

Esercizi riassuntivi

1. Studiare il grafico della funzione $y=3x^4-6x^3$.
Determinare l'equazione della tangente t alla curva nel punto di flesso F di ascissa positiva.
Calcolare l'area T della regione finita di piano delimitata dalla curva e dalla retta t .
 $(F(1, -3), t: y = -6x + 3, T = \frac{24}{5})$.
2. Studiare il grafico della funzione $y = \frac{1}{6}x^4 - x^2 + 1$.
Scrivere le equazioni delle rette t e t' tangenti alla curva nei due punti di flesso.
Determinare l'area T della zona di piano delimitata dalla curva e dalle sue tangenti inflessionali.
 $(\text{Flessi } F(-1, \frac{1}{6}), F'(1, \frac{1}{6}), t: y = \frac{4}{3}x + \frac{3}{2}, t': y = -\frac{4}{3}x + \frac{3}{2}, T = \frac{4}{15})$.
3. Studiare il grafico della curva d'equazione $y=2x^3-9x^2+12x-5$.
Individuare la traslazione descritta dalle equazioni
$$\begin{aligned}x &= X + a \\ y &= Y + b\end{aligned}$$
che porta l'origine del sistema di riferimento nel punto di minimo relativo della curva e scrivere l'equazione della curva nel nuovo sistema di riferimento.
Calcolare le aree delle due regioni di piano delimitate dalla curva e dagli assi delle ascisse dei due riferimenti.
 $(\text{L'equazione della curva è } Y=2X^3+3X^2; \text{ le aree valgono } \frac{27}{32})$.
4. Determinare i coefficienti dell'equazione $y=ax^3+bx^2+cx+d$ in modo che la curva da essa rappresentata abbia un punto di minimo relativo in $A(-1, 0)$ e un flesso in $B(1, 1)$.
Studiare il grafico della funzione ottenuta.
Calcolare l'area T della regione finita di piano delimitata dalla curva, dalla tangente inflessionale e dal semiasse positivo delle x .
 $(\text{La curva è } y = -\frac{1}{16}x^3 + \frac{3}{16}x^2 + \frac{9}{16}x + \frac{5}{16}, T \approx 6,6)$.
5. Determinare i coefficienti dell'equazione $y=ax^3+bx^2+cx+d$ in modo che la curva da essa rappresentata abbia un punto di minimo relativo in $A(4, 0)$ e sia tangente in O alla retta d'equazione $y=16x$.
Studiare il grafico della funzione ottenuta, determinando in particolare il punto B di massimo relativo ed il punto F di flesso.
Scrivere l'equazione della parabola che ha l'asse di simmetria parallelo all'asse delle y , vertice in A e passa per B .
Calcolare l'area T della regione finita di piano delimitata dalle due curve.
 $(\text{La curva è } y=x^3-8x^2+16x, \text{ la parabola è } y=\frac{4}{3}x^2-\frac{32}{3}x+\frac{64}{3}, T \approx 4,21)$.
6. Determinare i coefficienti dell'equazione $y=ax^3+bx^2+cx+d$ in modo che la curva da essa rappresentata passi per $O(0, 0)$ ed abbia in $A(1, 1)$ un flesso con tangente orizzontale.
Studiare il grafico della funzione ottenuta.
Calcolare l'area T della regione di piano delimitata dal segmento OA e dalla curva.
Indicare la retta r parallela all'asse delle y che, nella stessa regione piana, determina la corda di lunghezza massima.
 $(\text{La funzione è } y=x^3-3x^2+3x, T = \frac{1}{4}r: x=1-\frac{\sqrt{3}}{3})$.

