Appendice 1
Calcolo combinatorio e calcolo delle probabilità

1. Problemi che conducono al calcolo combinatorio
2. Disposizioni e permutazioni
3. Combinazioni e coefficienti binomiali
4. La potenza del binomio
5. Prime idee sulla probabilità: la valutazione oggettiva
6. Probabilità totale
7. Probabilità composta
8. Il problema delle prove ripetute e la legge binomiale
9. Proprietà notevoli della legge binomiale

1. Problemi che conducono al calcolo combinatorio

Il termine "calcolo combinatorio" suggerisce altri termini analoghi, che si usano nel linguaggio comune: "serratura a combinazione", "combinazione di una cassaforte", ... Fra tutti questi termini c'è una stretta relazione; vediamo subito perché: una serratura a combinazione è basata sul fatto che bisogna digitare un ben preciso numero, per esempio di tre o quattro cifre, per aprire la serratura. In questo caso, ci si chiede sempre se è facile "indovinare il numero" per tentativi; per rispondere in modo chiaro, bisogna sapere quanti sono i numeri di tre cifre che si possono scrivere.

Il calcolo combinatorio permette, appunto, di rispondere a questa domanda, calcolando in quanti modi si possono **disporre** tre delle dieci cifre, tenendo presente che due numeri sono diversi se differiscono:
- per le cifre presenti,
- per l'ordine in cui compaiono le cifre.

Molti giochi di carte o d'azzardo pongono altri problemi, di cui si occupa il calcolo combinatorio; per esempio, in quanti modi si possono presentare le 10 carte da gioco in mano a ciascuno dei quattro giocatori (per esempio di tresette), nella distribuzione di un mazzo di 40 carte? In questo caso due **combinazioni** di 10 carte sono diverse solo se differiscono per il tipo di carte presenti, dato che non si tiene conto dell'ordine in cui si presentano le carte.

In base a quanto si è detto finora sembra che il calcolo combinatorio riguardi una ristretta categoria di problemi; ma non è così.

Le applicazioni più interessanti del calcolo combinatorio si trovano nel calcolo delle probabilità, un ramo fondamentale della matematica, che è anche uno strumento prezioso delle scienze sperimentali, dell'economia, ... e della vita quotidiana.

In questo capitolo viene appunto trattato il calcolo combinatorio e qualche sua applicazione nel calcolo delle probabilità.

2. Disposizioni e permutazioni

Affrontiamo ora il primo problema segnalato nel paragrafo precedente: contare quanti numeri di tre cifre si possono formare. Per rendere più breve la trattazione, cominciamo da un caso più semplice:
- formiamo i numeri con 3 cifre differenti, cioè senza ripetere una cifra;
- consideriamo solo le 5 cifre dispari.

Per contare i numeri che si possono formare risulta molto utile un **diagramma ad albero** come quello di fig. 1.

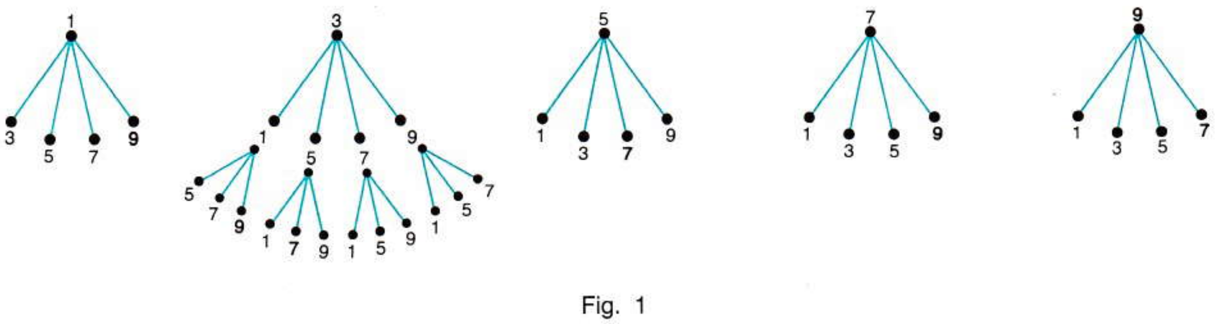

Fig. 1

Dalla figura risulta chiaro che:
- la prima cifra del numero si può scegliere in 5 modi,
- dopo aver fissato la prima cifra, la seconda si può scegliere in $(5-1)$ modi,
- dopo aver fissato le prime due cifre, la terza si può scegliere in $(5-2)$ modi.

Perciò, contando i modi di disporre le 5 cifre 3 a 3, otteniamo un numero N, dato da:

$$N=5(5-1)(5-2)=60.$$

Il procedimento è ormai chiaro e può essere applicato ad altri casi; se, per esempio, si contano i modi di disporre le 5 cifre dispari 4 a 4, si ottiene:

$$N'=5(5-1)(5-2)(5-3)=120.$$

I modi di disporre 5 cifre differenti 3 a 3 prendono anche il nome di **disposizioni di 5 elementi 3 a 3** e il numero di queste disposizioni si indica con $\boldsymbol{D_{5,3}}$; si ha dunque:

$$D_{5,3}=5(5-1)(5-2)$$

e, analogamente

$$D_{5,4}=5(5-1)(5-2)(5-3).$$

È facile ora indicare una legge generale: i modi di raggruppare n elementi differenti k a k prendono il nome di **disposizioni di n elementi k a k**; il numero di queste disposizioni si indica con $\boldsymbol{D_{n,k}}$ ed è dato da

$$\boldsymbol{D_{n,k}=n(n-1)(n-2)\ \dots\ (n-k+1),} \tag{1}$$

cioè dal prodotto dei k interi consecutivi e decrescenti, a partire da n.

Mediante la formula ora ottenuta è immediato dire, per esempio, quanti numeri di 6 cifre si ottengono impiegando le 10 cifre decimali; si ha:

$$D_{10,6}=10(10-1)(10-2)(10-3)(10-4)(10-5)=151.200.$$

Un caso particolare delle disposizioni di n elementi si ottiene facendo intervenire tutti gli n elementi assegnati; si hanno così **le permutazioni** di n elementi. Il numero di queste permutazioni si indica con P_n e si ottiene dalla formula (1), calcolata per $k=n$; si ha:

$$P_n=D_{n,n}=n(n-1)(n-2)\ \dots\ 1.$$

Questo **prodotto dei primi n numeri naturali** si indica con il simbolo **n!**, che si legge **fattoriale di n, o n fattoriale**. Si scrive dunque:

$$\boldsymbol{P_n=n(n-1)(n-2)\ \dots\ 1=n!} \tag{2}$$

Il simbolo $\boldsymbol{n!}$ non è del tutto sconosciuto, dato che è presente sulla tastiera di qualunque calcolatore tascabile per uso scientifico; così è facile verificare con il calcolatore che il fattoriale cresce molto rapidamente al crescere del numero n. Ecco qualche esempio:

$$\begin{aligned} 1!&=1,\\ 5!&=5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=120,\\ 10!&=10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=3.628.800,\\ 11!&=11\cdot10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=39.916.800. \end{aligned}$$

