Appendice 2
I numeri complessi

1. Dalle equazioni di secondo grado ai numeri immaginari

Consideriamo l'equazione di secondo grado:

$$x^2-6x+5=0.$$

Dal punto di vista geometrico (fig. 1), risolvere questa equazione significa trovare le intersezioni della parabola

$$y=x^2-6x+5$$

con l'asse delle ascisse, cioè con la retta d'equazione

$$y=0.$$

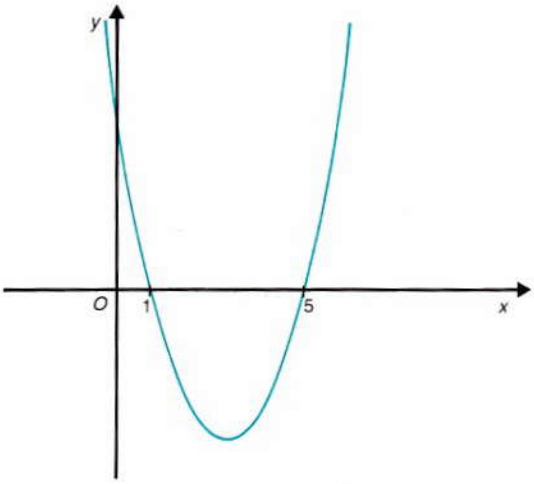

Fig. 1

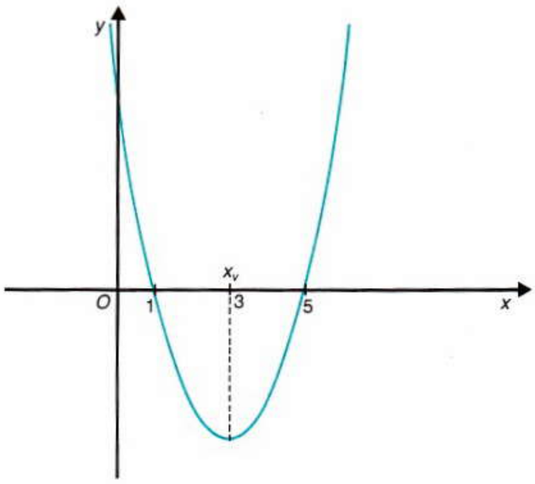

Fig. 2

Le soluzioni dell'equazione sono

$$x_1=1 \quad \text{e} \quad x_2=5$$

e quindi la parabola interseca l'asse delle ascisse nei punti (1, 0) e (5, 0).

Una volta calcolate queste intersezioni, è facile trovare il vertice della parabola. Infatti, per evidenti motivi di simmetria, l'ascissa x_v del vertice è il punto medio fra le due intersezioni (fig. 2), e quindi si ha:

$$x_v=\frac{1+5}{2}=3.$$

Ripetiamo ora lo stesso procedimento, per trovare il vertice della parabola:

$$y=x^2-10x+26.$$

Troviamo allora le soluzioni dell'equazione:

$$x^2-10x+26=0.$$

che sono:

$$x_1=5+\sqrt{-1} \qquad \text{e} \qquad x_2=5-\sqrt{-1}.$$

Le soluzioni non sono reali, perché compare la radice quadrata di un numero negativo; tuttavia, procedendo con la ricerca del vertice si ha:

$$x_v=\frac{5+\sqrt{-1}+5-\sqrt{-1}}{2}=\frac{10}{2}=5.$$

Le radici quadrate di numeri negativi scompaiono e si trova un risultato reale. Ma – ci si chiede – questo risultato è esatto?

Possiamo verificarlo subito, osservando che il vertice è per la parabola un punto di massimo o di minimo, in questo caso di minimo; annullando allora la derivata, si ha:

$$y'=2x-10=0 \quad \text{da cui} \quad x_v=5.$$

L'ascissa x_v del vertice vale proprio 5: si era ottenuto il risultato esatto anche eseguendo operazioni con le radici quadrate di numeri negativi.

Il procedimento seguito prima porta dunque a lavorare con le radici quadrate di numeri negativi come se fossero numeri. Poiché però non siamo capaci di dar loro un valore numerico, le radici quadrate di numeri negativi vengono dette **numeri immaginari**.

Dal punto di vista storico, la nascita dei numeri immaginari risale al 1500 ed è dovuta ad un gruppo di algebristi italiani.

2. L'unità immaginaria e i numeri complessi

Osserviamo subito che la radice quadrata di un numero negativo può sempre ridursi alla radice di -1; si può infatti scrivere:

$$\sqrt{-4}=\sqrt{4(-1)}=2\sqrt{-1}$$

e così

$$\sqrt{-2}=\sqrt{2(-1)}=\sqrt{2}\sqrt{-1}$$

Basta quindi indicare con un simbolo la radice di -1 e lavorare con questo; il simbolo usato è la lettera i, iniziale di immaginario, e dunque si scrive:

$$i=\sqrt{-1};$$

i viene anche chiamata **unità immaginaria**.
Si ha allora:

$i^2=(\sqrt{-1})^2=-1$ perché il quadrato della radice è il radicando;
$i^3=i\cdot i^2=i\cdot(-1)=-i;$
$i^4=i^2\cdot i^2=(-1)(-1)=1.$

Potremo poi scrivere:

$$\sqrt{-4}=2i,$$
$$\sqrt{-2}=i\sqrt{2}.$$

Le soluzioni dell'equazione vista al punto precedente possono allora essere scritte così:

$$x_1=5+i \quad \text{e} \quad x_2=5-i.$$

E così, le soluzioni dell'equazione

$$x^2-2x+26=0,$$

che sono date da

$$x=1\pm\sqrt{1-26}=1\pm\sqrt{-25}.$$

si scriveranno nella forma

$$x_1=1+5i \quad \text{e} \quad x_2=1-5i.$$

Siamo dunque condotti a lavorare con simboli del tipo:

$$a+bi$$

formati da una parte reale, a, e da una parte immaginaria, bi. A questi simboli si dà il nome di **numeri complessi**.

