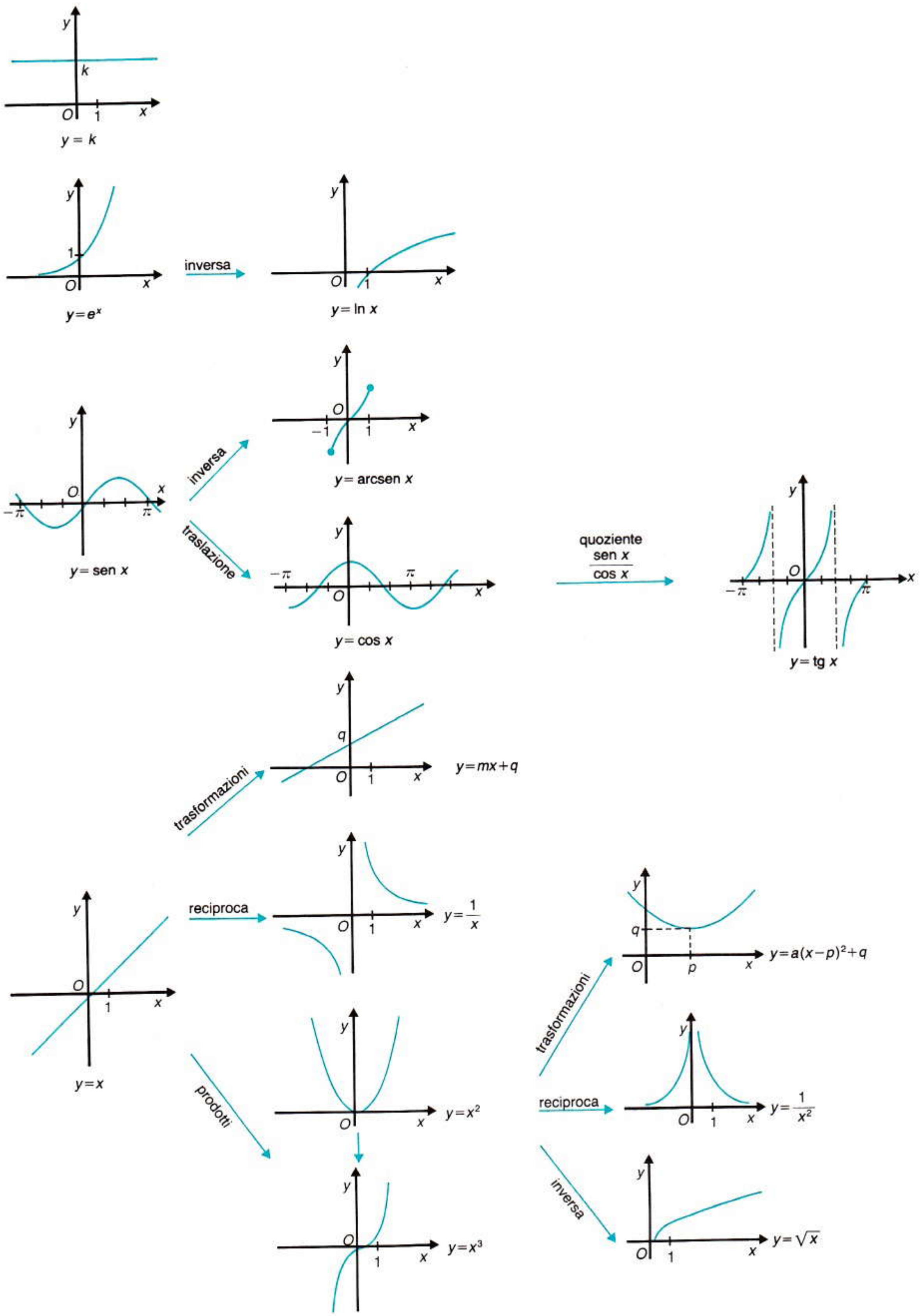
Schemi riassuntivi

Funzioni

Funzioni elementari **Funzioni generate dalle funzioni elementari**



Limiti

Definizione unitaria di limite

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell,$$

significa che, fissato comunque un intorno $I(\ell)$, si può trovare un intorno $I(a)$ tale che y appartiene ad $I(\ell)$, quando si sceglie x in $I(a)$.

