Che cos'è l'analisi matematica

Il titolo del libro, Elementi di analisi matematica, *fa capire che non si tratta di calcolo algebrico e nemmeno di geometria analitica. Nell'analisi si lavora con grandezze che possono diventare infinitamente grandi o infinitamente piccole; si lavora cioè con l'infinito.*

La motivazione a questo nuovo ramo della matematica si deve sia all'esame di curve e superficie e, quindi, anche al calcolo di lunghezze, aree e volumi, sia all'indagine sulle leggi che regolano i fenomeni naturali. Per affrontare questi due problemi, geometrico l'uno e fisico l'altro, si è stati costretti ad uscire dal campo della matematica elementare e a creare nuovi metodi e nuovi strumenti di ricerca.

I due grandi capitoli dell'analisi sono il ***calcolo differenziale*** *ed il* ***calcolo integrale****. La data di nascita del calcolo integrale precede di molti secoli quella del calcolo differenziale; per questa ragione, in questa introduzione storica, ne parliamo prima.*

Dal problema delle aree al calcolo integrale

L'origine del calcolo integrale risale agli antichi Greci. Attraverso scrittori greci e latini sappiamo che Eudosso di Cnido, vissuto nel 300 a.C., aveva ideato un metodo per determinare l'area di una figura piana a contorno curvilineo: il metodo consisteva nel "riempirla" con poligoni sempre più "fitti" fino a ricoprirla completamente, ad "esaurirla". È proprio per sottolineare questa successiva espansione dei poligoni che, molti secoli dopo, a tale procedimento fu dato il nome di ***metodo di esaustione****.*

Tanto Euclide (300 a.C.) che Archimede (200 a.C.) fecero largo uso del metodo d'esaustione allo scopo di determinare l'area di figure piane ed il volume di figure solide. Occorre dire che i poligoni con cui si ricopriva una zona a contorno curvilineo cambiavano di volta in volta a seconda della forma della figura. È proprio per dare maggiore generalità a queste costruzioni che Archimede "inventa" un altro metodo, basato su un'idea semplice e geniale: si pensa la figura formata da un certo numero di fili pesanti, paralleli fra loro, e dunque con un certo peso. Si può allora confrontare il peso di questa figura con quello di un'altra figura di area nota, formata anch'essa da un certo numero di quei fili, sospendendo le due figure ai due bracci di una leva (fig. 1); si ha così, attraverso il principio della leva, una prima idea dell'area della figura "materializzata". Poi, dall'esperimento fisico, Archimede passa alla matematica, idealizzando i fili pesanti con sottilissime strisce rettangolari (fig. 2).

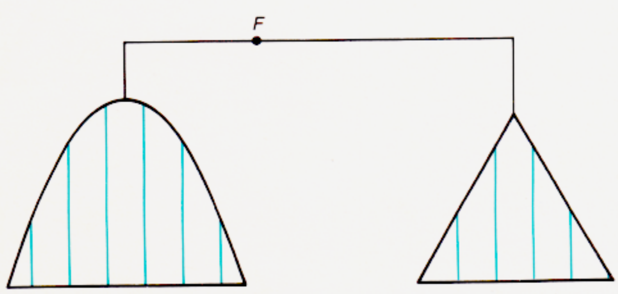

Fig. 1

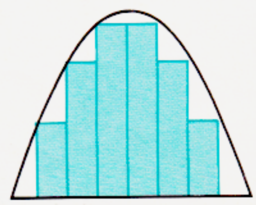
Fig. 2

Con questo metodo, descritto in un'opera che ha, appunto, per titolo Il metodo, *Archimede precorre di molti secoli i procedimenti che, nel 1600, costituiranno le basi del calcolo integrale. Quando infatti, dopo secoli di stasi, la vecchia Europa si risveglia, gli scritti dei Greci, e in particolare le opere di Archimede, vengono studiate e tradotte, e lo spirito d'indagine di Archimede penetra ed illumina la scuola di Galileo. Ma, fra i lavori di Archimede, non si trova il manoscritto de* Il metodo *di cui si conosceva l'esistenza attraverso gli storici; questo manoscritto fu ritrovato solo nel 1906 in una biblioteca di Costantinopoli! Il testo in cui Archimede esponeva le sue idee sulla determinazione delle aree non poteva quindi essere conosciuto dai matematici del 1600.*

Ma, forse proprio perché era "un metodo naturale" per degli uomini formati alla scuola di Galileo, le idee espresse in quello scritto si ritrovano nei lavori di Cavalieri (1598-1647) e di Torricelli (1606-1647), due allievi di Galileo.