7. Determinare i coefficienti dell'equazione $y=ax^3+bx^2+cx+d$ in modo che la curva da essa rappresentata abbia un punto di estremo relativo $A(1, 0)$, incontri l'asse delle x nel punto $B(-2, 0)$ e delimiti con il segmento AB una regione di area $T=\frac{27}{4}$.
Studiare il grafico della funzione ottenuta.
(La curva ha equazione $y=x^3-3x+2$).
8. Determinare i coefficienti dell'equazione $y=ax^3+bx^2+cx$ in modo che la curva da essa rappresentata soddisfi le seguenti condizioni:
– passa per il punto $A(2, 0)$,
– ha come tangente in $O(0, 0)$ la retta t d'equazione $y=8x$,
– l'arco AB delimita con l'asse delle x una regione di area $T=4$.
Studiare il grafico della funzione ottenuta.
(La funzione è $y=x^3-6x^2+8x$).
9. Determinare i coefficienti dell'equazione $y=ax^3+bx^2+cx+d$ in modo che la curva da essa rappresentata abbia un punto di massimo relativo in $M(1, 2)$, passi per O e delimiti con la retta d'equazione $x=2$ e con gli assi coordinati una regione di area $T=\frac{10}{3}$.
Studiare il grafico della funzione ottenuta, determinando in particolare il punto N di minimo relativo ed il punto F di flesso.
Scrivere l'equazione della parabola che ha l'asse di simmetria parallelo all'asse delle y , vertice in N e passa per M .
Calcolare l'area T della regione finita di piano delimitata dalle due curve.
(La curva è $y=x^3-4x^2+5x$, la parabola è $y=\frac{3}{9}x^2-\frac{10}{9}x+\frac{25}{9}$, $T\approx 0,016$).
10. Studiare il grafico della funzione $y=x^4-kx^2$, distinguendo i vari casi, secondo i valori assunti dal parametro reale k ; in particolare calcolare il minimo della funzione per ogni valore di k . Disegnare i grafici corrispondenti ai valori $k=-1$ e $k=1$. Il secondo grafico delimita, insieme alla retta d'equazione $y=0$, due regioni finite di piano, contenute rispettivamente nel terzo e quarto quadrante; dimostrare che le due regioni sono simmetriche rispetto all'asse delle y e calcolare l'area T di una di esse.
(Per $k>0$ due minimi di ascisse $x=\pm\frac{\sqrt{k}}{2}$; per $k<0$ un minimo d'ascissa $x=0$. $T=\frac{2}{15}$).
11. Determinare i coefficienti dell'equazione $y=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ in modo che la curva da essa rappresentata passi per $O(0, 0)$, $A(-1, 3)$, $B(2, 3)$, $C(3, 3)$ ed abbia in B la tangente parallela all'asse delle x . Studiare il grafico della funzione ottenuta.
Calcolare l'area T della regione finita di piano delimitata dalla curva e dalla bisettrice del 1° e 3° quadrante.
(La curva ha equazione $y=\frac{x^4}{4}-\frac{3}{2}x^3+\frac{9}{4}x^2+x$; $T=\frac{81}{40}$).
12. Determinare i coefficienti dell'equazione $y=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ in modo che la curva da essa rappresentata abbia un estremo relativo nel punto d'ascissa 1 e sia tangente alla retta t d'equazione $y=2x$ nell'origine O e nel punto d'ascissa $\frac{3}{2}$. Studiare il grafico della funzione ottenuta.
Calcolare l'area T della regione finita di piano delimitata dalla curva e dalla retta t .
(La curva ha equazione $y=4x^4-12x^3+9x^2+2x$; $T=\frac{81}{80}$).
13. Determinare i coefficienti dell'equazione $y=ax^4+bx^2+c$ in modo che la curva da essa rappresentata passi per il punto $A(0, 4)$ ed abbia un punto di minimo relativo in $N\left(\frac{\sqrt{5}}{2}, -\frac{9}{4}\right)$.
Studiare il grafico della funzione ottenuta, indicando con B, C, D, E i punti in cui la curva interseca l'asse delle x (ordinati secondo le ascisse crescenti).
Scrivere l'equazione della parabola che ha l'asse di simmetria parallelo all'asse delle y e passa per A, C, E .
Calcolare l'area T della regione finita di piano delimitata dalle due curve.
(La curva è $y=x^4-5x^2+4$, la parabola è $y=-2x^2+2x+4$, $T=\frac{28}{5}$).