Dunque, **un numero complesso è individuato da una coppia di numeri reali**: la parte reale, a, e il coefficiente della parte immaginaria, b. Dato un numero complesso

$$a+ib,$$

il numero

$$a-ib$$

è detto **coniugato** di $a+ib$.

Coppie di numeri complessi coniugati si trovano, per esempio, risolvendo le equazioni di 2° grado che non hanno soluzioni reali; in questi casi infatti le soluzioni sono sempre due numeri complessi coniugati.

3. I numeri complessi come punti del piano

I numeri complessi $a+bi$ sono individuati da una coppia di numeri reali; appare perciò naturale rappresentarli sul piano, pensando a e b come ascissa e ordinata di un punto (fig. 3).

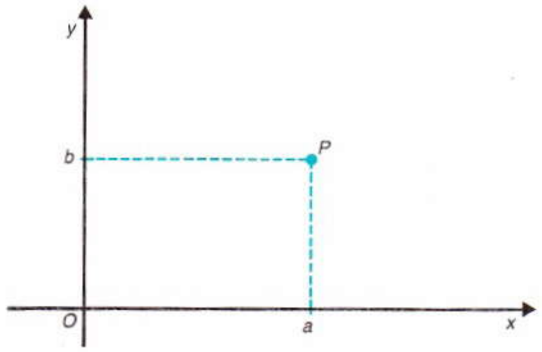

Fig. 3

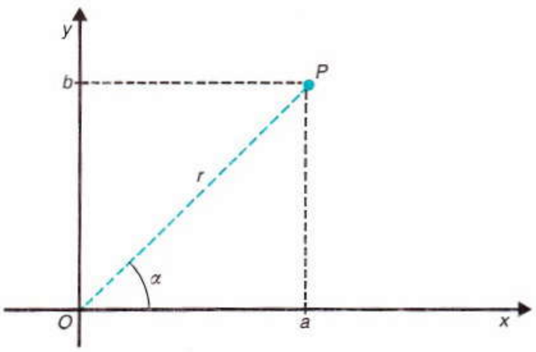

Fig. 4

In questa rappresentazione, dunque, il punto (a, b) rappresenta il numero complesso $a+bi$; allora il punto $(0, 1)$ rappresenta l'unità immaginaria i. Il piano in cui si rappresentano i numeri complessi è detto **piano complesso**, o anche **piano di Gauss**[1].

La rappresentazione cartesiana non è la sola che permette di individuare la posizione di un punto nel piano. Talvolta conviene utilizzare le **coordinate polari**: si tratta di un riferimento in cui un punto P (fig. 4) è individuato da due numeri, r e α:

r è la distanza OP;

α la misura con segno dell'angolo xOP.

Le coordinate cartesiane a, b di P sono legate alle coordinate polari r, α dalle relazioni:

$$\begin{aligned} a&=r \cos \alpha \\ b&=r \operatorname{sen} \alpha. \end{aligned} \tag{1}$$

[1] C.F. Gauss (1777-1855), grande matematico tedesco dai molteplici interessi, pubblicò, fra l'altro, opere fondamentali sulla risoluzione delle equazioni algebriche e sulla rappresentazione dei numeri complessi nel piano.

Per ricavare r ed α da a e b si procede così: elevando al quadrato e sommando membro a membro le (1) si ha:

$$a^2+b^2=r^2(\cos^2 \alpha+\operatorname{sen}^2 \alpha)$$

e quindi

$$r=\sqrt{a^2+b^2} \qquad (\text{dato che risulta } \cos^2 \alpha+\operatorname{sen}^2 \alpha=1).$$

Dividendo invece membro a membro le (1) si ha:

$$\frac{b}{a}=\frac{r \operatorname{sen} \alpha}{r \cos \alpha}$$

e quindi

$$\frac{b}{a}=\operatorname{tg} \alpha \qquad \left(\text{dato che risulta } \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha}=\operatorname{tg} \alpha\right).$$

Si ottiene in definitiva

$$r=\sqrt{a^2+b^2}, \qquad \alpha=\operatorname{arctg}\left(\frac{b}{a}\right).$$

Dunque un numero complesso $a+bi$ si può anche scrivere nella forma seguente:

$$r \cos \alpha+i\, r \operatorname{sen} \alpha=r(\cos \alpha+i \operatorname{sen} \alpha).$$

In questo caso si dice che il numero complesso è scritto in **forma goniometrica**; il numero r è detto **modulo** del numero complesso, α è detto **argomento** o **fase**.

È importante osservare che, specialmente nella tecnica, il punto P che rappresenta un numero complesso viene considerato come vertice del segmento orientato $\overrightarrow{OP}$. Questo segmento è detto **vettore**, parola che vuol dire "trasportatore": il vettore $\overrightarrow{OP}$ trasporta il punto O nel punto P.

Con questo linguaggio, si dice che un numero complesso rappresenta un vettore e, viceversa, un vettore rappresenta un numero complesso.

4. L'addizione con i numeri complessi

Per operare con i numeri complessi si può utilizzare sia la forma algebrica $a+bi$ sia quella goniometrica $r(\cos \alpha+i \operatorname{sen} \alpha)$. Si può usare il linguaggio della geometria analitica o, invece, quello dei vettori.

Cominciamo col dire che due numeri complessi

$$a+bi \qquad \text{e} \qquad c+di$$

sono eguali se risulta

$$a=c \qquad \text{e} \qquad b=d$$

cioè se sono fra loro eguali le parti reali e i coefficienti delle parti immaginarie. Geometricamente, ciò significa che due punti coincidono se hanno eguale ascissa ed eguale ordinata (fig. 5).

Due numeri dati, invece, in forma goniometrica:

$$r(\cos \alpha+i \operatorname{sen} \alpha) \qquad \text{e} \qquad r'(\cos \beta+i \operatorname{sen} \beta)$$

sono eguali se risulta:

$$r=r' \qquad \text{e} \qquad \alpha=\beta+2n\pi,$$

ossia

$$\alpha=\beta+n\, 360°, \qquad \text{dove } n \text{ è un numero intero,}$$

dato che le funzioni seno e coseno sono periodiche con periodo 2π.