Casi particolari

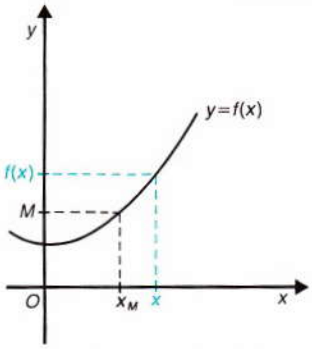
$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$

Scelto comunque $M>0$, si può sempre trovare x_M, in modo che risulti

$$|f(x)|>M,$$

per qualunque x, tale che

$$|x|>x_M$$



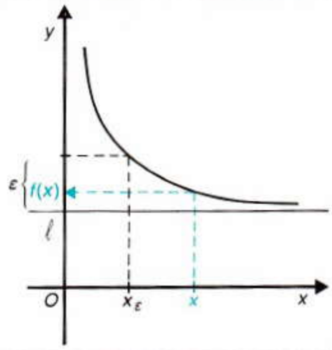
$\lim_{x \to \infty} f(x) = \ell$**, con ℓ numero**

Scelto comunque $\varepsilon>0$, si può sempre trovare x_ε, in modo che risulti

$$|f(x)-\ell|<\varepsilon,$$

per qualunque x, tale che

$$|x|>x_\varepsilon$$

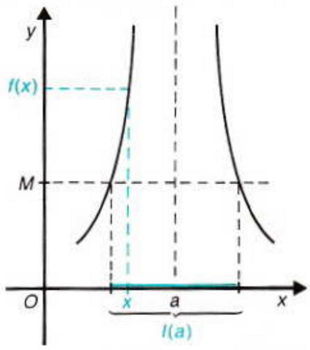


$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$**, con a numero**

Scelto comunque $M>0$, si può sempre trovare $I(a)$, in modo che risulti

$$|f(x)|>M,$$

per qualunque x appartente ad $I(a)$

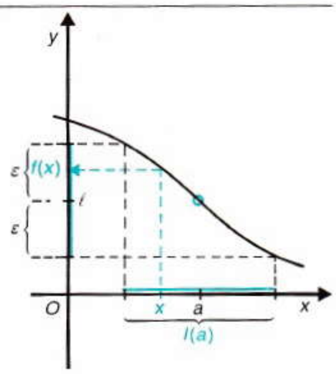


$\lim_{x \to a} f(x) = \ell$**, con ℓ ed a numeri**

Scelto comunque $\varepsilon>0$, si può sempre trovare $I(a)$, in modo che risulti

$$|f(x)-\ell|<\varepsilon,$$

per qualunque x appartente ad $I(a)$



Calcolo dei limiti

Limiti delle funzioni elementari

$\lim_{x\to a} k=k$; $\lim_{x\to\infty} k=k$;

$\lim_{x\to a} x=a$; $\lim_{x\to\infty} x=\infty$;

$\lim_{x\to a} \text{sen } x=\text{sen } a$; $\lim_{x\to\infty} \text{sen } x$ non esiste;

$\lim_{x\to a} e^x=e^a$; $\lim_{x\to+\infty} e^x=+\infty$; $\lim_{x\to-\infty} e^x=0$

Algebra dei limiti

$\lim_{x\to a} [f(x)]$	$\lim_{x\to a} [g(x)]$	$\lim_{x\to a} [f(x)+g(x)]$	$\lim_{x\to a} [f(x)g(x)]$	$\lim_{x\to a} \frac{1}{g(x)}$	$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$
$\ell\neq 0$	$m\neq 0$	$\ell+m$	$\ell\cdot m$	$\frac{1}{m}$	$\frac{\ell}{m}$
0	$m\neq 0$	m	0	$\frac{1}{m}$	0
$\ell\neq 0$	0	ℓ	0	∞	∞
0	0	0	0	∞	?
$\ell\neq 0$	∞	∞	∞	0	0
∞	$m\neq 0$	∞	∞	$\frac{1}{m}$	∞
0	∞	∞	?	0	0
∞	0	∞	?	∞	∞
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	0	?
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0	?
$+\infty$	$-\infty$	?	$-\infty$	0	?

