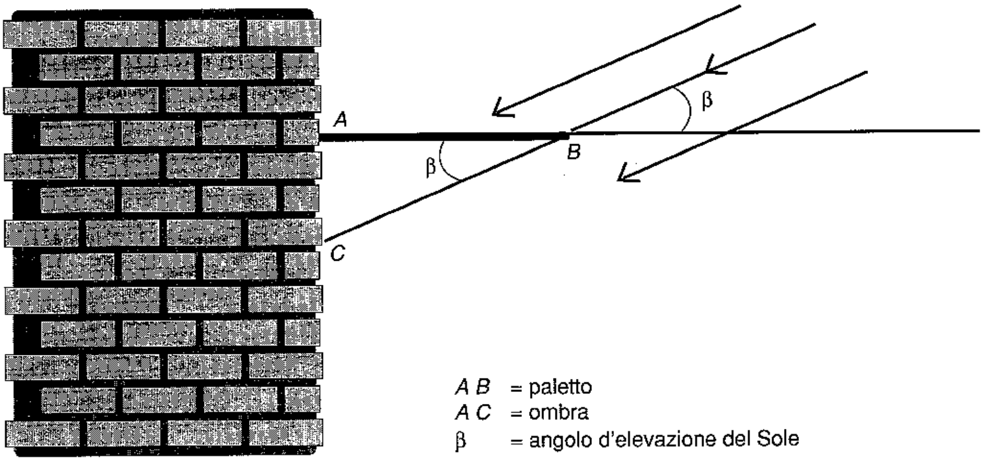
144. Aristarco di Samo nel III secolo d.C. affronta il seguente problema (vedi scheda storica, p. 119): «Quando la Luna si presenta come una perfetta mezzaluna, l'angolo fra le visuali del Sole e della Luna è inferiore ad un angolo retto per un trentesimo di quadrante; quanto è più lontano dalla Terra il Sole rispetto alla Luna?»
Il problema si può schematizzare con un triangolo LAS, rettangolo in L, di cui si conosce l'angolo $\hat{T}=87°$ e si vuol ricavare il rapporto $\frac{LT}{LS}$.
Risolvere i seguenti quesiti:

a. calcolare il rapporto $\frac{TS}{TL}$ con l'angolo $\hat{T}=87°$;
b. calcolare il rapporto $\frac{TS}{TL}$, con le attuali misure che forniscono $\hat{T} \cong 89°51'$;
c. confrontare i risultati ottenuti. [(a) 19; (b) 382]

145. Gli arabi e gli indiani nel X secolo studiarono accuratamente la lunghezza delle ombre al variare dell'altezza del Sole. Ecco un problema analogo a quelli indiani (fig. 44): «Un paletto AB lungo 50 cm, conficcato orizzontalmente su una parete verticale, getta sulla parete un'ombra AC lunga 30 cm; quanto è alto il Sole?».

[*Il problema si risolve determinando l'angolo* β]

Figura 44



Gli esercizi dal n. **146** *al n.* **149** *conducono ad applicare le relazioni fra lati ed angoli di un triangolo rettangolo per risolvere problemi di topografia.*

146. Un ponte lungo 80 m attraversa un fiume formando un angolo di 50° con le sponde; qual è la larghezza del fiume? [circa 61,3 m]

147. Dalla cima di una scogliera alta 50 m si vede una nave sotto un angolo di 20° rispetto all'orizzontale; quanto dista la nave dalla scogliera? [circa 137,4 m]

148. Determinare la larghezza CD del fiume rappresentato in fig. 45, valendosi delle misure date dalla figura. [circa 23,3 m]

149. Determinare la larghezza CD del fiume rappresentato in fig. 46, valendosi delle misure date dalla figura. [circa 15 m]