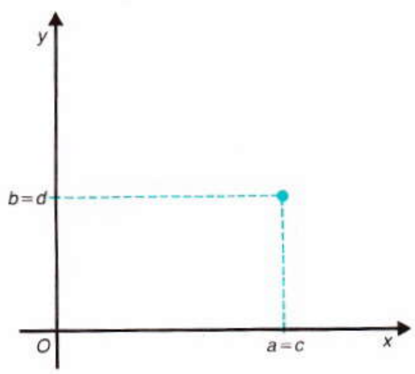

Fig. 5

Consideriamo ora l'addizione. Questa si esegue semplicemente con la regola dell'addizione dei polinomi:

$$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i.$$

La somma è dunque un numero complesso che ha come parte reale la somma delle parti reali degli addendi, e come coefficiente della parte immaginaria la somma dei coefficienti delle parti immaginarie degli addendi.

È interessante osservare (fig. 6) che se i punti $P(a, b)$ e $Q(c, d)$ rappresentano i due addendi, la somma corrisponde al punto R, che ha come ascissa la somma delle ascisse e come ordinata la somma delle ordinate.

Parlando in termini di vettori (fig. 7), si ha che la somma dei vettori $\overrightarrow{OP}$ e $\overrightarrow{OQ}$ è la diagonale del parallelogramma di lati OP e OQ; in altre parole, l'addizione tra numeri complessi si esegue, in termini vettoriali, con la regola del parallelogramma.

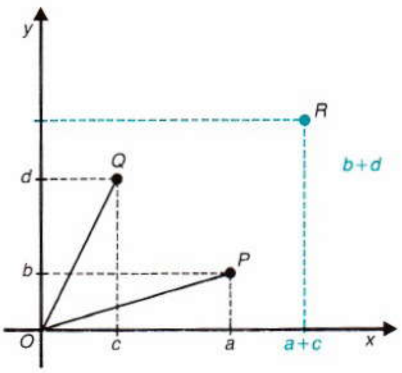

Fig. 6

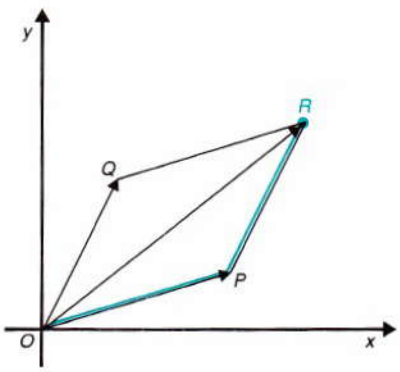

Fig. 7

5. La moltiplicazione con i numeri complessi

Applicando la regola di moltiplicazione di due polinomi risulta:

$$(a+bi)(c+di)=ac+adi+bci+bdi^2=(ac-bd)+(ad+bc)i.$$

Quindi il prodotto di due numeri complessi è ancora un numero complesso.

Se invece si scrivono i due numeri in forma goniometrica, il prodotto risulta:

$$\begin{aligned}
&r(\cos\alpha+i\ \mathrm{sen}\ \alpha)r'(\cos\beta+i\ \mathrm{sen}\ \beta)=\\
&=rr'(\cos\alpha\cos\beta+i\cos\alpha\ \mathrm{sen}\ \beta+i\ \mathrm{sen}\ \alpha\cos\beta+i^2\ \mathrm{sen}\ \alpha\ \mathrm{sen}\ \beta)=\\
&=rr'[(\cos\alpha\cos\beta-\mathrm{sen}\ \alpha\ \mathrm{sen}\ \beta)+i(\cos\alpha\ \mathrm{sen}\ \beta+\mathrm{sen}\ \alpha\cos\beta)]=\\
&=rr'[\cos(\alpha+\beta)+i\ \mathrm{sen}\ (\alpha+\beta)]
\end{aligned}$$

(nell'ultimo passaggio abbiamo utilizzato le formule di addizione del seno e del coseno).

Questa formula conduce ad un'interessante interpretazione geometrica del prodotto tra numeri complessi (fig. 8): si può ottenere il vettore prodotto con le seguenti due operazioni:

- ruotare il primo vettore di un angolo uguale alla fase del secondo;
- moltiplicare il modulo del primo vettore per il modulo del secondo.

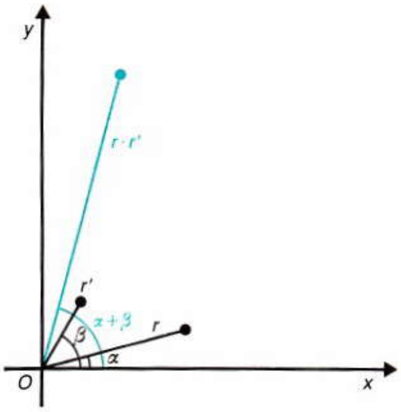

Fig. 8

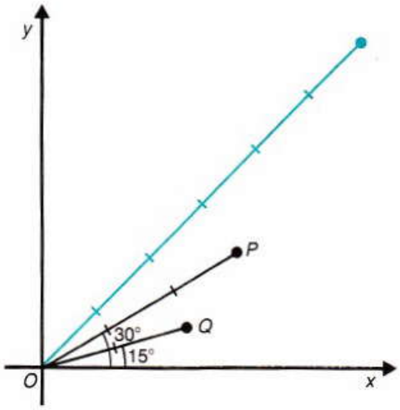

Fig. 9

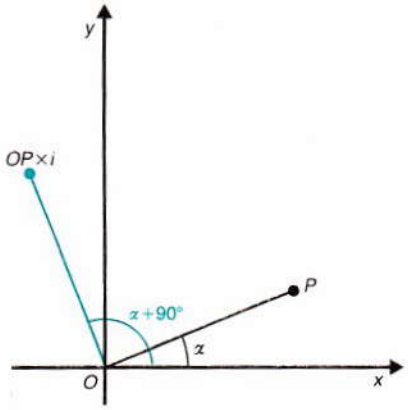

Fig. 10

Per esempio se, come in fig. 9, si ha

$$OP=3 \quad \text{e} \quad \alpha=30^\circ$$
$$OQ=2 \quad \text{e} \quad \beta=15^\circ$$

il vettore prodotto avrà modulo 6 e fase 45°.