Gli ultimi due esempi portano a scoprire una notevole proprietà del fattoriale; si ha:

$$11!=11(10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1)=11\cdot10!$$

e, in generale,

$$\boldsymbol{(n+1)!=(n+1)n!} \tag{3}$$

Questa relazione conduce ad attribuire un significato anche al simbolo 0!; basta sostituire 0 ad n nei due membri della (3). Si ha:

1° membro) $(0+1)!=1!=1$,
2° membro) $(0+1)0!=1\cdot 0!=0!$;

se dunque si vuole considerare valida la proprietà (3) anche in questo caso, bisogna porre

$$\mathbf{0!=1}.$$

3. Combinazioni e coefficienti binomiali

Riprendiamo l'esempio trattato all'inizio del paragrafo precedente per passare dalle disposizioni alle combinazioni delle 5 cifre dispari 3 a 3. Le combinazioni sono sempre raggruppamenti in cui compaiono 3 delle 5 cifre dispari, ma due combinazioni si ritengono diverse solo se differiscono per almeno una cifra che vi compare. Scriviamo allora nella colonna a sinistra della tabella sottostante le combinazioni delle 5 cifre 3 a 3; successivamente, permutiamo le tre cifre presenti su ciascuna riga: da ogni riga si hanno 3! permutazioni. Si ottengono così tutte le $D_{5,3}$ disposizioni, che risultano ordinate in un modo particolarmente espressivo.

Combinazioni	**Permutazioni**				
1 3 5	1 5 3	3 5 1	3 1 5	5 1 3	5 3 1
1 3 7	1 7 3	3 7 1	3 1 7	7 1 3	7 3 1
1 3 9	1 9 3	3 9 1	3 1 9	9 1 3	9 3 1
1 5 7	1 7 5	5 7 1	5 1 7	7 1 5	7 5 1
1 5 9	1 9 5	5 9 1	5 1 9	9 1 5	9 5 1
1 7 9	1 9 7	7 9 1	7 1 9	9 1 7	9 7 1
3 5 7	3 7 5	5 3 7	5 7 3	7 3 5	7 5 3
3 5 9	3 9 5	5 3 9	5 9 3	9 3 5	9 5 3
3 7 9	3 9 7	7 3 9	7 9 3	9 3 7	9 7 3
5 7 9	5 9 7	7 5 9	7 9 5	9 5 7	9 7 5

Disposizioni

La tabella suggerisce una semplice relazione fra il numero $D_{5,3}$ delle disposizioni ed il corrispondente numero di combinazioni, che si indica con $C_{5,3}$; si ha:

$$D_{5,3}=3!C_{5,3}, \quad \text{da cui} \quad C_{5,3}=\frac{D_{5,3}}{3!}$$

Il procedimento seguito ha carattere generale e si può ripetere per valutare il numero $C_{n,k}$ delle combinazioni di n elementi k a k: si suppone di aver formato tutte le combinazioni e di permutare i k elementi di ciascuna combinazione, fino ad ottenere tutte le disposizioni; si ha dunque:

$$D_{n,k}=k!C_{n,k}, \quad \text{da cui} \quad C_{n,k}=\frac{D_{n,k}}{k!}$$

Applicando poi la formula (1) per calcolare il numero $D_{n,k}$, si ottiene:

$$C_{n,k}=\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!} \tag{4}$$

Il numero ottenuto nella formula (4) si indica con un particolare simbolo; si scrive:

$$\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!}=\binom{n}{k} \tag{5}$$

Il simbolo

$$\binom{n}{k}$$

in cui **non** compare il segno di frazione fra n e k, si legge "n sopra k" e prende il nome di **coefficiente binomiale** da una delle sue più note applicazioni, che vedremo nel paragrafo successivo.

Applichiamo subito la formula ottenuta per risolvere il problema proposto nel paragrafo 1: calcolare in quanti modi si possono presentare le 10 carte da gioco in mano a ciascun giocatore, nella distribuzione da un mazzo di 40 carte. Per risolvere il problema, occorre calcolare $C_{40,10}$; applicando la formula (4), si ottiene

$$C_{40,10}=\frac{40\cdot39\cdot38\cdot37\cdot36\cdot35\cdot34\cdot33\cdot32\cdot31}{10!}=847.660.528$$

Proprio applicando la formula (4), ci si rende conto che i calcoli sono piuttosto lunghi: anche se si dispone di un calcolatore tascabile, si ottiene immediatamente il fattoriale di un numero, ma non è certo agevole impostare il prodotto di una lunga sequenza di fattori. Per questo conviene modificare la formula (4), in modo da valersi il più possibile del fattoriale: basta moltiplicare numeratore e denominatore della (4) per

$$(n-k)!=(n-k)(n-k-1)\ \ldots\ 1.$$

Si ha:

$$C_{n,k}=\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)\cdot(n-k)\cdot(n-k-1)\cdot\ldots\cdot1}{k!\cdot(n-k)!}$$

ossia

$$C_{n,k}=\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!} \tag{6}$$

e quindi anche

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!} \tag{7}$$

4. La potenza del binomio

Vediamo ora come il coefficiente binomiale permetta di risolvere un altro tipo di problemi: contare le permutazioni di n elementi, nel caso in cui alcuni elementi siano uguali fra loro.

Per capire meglio di che si tratta, cominciamo ad esaminare un esempio numerico. Consideriamo ancora una volta le 5 cifre dispari

1 3 5 7 9;

le permutazioni che si possono effettuare su questi 5 elementi sono

$$P_5=5!$$

Rimpiazziamo ora le prime tre cifre con la lettera a, ottenendo i seguenti 5 elementi

$$a\ a\ a\ 7\ 9;$$

quante sono le permutazioni in questo caso?

Certamente saranno meno di 5!, perché un dato raggruppamento dei 5 elementi resta inalterato quando si permutano solo i 3 elementi uguali.

Immaginiamo allora di aver elencato tutti i raggruppamenti che si ottengono in questo caso ed indichiamo con G il loro numero. Potremmo ora operare, su ognuno di questi raggruppamenti, le 3! permutazioni degli elementi uguali senza alterare nulla; se, invece, potessimo distinguere i 3 elementi, la stessa operazione, ripetuta per tutti i G raggruppamenti, fornirebbe le 5! permutazioni iniziali. Si ha dunque:

$$3!\cdot G=5!, \quad \text{da cui} \quad G=\frac{5!}{3!}$$

Il ragionamento seguito ha carattere generale e permette di concludere che le permutazioni di n elementi, fra cui k sono uguali fra loro, è dato da

$$\frac{n!}{k!}$$

Ora è facile capire che, se anche i restanti $n-k$ elementi sono uguali fra loro, (ma diversi dai primi k), il numero delle permutazioni è dato da

$$\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}=\binom{n}{k}$$

Si trova dunque che lo stesso coefficiente binomiale risolve un problema apparentemente molto diverso da quello visto nel paragrafo precedente, cioè contare le combinazioni di n elementi k a k. Eppure è facile rendersi conto che i due problemi sono collegati: per formare un raggruppamento di n elementi, di cui k sono uguali fra loro e i rimanenti $n-k$ pure uguali fra loro, basta scegliere “il posto da assegnare” ai k elementi, dato che gli altri $n-k$ “riempiranno automaticamente” i restanti posti disponibili. Questo significa che basta indicare le combinazioni degli n posti k a k per aver contato anche tutti i possibili raggruppamenti.