Forme indeterminate risolte

$$\lim_{x\to\infty} [a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n]=\infty; \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{a_0+a_0x+\ldots+a_nx^n}{b_0+b_1x+\ldots+b_mx^m}=\begin{cases} 0 & \text{se } n<m \\ \infty & \text{se } n>m \\ \dfrac{a_n}{b_m} & \text{se } n=m \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen } x}{x}=1; \quad \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x}=0; \quad \lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x}=1$$

Derivate

Derivate della funzioni elementari

$y=k$	(con k numero reale qualunque)	ha per derivata	$y'=0$
$y=x$		» » »	$y'=1$,
$y=\text{sen } x$		» » »	$y'=\cos x$,
$y=e^x$		» » »	$y'=e^x$,

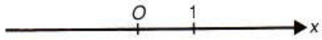
Algebra delle derivate

$y=f(x)+g(x)$	ha per derivata	$y'=f'(x)+g'(x)$,
$y=f(x)g(x)$	» » »	$y'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$,
$y=\dfrac{1}{g(x)}$	» » »	$y'=\dfrac{-g'(x)}{[g(x)]^2}$,
$y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$	» » »	$y'=\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$,
$y=f[g(x)]$	» » »	$y'=f'[g(x)]g'(x)$.

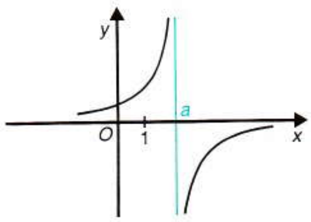
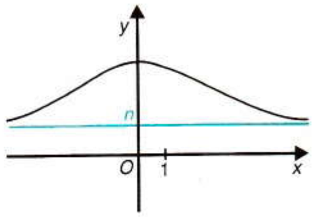
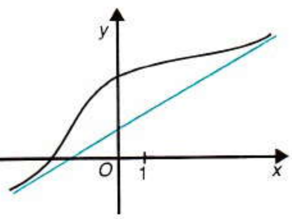
Principali applicazioni dell'algebra delle derivate

$y=x^n$	(con n numero reale qualunque)	ha per derivata	$y'=nx^{n-1}$,
$y=\cos x$		» » »	$y'=-\text{sen } x$,
$y=\text{tg } x$		» » »	$y'=1+\text{tg}^2 x$, oppure $y'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$
$y=\text{arcsen } x$		» » »	$y'=\dfrac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}$,
$y=\arccos x$		» » »	$y'=\dfrac{-1}{\sqrt{(1-x^2)}}$,
$y=\text{arctg } x$		» » »	$y'=\dfrac{1}{1+x^2}$,
$y=\ln x$		» » »	$y'=\dfrac{1}{x}$,
$y=[f(x)]^n$		» » »	$y'=n[f(x)]^{n-1}\cdot f'(x)$

Calcolo del campo di esistenza di una funzione

Funzione	Campo di esistenza	Simboli	
$y=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n$, $y=\text{sen}\ x$, $y=\cos x$, $y=e^x$.	reali reali reali reali	$\mathbb{R}$ $\mathbb{R}$ $\mathbb{R}$ $\mathbb{R}$	
$y=\sqrt{x}$	reali positivi o nulli	$\mathbb{R}^+\cup\{0\}$ $x\geq 0$	
$y=\ln x$	reali positivi	$\mathbb{R}^+$ $x>0$	
$y=\text{arcsen}\ x$, $y=\arccos x$.	reali compresi fra -1 e 1	$[-1,\ 1]$ $-1\leq x\leq 1$	
$y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$	reali per cui sono definite $f(x)$ e $g(x)$ e risulta $g(x)\neq 0$		
$y=\sqrt{f(x)}$	reali per cui è definita $f(x)$ e risulta $f(x)\geq 0$		
$y=\ln\,[f(x)]$	reali per cui è definita $f(x)$ e risulta $f(x)>0$		
$y=\text{arcsen}\ [f(x)]$, $y=\arccos\ [f(x)]$.	reali per cui è definita $f(x)$ e risulta $-1\leq f(x)\leq 1$		

