

Derivate di funzioni inverse e composte.

Risposte e commenti all'attività

Quesito 1

1. Completa qui sotto la derivata della funzione inversa di $y = \tan(x)$

$$x = \tan(y) \Leftrightarrow y = \arctan(x)$$

$$\frac{dx}{dy} = 1 + \tan^2(y) \Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{1}{1 + \tan^2(y)} = \frac{1}{1 + x^2}$$

$$\text{La derivata di } y = \arctan(x) \text{ è } y' = \frac{1}{1 + x^2}$$

Riflessioni sulle derivate di funzione inverse

Funzioni inverse e derivate

Funzione	Derivata
$y = k$	$y' = 0$
$y = x$	$y' = 1$
$y = x^n$	$y' = nx^{n-1}$
$y = \text{sen}(x)$	$y' = \cos(x)$
$y = \cos(x)$	$y' = -\text{sen}(x)$
$y = \tan(x)$	$y' = 1 + \tan^2(x)$
$y = e^x$	$y' = e^x$
$y = \ln(x)$	$y' = \frac{1}{x}$
$y = \arctan(x)$	$y' = \frac{1}{x^2 + 1}$

Potenze di x hanno come derivate potenze di x

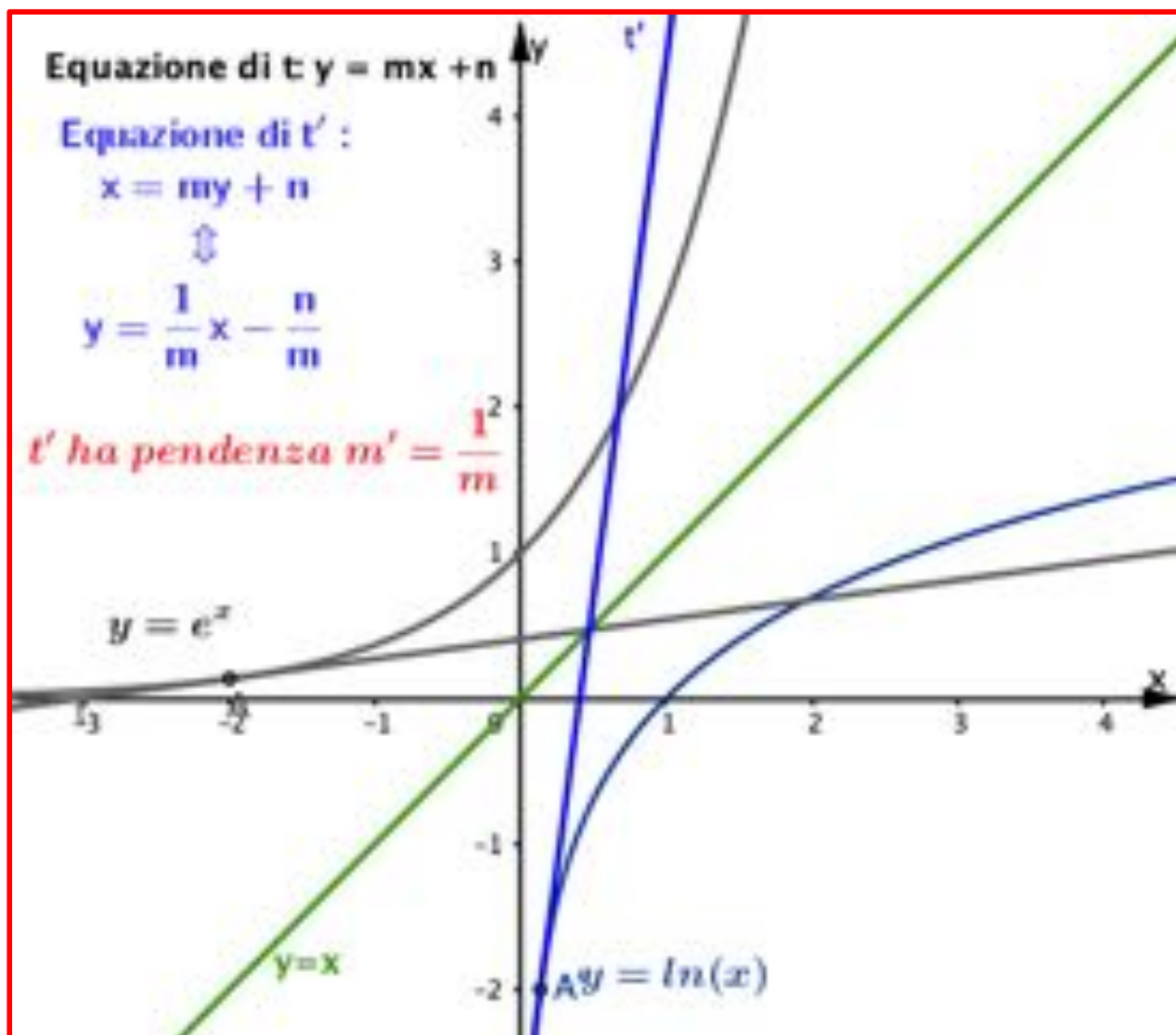
Funzioni goniometriche hanno come derivate funzioni goniometriche

La funzione esponenziale ha per derivata se stessa

Due 'complicate' funzioni inverse hanno per derivata le 'semplici' funzioni $\frac{1}{x}$ e $\frac{1}{x^2+1}$

Funzioni inverse e tangenti

Per avere la funzione inversa di $y = e^x$ opero la simmetria rispetto a $y = x$. La simmetria 'coinvolge' il punto A e la tangente t.



Quesito 2

2. Completa la tabella per ottenere la derivata di due esempi di funzioni composte

Esempio	Esempio
La funzione $y = \cos(x^2)$ è composta da $y = \cos(z)$ con $z = x^2$ E so che $\frac{dy}{dz} = -\sin(z) \text{ e } \frac{dz}{dx} = 2x$	La funzione $y = \cos^2(x)$ è composta da $y = z^2$ con $z = \cos(x)$ E so che $\frac{dy}{dz} = 2z \text{ e } \frac{dz}{dx} = -\sin(x)$
Tratto i differenziali come i numeri e calcolo $\frac{dz}{dx} \cdot \frac{dy}{dz} = 2x \cdot [-\sin(z)]$ $\frac{dy}{dx} = 2x \cdot [-\sin(x^2)]$	Tratto i differenziali come i numeri e calcolo $\frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = 2z \cdot [-\sin(x)]$ $\frac{dy}{dx} = 2\cos(x) \cdot [-\sin(x)]$
La funzione derivata di $y = \cos(x^2)$ $y' = -2x \cdot \sin(x^2)$	La funzione derivata di $y = \cos^2(x)$ $y' = -2\cos(x) \cdot \sin(x)$

Quesito 3

3. È data la funzione $y = (x^3 - 5x)^2$. Completa il calcolo della derivata con due procedimenti.

a. Sviluppa il quadrato e calcola la derivata del polinomio ottenuto

$$y = (x^3)^2 + (5x)^2 - 2 \cdot x^3 \cdot 5x = x^6 + 25x^2 - 10x^4$$

$$y' = 6x^5 + 50x - 40x^3$$

b. Calcola la derivata della funzione data, considerata come funzione composta da

$$y = z^2 \quad \text{con} \quad z = x^3 - 5x$$

$$\frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = 2z \cdot (3x^2 - 5) \Rightarrow y' = 2(x^3 - 5x) \cdot (3x^2 - 5)$$

Differenti difficoltà di calcolo:

- a. Sviluppare correttamente il quadrato del binomio.
- b. Derivare correttamente la funzione composta.