Quest'ultima applicazione dei coefficienti binomiali risulta particolarmente utile per trovare i coefficienti dei temini della potenza del binomio, cioè

$$(a+b)^n;$$

proprio da questo ha origine il temine “coefficiente binomiale”.

Vediamo meglio di che si tratta, cominciando ad esaminare un caso particolare: lo sviluppo di

$$(a+b)^5.$$

Per sviluppare questa potenza, si può calcolare il prodotto

$$(a+b)\ (a+b)\ (a+b)\ (a+b)\ (a+b)$$

e vedere quante volte si presentano i vari monomi

$$a^5,\ a^4b,\ a^3b^2,\ \ldots$$

Per evitare di eseguire tutti i prodotti, si può ragionare così:
- il monomio

  $$a^5=a\ a\ a\ a\ a$$

  compare certamente una volta sola, perché 5 termini a si possono moltiplicare fra loro in un solo modo;
- il monomio

  $$a^4b=a\ a\ a\ a\ b$$

compare un numero di volte dato dalle permutazioni di 5 elementi, di cui 4 sono uguali fra loro, ossia

$$\binom{5}{4}=\frac{5!}{4!\cdot 1!}$$

– e così il monomio

$$a^3b^2=a\ a\ a\ b\ b$$

compare un numero di volte uguale al numero delle permutazioni di 5 elementi, di cui 3 sono uguali fra loro e gli altri 2 pure uguali fra loro e cioè

$$\binom{5}{3}=\frac{5!}{3!\cdot 2!}$$

Ormai è chiaro il procedimento; si ottiene:

$$(a+b)^5=a^5+\binom{5}{4}\cdot a^4\cdot b+\binom{5}{3}\cdot a^3\cdot b^2+\binom{5}{2}\cdot a^2\cdot b^3+\binom{5}{1}\cdot a\cdot b^4+b^5$$

In generale, si ottiene la formula

$$(a+b)^n=a^n+\binom{n}{n-1}\cdot a^{n-1}\cdot b+\binom{n}{n-2}\cdot a^{n-2}\cdot b^2+\ldots+\binom{n}{1}\cdot a\cdot b^{n-1}+b^n$$

Questa formula suggerisce due considerazioni:

1) i coefficienti presenti nello sviluppo del binomio non sono tutti diversi, dato che risulta

$$\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}=\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$$

2) si può dare significato al coefficiente binomiale anche per $k=0$ e per $k=n$; tenendo presente che risulta

$$0!=1;$$

si ha

$$\binom{n}{n}=\frac{n!}{0!\cdot n!}=\frac{n!}{n!}=1 \qquad \text{e} \qquad \binom{n}{0}=\frac{n!}{n!\cdot 0!}=\frac{n!}{n!}=1$$

In questo modo si può dare alla formula dello sviluppo del binomio un aspetto simmetrico, scrivendo

$$\boldsymbol{(a+b)^n=\binom{n}{n}a^n+\binom{n}{n-1}\cdot a^{n-1}\cdot b+\ldots+\binom{n}{1}\cdot a\cdot b^{n-1}+\binom{n}{0}\cdot b^n}$$

La formula per lo sviluppo della potenza del binomio ora ottenuta prende il nome di **formula di Newton**, anche se era già conosciuta prima dell'epoca di Newton: nel XVI secolo la formula venne applicata dal matematico italiano Nicolò Tartaglia e nell'XI secolo sembra fosse nota al matematico persiano Omar Al-Khaymi.

È importante sottolineare subito che la formula ha importanti applicazioni nel calcolo delle probabilità, come vedremo nei paragrafi successivi.

5. Prime idee sulla probabilità; la valutazione oggettiva

I termini "probabilità" e "probabile" fanno largamente parte del linguaggio comune e vengono spesso impiegati nelle situazioni di incertezza: elezioni politiche, diffusione di epidemie, assicurazioni, lotterie, giochi d'azzardo, ... sono esempi di situazioni in cui si parla di probabilità, dato che non si sa dire con sicurezza che cosa accadrà. Si intuisce allora che l'interesse a queste situazioni non può certo essere recente: già nel 1300 si trovano in Italia compagnie d'assicurazione disposte ad assicurare le merci trasportate via mare; è chiaro che queste compagnie dovevano valutare nel modo più preciso possibile la probabilità di un incidente di viaggio, per decidere, in conseguenza, un'adeguata tariffa. Sono dunque problemi assicurativi che hanno stimolato gli studi nel campo delle probabilità; ma quando si cercò di matematizzare questi problemi si incontrarono enormi difficoltà, dovute alla complessità delle situazioni. Per questo gli studi matematici si sono ben presto concentrati su problemi meno complessi, riguardanti però sempre il caso: i giochi d'azzardo.

Sono proprio gli studi sui giochi d'azzardo che portano Gerolamo Cardano, grande matematico del 1500, ad esprimere con un numero la probabilità di un evento, dando inizio ad un nuovo ramo della matematica: il calcolo delle probabilità, che si sviluppa rapidamente, sollecitato anche dalle emergenti scienze sperimentali.

Nel 1713 compare il primo trattato organico sulla probabilità: è l'*Ars conjectandi* (cioè "l'arte di far previsioni") del grande matematico svizzero Jacques Bernoulli.

Da allora il ruolo delle probabilità si precisa come strumento, fondamentalmente nella fisica, nella biologia, nell'economia; le teorie dell'incerto vengono a dominare gran parte della nostra vita.

Si capisce quindi che in poche pagine non si riesce certo ad esaurire l'argomento "Calcolo delle probabilità"; perciò ci limitiamo qui ad esaminare alcune idee fondamentali.

Quando si deve decidere in condizioni di incertezza, viene spontaneo cercare qualche "regolarità del caso", proprio per avere un aiuto nella scelta.

Cominciamo ad analizzare qualche situazione in cui è facile scoprire queste "regolarità del caso".