14. Determinare i coefficienti dell'equazione $y=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ in modo che la curva da essa rappresentata sia simmetrica rispetto all'asse delle y e sia tangente all'asse delle x nel punto $A(1, 0)$.
 Studiare il grafico della funzione ottenuta, indicando con B il punto di intersezione con l'asse delle y e con A' il simmetrico di A rispetto all'asse delle y .
 Scrivere le equazioni delle tangenti alla curva nei punti di flesso e calcolare l'area T della regione finita di piano delimitata dalla curva e dalle due tangenti inflessionali.
 Nella regione di piano delimitata dall'asse delle x e dall'arco $A'BA$ di curva inscrivere il rettangolo che ha la base sull'asse delle x e l'area massima.
(La curva è $y=x^4-2x^2+1$, $T \approx 0,1$; il rettangolo ha vertici i punti $P\left(\frac{\sqrt{5}}{5}, 0\right)$, $Q\left(\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{16}{25}\right)$ e i simmetrici di questi punti rispetto all'asse delle y).
15. Studiare il grafico della funzione $y=x^2+\frac{16}{x^2}$ indicando con A il punto di minimo relativo di ascissa positiva e con B il punto che ha ascissa 1.
 Scrivere le equazioni delle due parabole che hanno l'asse di simmetria parallelo all'asse delle y , passano per A e per B e delimitano con l'arco AB di curva una regione piana di area $T=\frac{7}{3}$.
(Le parabole sono $y=-x^2-6x+24$ e $y=27x^2-90x+80$).
16. Studiare il grafico della funzione $y=\frac{1}{x^2}-1$, indicando con A e B i punti di intersezione con l'asse delle x (ordinati secondo le ascisse crescenti).
 Scrivere le equazioni delle rette t e t' tangenti alla curva in A e in B ; determinare i punti C e D in cui t e t' intersecano la curva.
 Calcolare l'area T del quadrilatero delimitato dall'asse delle x , dal segmento CD e dai due archi BC e AD di curva.
(Tenere presente la simmetria della curva rispetto all'asse delle y ; $B(1, 0)$, $t': y=-2x+2$, $D\left(-\frac{1}{2}, 3\right)$; $T=4$).
17. Studiare il grafico della funzione $y=\frac{4}{x^2}-x$, indicando con A il punto di minimo relativo.
 Determinare il punto B in cui la tangente in A interseca ulteriormente la curva e il punto C in cui la curva incontra l'asse delle ascisse.
 Calcolare l'area T della regione finita di piano delimitata dall'asse delle x , dai segmenti OA ed AB e dall'arco CB di curva.
($A(-2, 3)$, $B(1, 3)$, $T=\frac{21}{2}-3\sqrt[3]{2}$).
18. Studiare il grafico della funzione $y=\frac{1}{x^2}+x^2$. Scrivere le equazioni delle seguenti parabole:
 - p_1 , che ha vertice $V(0, 1)$ ed è tangente alla curva nei punti T e T' ,
 - p_2 , simmetrica di p_1 , rispetto alla retta TT' .
 Calcolare le aree delle tre regioni finite di piano delimitate dalle due parabole e dalla curva data.
(Le parabole sono $y=-\frac{3}{4}x^2+4$, $y=\frac{3}{4}x^2+1$...)
19. Studiare il grafico della funzione $y=\frac{4}{x^2}+x$, indicando con A il punto di minimo relativo.
 Determinare il punto B in cui la tangente in A interseca ulteriormente la curva.
 Scrivere l'equazione della parabola che passa per A ed è tangente alla curva in B .
 Calcolare l'area T della regione finita di piano delimitata dalle due curve.
($A(2, 3)$, $B(-1, 3)$, la parabola è $y=-3x^2+3x+9$, $T \approx 3,85$).
20. Studiare il grafico della funzione $y=\frac{x-1}{x^3}$, indicando con A il punto di intersezione con l'asse delle x .
 Considerare sulla curva un punto P d'ascissa positiva, indicando con H la sua proiezione sull'asse delle x ; determinare la posizione di P per cui è massima l'area del triangolo AHP .
 Determinare l'area T della zona di piano delimitata dalla curva e dalla retta AP .
($P\left(3, \frac{2}{27}\right)$, $T=\frac{4}{27}$).