Figura 45

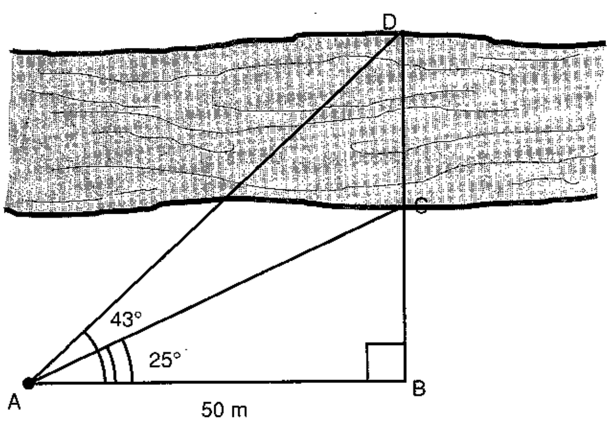
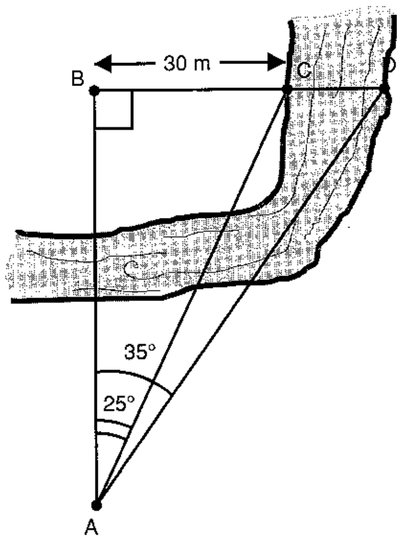


Figura 46



Gli esercizi dal n. **150** *al n.* **154** *conducono ad applicare le relazioni fra lati ed angoli di un triangolo rettangolo per risolvere problemi tratti dalla realtà.*

150. Si progettano oggi aerei di linea supersonici in cui varia, durante il volo, l'angolo formato dalle ali; la fig. 47 mostra il progetto di uno di questi aerei con le ali lunghe 16 m e l'angolo α variabile. Calcolare di quanto varia l'apertura AV delle ali se l'angolo α passa da 70° (durante il decollo) a 30° (durante il volo supersonico). [circa 7 m]

151. Un ricognitore militare A fotografa una base missilistica M in costruzione (fig. 48); tenendo presenti le indicazioni date dalla figura, calcolare la distanza fra il paese P e l'istallazione M. [circa 10,6 km]

Figura 47

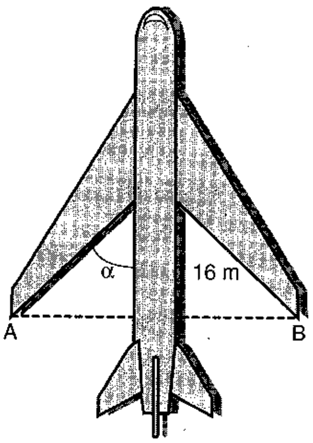
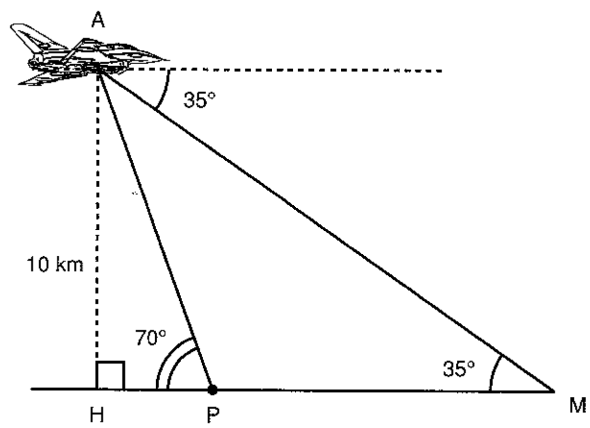


Figura 48



152. Per misurare di notte l'altezza di una nuvola si procede così (fig. 49): da terra si punta un proiettore P verticalmente in modo da colpire la nuvola con un raggio di luce e si osserva la macchia luminosa sulla nuvola da una località L allo stesso livello del proiettore. Valendosi delle misure indicate in figura, calcolare l'altezza h della nuvola. [$h \cong 1,6$ km]

153. Si deve abbattere un albero che dista 25 m da un palazzo (fig. 50); da una finestra del primo piano si vede la cima dell'albero con un angolo di elevazione di 40°; tenendo presenti le indicazioni date dalla figura, calcolare l'altezza AB dell'albero. [AB≅24 m]