Cavalieri pensa a un'area composta di fili che chiama **indivisibili**, *proprio perché non possono essere ulteriormente assottigliati; l'area del rettangolo, per esempio, è riempita di fili paralleli alla base, lungo tutta l'altezza. Se questi fili vengono spostati, in modo che siano sempre fra loro paralleli, si formeranno altre figure (fig. 3). Queste nuove figure saranno tutte equivalenti al rettangolo perché «è come se fossero costituite dalla stessa quantità di materiale». Gli indivisibili conducono così a calcolare le aree di figure piane con un metodo molto vicino a quello di Archimede: considerare una figura piana costituita da fili che si possono spostare fino a "ricomporre" una figura di area nota.*

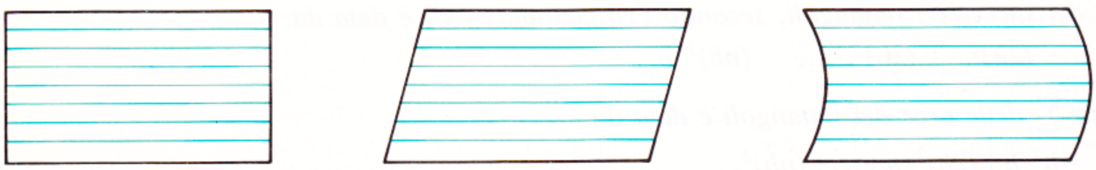

Fig. 3

Poi, durante il rapido sviluppo del calcolo integrale, gli indivisibili di Cavalieri e Torricelli perdono poco a poco la loro natura di fili materiali, sottilissimi sì, ma divisibili, per assottigliarsi sempre di più in una suggestiva visione dinamica.

Per cogliere meglio queste idee, fissiamo l'attenzione su un esempio: calcolare l'area S della zona di piano indicata in fig. 4. La zona è delimitata dall'arco OA di parabola d'equazione

$$y=x^2,$$

dall'asse delle x e dal segmento AA' parallelo all'asse delle y.

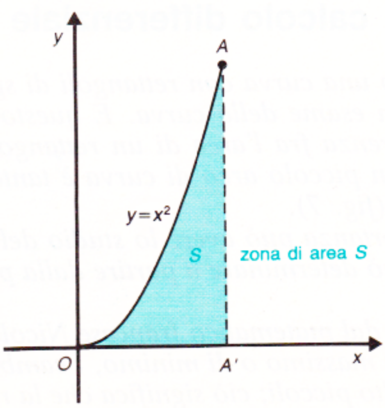

Fig. 4

Si procede così: si costruiscono dei rettangoli di spessore h, come in fig. 5, e si osserva che, quando h diventa sempre più piccolo (fig. 6), la somma delle aree dei rettangoli approssima sempre meglio l'area sotto la curva.

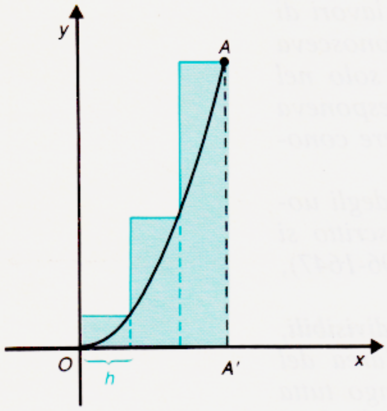

Fig. 5

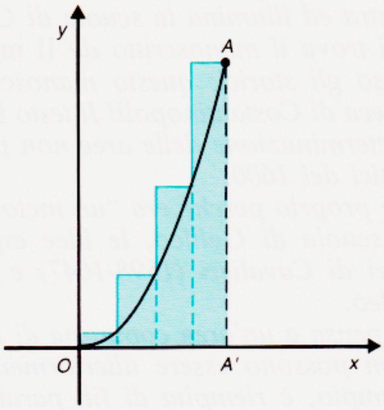

Fig. 6

Questa considerazione "visiva" viene tradotta in formule, basandosi sui calcoli seguenti:

– *se i rettangoli sono in numero di n, la base di ogni rettangolo è lunga*

$$h=\frac{\overline{OA'}}{n}$$

– *l'altezza dei successivi rettangoli, secondo l'equazione $y=x^2$, è data da:*

$$h^2, \quad (2h)^2, \quad (3h)^2, \ \ldots, \quad (nh)^2\cdot h$$

– *la somma $\sum$ delle aree dei rettangoli è data da:*

$$\sum=h^2\cdot h+(2h)^2\cdot h+\ldots+(nh)^2,$$

È chiaro che la somma $\sum$ approssima tanto meglio l'area S quanto più grande è il numero n e, di conseguenza, quanto più piccolo è lo spessore h: l'area S si otterrebbe dunque calcolando la somma di infiniti rettangoli di spessore infinitamente piccolo.

Ma è permesso tutto questo? Come si può lavorare con una somma di infiniti termini? È proprio questo tipo di problemi che ha dato origine al calcolo integrale.

Dall'esame di una curva al calcolo differenziale

Il metodo di approssimare l'area sotto una curva con rettangoli di spessore piccolissimo porta – è chiaro – ad un esame della curva. E questo esame conduce ad un'osservazione: la differenza fra l'area di un rettangolo e la corrispondente area racchiusa sotto un piccolo arco di curva è tanto maggiore quanto più "ripida" è la curva (fig. 7).

Si capisce quindi quale importanza può avere lo studio della pendenza della curva, pendenza che si può determinare a partire dalla pendenza della retta tangente (fig. 8).

Fin dal 1350 era stato notato dal matematico francese Nicole D'Oresme che, in vicinanza di un punto di massimo o di minimo, i cambiamenti di pendenza della tangente sono molto piccoli; ciò significa che la rapidità di variazione della curva è, in quei punti, molto piccola (fig. 9).