Che cosa accade se il secondo fattore del prodotto è l'unità immaginaria i?

Sappiamo che il vettore corrispondente ad i ha modulo 1 e fase 90°; perciò **moltiplicare per *i* equivale a ruotare un vettore di 90°** (fig. 10). Per questo motivo si dice a volte che "il fattore i sfasa di 90°".

Queste osservazioni mostrano come la forma goniometrica e il linguaggio vettoriale permettano una visione più immediata ed intuitiva delle operazioni tra numeri complessi.

6. Potenze di numeri complessi. La formula di De Moivre

Elevare alla potenza k-esima un numero significa moltiplicarlo k volte per se stesso; applicando questa definizione ai numeri complessi, si ha:

$$[r(\cos \alpha+i \text{ sen } \alpha)]^k=r^k(\cos k\alpha+i \text{ sen } k\alpha).$$

È questa la **formula di De Moivre**[2].

Questa formula semplifica notevolmente i calcoli quando l'esponente k è molto elevato. Ecco un esempio: calcolare

$$(\sqrt{2}+i\sqrt{2})^{10}.$$

Scriviamo il numero complesso sotto forma trigonometrica; si ha:

$$r=\sqrt{2+2}=\sqrt{4}=2,$$
$$\alpha=\text{arctg}\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)=\text{arctg } 1=45^\circ.$$

e quindi

$$\sqrt{2}+i\sqrt{2}=2(\cos 45^\circ+i \text{ sen } 45^\circ).$$

Applicando ora la formula di De Moivre si ottiene:

$$[2(\cos 45^\circ+i \text{ sen } 45^\circ)]^{10}=2^{10}(\cos 450^\circ+i \text{ sen } 450^\circ)=2^{10}(1+i\cdot 0)=1024.$$

Da questo esempio appare chiaro che, per elevare a potenza un numero complesso, conviene scriverlo in forma goniometrica.

[1] A. De Moivre, matematico francese vissuto fra il 1667 e il 1754, è conosciuto soprattutto per aver stabilito i fondamenti della trigonometria nel campo complesso.

7. Radici dei numeri complessi: un esempio

Il problema inverso dell'elevamento alla potenza k-esima è l'estrazione della radice di indice k. Conviene, anche ora, valersi della scrittura del numero complesso in forma trigonometrica.
Iniziamo con un esempio: calcolare la radice cubica del numero

$$8(\cos 45°+i \text{ sen } 45°).$$

La radice cercata sarà un numero complesso e perciò potrà essere scritto nella forma:

$$\rho(\cos \varphi+i \text{ sen } \varphi).$$

Questo numero, elevato al cubo, dovrà essere uguale al numero precedente:

$$[\rho(\cos \varphi+\text{i sen } \varphi)]^3=8(\cos 45°+i \text{ sen } 45°).$$

Applicando al primo membro la formula di De Moivre si ha:

$$\rho^3(\cos 3\varphi+i \text{ sen } 3\varphi)=8(\cos 45°+i \text{ sen } 45°).$$

Ora sappiamo che due numeri complessi sono uguali solo se i moduli sono uguali fra loro e gli argomenti differiscono per multipli di 360°.
Dovrà dunque essere

$$\rho^3=8 \qquad \text{e} \qquad 3\varphi=45°+n\ 360°.$$

Si ottiene in definitiva:

$$\rho=2 \qquad \text{e} \qquad \varphi=15°+n\ 120°.$$

Questa formula sembra fornire infiniti numeri complessi, uno per ogni valore di n; in realtà non è così. Calcolando infatti i valori di φ corrispondenti a valori interi di n si trova:

n	φ
0	15°
1	135°
2	255°
3	15°+360°
4	135°+360°
6	255°+360°

Poiché il seno e il coseno hanno periodo 2π (ossia 360°), i numeri complessi che si ottengono per $n=3$, 4, ... sono gli stessi già ottenuti per $n=0$, $n=1$ ed $n=3$. In conclusione si trovano 3 radici:

$$2(\cos 15°+i \text{ sen } 15°), \qquad 2(\cos 135°+i \text{ sen } 135°), \qquad 2(\cos 255°+i \text{ sen } 255°).$$

Si scopre così che le radici cubiche di un numero complesso sono 3.
Questa è una novità; nel campo reale la radice cubica di un numero è una sola: per esempio la radice cubica di 8 è solo 2.

8. Radici dei numeri complessi: il caso generale

Vogliamo ora far vedere che la conclusione del paragrafo precedente è un caso particolare di una proprietà più generale. Determiniamo perciò le radici di ordine k del numero

$$r(\cos \alpha+i \text{ sen } \alpha).$$

Queste radici saranno dei numeri complessi che scriviamo nella forma

$$\rho(\cos\varphi+i \operatorname{sen}\varphi).$$

Dovrà dunque essere

$$[\rho(\cos\varphi+i \operatorname{sen}\varphi)]^k=r(\cos\alpha+i \operatorname{sen}\alpha),$$

dove r ed α sono dati, mentre ρ e φ sono incogniti.