Figura 49

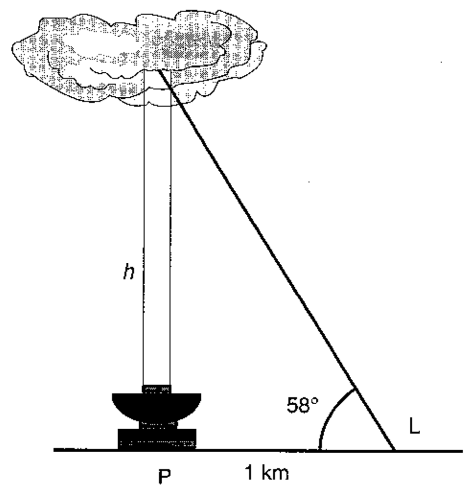


Figura 50

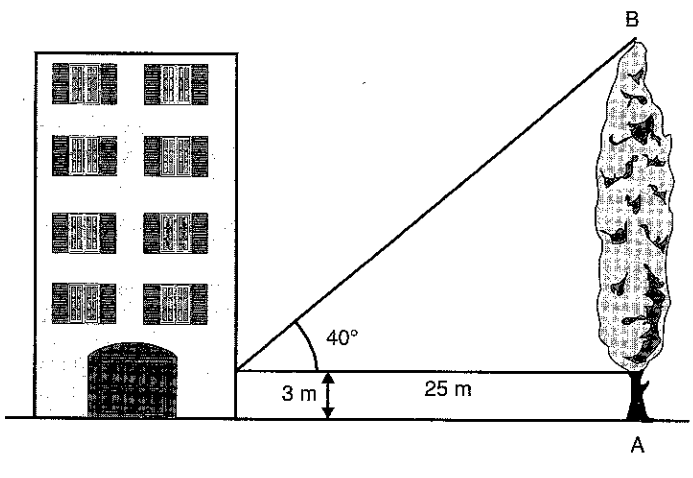
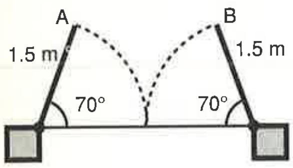


Figura 51



154. Le due porte di un'autorimessa, ciascuna larga 1,5 m, sono aperte di un angolo di 70° (fig. 51); calcolare la larghezza dell'apertura AB fra le due porte. [AB≅1,97 m]

Sul teorema dei seni

Gli esercizi dal n. **155** *al n.* **158** *conducono a riflettere sul teorema dei seni.*

155. Disegnare un triangolo equilatero con il lato lungo 2; applicare il teorema dei seni per scrivere una relazione che lega lati ed angoli del triangolo.

156. Disegnare un triangolo isoscele ABC con l'angolo al vertice ampio 30° e la base AB lunga 8; risolvere i seguenti quesiti:
a. calcolare l'ampiezza degli angoli alla base;
b. valersi dei teorema dei seni per calcolare la lunghezza dei lati. [AC≅15,4]

157. Ripetere l'esercizio 156 a partire da un triangolo isoscele A'B'C' con l'angolo al vertice ampio 150° e la base A'B' lunga 10. [AC≅5,2]

158. Riprendere il teorema della corda (p. 140), per calcolare il raggio del cerchio circoscritto ai due triangoli ABC, A'B'C' descritti negli esercizi 156 e 157. [r≅16; r'≅20]

159. Disegnare i seguenti tre triangoli con il lato AB lungo 10 e l'angolo $\hat{B}$=30°:
- ABC, che ha l'angolo $\hat{A}$=30°;
- ABC', che ha l'angolo $\hat{A}$=120°;
- ABC'', che ha l'angolo $\hat{A}$=90°.

Risolvere i seguenti quesiti:
a. calcolare il terzo angolo del triangolo ABC ed applicare il teorema dei seni per calcolarne i lati;
b. calcolare il terzo angolo del triangolo ABC' ed applicare il teorema dei seni per calcolarne i lati;
c. calcolare gli angoli e i lati del triangolo ABC'', e spiegare che cosa si ottiene applicando il teorema dei seni anche a quest'ultimo triangolo;
d. spiegare perché i triangoli ABC e ABC' sono simili.

160. Ripetere l'esercizio 159 a partire dai seguenti triangoli con il lato AB lungo 20 e l'angolo $\hat{B}$=15°:
- ABC, che ha l'angolo $\hat{A}$=15°;
- ABC', che ha l'angolo $\hat{A}$=150°;
- ABC'', che ha l'angolo $\hat{A}$=90°.