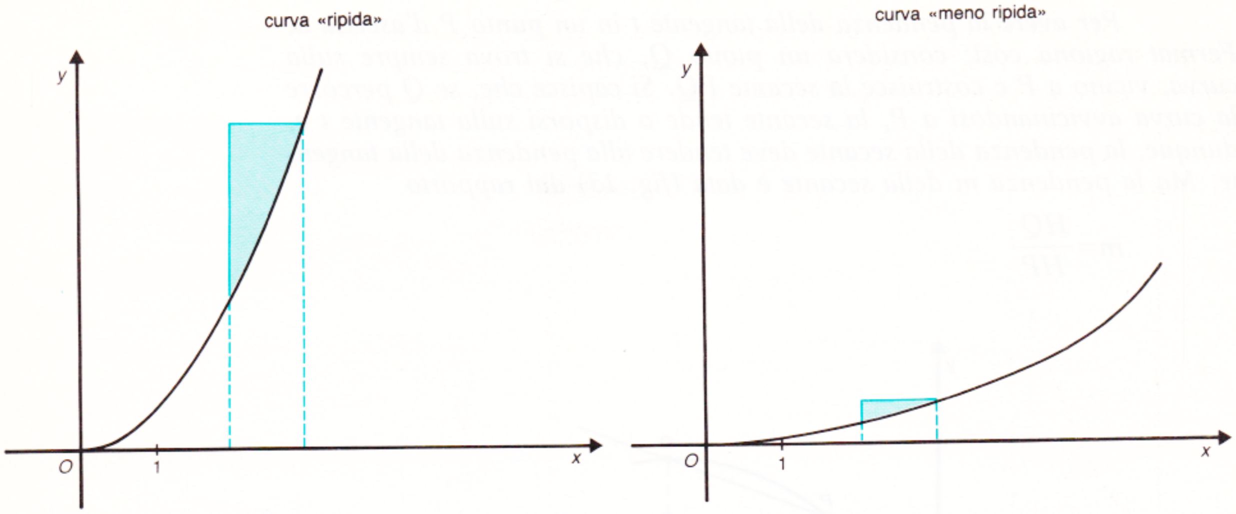

Fig. 7

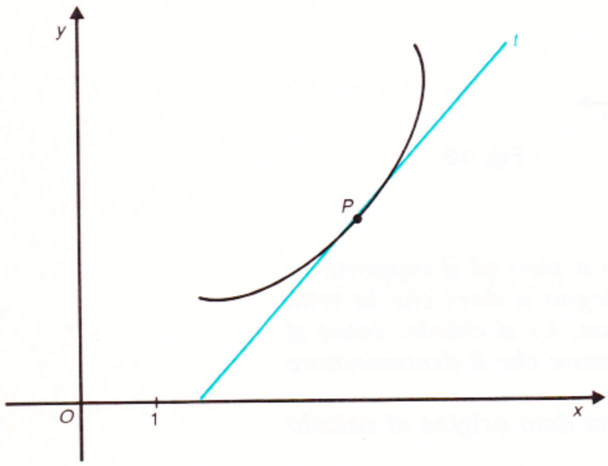

Fig. 8

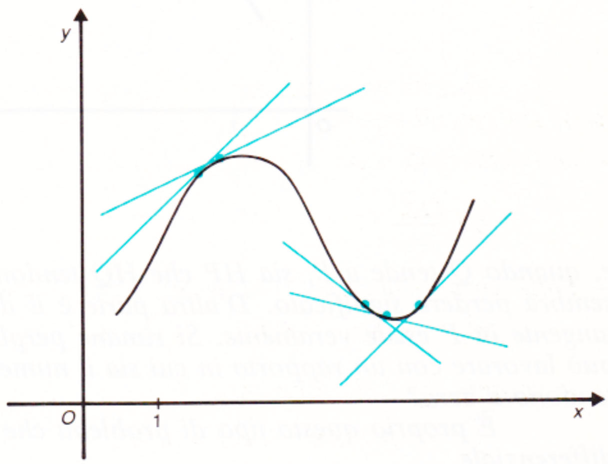

Fig. 9

È proprio quest'osservazione che condusse il matematico francese Pierre Fermat ad esprimere in formule le condizioni per individuare i punti di massimo (o di minimo) di una curva in un suo lavoro del 1638.

Per capire il procedimento di Fermat fissiamo l'attenzione sulle figg.10-12, dove è disegnata una curva di cui è nota l'equazione.

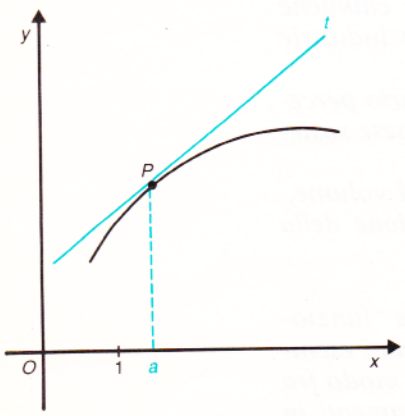

Fig. 10

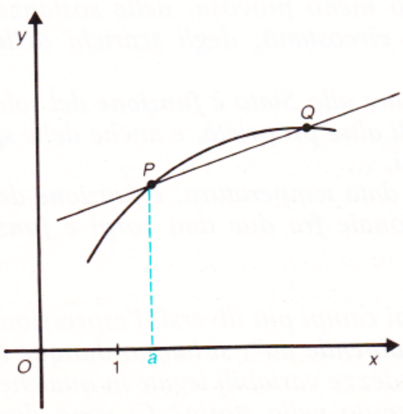

Fig. 11

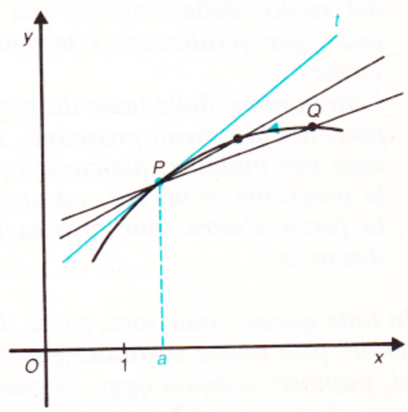

Fig. 12

Per avere la pendenza della tangente t in un punto P d'ascissa a, Fermat ragiona così: considera un punto Q, che si trova sempre sulla curva, vicino a P e costruisce la secante PQ. Si capisce che, se Q percorre la curva avvicinandosi a P, la secante tende a disporsi sulla tangente t e, dunque, la pendenza della secante deve tendere alla pendenza della tangente. Ma la pendenza m della secante è data (fig. 13) dal rapporto