Applicando la formula di De Moivre si ha:

$$\rho^k(\cos k\varphi+i \operatorname{sen} k\varphi)]=r(\cos\alpha+i \operatorname{sen}\alpha).$$

Ora, sappiamo che due numeri complessi sono eguali solo se i moduli sono fra loro eguali e gli argomenti differiscono per multipli di 2π. Dovrà dunque essere:

$$\rho^k=r \quad \text{e} \quad k\varphi=\alpha+2n\pi, \qquad \text{dove } n \text{ indica un intero.}$$

Si ottiene in definitiva:

$$\rho=\sqrt[k]{r} \quad \text{e} \quad \varphi=\frac{\alpha+2n\pi}{k}.$$

Ci possiamo limitare a considerare i valori di $n\leq k$, perché per $n>k$ i valori del seno e del coseno si ripetono. Dunque, le radici k-esime del numero

$$r(\cos\alpha+i \operatorname{sen}\alpha)$$

sono date da

$$\sqrt[k]{\boldsymbol{r}}\left(\mathbf{cos}\,\frac{\boldsymbol{\alpha+2n\pi}}{\boldsymbol{k}}+\boldsymbol{i}\cdot\mathbf{sen}\,\frac{\boldsymbol{\alpha+2n\pi}}{\boldsymbol{k}}\right), \qquad \text{dove} \quad n=0,\ 1,\ \ldots,\ k-1.$$

Si verifica così che, nel campo complesso, le radici k-esime di un numero sono k. I punti che rappresentano queste k radici sul piano complesso si trovano tutti sulla circonferenza di centro O e raggio $\sqrt[k]{r}$ (fig. 11). Gli argomenti si ottengono uno dall'altro aggiungendo multipli di $\frac{2\pi}{k}$; perciò questi punti sono vertici di un poligono regolare di k lati inscritto nella circonferenza di raggio $\sqrt[k]{r}$.

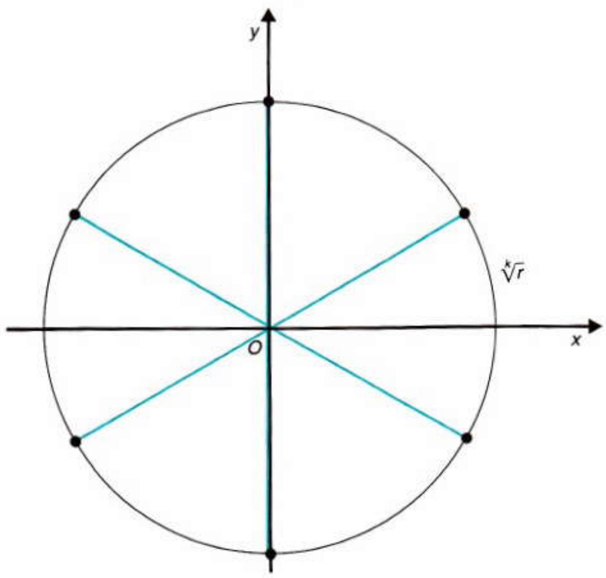

Fig. 11

Se, in particolare, si vogliono calcolare le radici k-esime dell'unità reale, cioè del numero complesso $1+0i$, basta porre nella formula generale $r=1$ e $\alpha=0$; si ha:

$$\sqrt[k]{1}=\cos\frac{2n\pi}{k}+i\ \text{sen}\,\frac{2n\pi}{k}, \qquad \text{dove} \quad n=0,\ 1,\ \ldots,\ k-1.$$

Se, ad esempio, $k=4$, si ottengono i 4 vertici del quadrato inscritto nel cerchio di raggio unitario (fig. 12).

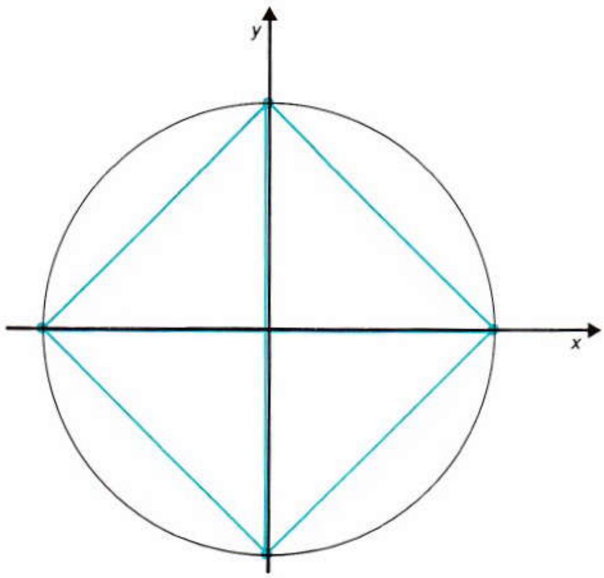

Fig. 12

9. La formula di Eulero

Scriviamo per $r=1$ la formula che dà le radici k-esime di un numero; si ha:

$$\sqrt[k]{\cos\alpha+i\ \text{sen}\,\alpha}=\cos\frac{\alpha+2n\pi}{k}+i\ \text{sen}\,\frac{\alpha+2n\pi}{k}$$

da cui:

$$\cos\alpha+\text{i sen}\,\alpha=\left(\cos\frac{\alpha+2n\pi}{k}+i\ \text{sen}\,\frac{\alpha+2n\pi}{k}\right)^k.$$

Consideriamo ora la prima radice, che si ottiene per $n=0$; si ha:

$$\cos\alpha+i\ \text{sen}\,\alpha=\left(\cos\frac{\alpha}{k}+i\ \text{sen}\,\frac{\alpha}{k}\right)^k.$$

Studiamo quindi il limite di questa espressione quando k tende all'infinito. Poiché il primo membro non dipende da k, si avrà:

$$\cos\alpha+i\ \text{sen}\,\alpha=\lim_{k\to+\infty}\left(\cos\frac{\alpha}{k}+i\ \text{sen}\,\frac{\alpha}{k}\right)^k.$$

Il calcolo di questo limite è difficile, perché k compare sia nella parentesi che all'esponente; conviene allora ragionare per approssimazione, osservando che, quando k tende all'infinito, $\frac{\alpha}{k}$ tende a zero e quindi:

$\cos\frac{\alpha}{k}$ si può approssimare con 1,

$\text{sen}\,\frac{\alpha}{k}$ si può approssimare con l'arco $\frac{\alpha}{k}$.