Asintoti di una curva di equazione $y=f(x)$

Equazione	Condizioni	Tipo	
$x=a$	1) a escluso dal campo di esistenza, 2) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$.	verticale	
$y=n$	1) campo di esistenza illimitato, 2) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=n$.	orizzontale	
$y=mx+n$	1) campo di esistenza illimitato, 2) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}=m$ (m finito), 3) $\lim\limits_{x\to\infty} [f(x)-mx]=n$ (n finito). oppure 1) campo di esistenza illimitato 2) $m=\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)$ (m finito), 3) $n=\lim\limits_{x\to\infty} [f(x)-mx]$ (n finito); oppure 1) campo di esistenza illimitato, 2) scrivere $f(x)=mx+n+g(x)$ con $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=0$	obliquo	

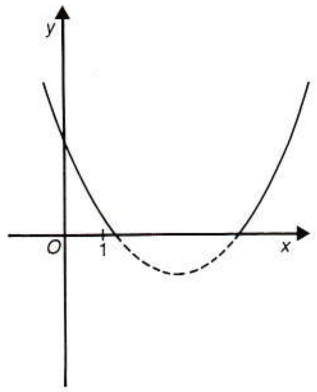
In particolare per le funzioni del tipo $y=\dfrac{a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_px^p}{b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots+b_qx^q}$

- se risulta $p<q$ asintoto $y=0$,
- se risulta $p=q$ asintoto $y=\dfrac{a_p}{b_q}$,
- se risulta $p=q+1$ asintoto obliquo con $m=\dfrac{a_p}{b_q}$,
- se risulta $p>q+1$ nessun asintoto obliquo.

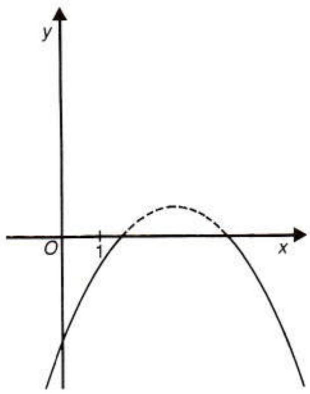
Come interpretare il segno di una funzione e delle sue derivate

