

7

Complementi

A. Le equazioni differenziali

1. Le equazioni differenziali e le loro soluzioni

L'economista inglese Thomas Malthus (1766-1834) propose un'ipotesi sulla legge di crescita della popolazione mondiale: in assenza di vincoli esterni (limitatezza delle risorse, guerra o grandi catastrofi) la popolazione umana ha una rapidità di crescita proporzionale al numero di individui che compongono la popolazione. Si tratta di un'ipotesi basata su questa considerazione: più numerosa è una popolazione, più numerosi sono gli individui che si riproducono, più rapida è la crescita della popolazione. L'ipotesi malthusiana descrive dunque la popolazione mondiale mediante una funzione del tempo che ha questa caratteristica: la sua derivata (cioè il tasso di crescita) è proporzionale alla funzione stessa. Indicando questa funzione con

$$y=f(t),$$

si arriva dunque a scrivere la seguente equazione:

$$y'=ky. \quad (1)$$

Osservando questa equazione, notiamo che:

- 1) l'incognita è una funzione;
- 2) l'equazione lega la funzione incognita alla sua derivata.

Un'equazione di questo tipo è detta «equazione differenziale»; in generale, **un'equazione differenziale è un'equazione in cui compare una funzione incognita con le sue derivate.**

Come si può risolvere l'equazione (1)? A partire dalla tabella delle derivate (a pag. 667) si trova che

$$y=e^{kx} \quad \text{ha per derivata} \quad y'=ke^{kx}.$$

Quindi, la funzione $y=e^{kt}$ è soluzione dell'equazione (1).

Una soluzione di un'equazione differenziale è dunque una funzione che, sostituita nell'equazione, rende il primo membro uguale al secondo per qualunque t . Osserviamo però che $y=e^{kt}$ non è l'unica soluzione, perché anche $y=ae^{kt}$, dove a è un numero qualsiasi, soddisfa l'equazione. Scopriamo dunque che l'equazione (1) ha infinite soluzioni, precisamente tutte le funzioni del tipo (fig. 1):

$$y=ae^{kt}.$$

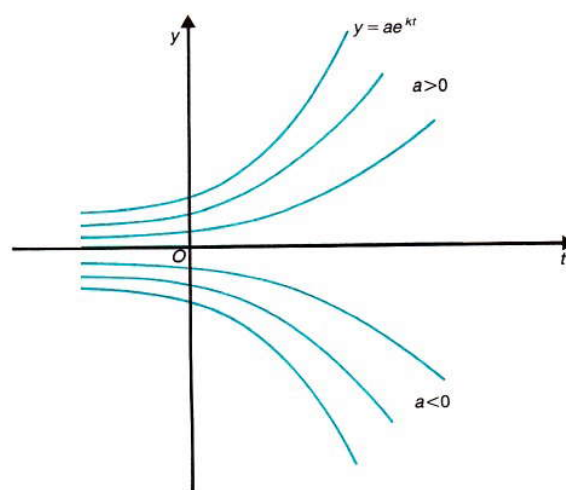


Fig. 1

Come si spiega questo fatto? Basta tornare al problema di Malthus, per osservare che la stessa equazione (1) descrive sia la popolazione di un piccolo paese, sia quella di una grande nazione o del mondo intero. Perciò l'equazione (1) non può avere un'unica soluzione: ne deve avere una per ogni caso particolare.

Come si determina la soluzione valida per l'Italia? Si deve conoscere la popolazione ad un certo istante. Se, ad esempio, sappiamo che nel 1861 (primo censimento dell'Italia unita) la popolazione era di 17.500.000 abitanti, allora possiamo procedere così:

1. decidiamo di contare gli anni dal 1861, cioè il 1861 è l'anno 0, il 1862 è l'anno 1, e così via;
2. calcoliamo a in modo che la soluzione abbia il valore fissato per il 1861.

Si trova:

$$17.500.000 = ae^{k \cdot 0} = a.$$

Resta così determinato il valore di a , e quindi la soluzione valida per l'Italia è:

$$y(t) = 17.500.000 e^{kt}.$$

Questo esempio mostra che, a partire dalle equazioni differenziali, si possono studiare due problemi:

- 1) trovare tutte le soluzioni;
- 2) trovare una soluzione che soddisfa particolari condizioni.

Nel primo caso, l'insieme di tutte le soluzioni è detto **integrale generale** dell'equazione differenziale; nell'esempio, al variare della costante a l'insieme di funzioni $y = ae^{kt}$ forma l'integrale generale della (1).