Con queste osservazioni si può scrivere:

$$\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha = \lim_{k \to +\infty} \left(1 + i \cdot \frac{\alpha}{k}\right)^k.$$

Ma il limite a secondo membro[1] vale $e^{i\alpha}$, e quindi si ottiene:

$$\mathbf{\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha = e^{i\alpha}.}$$

È questa la **formula di Eulero**.
Da questa formula si possono trarre due conseguenze:

1) Ogni numero complesso può essere riscritto nella forma:

$$r(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha) = re^{i\alpha}.$$

Questa scrittura è usata comunemente nelle applicazioni, perché è compatta e mette bene in luce il modulo e la fase del numero complesso.

2) Scrivendo la formula di Eulero per $\alpha = \pi$ si trova:

$$e^{i\pi} = -1.$$

Risultano così legati, in modo del tutto inaspettato, tre numeri fondamentali nella matematica: la costante di Nepero e, il rapporto fra circonferenza e diametro π, l'unità immaginaria i.

Questo legame è visibile geometricamente sul piano complesso (fig. 13): il fattore $e^{i\alpha}$ equivale ad una rotazione di α; se $\alpha = \pi$, la rotazione porta sul semiasse reale negativo, e quindi si ottiene il numero reale -1.

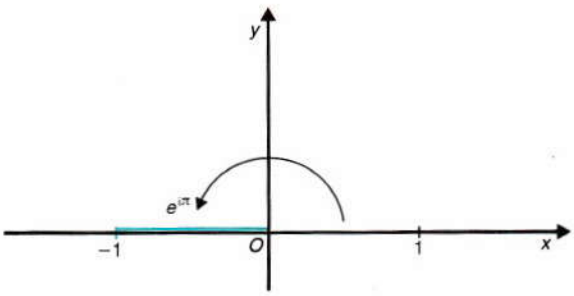

Fig. 13

10. Applicazione della formula di Eulero alle funzioni trigonometriche

Consideriamo ancora la formula di Eulero:

$$\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha = e^{i\alpha} \tag{1}$$

e riscriviamola, sostituendo $-\alpha$ ad α; si ha:

$$\cos(-\alpha) + i \operatorname{sen}(-\alpha) = e^{-i\alpha}.$$

Ricordando che risulta

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha \qquad \text{e} \qquad \operatorname{sen}(-\alpha) = -\operatorname{sen} \alpha,$$

si ha:

$$\cos \alpha - i \operatorname{sen} \alpha = e^{-i\alpha}. \tag{2}$$

Sommando le (1) e (2) si trova:

$$\cos \alpha = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2}.$$

Sottraendo invece la (2) dalla (1), si trova:

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i}.$$

Si scopre così che il seno e il coseno di un angolo possono essere espressi mediante potenze del numero e ad esponente complesso.

[1] Vedi Complemento A del cap. 2.

Esercizi

Numeri immaginari e numeri complessi

Esaminare i numeri indicati negli esercizi dall'1 al 4 ed indicare quali sono reali, quali sono immaginari e quali sono complessi:

1. $\sqrt{4}, \quad -\sqrt{4}, \quad \sqrt{-4}, \quad -\sqrt{-4}, \quad 1+\sqrt{4}, \quad 1-\sqrt{-4}$

2. $\sqrt{\frac{9}{4}}, \quad -\sqrt{\frac{-9}{4}}, \quad \frac{1}{2}+\sqrt{\frac{9}{4}}, \quad \frac{1}{2}-\sqrt{\frac{-9}{4}}$

3. $\sqrt{3}, \quad \sqrt{-3}, \quad -\sqrt{-3}, \quad \frac{3-\sqrt{-3}}{3}, \quad \frac{3+\sqrt{3}}{3}$

4. $\sqrt[3]{8}, \quad \sqrt[3]{-8}, \quad -\sqrt[3]{8}, \quad \sqrt[4]{16}, \quad -\sqrt[4]{16}, \quad \sqrt[4]{-16}$

5. Rispondere ai seguenti quesiti:

a) si può dire che un numero reale è un particolare numero complesso?
b) si può dire che un numero complesso è un particolare numero reale?
c) si può dire che un numero immaginario è un particolare numero complesso?
d) si può dire che un numero complesso è un particolare numero immaginario?

6. Determinare le soluzioni delle seguenti equazioni; indicare quali sono le soluzioni reali e quali sono quelle complesse:

$$x^2+1=0, \quad x^2-1=0, \quad x^4-1=0, \quad x^4+1=0.$$

(Tenere presente che risulta $x^4-1=(x^2-1^2)(x^2+1^2)$, $x^4+1=(x^2-i^2)(x^2+i^2)$.*)*

7. Determinare le soluzioni delle seguenti equazioni; indicare quali sono le soluzioni reali e quali sono quelle complesse:

$$x^2-6x+13=0, \quad x^2+7x+10=0, \quad x^4+7x^2+10=0$$

8. Determinare le soluzioni delle seguenti equazioni; indicare quali sono le soluzioni reali e quali sono quelle complesse:

$$x^2-2x-3=0, \quad x^4-2x^2-3=0, \quad x^4+4x^2+4=0$$

I numeri complessi come punti del piano

Esaminare i numeri proposti negli esercizi dal 9 al 13 e rappresentarli nei tre modi seguenti:

a) come punti del piano cartesiano,
b) in forma goniometrica,
c) come vettori.

9. $4+3i, \quad 4-3i, \quad 4, \quad 3i$

10. $\sqrt{3}+i, \quad \sqrt{3}-i, \quad 1+i\sqrt{3}, \quad 1-i\sqrt{3}$

11. $1+i, \quad 1-i, \quad i-1, \quad \sqrt{2}+i\sqrt{2}, \quad \sqrt{2}-i\sqrt{2}, \quad -\sqrt{2}+i\sqrt{2}$

12. $0, \quad 1, \quad -1, \quad 3, \quad -3$

13. $0, \quad i, \quad -i, \quad 2i, \quad -2i$

Esaminare i numeri assegnati negli esercizi dal 14 al 16 e risolvere i seguenti quesiti:

a) rappresentare i numeri sul piano di Gauss,
b) scrivere i numeri in forma algebrica.