- Lanciamo in aria una moneta. Quando ricade può presentare una faccia o l'altra, cioè si può avere testa o croce. Se la moneta non è truccata, non c'è motivo che si presenti una faccia, piuttosto che l'altra: i casi testa o croce sono ugualmente probabili. La probabilità p che si presenti uno dei due casi, per esempio croce è

  $$p=\frac{1}{2}.$$

- Se lanciamo un dado, può presentarsi con la stessa probabilità una qualunque delle 6 facce; quindi la probabilità p che si presenti una faccia, per esempio quella che porta il numero 5, è

  $$p=\frac{1}{6}.$$

- Nel gioco della roulette (fig. 2), la pallina può fermarsi in una qualunque delle 37 vaschette contrassegnate con i numeri 0, 1, 2, ... , 36. Quindi la probabilità p che la pallina si fermi in una vaschetta, per esempio quella che porta il numero 9, è

  $$p=\frac{1}{37}.$$

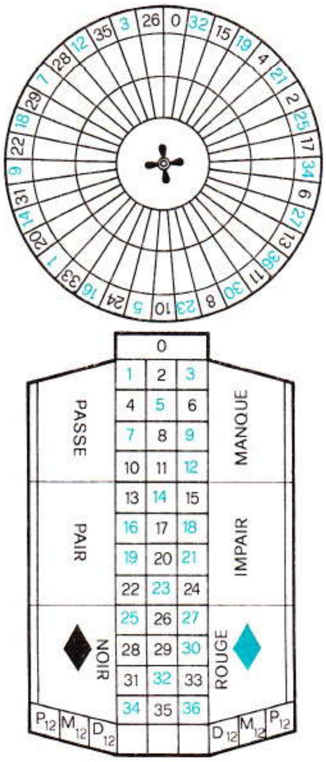

Fig. 2

- Sempre nel gioco della roulette, qual'è la probabilità che la pallina si fermi in una casella contrassegnata con un numero pari?
  È facile rispondere, basandosi sulla fig. 3: fra i 37 numeri, ci sono 18 pari, 18 dispari e lo zero; quindi la probabilità p che la pallina si fermi in una casella pari è

$$p=\frac{18}{37}.$$

È chiaro che le nostre conclusioni sono valide solo se la moneta, il dado, la roulette non sono truccati: tutti i casi in ogni *evento* debbono essere *ugualmente possibili* (o *probabili*).

I vari esempi portati permettono di cogliere il significato della seguente definizione di probabilità:

la probabilità p di un evento è data dal rapporto fra il numero F dei casi favorevoli e il numero N dei casi possibili, purché tutti i casi siano ugualmente possibili.

Si ha dunque:

$$p=\frac{F}{N}$$

È facile rendersi conto che si ha:

$p=0$, quando risulta $F=0$, cioè non ci sono casi favorevoli;
$p=1$, quando risulta $F=N$, cioè tutti gli N casi sono favorevoli.

Per esempio, lanciando un dado, vale 0 la probabilità di ottenere il numero 7, mentre vale 1 la probabilità di ottenere un numero compreso fra 1 e 6 (estremi inclusi).

In conclusione, **la probabilità di un evento è un numero compreso fra 0 (quando l'evento è impossibile) e 1 (quando l'evento è certo).**

Questo modo di valutare la probabilità prende il nome di **valutazione classica** della probabilità, perché, storicamente, è stata la prima valutazione di probabilità espressa in termini matematici. Viene anche detta valutazione **oggettiva** per intendere che la probabilità è valutata osservando il fenomeno (l'oggetto) che interessa, senza tener conto della persona (il soggetto) che osserva.

6. Probabilità totale

Cominciamo ad esaminare due casi particolari che condurranno a conclusioni di carattere generale.

1) Lanciamo due monete ed esaminiamo i casi che si possono presentare. Indicando testa con T e croce con C, si può avere:

   $TT \quad TC \quad CT \quad CC.$

   Si hanno dunque 4 casi ugualmente possibili; la probabilità p che si verifichi uno di essi è

$$p=\frac{1}{4}.$$

Se però non interessa quale delle due monete dia testa o croce, i due casi *TC* e *CT* possono essere considerati uguali e perciò la probabilità *P* che si presenti *TC* o *CT* è

$$P=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

2) Valutiamo ora la probabiltà di una combinazione al gioco della roulette: qual'è la probabilità p che esca un numero nero o pari?
Ragioniamo: fra i 37 numeri della roulette sono per noi favorevoli sia i 18 neri che i 18 pari; seguendo un ragionamento analogo a quello svolto per il lancio di due monete, dovremmo scrivere

$$p=\frac{18}{37}+\frac{18}{37}\approx 0{,}973$$

Il risultato molto vicino ad 1, porta a concludere che è quasi certo ottenere un numero nero o pari. Si rimane perplessi; allora, per capire meglio la situazione, visualizziamola con un diagramma (fig. 3).

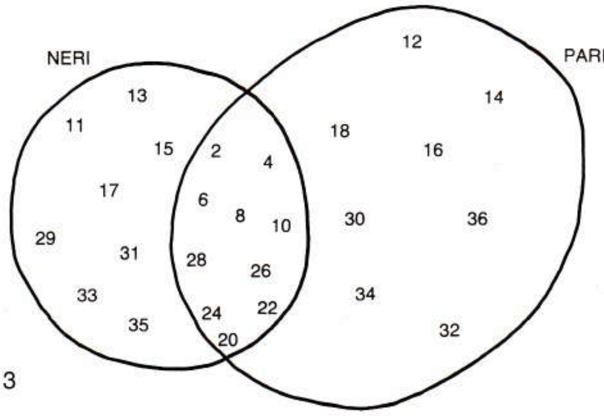

Fig. 3

La figura fa capire che abbiamo commesso un notevole errore: abbiamo contato due volte i dieci numeri che sono contemporaneamente neri e pari. Perciò la probabilità p che esca un numero nero o pari è data da:

$$p=\frac{18}{37}+\frac{18}{37}-\frac{10}{37}\approx 0{,}703$$

I ragionamenti seguiti hanno carattere generale e permettono di arrivare al seguente risultato:

la probabilità totale p che si verifichi almeno uno fra due eventi di probabilità rispettive q ed r è data da

$$p=q+r-s,$$

dove s è la probabilità che i due eventi si verifichino contemporaneamente.

Due importanti osservazioni:

– nel caso del lancio di due monete, per calcolare la probabilità P che si verifichi *TC* o *CT*, abbiamo eseguito l'addizione

$$P=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

senza togliere alcun termine, perché i due eventi *TC* e *CT* non possono verificarsi contemporaneamente, cioè sono **incompatibili**.

– nel caso del gioco della roulette i due eventi "esce numero nero" e "esce numero pari" sono invece **compatibili**, cioè il verificarsi dell'uno non esclude il verificarsi dell'altro.

7. Probabilità composta

Cominciamo, anche in questo caso, ad esaminare due casi particolari.

1) Si lanciano due dadi; qual'è la probabilità di avere il numero 2?
Per trovare la risposta, basiamoci sul diagramma della fig. 4: ogni faccia del dado può associarsi a ciascuna delle sei facce dell'altro dado; i casi possibili sono dunque 36.