Segno di $y=f(x)$

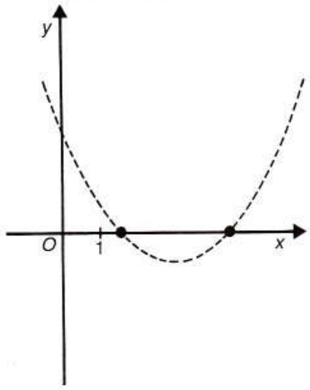
$y>0$
curva sopra l'asse delle x



$y<0$
curva sotto l'asse delle x

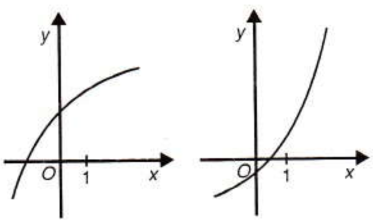


$y=0$
punti di intersezione
con l'asse delle x

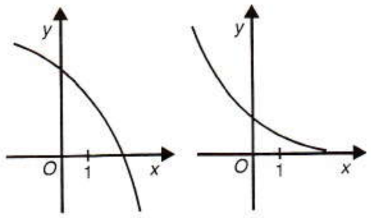


Segno di $y'=f'(x)$

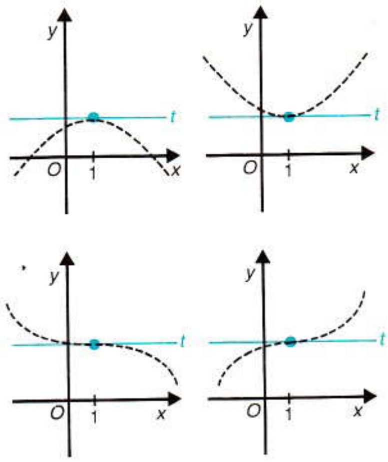
$y'>0$
curva crescente



$y'<0$
curva decrescente

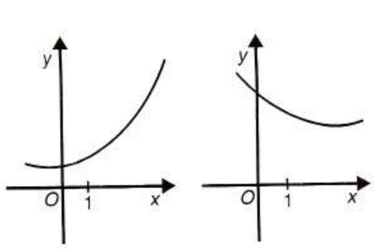


$y'=0$
punti stazionari
(t // asse delle x)

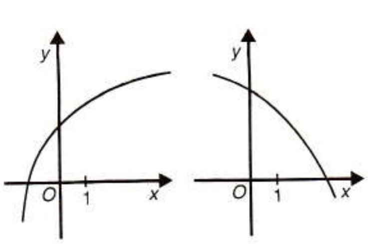


Segno di $y''=f''(x)$

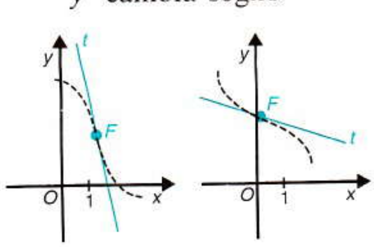
$y''>0$
concavità verso l'alto



$y''<0$
concavità verso il basso



$y''=0$
punti di flesso **solo se**
y'' cambia segno

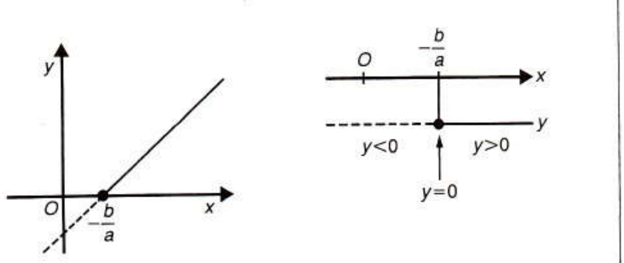


Principali nozioni per studiare il segno di una funzione

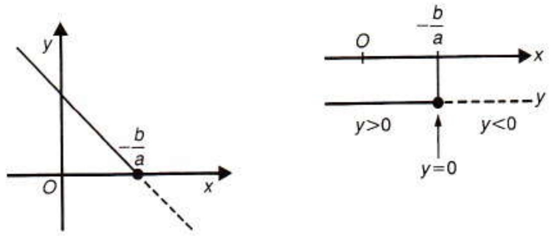
Segno di $y=ax+b$

$$y=0, \text{ se } ax+b=0 \Rightarrow x=-\frac{b}{a}$$

$a>0$



$a<0$

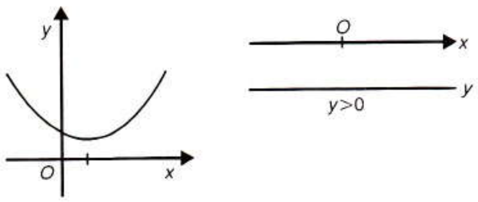


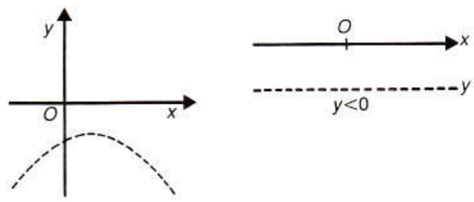
Segno di $y=ax^2+bx+c$

$$y=0, \text{ se } ax^2+bx+c=0 \Rightarrow x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}, \text{ con } \Delta=b^2-4ac$$