Sul teorema del coseno

Gli esercizi dal n. **161** *al n.* **165** *conducono a riflettere sul teorema del coseno.*

161. Disegnare un triangolo equilatero con il lato lungo 4; applicare il teorema del coseno per scrivere una relazione che lega lati ed angoli del triangolo.

162. Disegnare un triangolo isoscele ABC con l'angolo al vertice ampio 30° e i lati CA e CB lunghi 2; valersi del teorema del coseno per ricavare la lunghezza della base AB. [AB≅1,03]

163. Disegnare un triangolo isoscele ABC con l'angolo al vertice ampio 120° e i lati CA e CB lunghi 4; valersi del teorema del coseno per ricavare la lunghezza della base AB. [AB=48]

164. Disegnare i seguenti tre triangoli con il lato AB lungo 6:
- ABC, che ha il lato AC lungo 8 e l'angolo $\hat{A}$=60°;
- ABC', che ha il lato AC' lungo 8 e l'angolo $\hat{A}$=120°;
- ABC'', che ha il lato AC'' lungo 8 e l'angolo $\hat{A}$=90°.

Risolvere i seguenti quesiti:
a. calcolare il terzo lato del triangolo ABC valendosi del teorema del coseno;
b. calcolare il terzo lato del triangolo ABC' valendosi del teorema del coseno;
c. calcolare il terzo lato del triangolo ABC'';
d. spiegare che cosa si ottiene applicando il teorema del coseno anche all'ultimo triangolo.

165. Ripetere l'esercizio 164 a partire dai seguenti triangoli con il lato AB lungo 12:
- ABC, che ha il lato AC lungo 5 e l'angolo $\hat{A}$=30°;
- ABC', che ha il lato AC' lungo 5 e l'angolo $\hat{A}$=150°;
- ABC'', che ha il lato AC'' lungo 5 e l'angolo $\hat{A}$=90°.

Problemi sui triangoli non rettangoli

Problemi di geometria

Gli esercizi dal n. **166** *al n.* **177** *conducono a valersi dei teoremi dei seni e del coseno per risolvere problemi di geometria; in qualche caso è proposto un confronto fra i procedimenti della geometria elementare e quelli trigonometrici.*

166. Un parallelogramma ha due lati consecutivi lunghi 6 e 16 e l'angolo fra i due lati ampio 60°; calcolare la lunghezza delle diagonali. [14; circa 19,7]

167. Un parallelogramma ABCD ha il lato AB lungo 24, il lato AD lungo 9 e la diagonale DB lunga 7; calcolare l'ampiezza degli angoli del parallelogramma. [60°; 120°]

168. Un parallelogramma ha le diagonali lunghe 6 e 16 che formano un angolo di 120°; calcolare i lati e gli angoli del parallelogramma. [7; circa 9,8; 53°; 127°]

169. Disegnare un triangolo ABC con il lato AC lungo 3, il lato AB lungo 8 e l'angolo $\hat{A}$=60°. Risolvere quindi i seguenti quesiti:
a. calcolare la lunghezza del lato BC, valendosi del teorema del coseno;
b. calcolare gli altri due angoli del triangolo valendosi del teorema dei seni.
[(a)7; (b)circa 82°; 38°]

170. Dopo aver risolto l'esercizio 169 risolvere i seguenti quesiti, sempre a partire dallo stesso triangolo ABC:
a. tracciare l'altezza CH e calcolare la lunghezza dei segmenti AH e HB;
b. tracciare la bisettrice CK dell'angolo di vertice C e calcolare la lunghezza dei segmenti AK e KB;
c. tracciare la mediana AM, relativa al lato AB, e calcolare l'ampiezza degli angoli $A\hat{C}M$ e $M\hat{C}B$.

171. Disegnare un triangolo ABC con il lato AC lungo 3, il lato AB lungo 8 e l'angolo $\hat{A}=120°$. Risolvere quindi i seguenti quesiti:
a. calcolare la lunghezza del lato BC, valendosi del teorema del coseno;
b. calcolare gli altri due angoli del triangolo valendosi del teorema dei seni.
[(a) circa 9,8; (b) 15°; 45°]

172. Dopo aver risolto l'esercizio 171 risolvere i seguenti quesiti, sempre relativi allo stesso triangolo ABC:
a. tracciare l'altezza CH e calcolare la lunghezza dei segmenti AH e HB;
b. tracciare la bisettrice CK dell'angolo di vertice C e calcolare la lunghezza dei segmenti AK e KB;
c. tracciare la mediana AM, relativa al lato AB, e calcolare l'ampiezza degli angoli $A\hat{C}M$ e $M\hat{C}B$.