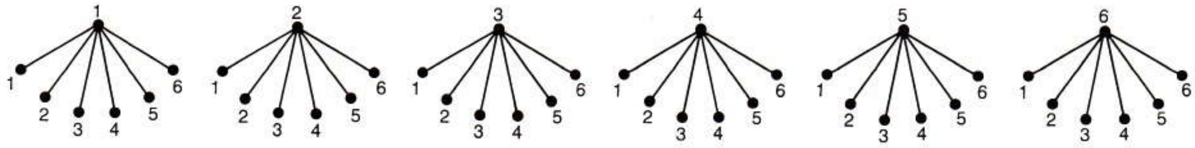

Fig. 4

Valutiamo ora i casi favorevoli: si può ottenere 2 solo nel caso in cui ciascun dado presenti la faccia con il numero 1; si ha dunque un solo caso favorevole.
Si conclude allora che la probabilità p di avere 2 è

$$p=\frac{1}{36}.$$

Si osserva subito che questa probabilità p di ottenere sui dadi 1 e 1 è data dal prodotto seguente

$$p=\frac{1}{36}=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}$$

dove $\frac{1}{6}$ è la probabilità di avere 1 su un solo dado.

2) Passiamo ora al gioco della roulette e calcoliamo la probabilità che esca un numero pari e nero.
Per questo cominciamo a valutare la probabilità che esca un numero pari in due circostanze diverse:
a) prima di lanciare la pallina;
b) dopo aver saputo che è uscito un numero di un dato colore, per esempio nero.
a) Prima di lanciare la pallina, sappiamo che i numeri possibili sono 37, di cui 18 neri; perciò la probabilità q che esca un numero nero è

$$q=\frac{18}{37}\approx 0{,}48;$$

b) Dopo aver saputo che è uscito un numero nero, rimangono solo 18 casi possibili (i 18 numeri neri), e di questi solo 10 sono favorevoli (i 10 pari). Perciò la probabilità r che un numero sia pari, **condizionata** o **subordinata** al fatto che è uscito un numero nero, è data da:

$$r=\frac{10}{18}\approx 0{,}56$$

Osserviamo subito che r è diversa da q: aver saputo che è uscito un numero nero ha modificato la probabilità dell'evento "esce un numero pari".

Siamo ora in grado di valutare la probabilità dell'evento "esce un numero nero e pari", basandoci sul diagramma di di fig. 5.

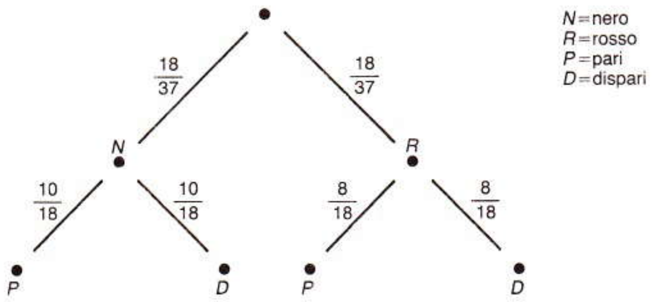

Fig. 5

Si capisce che, per avere la probabilità p che il numero sia pari e nero, occorre calcolare i $\frac{10}{18}$ di $\frac{18}{37}$; si ha quindi:

$$p=\frac{10}{18}\cdot\frac{18}{37}=\frac{10}{37}\approx 0{,}27$$

Dunque, l'evento composto dei due eventi "esce un numero nero" e "esce un numero pari" ha una probabilità p data dal prodotto della probabilità q che esca un numero nero, per la probabilità r che il numero nero sia anche pari.

I ragionamenti seguiti hanno carattere generale e permettono di arrivare alla seguente conclusione:

la probabilità composta p che si verifichino simultaneamente due eventi è data da

$$p=q\ r, \tag{1}$$

dove q è la probabilità che si verifichi il primo evento e r è la probabilità che si verifichi anche il secondo evento, dopo che si è verificato il primo.

Due importanti osservazioni:

- nel caso del gioco della roulette l'aver saputo che è uscito un numero nero modifica la valutazione di probabilità dell'evento "esce un numero pari"; i due eventi "esce un numero nero" e "esce un numero pari" sono **dipendenti**.
- nel caso del lancio di due dadi, il fatto che un dado mostri il numero 1 non modifica la probabilità $\frac{1}{6}$ che anche l'altro dado mostri il numero 1; i due eventi "il primo dado mostra il numero 1" e "il secondo dado mostra il numero 1" sono **indipendenti**.

Comunque, in ambedue i casi ci si vale della formula (1) per valutare la probabilità composta che i due eventi si verifichino simultaneamente.

8. Il problema delle prove ripetute e la legge binomiale

Cominciamo, ancora una volta, ad esaminare un caso particolare che conduce a scoprire dei risultati di carattere generale.

Quando si lancia un dado, sappiamo che la probabilità p che si presenti la faccia con un dato numero, per esempio il 2, è

$$p=\frac{1}{6};$$

la probabilità q che lo stesso numero 2 non si presenti è invece

$$q=\frac{5}{6}.$$

Immaginiamo ora di lanciare il dado più volte, per esempio 10 volte; qual'è la probabilità P che la stessa faccia si presenti 3 volte?

È chiaro che la faccia con il numero 2 si presenta esattamente 3 volte se si realizzano contemporaneamente questi eventi: esce 2 in 3 lanci e non esce 2 negli altri 7 lanci. Perciò, per il teorema delle probabilità composte, si ha:

$$P=\left(\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\right)\cdot\left(\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\right), \quad \text{ossia} \quad P=\left(\frac{1}{6}\right)^3\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^7$$

Questo però è il valore della probabilità se è prestabilito l'ordine in cui deve uscire il numero 2: il numero deve presentarsi nei primi 3 lanci e non presentarsi nei 7 lanci successivi.

Se, invece, non si vuol tenere conto dell'ordine, si debbono considerare tutte le permutazioni di 10 elementi, di cui 3 sono uguali a $\frac{1}{6}$ e gli altri 7 sono uguali a $\frac{5}{6}$. Queste permutazioni sono in numero di

$$\binom{10}{3}=\frac{10!}{3!\cdot(10-3)!},$$

perciò la probabilità $P_{10}(3)$ che su 10 lanci il numero 2 si presenti 3 volte è data da

$$P_{10}(3)=\binom{10}{3}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^3\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^7$$

È facile ora scrivere una formula generale, per valutare la probabilità $P_n(k)$ che su n lanci una data faccia del dado si presenti k volte; si ha:

$$P_n(k)=\binom{n}{k}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^k\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{n-k}$$

Lo stesso ragionamento può essere seguito tutte le volte che si ripetono n prove, indipendenti l'una dall'altra, in cui un evento si verifica con probabilità p e non si verifica con probabilità $q=1-p$.
L'evento si verifica esattamente k volte con una probabilità $P_n(k)$, data da

$$\boldsymbol{P_n(k)=\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot q^{n-k}} \qquad (1)$$

Siccome i termini

$$\binom{n}{k}$$

sono i coefficienti dello sviluppo del binomio

$$(p+q)n$$

si dice che il processo delle prove ripetute segue una **legge binomiale**. Questa legge è detta anche **legge di Bernoulli**, perché si trova esposta per la prima volta nel trattato di Bernoulli, di cui abbiamo parlato nel paragrafo 5.

La legge di Bernoulli relativa alle prove ripetute è particolarmente importante per le sue applicazioni nei campi più vari: descrive tutti i processi in cui si può considerare costante la probabilità p che si verifichi un evento mentre si effettuano una serie di prove. Bastano due esempi per rendersi conto della varietà di applicazioni.