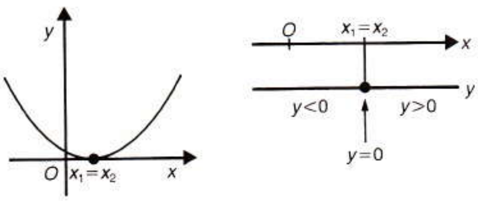
$a>0$ | **$a<0$**

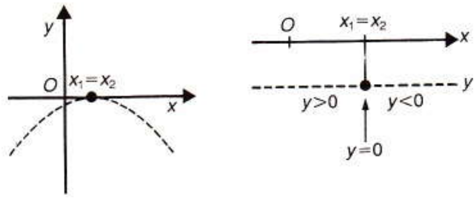
$\Delta<0$



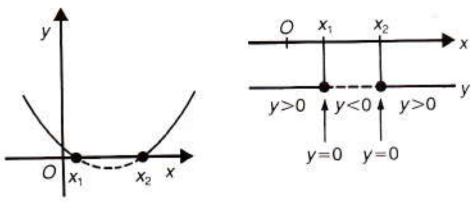


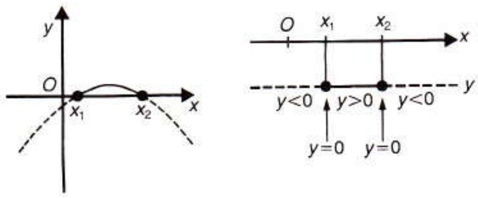
$\Delta=0$



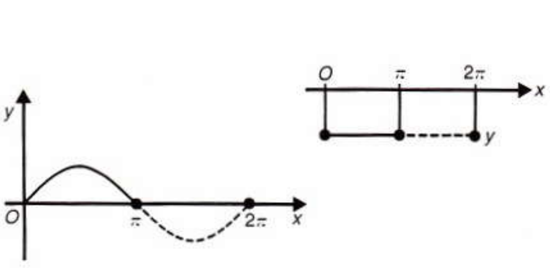


$\Delta>0$

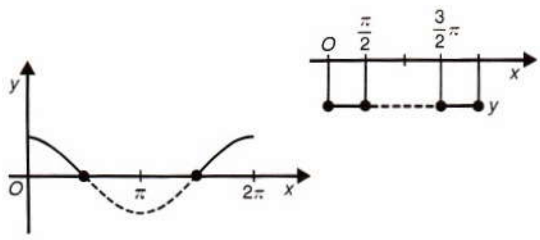




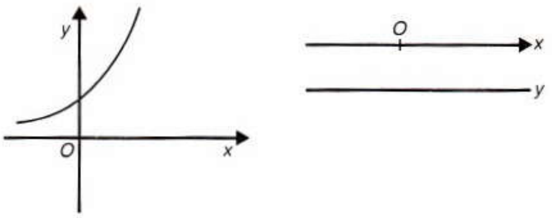
Segno di $y = \text{sen}\, x$



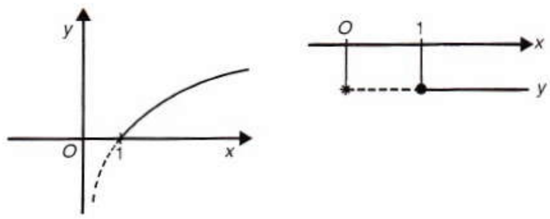
Segno di $y = \cos x$



Segno di $y = e^x$



Segno di $y = \ln x$



Segno di $y = f(x) \cdot g(x)$	**Segno di $y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$**
$y > 0$ se $f(x)$ e $g(x)$ hanno segno concorde $y < 0$ se $f(x)$ e $g(x)$ hanno segno discorde $y = 0$ se $f(x) = 0$ oppure $g(x) = 0$	$y > 0$ se $f(x)$ e $g(x)$ hanno segno concorde $y < 0$ se $f(x)$ e $g(x)$ hanno segno discorde $y = 0$ se $f(x) = 0$ e $g(x) \neq 0$ y non esiste se $g(x) = 0$

Integrali

Integrali immediati

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{2+1} + k \qquad \int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + k \qquad \int e^x \, dx = e^x + k$$

$$\int \cos x \, dx = \text{sen } x + k \qquad \int \text{sen } x \, dx = -\cos x + k \qquad \int (1 + \text{tg}^2 x) dx = \text{tg } x + k$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \text{tg } x + k \qquad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \text{arcsen } x + k \qquad \int \frac{1}{x^2+1} dx = \text{arctg } x + k$$