173. Valersi del teorema della corda (p. 140) per calcolare la lunghezza del lato dei poligoni regolari inscritti in una circonferenza con il raggio lungo r, completando la tabella seguente:

Poligono	**Numero di lati**	**Angolo al centro**	**Lato**
Triangolo	3	360°:3=120°	$2r\cdot\text{sen}\,60°=$
Quadrato	4	360°:4=	$2r\cdot\text{sen}\,45°=$
Pentagono	5		
Esagono	6		
Decagono	10		
Dodecagono	12		

174. Dopo aver svolto l'esercizio 173, considerare un poligono regolare inscritto in una circonferenza di raggio r; indicare con n il numero dei lati e scrivere delle formule generali per ottenere:
a. l'angolo al centro $A\hat{O}B$;
b. il lato AB.

175. Disegnare il triangolo equilatero inscritto in una circonferenza di raggio r e spiegare come se ne potrebbe trovare il lato senza valersi della trigonometria.

176. Disegnare il quadrato inscritto in una circonferenza di raggio r e spiegare come se ne potrebbe trovare il lato senza valersi della trigonometria.

177. Disegnare l'esagono inscritto in una circonferenza di raggio r e spiegare come se ne potrebbe trovare il lato senza valersi della trigonometria.

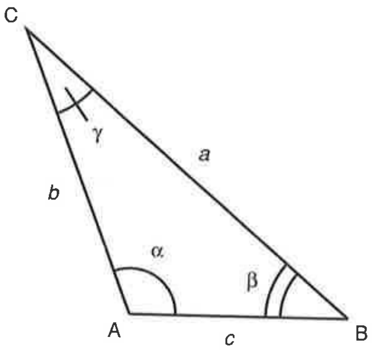
Determinare lati e angoli con il calcolatore tascabile

Gli esercizi dal n. **178** *al n.* **187** *conducono a determinare tutti gli elementi di un triangolo (lati e angoli), a partire da alcuni elementi assegnati. Per risolvere gli esercizi conviene tenere presenti le seguenti considerazioni:*
a. *per calcolare gli elementi incogniti di un triangolo, occorre che gli elementi noti determinino un solo triangolo. Gli elementi indispensabili per determinare un triangolo sono fissati dai criteri di uguaglianza dei triangoli rettangoli (vedere primo volume, p. 184); si hanno perciò tre casi possibili:*
   I. *sono dati due lati e l'angolo compreso;*
   II. *sono dati due angoli ed il lato comune;*
   III. *sono dati tre lati;*
b. *le relazioni fra gli elementi di un triangolo sono riunite in fig. 52;*
c. *per svolgere i calcoli conviene valersi il più possibile dei dati originali per ridurre gli errori di approssimazione.*

178. Due lati e l'angolo di un triangolo ABC, con le lettere disposte come in fig. 52, hanno le seguenti lunghezze: a=10, b=7, γ=28°.
Calcolare il terzo lato e gli angoli del triangolo completando la seguente tabella:

Relazione	Tasti	Risultato
(5) $c=\sqrt{10^2+7^2-2\cdot 10\cdot 7\cdot \cos 28°}$	$\boxed{(}\ \boxed{1}\ \boxed{0}\ \boxed{x^2}\ \boxed{+}\ \boxed{7}\ \boxed{x^2}\ \boxed{-}\ \boxed{2}\ \boxed{\times}$ $\boxed{1}\ \boxed{0}\ \boxed{\times}\ \boxed{7}\ \boxed{\times}\ \boxed{2}\ \boxed{8}\ \boxed{\cos}\ \boxed{)}\ \boxed{\sqrt{}}$	5,04
(2) $\text{sen}\,\alpha=\frac{c}{10}\,\text{sen}\,28°$	*senza cancellare* $\boxed{\times}\ \boxed{2}\ \boxed{8}\ \boxed{\text{sen}}\ \boxed{\div}\ \boxed{1}\ \boxed{0}\ \boxed{=}\ \boxed{\text{INV}}\ \boxed{\text{sen}}$	
(1) $\beta=180°-(\alpha+\gamma)$		