21. Studiare il grafico della funzione $y = \frac{2x-1}{2x^3}$.

Scrivere l'equazione della retta t , tangente alla curva nel punto F di flesso e determinare il punto A , in cui t incontra ulteriormente la curva.

Determinare i coefficienti dell'equazione $y = ax^2 + bx$ in modo che la parabola da essa rappresentata passi per A ed F .

Calcolare l'area T della regione finita di piano delimitata dalle due curve.

$$(F(1, \frac{1}{2}), t: y = -\frac{1}{2}x + 1, A(-1, \frac{3}{2}); \text{ la parabola è } y = x^2 - \frac{1}{2}x, T = \frac{7}{48}).$$

22. Studiare il grafico delle seguenti funzioni:

$$y = \frac{2}{x^2}, \quad y = \frac{x^3 - 3x^2 + 4}{x^2}.$$

Verificare che i loro punti comuni sono allineati su una retta r di cui si chiede l'equazione.

Calcolare l'area T della regione finita di piano delimitata dalle due curve.

(La retta r ha equazione $y = -x + 3$; $T \approx 0,3$).

23. Studiare il grafico della funzione

$$y = \left(\frac{1}{x} - 1\right)^2.$$

Determinare i punti di intersezione della curva con l'iperbole d'equazione

$$y = \frac{1}{x} - 1.$$

Calcolare l'area T della regione finita di piano delimitata dalle due curve.

(La curva ha il punto di minimo relativo $N(1, 0)$, il punto di flesso $F(\frac{3}{2}, \frac{1}{9})$; $T = 3 \ln 2 - 2$).

24. Determinare i coefficienti dell'equazione $y = 1 + ax + \frac{b}{x^2}$ in modo che la curva che la rappresenta abbia un estremo relativo nel punto $A(1, 0)$.

Disegnarne il grafico.

Determinare l'equazione della retta t che passa per A ed è tangente alla curva in un punto B , di cui si chiedono le coordinate.

Calcolare l'area della regione finita di piano delimitata dalla curva, dalla retta t e dall'asse delle ascisse.

$$(La curva è $y = 1 - \frac{2}{3}x - \frac{1}{3x^2}$, la retta t è $y = -\frac{3}{4}x + \frac{3}{4}$, $T = \frac{9}{8}$).$$

25. Determinare i coefficienti dell'equazione

$$y = a - x + \frac{b}{x^2}$$

in modo che la curva da essa rappresentata sia tangente all'asse delle x nel punto $A(1, 0)$. Studiare il grafico della funzione ottenuta.

Calcolare l'area T della regione finita di piano delimitata dalla curva e dalla retta che passa per A ed ha pendenza $m=2$.

$$(La curva ha equazione $y = \frac{3}{2} - x - \frac{1}{x^2}$, $T = \frac{1}{8}$).$$

26. Determinare i coefficienti dell'equazione $y = a + x + \frac{b}{x^2}$ in modo che la curva che la rappresenta abbia un minimo relativo nel punto $A(2, 0)$.

Disegnare il grafico della funzione ottenuta.

Determinare i punti in cui la curva interseca la curva d'equazione $y = \frac{2}{x^2}$.