1) Nelle scienze sperimentali ha fondamentale importanza il problema degli errori che si commettono eseguendo misure ripetute di una stessa grandezza; questo problema può essere trattato con la legge di Bernoulli se si considera costante la probabilità di commettere errori mentre si effettua la serie di misure;
2) La genetica fa largo uso della legge di Bernoulli: un nuovo organismo risulta dalla fusione di due cellule – i gameti – che portano solo metà dei cromosomi presenti nelle altre cellule dei genitori. Perciò i cromosomi, e quindi i caratteri ereditari, del figlio dipendono da un processo casuale: ogni carattere di un genitore ha probabilità $\frac{1}{2}$ di essere trasmesso al figlio, e questa probabilità rimane costante al ripetersi delle prove (cioè dei figli).

9. Proprietà notevoli della legge binomiale

Vediamo ora come il calcolo combinatorio permetta di scoprire delle notevoli proprietà relative alle prove ripetute. Per rendere la trattazione più agevole, esamineremo una situazione particolarmente semplice: il lancio ripetuto di una moneta. Nel caso del lancio ripetuto di una moneta, la probabilità p che esca testa è uguale alla probabilità q che non esca testa e si ha:

$$p=q=\frac{1}{2}.$$

Perciò, per calcolare la probabilità che su n lanci esca testa esattamente k volte, ci si basa sulla formula (1), ottenendo:

$$P_n(k)=\binom{n}{k}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^k\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k},$$

ossia

$$\boldsymbol{P_n(k)=\binom{n}{k}\cdot\frac{1}{2^n}} \qquad (2)$$

Cominciamo allora ad esaminare come varia la probabilità $P_n(k)$ al variare di k, restando fisso il numero delle prove.

Ecco un primo esempio: si lancia una moneta 4 volte e si calcola la probabilità che esca testa 0, 1, 2, 3, 4 volte, valendosi della formula (2), calcolata per $\boldsymbol{n=4}$. Si ha:

$$P_4(0)=\binom{4}{0}\cdot\frac{1}{2^4}=\frac{1}{2^4},\quad P_4(1)=\binom{4}{1}\cdot\frac{1}{2^4}=\frac{4}{2^4},\quad P_4(2)=\binom{4}{2}\cdot\frac{1}{2^4}=\frac{6}{2^4},$$

$$P_4(3)=\binom{4}{3}\cdot\frac{1}{2^4}=\frac{4}{2^4},\quad P_4(4)=\binom{4}{4}\cdot\frac{1}{2^4}=\frac{1}{2^4}.$$

Queste formule mostrano due fatti notevoli, che ora esaminiamo:

1) C'è un valore massimo di $P_4(k)$: è $P_4(2)$.
Questo vuol dire che lanciando una moneta 4 volte, la situazione più probabile è che testa si presenti 2 volte, cioè in metà dei casi; questa situazione si presenta con una probabilità

$$P_4(2)=\frac{6}{2^4};$$

2) Gli altri valori assunti da $P_4(k)$ sono simmetrici rispetto a questo massimo. La simmetria deriva dal fatto che risulta

$$\binom{4}{k}=\binom{4}{4-k}=\frac{4!}{k!\cdot(4-k)!}.$$

Le due proprietà ora indicate risultano particolarmente espressive, se vengono visualizzate su un riferimento cartesiano con un grafico come quello di fig. 6: i valori di k sono stati riportati sull'asse delle ascisse; i corrispondenti valori di $P_4(k)$ sono rappresentati con segmenti che sono paralleli all'asse delle ordinate ed hanno la lunghezza proporzionale a $P_4(k)$.

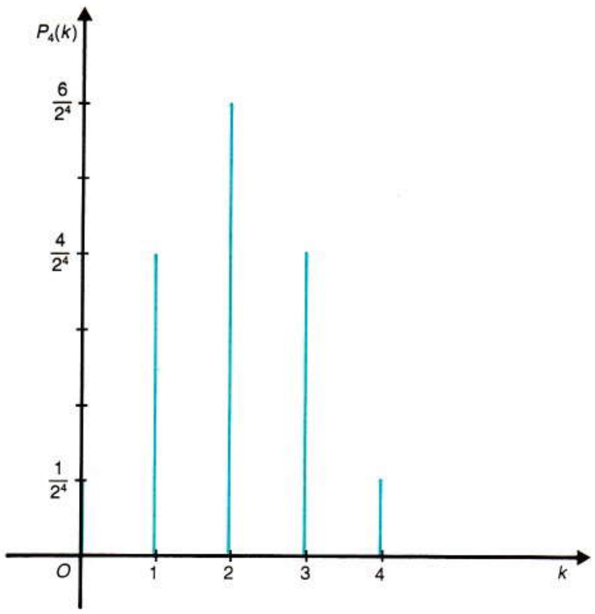

Fig. 6

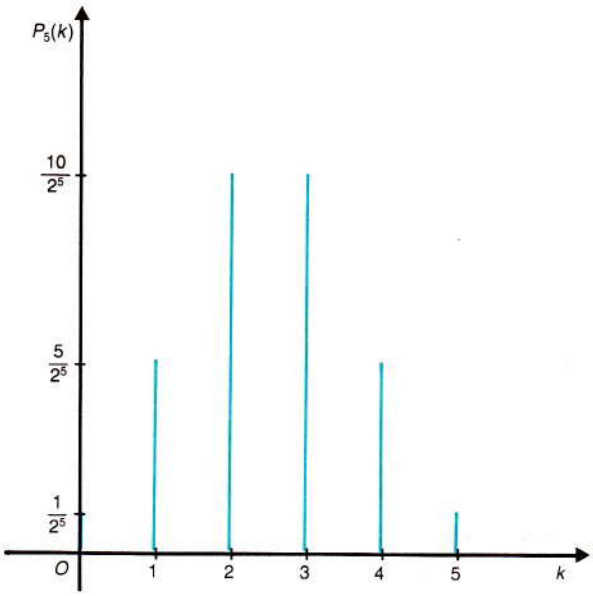

Fig. 7

Esaminiamo ora in modo analogo il lancio di una moneta ripetuto 5 volte; in fig. 7 sono stati riportati i valori delle $P_5(k)$, ottenute valendosi della formula (2), **per $n=5$**; si ha:

$$P_5(0)=\binom{5}{0}\cdot\frac{1}{2^5}=\frac{1}{2^5},\quad P_5(1)=\binom{5}{1}\cdot\frac{1}{2^5}=\frac{5}{2^5},\quad P_5(2)=\binom{5}{2}\cdot\frac{1}{2^5}=\frac{10}{2^5},$$

$$P_5(3)=\binom{5}{3}\cdot\frac{1}{2^5}=\frac{10}{2^5},\quad P_5(4)=\binom{5}{4}\cdot\frac{1}{2^5}=\frac{5}{2^5},\quad P_5(5)=\binom{5}{5}\cdot\frac{1}{2^5}=\frac{1}{2^5},$$

Il nuovo diagramma mostra proprietà analoghe al precedente, ma i massimi sono due e corrispondono alle situazioni in cui esce testa 2 o 3 volte; viene spontaneo osservare che, lanciando la moneta 5 volte, 2 e 3 sono i due interi più vicini al numero che indica la metà dei lanci (2, 5).