Figura 52



$$\alpha+\beta+\gamma=180° \quad (1)$$

$$\frac{a}{\text{sen}\ \alpha}=\frac{b}{\text{sen}\ \beta}=\frac{c}{\text{sen}\ \gamma} \quad (2)$$

$$a^2=b^2+c^2-2b\ \cos\ \alpha \quad (3)$$

$$b^2=a^2+c^2-2ac\ \cos\ \beta \quad (4)$$

$$c^2=a^2+b^2-2ab\ \cos\ \gamma \quad (5)$$

179. Spiegare come si potrebbero organizzare i calcoli svolti nell'esercizio 178 usando la posizione di memoria del calcolatore tascabile (vedi primo volume pp. 42-43).

180. Di un triangolo ABC, con le lettere disposte come in fig. 52, si hanno i seguenti elementi: b=10, c=8, α=130°.
Determinare tutti gli elementi del triangolo. [$a\cong16$; $\beta\cong28°$; $\gamma\cong22°$]

181. Di un triangolo ABC, con le lettere disposte come in fig. 52, si hanno i seguenti elementi: c=40, α=70°, β=30°.
Calcolare tutti gli elementi del triangolo completando la seguente tabella:

Relazione	Tasti	Risultati
(1)		γ=80°
(2) $a=\frac{40}{\text{sen}\,80°}\,\text{sen}\,70°$		$a\cong38$
(2) $b=\frac{40}{\text{sen}\,80°}\,\text{sen}\,30°$		$c\cong20$

182. Spiegare come si potrebbero organizzare i calcoli svolti nell'esercizio 181 usando la posizione di memoria del calcolatore tascabile (vedi primo volume pp. 42-43).

183. Di un triangolo ABC, con le lettere disposte come in fig. 52, si hanno i seguenti elementi: c=40, β=70°, α=30°. Risolvere i seguenti quesiti:
a. calcolare tutti gli elementi del triangolo;
b. confrontare questo triangolo con quello dell'esercizio 181 e dire se i due triangoli sono uguali o simili. [(a)$a\cong20$; $b\cong38$; $\gamma\cong80°$]

184. Di un triangolo ABC, con le lettere disposte come in fig. 52, si hanno i seguenti elementi: c=40, β=80°, α=70°. Risolvere i seguenti quesiti:

a. calcolare tutti gli elementi del triangolo;
b. confrontare questo triangolo con quello dell'esercizio 183 e dire se i due triangoli sono simili.

[(a)$a \cong 75$; $b \cong 79$; $\gamma \cong 30°$]

185. Spiegare perché non può esistere un triangolo con i seguenti elementi: a=12, b=2, c=9.

[*Vedi il primo volume, p. 129*]

186. Di un triangolo ABC si hanno i seguenti elementi: a=8, b=2, c=9. Calcolare gli angoli del triangolo completando la seguente tabella:

Relazione	Tasti	Risultati
(3) $\cos\alpha = \dfrac{9^2+2^2-8^2}{2\cdot 9\cdot 2}$	$\boxed{(}\boxed{9}\boxed{x^2}\boxed{+}\boxed{2}\boxed{x^2}\boxed{-}\boxed{8}\boxed{x^2}\boxed{)}\boxed{\div}$ $\boxed{(}\boxed{2}\boxed{\times}\boxed{9}\boxed{\times}\boxed{2}\boxed{)}\boxed{=}\boxed{\text{INV}}\boxed{\cos}$	γ=54°
(3) $\cos\beta = \dfrac{8^2+9^2-2^2}{2\cdot 9\cdot 8}$		$\beta \cong 12°$
(1)		

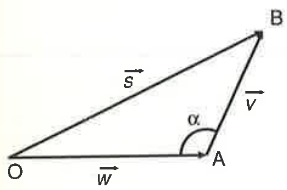
187. Di un triangolo ABC si hanno i seguenti elementi: a=10, b=10, c=14. Calcolare gli angoli del triangolo.