Calcolare l'area T della regione finita di piano delimitata dalle due curve.

$$(La curva ha equazione $y = -3 + x + \frac{4}{x^2}$, $T = \frac{6\sqrt{3}-9}{2}$).$$

27. Determinare i coefficienti dell'equazione

$$y = \frac{ax^3 + bx^2 + cx + d}{x^2}$$

in modo che la curva da essa rappresentata abbia come asintoto obliquo la retta r d'equazione $y = x - 2$ ed abbia un flesso nel punto $F(-1, -5)$.

Studiare il grafico della funzione ottenuta.

Determinare i punti di intersezione della curva con l'iperbole equilatera che ha per asintoti gli assi coordinati e passa per il punto $A(1, 3)$.

Calcolare l'area T della regione finita di piano delimitata dalle due curve.

$$(La\ curva\ è\ y = \frac{x^3 - 2x^2 + 3x + 1}{x^2},\ l'iperbole\ è\ y = \frac{3}{x},\ T = \frac{5\sqrt{5} - 11}{4}).$$

28. Determinare i coefficienti dell'equazione

$$y = \frac{ax^3 + bx^2 + c}{x^2}$$

in modo che la curva da essa rappresentata passi per i punti $A(-1, 0)$, $B(1, 2)$ e sia tangente all'asse delle x in un punto C . Studiare il grafico della funzione ottenuta.

Calcolare l'area T della regione finita di piano delimitata dalla curva e dalla retta BC .

$$(La\ curva\ ha\ equazione\ y = \frac{x^3 - 3x^2 + 4}{x^2},\ C(2, 0),\ T = \frac{1}{2}).$$

29. In un riferimento cartesiano è data la parabola p_1 d'equazione

$$y = \frac{1}{4}x^2 - 1.$$

Scrivere l'equazione della parabola p_2 , simmetrica della p_1 rispetto all'asse delle x e dire perché le due curve sono anche una simmetrica dell'altra rispetto all'origine O degli assi.

Calcolare l'area T della regione compresa fra le due parabole p_1 e p_2 .

Calcolare l'area T' della regione compresa fra la retta t tangente alla p_2 nel punto $A(-2, 0)$ e la parabola p_1 .

Calcolare il volume W del solido ottenuto ruotando intorno all'asse delle x la porzione di piano delimitata dalla parabola p_2 e dall'asse delle x .

$$(T = \frac{16}{3},\ t: y = x + 2,\ T' = \frac{64}{3},\ W = \pi \frac{16}{25}).$$

30. In un sistema di assi coordinati cartesiani considerare i punti $O(0, 0)$ ed $A(4, 4)$ e la circonferenza avente per diametro il segmento OA .

Determinare i coefficienti dell'equazione $y = ax^2 + bx + c$ in modo che la parabola da essa rappresentata passi per i due punti dati ed abbia in A come tangente la retta tangente alla circonferenza.

La porzione di piano delimitata dalla parabola e dall'asse delle x viene divisa dalla retta OA in due parti, di cui si chiede l'area.

Calcolare il volume W del solido che si ottiene ruotando intorno all'asse delle x la porzione di piano delimitata dalla parabola e dall'asse delle x .

$$(La\ parabola\ è\ y = -\frac{1}{2}x^2 + 3x,\ le\ aree\ valgono\ \frac{16}{3}\ e\ \frac{38}{3},\ W \approx 203,5).$$

31. Sono date le parabole che hanno le equazioni seguenti

$$x = 2y^2, \quad x = -y^2 + 9$$

e si incontrano nei punti P (di ordinata positiva) e Q .

Nella regione finita di piano compresa fra le due curve e l'asse delle ascisse inscrivere il rettangolo $ABCD$ che ha i lati paralleli agli assi coordinati e, in una rotazione completa intorno all'asse delle ascisse, genera il cilindro di massimo volume.