$$m=\frac{HQ}{HP}$$

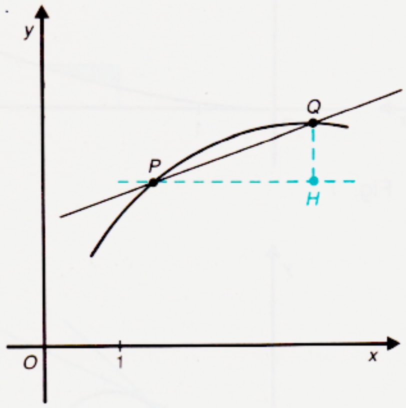

Fig. 13

e, quando Q tende a P, sia HP che HQ tendono a zero ed il rapporto m sembra perdere significato. D'altra parte è il disegno a dirci che la retta tangente in P esiste veramente. Si rimane perplessi. Ci si chiede: come si può lavorare con un rapporto in cui sia il numeratore che il denominatore tendono a zero?

È proprio questo tipo di problemi che ha dato origine al calcolo differenziale.

Dall'osservazione di fenomeni reali al concetto di funzione

Il termine ***funzione*** *ricorre oggi molto spesso nel linguaggio comune, oltre che in quello scientifico; si dice, per esempio:*
- *l'inquinamento dell'acqua di un fiume è* ***funzione*** *della natura geologica del suolo, della stagione più o meno piovosa, delle sostanze chimiche usate per fertilizzare i terreni circostanti, degli scarichi delle industrie vicine, …*
- *l'ammontare delle tasse da pagare allo Stato è* ***funzione*** *del salario percepito, dei fabbricati posseduti, di altre proprietà, e anche delle spese sostenute per malattie, assicurazioni, …*
- *la pressione di un gas, ad una data temperatura, è* ***funzione*** *del volume,*
- *la forza d'attrazione gravitazionale fra due dati corpi è* ***funzione*** *della distanza.*

In tutte queste situazioni, prese dai campi più diversi, l'espressione "funzione di" può essere sostituita con "dipende da"; si hanno dunque tanti esempi, piuttosto comuni oggi, di grandezze variabili legate in qualche modo fra loro. E prima? Che cosa è avvenuto nella storia? Ci sono documenti in proposito?

I documenti più antichi sono opera dei Babilonesi e degli Egiziani. È già più di un secolo che si continuano a scoprire, nelle terre dell'antica Babilonia, tavolette d'argilla scritte in caratteri cuneiformi, che rimontano a duemila anni a.C.; in Egitto sono invece venuti alla luce dei papiri matematici che risalgono al 1650 a.C. Negli uni e negli altri documenti si sono trovate indicazioni di carattere astronomico: la posizione dei corpi celesti è messa in relazione con lo scorrere del tempo, cioè è espressa in funzione del tempo. E si sono trovate anche delle tabelle a doppia colonna che indicano le tasse da pagare in corrispondenza all'estensione del terreno posseduto.

Questa tendenza a matematizzare i fenomeni reali si affievolisce, fino a scomparire, nell'epoca greca. Se ne comprendono le cause: l'ideale greco era infatti una matematica esatta, e, certamente, non si possedevano i mezzi simbolici per esprimere in formule relazioni fra variabili. La nozione di funzione, nata in modo del tutto naturale come legame fra due grandezze, non solo non è stata sviluppata dai matematici greci, ma, possiamo dire, ha subito un arresto.

L'idea di funzione si riaffaccia invece nel mondo arabo, dove, dal 700 d.C. in poi, nasce e si sviluppa la trigonometria, motivata dal grande interesse per l'indagine astronomica. Sono della fine dell'VIII secolo delle tabelle molto dettagliate, in qualche caso traduzioni di scritti indiani, che mettono in relazione l'ampiezza degli angoli con i corrispondenti valori del seno, del coseno e della tangente. Si ritrova così, in un'opera matematica che aveva per finalità l'osservazione quantitativa di fenomeni astronomici, l'idea di funzione come legge di corrispondenza fra variabili.