[$\alpha=\beta \cong 50°$; $\gamma \cong 80°$]

Problemi di fisica

Gli esercizi dal n. **188** *al n.* **190** *conducono a valersi dei teoremi dei seni e del coseno per risolvere problemi legati alla somma di due vettori.*

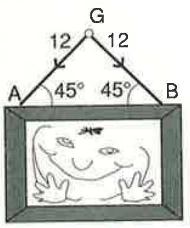
Figura 53



188. Dati due vettori $\vec{v}$ e $\vec{w}$, la loro somma $\vec{s}$ si può ottenere con il procedimento illustrato in fig. 53. Nel caso in cui i vettori rappresentano due forze, il vettore somma è anche detto *forza risultante*.
Esaminare il triangolo OAB e risolvere i seguenti quesiti:

a. spiegare come si può calcolare la lunghezza del vettore somma quando l'angolo α è retto;
b. valersi del teorema del coseno per calcolare la lunghezza del vettore somma nel caso in cui l'angolo α è acuto;
c. valersi del teorema del coseno per calcolare la lunghezza del vettore somma nel caso in cui l'angolo α è ottuso.

Figura 54



189. Un quadro è appeso ad un gancio G per mezzo di un cordoncino, come è illustrato in fig. 54; risolvere i seguenti quesiti:

a. valendosi dei dati forniti dalla figura, determinare la forza risultante agente sul gancio;
b. calcolare la forza risultante se i due angoli alla base del triangolo ABG diventano ampi 60°;
c. calcolare la forza risultante se i due angoli alla base del triangolo ABG diventano ampi 30°.

[(a) $12\sqrt{2}$; (b) $12\sqrt{3}$; (c) 12]

190. Una nave è trainata da due rimorchiatori che esercitano entrambi una forza che ha intensità $f=10^7$ newton; risolvere i seguenti quesiti:

a. sapendo che i cavi formano angoli di 20° e 40° con l'asse di simmetria della nave, determinare la forza risultante con cui è tirata la nave;
b. stabilire come si modifica la forza risultante raddoppiando gli angoli che i cavi formano con l'asse di simmetria della nave.

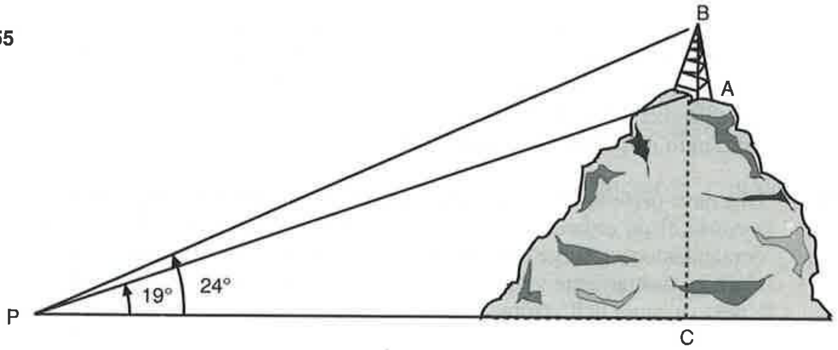
[(a) $10^7\sqrt{3}$; (b) 10^7]

Problemi vari

I problemi dal n. **191** *al n.* **195** *conducono a valersi del teorema dei seni e del coseno per risolvere problemi di topografia.*

191. Si costruisce sulla cima di una collina un ripetitore per trasmissioni televisive alto 20 m (fig. 55). Da un punto P alla base della collina vengono osservate la base A e la punta B del ripetitore ottenendo gli angoli riportati in figura; calcolare la distanza PC e l'altezza CA della collina. [PC≅198,2; CA≅68,2]

Figura 55



192. Si vuole misurare l'altezza h di una torre AB (fig. 56) e la base A della torre è *accessibile,* cioè si può misurare la distanza AC=b, dove C è un punto allo stesso livello della base della torre; da C si misura inoltre l'angolo $A\hat{C}B=\gamma$.
Calcolare l'altezza h della torre sapendo che risulta b=5,2 m, γ=70°. [h≅14,3 m]

193. Dopo aver svolto l'esercizio 191, calcolare l'altezza h della torre AB di fig. 57, tenendo presente che risulta b=12,3, γ_1=20°, γ_2=50°. [h≅13,8]

194. Dopo aver svolto l'esercizio 191, calcolare l'altezza h della torre AB di fig. 58, tenendo presente che risulta b=18,4, γ_1=21°, γ_2=78°. [h≅41,4]