Metodi di integrazione

$$\int [af(x) + bg(x)] dx = a \int f(x) dx + b \int g(x) dx$$

per scomposizione

$$\int f(z) dz = F(z) + k$$

dove si ha

$F'(z) = f(z), \quad z = g(x), \quad dz = g'(x) dx$

per sostituzione

$$\int [f(x) g'(x)] dx = f(x) g(x) - \int (f'(x) g(x)) dx$$

per parti

Qualche risultato dei metodi di integrazione

$$\int [f(x)]^n \cdot f'(x) dx = \frac{1}{n+1} [f(x)]^{n+1} + k$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + k$$

$$\int \frac{f'(x)}{1 + [f(x)]^2} dx = \text{arctg } [f(x)] + k$$

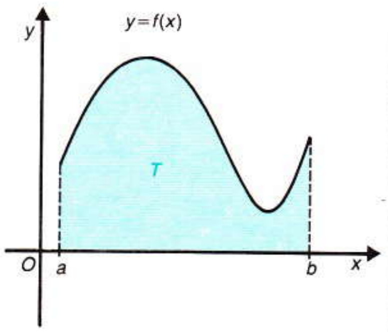
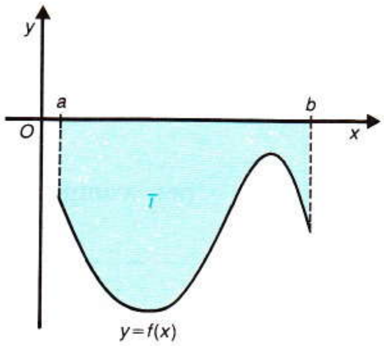
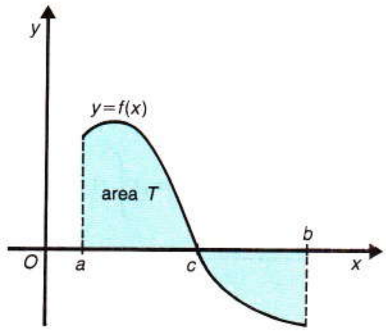
$$\int \cos^2 dx = \frac{1}{2} (x + \text{sen } x \cdot \cos x) + k$$

$$\int \text{sen}^2 x \, dx = \frac{1}{2} (x \text{ sen } x \cdot \cos x) + k$$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} = \frac{1}{2} \left(a^2 \text{ arcsen } \frac{x}{a} + x \sqrt{a^2 - x^2} \right) + k$$