Per un concetto dinamico di funzione si deve però arrivare al tardo Medioevo: è il pensatore francese Nicola D'Oresme che in uno scritto del 1370, anticipando l'opera di Galileo, mette in relazione, anche graficamente, gli spazi percorsi nella caduta dei gravi con i tempi impiegati a percorrerli.

Sarà Galileo a dare uno sviluppo decisivo al concetto di funzione: Galileo riesce infatti ad esprimere la legge di caduta dei gravi con una formula. Si passa così, agli inizi del 1600, dalla funzione considerata come descrizione di un fenomeno che si evolve nel tempo, alla funzione intesa come legge esprimibile in forma analitica.

Ed è l'analisi matematica che nasce a riprendere questo concetto, basandovi tutte le sue ricche e varie indagini. Così il concetto di funzione diventa via via più difficile da "stringere" in una definizione perché "si allarga" sempre di più: da un lato, lo studio di fenomeni reali porta a trovare leggi di corrispondenza fra variabili espresse non solo in forma analitica, ma anche per mezzo di tabelle e grafici; dall'altro, nuove funzioni si presentano in studi matematici del tutto astratti.

È possibile riunire in un'unica definizione un concetto che presenta aspetti tanto diversi? Proprio di questo parleremo nel cap. 1.

Per avere la pendenza della tangente t in un punto P d'ascissa a, Fermat ragiona così: considera un punto Q, che si trova sempre sulla curva, vicino a P e costruisce la secante PQ. Si capisce che, se Q percorre la curva avvicinandosi a P, la secante tende a disporsi sulla tangente t e, dunque, la pendenza della secante deve tendere alla pendenza della tangente. Ma la pendenza m della secante è data (fig. 13) dal rapporto

$$m=\frac{HQ}{HP}$$

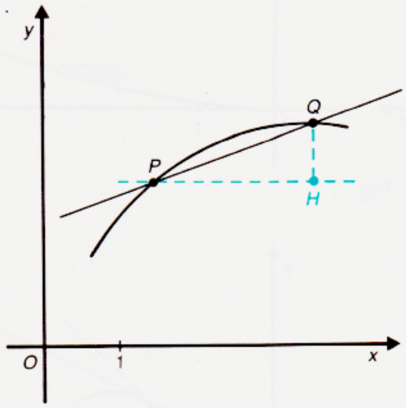

Fig. 13

e, quando Q tende a P, sia HP che HQ tendono a zero ed il rapporto m sembra perdere significato. D'altra parte è il disegno a dirci che la retta tangente in P esiste veramente. Si rimane perplessi. Ci si chiede: come si può lavorare con un rapporto in cui sia il numeratore che il denominatore tendono a zero?

È proprio questo tipo di problemi che ha dato origine al calcolo differenziale.

Dall'osservazione di fenomeni reali al concetto di funzione

*Il termine **funzione** ricorre oggi molto spesso nel linguaggio comune, oltre che in quello scientifico; si dice, per esempio:*

- *l'inquinamento dell'acqua di un fiume è **funzione** della natura geologica del suolo, della stagione più o meno piovosa, delle sostanze chimiche usate per fertilizzare i terreni circostanti, degli scarichi delle industrie vicine, …*
- *l'ammontare delle tasse da pagare allo Stato è **funzione** del salario percepito, dei fabbricati posseduti, di altre proprietà, e anche delle spese sostenute per malattie, assicurazioni, …*
- *la pressione di un gas, ad una data temperatura, è **funzione** del volume,*
- *la forza d'attrazione gravitazionale fra due dati corpi è **funzione** della distanza.*

In tutte queste situazioni, prese dai campi più diversi, l'espressione "funzione di" può essere sostituita con "dipende da"; si hanno dunque tanti esempi, piuttosto comuni oggi, di grandezze variabili legate in qualche modo fra loro. E prima? Che cosa è avvenuto nella storia? Ci sono documenti in proposito?