14. $\cos 45°+i \text{ sen } 45°$, $\cos 45°-i \text{ sen } 45°$, $4(\cos 45°+i \text{ sen } 45°)$, $-4(\cos 45°+i \text{ sen } 45°)$

15. $\cos 30°+i \text{ sen } 45°$, $\cos 30°-i \text{ sen } 30°$, $2(\cos 30°+i \text{ sen } 30°)$, $-2(\cos 30°-i \text{ sen } 30°)$

16. $\cos 90°+i \text{ sen } 90°$, $\cos 90°-i \text{ sen } 90°$, $\cos 180°+i \text{ sen } 180°$, $\cos 0°+i \text{ sen } 0°$.

17. Rispondere ai seguenti quesiti:

a) si possono rappresentare sul piano di Gauss i numeri reali?
b) un numero reale si può esprimere in forma goniometrica?
c) un numero reale si può rappresentare come un vettore?

18. Rispondere ai seguenti quesiti:

a) si possono rappresentare sul piano di Gauss i numeri immaginari?
b) un numero immaginario si può esprimere in forma goniometrica?
c) un numero immaginario si può rappresentare come un vettore?

19. Descrivere le caratteristiche che individuano un numero reale, fra i numeri complessi espressi nelle forme seguenti:

$$a+ib, \quad r(\cos \alpha+i \text{ sen } \alpha), \quad P(a, b), \quad P(r, \alpha), \quad \overrightarrow{OP}.$$

20. Descrivere le caratteristiche che individuano un numero immaginario, fra i numeri complessi espressi nelle forme seguenti:

$$a+ib, \quad r(\cos \alpha+i \text{ sen } \alpha), \quad P(a, b), \quad P(r, \alpha), \quad \overrightarrow{OP}.$$

L'addizione di numeri complessi

Eseguire le operazioni indicate negli esercizi dal 21 al 24; interpretare il procedimento e i risultati in termini vettoriali.

21. $i+i$, $i+2i$, $2i-3i$, $i+(-i)$, $1-3$

22. $(2+3i)+(2-3i)$, $(1+5i)+(-1+5i)$, $(2+6i)+(-2-6i)$

23. $(1+2i)-(1-2i)$, $(3+2i)-(4-7i)$, $(1-i)-(-1-i)$

24. $(4+3i)+(4-3i)$, $(-4+5i)+(-4-5i)$, $(\sqrt{3}+i)+(\sqrt{3}-i)$

25. Verificare che la somma di due numeri complessi coniugati dà sempre un numero reale ed interpretare in termini vettoriali questo risultato.

26. Dato un numero complesso $a+ib$, indicare il suo opposto; interpretare il risultato in termini vettoriali.

(L'opposto cercato deve essere un numero $c+id$, tale che risulti $(a+ib)+(c+id)=0$; ...)

La moltiplicazione di numeri complessi

Eseguire le operazioni indicate negli esercizi dal 27 al 32; interpretare il procedimento ed i risultati in termini vettoriali.

27. $i \cdot i$, $2i \cdot 3i$, $5i \cdot 0$, $\sqrt{i} \cdot \sqrt{i}$

28. $i \cdot \sqrt{2}$, $i \cdot \sqrt{-2}$, $\sqrt{-2} \cdot \sqrt{-2}$, $\sqrt{2} \cdot \sqrt{-2}$

29. $i(1+i)$, $-2i(4-2i)$, $(1-2i)4$

30. $(2+i)(1+i)$, $(4+2i)(4-2i)$, $(1-2i)(-1-2i)$

31. $(\sqrt{3}+i)(1-\sqrt{3}i)$, $(\sqrt{2}+i\sqrt{2})(4-3i)$, $(8+6i)(1+i)$

32. $(4+3i)(4-3i)$, $(-3+4i)(-3-4i)$, $(1+i)(1-i)$

33. Verificare che il prodotto di due numeri complessi coniugati dà sempre un numero reale ed interpretare in termini vettorali questo risultato.

34. Valendosi dei risultati ottenuti negli esercizi 25 e 33, dimostrare la seguente proprietà: se un'equazione di 2° grado con coefficienti reali ha come soluzioni due numeri complessi x_1 e x_2, questi numeri debbono essere complessi coniugati.

(Tenere presente che, per le soluzioni x_1 e x_2 di un'equazione del tipo $ax^2+bx+c=0$, risulta sempre:

$$x_1+x_2=\frac{-b}{a}, \qquad x_1 \cdot x_2=\frac{c}{a}.)$$

35. Dato un numero complesso, scritto in forma goniometrica, indicare il suo reciproco.

(Se il numero dato è $r(\cos\alpha+i \operatorname{sen}\alpha)$, il reciproco deve essere un numero $r'(\cos\beta+i\operatorname{sen}\beta)$, tale che risulti

$$r(\cos\alpha+i\operatorname{sen}\alpha)\; r'(\cos\beta+i\operatorname{sen}\beta)=1\ldots$$

Si ottiene come reciproco il numero $\frac{1}{r}[\cos(-\alpha)+i\operatorname{sen}(-\alpha)]$).

36. Dato un numero complesso, scritto in forma algebrica, indicare il suo reciproco.

(Se il numero dato è $a+ib$, il reciproco cercato deve essere un numero $c+id$, tale che risulti

$$(a+ib)(c+id)=1, \qquad \text{deve quindi essere} \qquad \begin{array}{l} ac-bd=1 \\ bc+ad=0. \end{array}$$

Si ottiene così un sistema nelle incognite c e d. Conviene valersi del metodo di riduzione, fino ad ottenere

$$c=\frac{a}{a^2+b^2}, \qquad d=\frac{-b}{a^2+b^2}).$$

37. Calcolare i reciproci dei seguenti numeri:

i, $1+i$, $1-i$, $4+3i$, $4-3i$

$\cos 60°+i\operatorname{sen} 60°$, $2(\cos 180°+i\operatorname{sen} 180°)$, $4(\cos 90°-i\operatorname{sen} 90°)$

Eseguire le divisioni fra numeri complessi indicate negli esercizi dal 38 al 40, tenendo presente che la divisione si può considerare come moltiplicazione del primo numero per il reciproco del secondo.