È inoltre interessante confrontare i valori della probabilità massima nel caso di 4 e 5 lanci; si ha che:

- nel caso di 4 lanci la probabilità massima è $P_4(2)=\frac{6}{2^4}=0{,}375$;
- nel caso di 5 lanci la probabilità massima è $P_5(2)=P_5(3)=\frac{10}{2^5}=0{,}3125$.

Si nota così che la probabilità massima è diminuita all'aumentare del numero di lanci.

Figure e considerazioni analoghe si possono ripetere esaminando le situazioni che si presentano lanciando una moneta 6 volte (fig. 8) o 7 volte (fig. 9).

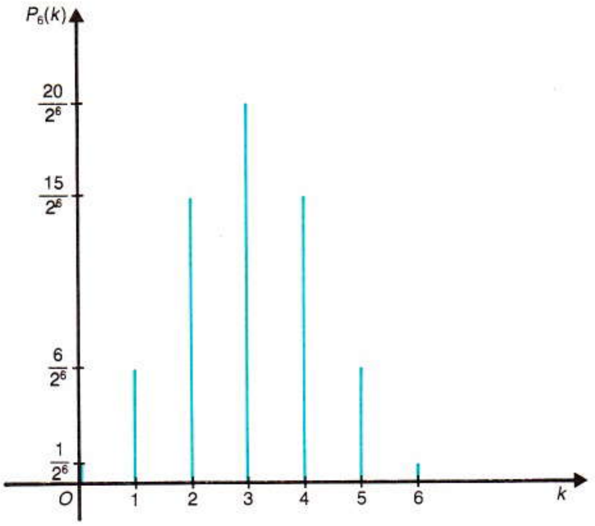

Fig. 8

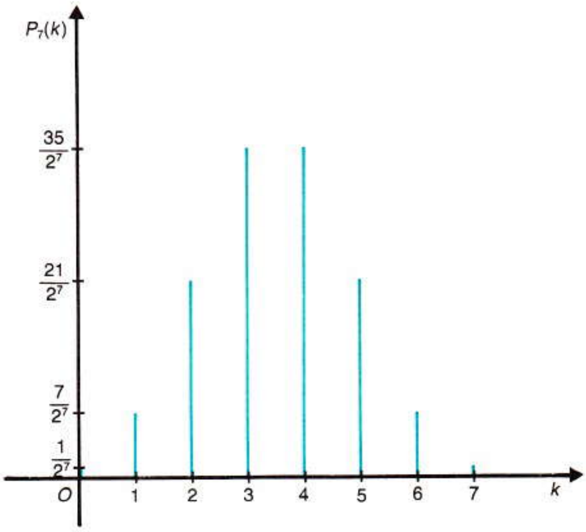

Fig. 9

Dall'esame di questi casi numerici si è condotti a prevedere, per il lancio di una moneta ripetuto n volte, le proprietà seguenti:

a) per ogni valore di n, c'è un massimo delle probabilità $P_n(k)$ e gli altri valori delle $P_n(k)$ sono simmetrici rispetto a questo massimo;
b) il massimo di probabilità corrisponde alla situazione in cui testa esce un numero di volte $k=\frac{n}{2}$ (se n è dispari le situazioni più probabili sono due, in corrispondenza ai due interi più vicini al numero $\frac{n}{2}$).
c) il massimo della probabilità ha un valore che decresce al crescere del numero di prove.

Con il calcolo combinatorio si riesce a dimostrare la validità generale di queste proprietà, ma i procedimenti necessari richiedono dei calcoli alquanto lunghi, anche se non difficili, che qui non vengono sviluppati. È invece importante riflettere subito sul significato probabilistico di tali proprietà che generano spesso equivoci e confusioni.

Cominciamo dall'ultima proprietà che è forse quella che più fa riflettere: è più probabile ottenere 1 volta testa su 2 lanci che 4 volte testa su 8 lanci. Questa proprietà si riesce a cogliere bene per valori di n grandi: si capisce che è difficilissimo, su un milione di lanci, ottenere testa **esattamente** 500.000 volte!

Questa osservazione permette anche di cogliere meglio il significato delle prime due proprietà: la situazione in cui testa si presenta 500.000 volte in un milione di lanci è più probabile di ciascuna della altre situazioni prese singolarmente, ad esempio è più probabile della situazione in cui testa esca 490.000 volte, ma ha tuttavia una piccola probabilità di verificarsi. Si ha infatti:

$$P_{1.000.000}(500.000) \approx 0{,}0008.$$

E infine una riflessione di importanza fondamentale: ad ogni lancio si ha sempre probabilità $\frac{1}{2}$ di ottenere testa, anche se in 9 lanci precedenti è uscito sempre croce, dato che la moneta "non ricorda che cosa è avvenuto nei lanci precedenti".

Quest'affermazione sembra contrastare con i risultati ottenuti prima: la probabilità che su 10 lanci testa esca 0 volte è

$$P_{10}(0)=\binom{10}{0}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{10}=\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$$

mentre la probabilità che testa esca una volta è dieci volte più grande, dato che risulta

$$P_{10}(1)=\binom{10}{1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{10}=10\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$$

Ma è facile risolvere quest'apparente contraddizione: $P_{10}(1)$ indica la probabilità che testa esca una volta nei dieci lanci, prevedendo che quest'unica volta possa realizzarsi **in uno qualunque** dei 10 lanci. Invece, la probabilità p che esca 9 volte sempre croce e la decima volta testa si calcola con il teorema della probabilità composta, ottenendo

$$p=\left(\frac{1}{2}\right)^{9}\cdot\frac{1}{2}=\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$$

si ha dunque una probabilità p che è proprio uguale alla $P_{10}(0)$.

Esercizi

Disposizioni e permutazioni

1. Disegnare il diagramma ad albero che rappresenta le disposizioni 3 a 3 delle 6 lettere che formano la parola NUMERO. Contare il numero di disposizioni così ottenute. [*R*: 120]
2. Quante sono le disposizioni di 6 oggetti 4 a 4? [*R*: 360]
3. Quante sono le disposizioni di 6 oggetti 3 a 3? [*R*: 120]
4. Quante sono le disposizioni di 6 oggetti 2 a 2? [*R*: 30]
5. Quante sono le disposizioni di 6 oggetti 1 a 1? [*R*: 6 ovviamente]

Per gli esercizi seguenti, è utile disporre di un calcolatore tascabile.