Figura 56

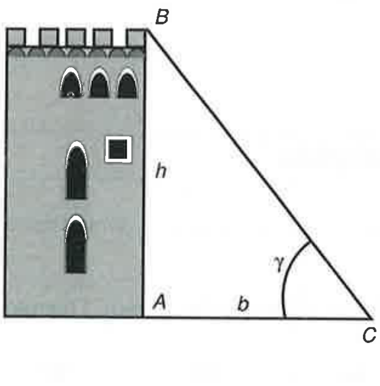


Figura 57

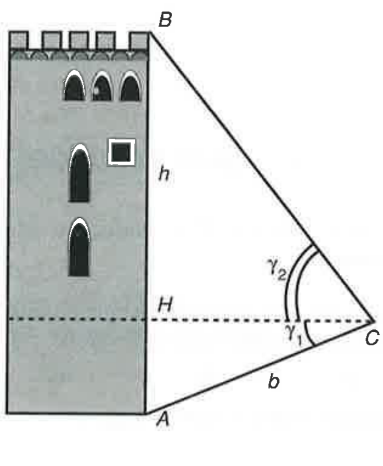
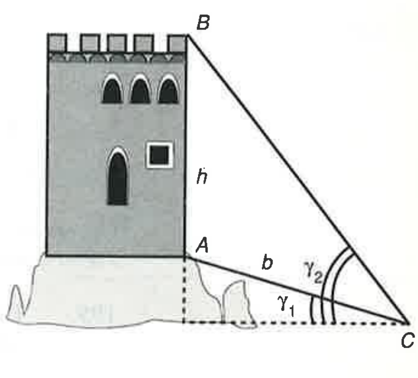


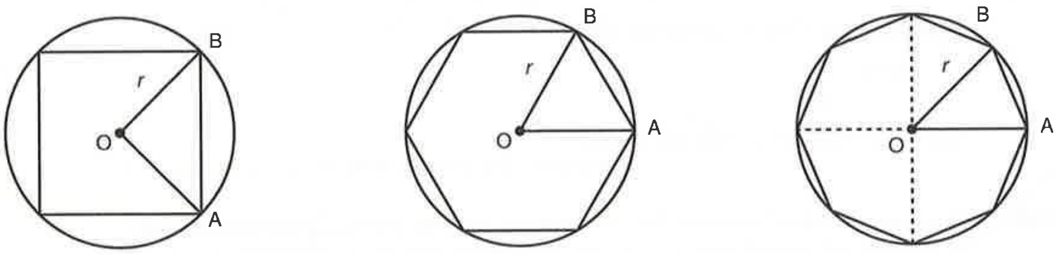
Figura 58



207. Un poligono regolare di n vertici inscritto in una circonferenza di centro O e raggio r (fig. 62) è stato scomposto in n triangoli isosceli tutti uguali a AOB, congiungendo tutti i vertici con O. Completare la tabella seguente:

Poligono	n	**Angolo al centro**	**Area del triangolo AOB**	**Area del poligono**
Triangolo	3	360°:3=120°	$\frac{1}{2}r^2$ sen 120°	$\frac{3}{2}r^2\cdot$sen 120°=...
Quadrato	4	360°:4=......		$\frac{4}{2}r^2\cdot$sen 45°=...
Pentagono	5			
Esagono	6			
Decagono	10			
Dodecagono	12			

Figura 62



62 *a* 62 *b* 62 *c*

208. Dopo aver svolto l'esercizio 207, considerare un poligono regolare inscritto in una circonferenza di raggio r (fig. 62); indicare con n il numero dei lati e scrivere delle formule generali per ottenere:

a. l'angolo al centro $A\hat{O}B$;
b. l'area del triangolo AOB;
c. l'area del poligono.

209. Disegnare il triangolo equilatero inscritto in una circonferenza di raggio r e spiegare come se ne potrebbe trovare l'area senza valersi della trigonometria.

210. Disegnare il quadrato inscritto in una circonferenza di raggio r e spiegare come se ne potrebbe trovare l'area senza valersi della trigonometria.

211. Disegnare l'esagono inscritto in una circonferenza di raggio r e spiegare come se ne potrebbe trovare l'area senza valersi della trigonometria.