In tale caso calcolare il volume W del solido generato nella precedente rotazione dal triangolo mistilineo ABP , che ha come lati la base superiore AB del rettangolo e gli archi AP e BP delle due parabole.

$$(Il\ rettangolo\ ha\ vertici\ A\left(3, \frac{\sqrt{6}}{2}\right),\ B\left(\frac{15}{2}, \frac{\sqrt{6}}{2}\right),\ C\left(\frac{15}{2}, -\frac{\sqrt{6}}{2}\right),\ D\left(3, -\frac{\sqrt{6}}{2}\right); W = \pi \frac{27}{8}).$$

32. Fra le parabole d'equazione $y=ax^2+2x$ determinare quella che, nel semipiano delle ordinate positive, delimita con la retta $y=x$ un segmento parabolico di area $T=\frac{1}{6}$.
Individuare la retta parallela all'asse delle x che determina in tale segmento parabolico la corda di lunghezza massima.
(La parabola è $y=-x^2+2x$; la retta ha equazione $y=\frac{3}{4}$).
33. Fra le parabole d'equazione $y=-x^2+kx$ determinare quella che delimita con la retta d'equazione $y=x$ un settore parabolico di area $\frac{4}{3}$.
Indicare la retta parallela all'asse delle y che interseca il segmento parabolico determinato prima, determinando la corda di lunghezza massima.
(La parabola è $y=-x^2+3x$, la retta è $x=1$).
34. In un riferimento cartesiano è dato il triangolo equilatero che un vertice in $O(0, 0)$ e il lato opposto AB sulla retta d'equazione $y=1$. Scrivere l'equazione delle seguenti parabole;
– p_1 che ha l'asse di simmetria parallelo all'asse delle x e passa per i tre punti O, A, B ,
– p_2 che ha l'asse di simmetria parallelo all'asse delle x , passa per A e B e delimita con p_1 una regione finita di piano di area $\frac{\sqrt{3}}{3}$.
(Le parabole sono $p_1: y=3x^2$ e $p_2: y=\frac{3}{4}x^2+\frac{1}{4}$).
35. Scrivere le equazioni delle seguenti parabole:
– p_1 , che passa per $A(2, 2)$ ed è tangente in O alla retta $y=-x$,
– p_2 , che passa per $A(2, 2)$ ed è tangente in O alla retta $y=3x$,
calcolare l'area T della regione finita di piano racchiusa dalle due curve.
Nella regione finita di piano delimitata dalle due parabole inscrivere un quadrilatero con le diagonali d e d' parallele agli assi cartesiani, in modo che d e d' abbiano lunghezza massima.
(Le parabole sono $y=-x^2+3x$ e $y=x^2-x$; $T=\frac{8}{3}$; d e d' hanno lunghezza massima, quando si incontrano in $D(1, 1)$).
36. Disegnare le due parabole d'equazione $y=3x-x^2$ e $y=x^2-2x$, indicando con O ed A i loro punti di intersezione.
Nella regione finita di piano delimitata dalle due curve si costruisce un triangolo che ha un vertice in A ed il lato opposto BC parallelo all'asse delle y ; fra i triangoli così costruiti determinare quello di area massima.
Calcolare le aree delle regioni finite di piano delimitate dalle due parabole e dai lati del triangolo di area massima.
(Il triangolo di area massima ha vertici $A(\frac{5}{2}, \frac{5}{4})$, $B(\frac{5}{6}, \frac{65}{36})$, $C(\frac{5}{6}, -\frac{35}{36})$).
37. In un sistema di assi coordinati cartesiani è data la parabola d'equazione $y=3x-x^2$. Scrivere l'equazione della parabola ad essa simmetrica rispetto all'asse delle ordinate e le equazioni delle due parabole ad esse simmetriche rispetto alla retta congiungente i loro vertici.
Calcolare l'area T della regione finita di piano delimitata dalle quattro parabole.
Trovare il perimetro p del quadrato in essa inscritto con i lati tangenti alle parabole stesse.
(Le parabole sono $y=-x^2-3x$, $y=x^2+3x+\frac{9}{2}$, $y=x^2-3x+\frac{9}{2}$, $T=\frac{9}{2}$, $p=\sqrt{5}$).
38. Considerare le parabole determinate dalle equazioni
 $y=ax^2-2x+2$ e $y=2ax^2-2x+1$
e determinare il valore del parametro a per cui è minima la distanza fra i vertici delle parabole.
Calcolare l'area T della regione finita di piano delimitata dalle due parabole.
($a=1$, $T=\frac{4}{3}$).