6. Calcolare $D_{10,5}$
7. Calcolare $D_{10,6}$
8. Calcolare $D_{10,7}$
9. Calcolare $D_{10,8}$
10. Calcolare $D_{10,9}$
11. Calcolare $D_{10,10}$ e P_{10}
12. Calcolare i seguenti fattoriali:

    $4!, \quad 6!, \quad 9!, \quad 12!, \quad 15!$
13. Calcolare il valore numerico delle seguenti espressioni:

    $$\frac{4!4!+3!5!}{3!}, \quad \frac{6!3!+4!5!}{3!}, \quad \frac{5!7!-6!5!}{4!}$$

14. Risolvere le seguenti equazioni nelle incognite intere m ed n:

$$6m!=n!, \quad 42m!=n!, \quad m!=n!$$

(Attenzione: la terza equazione ha più di una soluzione).

15. Determinare se i seguenti numeri sono dei fattoriali:

120, 240, 40320, 39916800, 345667241

(Un fattoriale è divisibile per 2, per 3, per 4...)

16. Calcolare quanti sono gli anagrammi della parola NUMERO. [$P_6=6!=720$]

Combinazioni e coefficienti binomiali

17. Calcolare $D_{6,3}$ e $C_{6,3}$

18. Calcolare $D_{7,3}$ e $C_{7,3}$

19. Calcolare $D_{7,4}$ e $C_{7,4}$

20. Calcolare $D_{7,5}$ e $C_{7,5}$

21. Calcolare $D_{7,6}$ e $C_{7,6}$

22. Calcolare $D_{7,7}$ e $C_{7,7}$

Dimostrare che sono vere le uguaglianze proposte negli esercizi dal 23 al 26.

23. $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$

24. $\binom{n+1}{k+1}=\binom{n}{k+1}+\binom{n}{k}$

25. $\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}$

26. $\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}=\binom{n+1}{k}$

27. Alla finale di una gara di corsa partecipano 8 atleti; quante sono le possibili graduatorie?

28. Alla finale di una gara di corsa partecipano 8 atleti; i primi 3 vincono una medaglia. Quante sono le possibili graduatorie dei vincitori?

29. In quanti modi si possono distribuire gli studenti della vostra classe tra i posti a sedere dei banchi?

30. In quanti modi si può essere rimandati in 3 materie?

31. Quante sono le colonne del Totocalcio possibili?

La potenza del binomio

Sviluppare le potenze di binomi proposte negli esercizi dal 32 al 38.

32. $(a+b)^4$

33. $(a+b)^6$

34. $(a+b)^8$

35. $(a+b)^{10}$

36. $(1+b)^n$

37. $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

38. Verificare che, quando $n \to \infty$, risulta

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}+\ldots$$

Valutazione oggettiva della probabilità

39. Una carta è scelta a caso da un mazzo di carte francesi ben mischiate.
Valutare la probabilità di estrarre:

a) una carta di cuori,
b) una carta nera,
c) un asso.

40. Una carta è scelta a caso da un mazzo di carte napoletane ben mischiate.
Valutare la probabilità di estrarre:

a) una carta di denari,
b) un re.

41. Si estrae a caso uno studente da una classe composta di 18 ragazzi e 14 ragazze. Qual'è la probabilità che sia estratto un maschio?

42. Una lotteria molto nota in Italia è la lotteria di Viareggio. Nel 1988 sono stati venduti 6 milioni di biglietti e sono stati sorteggiati i seguenti premi:

a) 1 premio da 2 miliardi;
b) 1 premio da 1 miliardo e mezzo;
c) 1 premio da 1 miliardo;
d) 1 premio da 200 milioni;
e) 1 premio da 50 milioni.

Valutare la probabilità di vincere ciascuno dei premi, comprando un biglietto.
Valutare la probabilità di non vincere alcun premio, comprando un biglietto.
Valutare come cambiano le due probabilità precedenti, comprando 10 biglietti.

43. Sapendo che la superficie totale della Terra è di 510 milioni di km^2, che le terre emerse occupano 361 milioni di km^2 e che l'Italia ha una superficie di 301.252 km^2, valutare la probabilità che un meteorite cadendo colpisca:

a) una terra emersa,
b) l'Italia.

44. Colpendo con una punta infinitamente sottile l'asse delle ascisse, qual'è la probabilità di centrare il punto di ascissa 1?

(Il caso favorevole è uno, mentre i casi possibili sono tanti quanti i punti sull'asse delle ascisse. Se questi fossero x, la probabilità sarebbe $\frac{1}{x}$*; ma i punti sull'asse delle ascisse sono infiniti...)*

La probabilità totale e composta

45. Una classe è composta di 25 alunni, ciascuno contrassegnato con il suo numero nel registro di classe; si sorteggia l'alunno che deve sostenere l'esame per primo nel modo seguente:
si estrae un numero da un sacchetto che contiene i numeri da 1 a 35;
se viene estratto un numero maggiore di 25 si considera la somma delle sue cifre.
Qual'è il numero che ha la maggiore probabilità di essere estratto?
Quali sono i numeri che hanno la minore probabilità di essere estratti?

46. In una commissione di esami di maturità sono riunite le ultime tre classi di un liceo appartenenti alle sezioni D, E, F e, nell'elenco di alunni di ogni classe, il primo cognome inizia con la lettera A e l'ultimo cognome inizia con la lettera Z e, ad ogni lettera corrisponde almeno un cognome.

Durante le prove scritte si discute il criterio per organizzare le prove orali. Ecco le varie proposte:

a) seguire l'ordine alfabetico, cioè iniziare con la sezione D, esaminando per primo l'alunno che inizia con la A;
b) sorteggiare la classe, estraendo la lettera fra tre biglietti uguali (uno con la lettera D, uno con la lettera E ed uno con la lettera F), poi seguire, per ogni classe, l'ordine alfabetico;
c) sorteggiare la classe con il criterio precedente e poi decidere l'iniziale del cognome che verrà esaminato per primo, estraendo un biglietto fra 20 con le lettere dell'alfabeto.

Valutare nei tre casi le seguenti probabilità:

p, che inizi gli esami il primo alunno della sezione D,
q, che inizi il primo alunno della sezione F,
r, che inizi l'ultimo alunno della sezione F.

47. Qual è la probabilità che, alla roulette, esca un numero nero e compreso nella prima dozzina?

48. Qual è la probabilità di fare terno al lotto?

49. Nel gioco del lotto qual'è la probabilità che un dato numero, per esempio il 10, non sia estratto su una data ruota due volte di seguito?

50. Qual è la probabilità che, lanciando tre volte un dado, esca tre volte consecutive lo stesso numero (non importa quale)?

Le prove ripetute e la legge binomiale

51. Qual è la probabilità che, lanciando una moneta tre volte, escano tre teste successive?

52. Qual è la probabilità che, lanciando un dado due volte, esca due volte consecutive il numero 1?

53. Qual è la probabilità che, su 12 lanci di un dado, esca 4 volte il numero 1?

(Applicare la formula di Bernoulli).

54. Qual è la probabilità che, su 6 estrazioni settimanali successive del lotto, esca 3 volte il numero 90 sulla stessa ruota?

(Applicare la formula di Bernoulli).

55. Qual è la probabilità che, su 6 estrazioni settimanali successive del lotto, esca 3 volte il numero 90 (non importa su quale ruota)?

(Applicare la formula di Bernoulli).