38. $\frac{2+i}{i}$, $\frac{i}{2+i}$, $\frac{4}{2+i}$, $\frac{4+6i}{3}$

39. $\frac{2+i}{1+i}$, $\frac{1+2i}{1-i}$, $\frac{3-2i}{2-2i}$, $\frac{\sqrt{2}+2i}{1-i\sqrt{2}}$

40. $\frac{2(\cos 60°+i\operatorname{sen} 60°)}{\cos 30°+i\operatorname{sen} 30°}$, $\frac{4(\cos 180°-i\operatorname{sen} 180°)}{2(\cos 60°+i\operatorname{sen} 60°)}$, $\frac{9(\cos 90°+i\operatorname{sen} 90°)}{2(\cos 180°+i\operatorname{sen} 180°)}$

41. $\frac{6(\cos 120°-i\operatorname{sen} 120°)}{2(\cos 60°+i\operatorname{sen} 60°)}$, $\frac{8(\cos 150°-i\operatorname{sen} 150°)}{2(\cos 30°-i\operatorname{sen} 30°)}$, $\frac{2(\cos 135°+i\operatorname{sen} 135°)}{(\cos 90°-i\operatorname{sen} 90°)}$

La formula di De Moivre

Calcolare le potenze di numeri complessi assegnate negli esercizi dal 42 al 48.

42. $(\cos 45°+i\operatorname{sen} 45°)^2$, $(\cos 45°-i\operatorname{sen} 45°)^2$

43. $(\cos 90°+i\operatorname{sen} 90°)^2$, $(\cos 90°-i\operatorname{sen} 90°)^2$

44. $(\cos 30°+i\operatorname{sen} 30°)^3$, $(\cos 30°-i\operatorname{sen} 30°)^4$

45. $(\cos 90°+i \text{ sen } 90°)^3$, $(\cos 90°-i \text{ sen } 90°)^4$

46. $[4(\cos 45°-i \text{ sen } 45°)]^2$, $[2(\cos 30°+i \text{ sen } 30°)]^2$

47. $[\sqrt{3}(\cos 90°+i \text{ sen } 90°)]^2$, $[\sqrt{3}(\cos 180°+i \text{ sen } 180°)]^2$

48. $[4(\cos 15°+i \text{ sen } 15°)]^4$, $[\sqrt{2}(\cos 15°-i \text{ sen } 15°)]^{12}$

Negli esercizi dal 49 al 52 sono indicate delle potenze di numeri complessi espressi in forma algebrica. Le potenze indicate si possono dunque calcolare in due modi:

a) scrivendo in forma trigonometrica e valendosi della regola di De Moivre,
b) lasciando il numero scritto in forma algebrica e valendosi delle regole dell'algebra, in particolare della potenza del binomio (v. Appendice 1).

Calcolare in due modi le potenze indicate negli esercizi dal 49 al 51, confrontando i risultati ottenuti.

49. i^2, $(1+i)^2$, $(1+2i)^2$

50. i^{12}, $(3+4i)^6$, $(6-8i)^{10}$

51. $(\sqrt{3}+3i)^{12}$, $(\sqrt{3}-3i)^{18}$, $(1-i)^8$

52. $(\sqrt[4]{2}+i)^8$, $(\sqrt[4]{5}-i)^{16}$, $(\pi+2i)^5$

Le radici dei numeri complessi

Calcolare le radici dei numeri complessi assegnati negli esercizi dal 53 al 60 e rappresentare i risultati ottenuti sul piano di Gauss.

53. $\sqrt[4]{1}$, $\sqrt[6]{1}$, $\sqrt[8]{1}$

54. $\sqrt[3]{1}$, $\sqrt[5]{1}$, $\sqrt[7]{1}$

55. $\sqrt[3]{8}$, $\sqrt[5]{243}$, $\sqrt[6]{64}$

56. $\sqrt{i}$, $\sqrt[4]{i}$, $\sqrt[6]{i}$

57. $\sqrt[3]{i}$, $\sqrt[5]{i}$, $\sqrt[7]{i}$

58. $\sqrt[3]{8i}$, $\sqrt[5]{243i}$, $\sqrt[8]{256i}$

59. $\sqrt{1+i}$, $\sqrt{1-i}$, $\sqrt{-1-i}$

60. $\sqrt[4]{1-i}$, $\sqrt[3]{1+\sqrt{3}i}$, $\sqrt[8]{256-256i}$

La formula di Eulero

Riscrivere con la formula di Eulero i numeri complessi assegnati negli esercizi dal 61 al 64.

61. $\cos 45°+i \text{ sen } 45°$, $\cos 30°+i \text{ sen } 30°$, $\cos 90°+i \text{ sen } 90°$

62. $4(\cos 45°+i \text{ sen } 45°)$, $16(\cos 30°+i \text{ sen } 30°)$, $2(\cos 90°+i \text{ sen } 90°)$

63. 2, $3i$, $1+i$, $2-2i$

64. $2-4i$, $6+3i$, $\sqrt{2}-\sqrt{2}i$

Esprimere in forma algebrica i numeri complessi indicati negli esercizi 65 e 66.

65. $e^{i45°}$, $e^{i30°}$, $e^{i60°}$

66. $2e^{i45°}$, $4e^{i30°}$, $3e^{i60°}$

Esprimere mediante potenze di e ad esponente complesso i numeri reali indicati negli esercizi dal 67 al 70.

67. $\text{sen } 30°$, $\text{sen } 45°$, $\text{sen } 60°$

68. $\cos 30°$, $\cos 45°$, $\cos 60°$

69. $(\text{sen } 30°)^2$, $(\cos 45°)^2$, $(\text{sen } 60°)^2$

70. $(\text{sen } 30°)^3$, $(\cos 45°)^4$, $(\cos 60°)^3$