39. Considerare le parabole che hanno le equazioni seguenti:

$$y = -x^2 + 2ax, \quad y = \frac{x^2}{a^4} - \frac{2x}{a^3} \quad \text{con } a > 0.$$

Calcolare l'area T della regione finita di piano delimitata dalle due parabole e determinare il valore di a per cui T è minima.

$$(T(a) = \frac{4}{3} \cdot \frac{a^4 + 1}{a}, \text{ minima per } a = \sqrt[4]{\frac{1}{3}}).$$

40. Determinare i coefficienti dell'equazione $y = ax^2 + bx + c$, in modo che la parabola da essa rappresentata sia tangente all'asse delle x e alle due rette d'equazione $y = -2x + 3$ e $y = 4x - 12$.
Indicati con A, B, C i rispettivi punti di contatto, determinare sull'arco BAC il punto P che rende massima l'area del triangolo BCP .
Calcolare le aree dei segmenti parabolici determinati dai lati BP e PC di tale triangolo.

$$(La \text{ parabola è } y = (x-2)^2, P\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{4}\right), \text{ le aree valgono } \frac{9}{16}).$$

41. Considerare il fascio di parabole d'equazione $ax^2 + (1-3a)x - y - 3 = 0$.
Determinare nel fascio la retta r e le due curve C_1 e C_2 che delimitano con r una regione finita di piano di area $T = \frac{9}{2}$.

Dimostrare che le due parabole C_1 e C_2 sono simmetriche rispetto ad un punto P di cui si chiedono le coordinate.

Intersecare le due parabole C_1 e C_2 con una retta s parallela all'asse delle y , ottenendo i punti A e B e considerare rette t_A e t_B , tangenti a ciascuna parabola in questi punti; determinare la posizione di s per cui le parabole hanno le tangenti t_A e t_B fra loro parallele.

$$(a=1, P\left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right), s \text{ ha equazione } x = \frac{3}{2}).$$

42. Disegnare l'ellisse d'equazione

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{6} = 1,$$

indicando con A il punto in cui la curva incontra il semiasse positivo delle x .

Considerare un punto P variabile sull'arco di curva che si trova nel semipiano delle ordinate positive ed indicare con H la sua proiezione sull'asse delle x ; determinare la posizione di P per cui ha volume massimo il solido ottenuto ruotando intorno all'asse delle x il triangolo APH .

Calcolare il rapporto r fra il volume del cono determinato prima e il volume dell'ellissoide che si ottiene nella precedente rotazione.

$$(P\left(-1, \frac{4}{3}\sqrt{3}\right), r = \frac{8}{27}).$$

43. Studiare il grafico della funzione $y = x - \cos x$.
Determinare l'area T della regione di piano delimitata dalla curva e dalla retta d'equazione $y = x$ nell'intervallo $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right]$.

(La funzione è sempre crescente; $T=2$.)

44. Studiare il grafico della funzione $y = x + 2 \sin x$ nell'intervallo $[-2\pi, 2\pi]$.
Determinare nello stesso intervallo i punti di intersezione fra la curva e la retta r d'equazione $y = x - 2$.
Calcolare l'area T della regione finita di piano delimitata dalla curva e dalla retta r nell'intervallo dato.

$$(T=4\pi.)$$

45. Studiare il grafico della funzione $y = \sin x + \sqrt{3} \cos x$.
Determinare l'area T della regione di piano delimitata dalla curva e dalla senoide d'equazione $y = \sin x$ nell'intervallo delimitato da due successivi punti di intersezione.

$$(La \text{ funzione si può scrivere nella forma } y = 2 \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right); T=2\sqrt{3}.)$$

46. Fra le funzioni del tipo $y=a \sin x+b \cos x$ determinare quella che ha un flesso nel punto $F\left(\frac{\pi}{3}, 0\right)$.