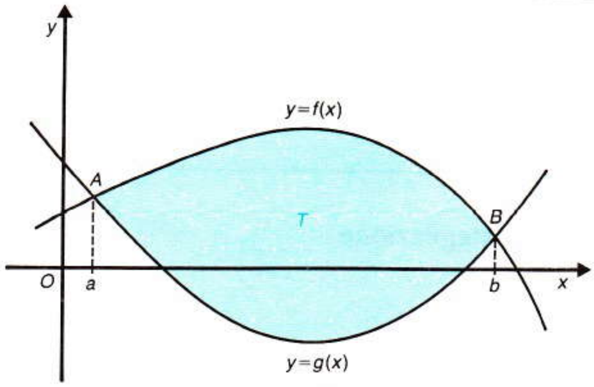
Applicazioni degli integrali

Area T sotto una curva d'equazione $y=f(x)$

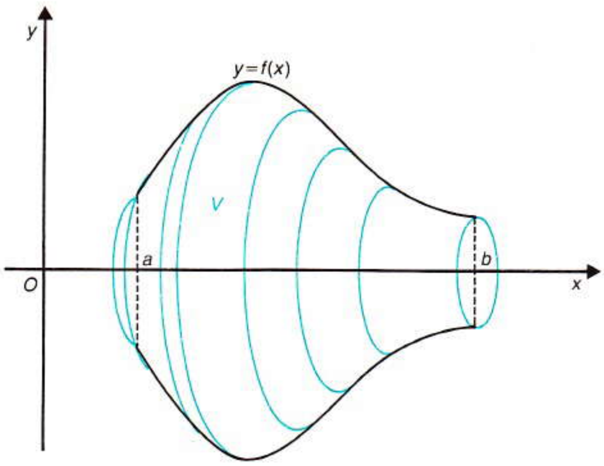
$f(x)\geq 0$ in $[a, b]$	$f(x)\leq 0$ in $[a, b]$	$f(x)\geq 0$ in $[a, c]$, $f(x)\leq 0$ in $[c, b]$
$T=\int_a^b f(x)dx$	$T=-\int_a^b f(x)dx$	$T=\int_a^c f(x)dx-\int_c^b f(x)dx$
		

Area T fra due curve

$$T=\int_a^b [f(x)-g(x)]dx$$



Volume V di un solido di rotazione attorno all'asse delle x



$$V=\pi\int_a^b [f(x)]^2dx$$

Calcolo combinatorio

Disposizioni di n elementi k a k

Modi di raggruppare n elementi diversi k a k; due disposizioni sono diverse se differiscono

- per gli elementi presenti,
- per l'ordine in cui compaiono gli elementi.

Il numero di queste disposizioni è

$$D_{n,k}=n(n-1)(n-2)\ \dots\ (n-k+1).$$

Permutazioni di n elementi

Disposizioni di n elementi diversi, in cui intervengono tutti gli elementi.
Il numero delle permutazioni è

$$P_n=n!=n(n-1)(n-2)\ \dots\ 1$$

Combinazioni di n elementi k a k

Modi di raggruppare n elementi diversi k a k; due combinazioni differiscono solo se vi compaiono elementi diversi.
Il numero di queste combinazioni è

$$C_{n,k}=\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Sviluppo del binomio di Newton

$$(a+b)^n=\binom{n}{n}a^n+\binom{n}{n-1}\cdot a^{n-1}\cdot b+\dots+\binom{n}{1}\cdot a\cdot b^{(n-1)}+\binom{n}{0}\cdot b^n$$

Proprietà di n fattoriale

$$n!=n(n-1)(n-2)\ \dots\ 1$$
$$(n+1)!=(n+1)n!$$
$$0!=1.$$

Proprietà dei coefficienti binomiali

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$$
$$\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$$
$$\binom{n}{0}=\binom{n}{n}=1$$

Numeri complessi

Unità immaginaria	i,	caratterizzata dalla proprietà $i^2=-1$.
Numero immaginario	ai	(con a numero reale).
Numero complesso	$a+ib$	(con a e b numeri reali).

Forma trigonometrica:

$r(\cos\alpha+i\ \mathrm{sen}\ \alpha)$ $\quad$ r modulo, $\quad$ α fase

$r=\sqrt{a^2+b^2}$, $\quad$ $\alpha=arctg\ \dfrac{b}{a}$

Prodotto:

$$r(\cos\alpha+i\ \mathrm{sen}\ \alpha)r'(\cos\beta+i\ \mathrm{sen}\ \beta)=rr'[\cos(\alpha+\beta)+i\ \mathrm{sen}\ (\alpha+\beta)]$$

Potenza:

$$[r(\cos\alpha+i\ \mathrm{sen}\ \alpha)]^n=r^n(\cos n\alpha+i\ \mathrm{sen}\ n\alpha)$$

Radici:

$$\sqrt[k]{\cos\alpha+i\ \mathrm{sen}\ \alpha}=\sqrt[k]{r}\left(\cos\frac{\alpha+2n\pi}{k}+i\cdot\mathrm{sen}\frac{\alpha+2n\pi}{k}\right)\quad \text{con } n=0,\ 1,\ \dots,\ k-1$$

Formula di Eulero:

$$\cos\alpha+i\ \mathrm{sen}\ \alpha=e^{i\alpha}$$

Conseguenze della formula di Eulero:

$$\cos\alpha=\frac{e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}}{2},\quad \mathrm{sen}\ \alpha=\frac{e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}}{2i}$$