Studiare il grafico della funzione ottenuta nel periodo $[0, 2\pi]$, indicando con A e B i punti di intersezione con l'asse delle x .

Scrivere le equazioni delle rette seguenti:

- t_A , tangente alla curva in A ,
- t_B , tangente alla curva in B .

Determinare l'area T della regione di piano delimitata dalle rette t_A e t_B e dall'arco AB di curva.

(La curva ha equazione $y=\frac{1}{3} \sin x-\frac{\sqrt{3}}{3} \cos x$, che si può anche scrivere nella forma

$$y=\frac{2}{3} \sin \left(x-\frac{\pi}{3}\right), T=\frac{\sqrt{3}}{12} \pi-\frac{4}{3}.)$$

47. Fra le funzioni del tipo $y=\sin x+a \cos x+b$ determinare quella che ha un massimo relativo nel punto $M\left(\frac{\pi}{6}, 0\right)$.

Studiare il grafico della funzione ottenuta nel periodo $[-\pi, \pi]$, indicando con A il punto di intersezione con l'asse delle y .

Scrivere le equazioni della retta t_A , tangente alla curva in A .

Determinare l'area T della regione di piano delimitata dalla retta t_A , dalla curva e dalla retta d'equazione $x=\frac{\pi}{2}$.

(La curva ha equazione $y=\sin x+\sqrt{3} \cos x-2$, che si può anche scrivere nella forma $y=2 \sin \left(x+\frac{\pi}{3}\right)-2$, $t_A: y=x+\sqrt{3}-2$; $T=\frac{\pi^2}{8}+\frac{\sqrt{3}}{2} \pi-\sqrt{3}-1$).

48. Fra le funzioni del tipo $y=a \sin x+b \cos x$ determinare quella che ha un punto di massimo relativo in $M\left(\frac{\pi}{3}, 2\right)$.

Studiare il grafico della funzione ottenuta nel periodo $[0, 2\pi]$, indicando con A il punto di intersezione con l'asse delle y , con B e C i punti di intersezione con l'asse delle x (ordinati secondo le ascisse crescenti). Determinare l'area T della regione di piano delimitata dall'asse delle y , dall'asse delle x e dall'arco AB di curva.

Posto $y=r \sin (x+\beta)$, calcolare r e β in modo che questa funzione coincida con quella assegnata. Considerare $y=s$ e $x=2\pi t$, dove s rappresenta lo spostamento dall'origine di un punto P che si muove su una retta nel tempo t ; descrivere il moto di P , indicando in particolare gli istanti nei quali la velocità è nulla e gli istanti in cui la velocità è massima.

(La funzione è $y=\sqrt{3} \sin x+\cos x$, che si può scrivere nella forma $y=2 \sin \left(x+\frac{\pi}{6}\right)$. $T=2+\sqrt{3}$).

49. Studiare il grafico della funzione

$$y=\sqrt{\frac{2-x}{x}}$$

indicando con A il punto di flesso e con B il punto in cui la tangente alla curva è parallela all'asse delle y .

Determinare il volume W del solido ottenuto con una rotazione completa intorno all'asse delle x della regione finita di piano delimitata dalla retta OA , dall'asse delle x e dall'arco AB di curva.

$$\left(A\left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), B(2, 0), W=\pi\left(4 \ln 2-2 \ln 3-\frac{1}{3}\right)\right).$$

50. Studiare il grafico della funzione

$$y=x \sqrt{\frac{x}{1-x}}.$$

Determinare il volume W del solido ottenuto con una rotazione completa intorno all'asse delle x della regione finita di piano delimitata dalla curva, dall'asse delle x e dalla retta $x=\frac{1}{2}$.

$$(W=\pi\left(\ln 2-\frac{2}{3}\right)).$$