Nel secondo caso, la soluzione trovata è detta **integrale particolare**; ad esempio, abbiamo trovato l'integrale particolare della (1) che soddisfa la **condizione iniziale** (o **condizione al contorno**) $y(0) = 17.500.000$.

Vediamo ora un problema geometrico che conduce a scrivere equazioni differenziali: determinare l'equazione di una curva, conoscendo la pendenza della tangente in ogni punto. Si ha, per esempio:

$$y' = -\frac{x}{y}. \quad (2)$$

Quest'equazione indica una proprietà che caratterizza la curva cercata: la pendenza y' della tangente in un punto $P(x, y)$ è data dal rapporto fra l'opposto dell'ascissa, e cioè $-x$, e l'ordinata y .

Si osserva subito che il 2° membro dell'equazione perde significato, se si ha $y=0$. Cominciamo perciò a studiare l'equazione scegliendo punti $P(x, y)$ con $y > 0$, e tracciamo un grafico approssimato della curva, in base alle indicazioni fornite dall'equazione (2).

Ecco come si può procedere:

- si fissa un punto P_0 del piano, per esempio $P_0(1, 1)$ (fig. 2);
- si calcola la pendenza della tangente alla curva in P_0 , basandosi sull'equazione (2); si ottiene

$$y' = -\frac{1}{1} = -1;$$

- si traccia per P_0 la retta r con pendenza -1 ;
- si percorre un piccolo tratto sulla retta r , fino a raggiungere un punto P_1 ;
- si ripete il procedimento a partire da P_1 .

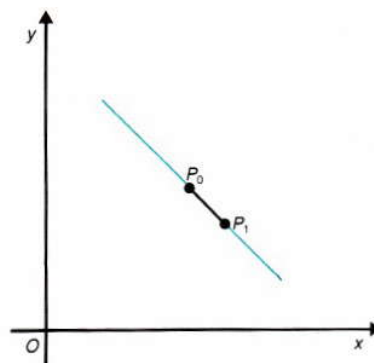


Fig. 2

Ripetendo più volte il procedimento, si arriva a costruire una spezzata che approssima la curva cercata; l'accuratezza del procedimento dipende dalla lunghezza dei segmenti come P_0P_1 : più piccoli sono questi segmenti migliore è l'approssimazione (fig. 3).

Ripetendo poi lo stesso procedimento a partire da un altro punto Q_0 del piano (fig. 4), si costruisce un'altra curva che risolve il problema. L'insieme delle curve così individuate forma l'integrale dell'equazione (2).

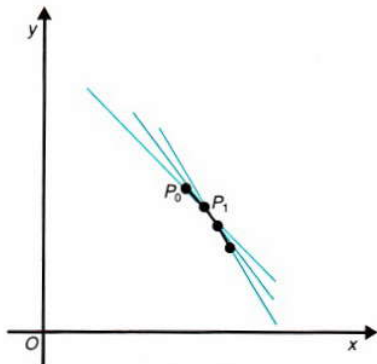


Fig. 3

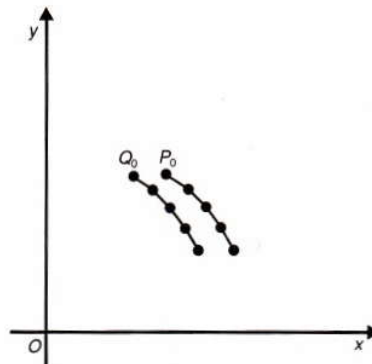


Fig. 4

In questo modo abbiamo tracciato le soluzioni dell'equazione in modo approssimato. Come possiamo ora risolvere il problema analiticamente, determinando le equazioni delle varie curve che costituiscono l'integrale generale della (2)?

Riscriviamo la (2) nella forma seguente:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}, \quad \text{ossia} \quad y \cdot dy = -x \cdot dx.$$

Le variabili x ed y risultano così **separate** e si possono calcolare gli integrali indefiniti di ciascun membro.

Eguagliando questi integrali indefiniti, si ottiene:

$$\int y \, dy = \int -x \, dx$$

da cui

$$\frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + k.$$

Questa equazione si legge meglio se scritta nella forma seguente:

$$y = \sqrt{2k - x^2}$$

o anche

$$x^2 + y^2 = 2k, \quad \text{con } y > 0$$

Si scopre così che l'equazione (2) è soddisfatta da tutte le curve descritte dall'equazione (3): si tratta del fascio di semicirconferenze col centro nell'origine rappresentato in fig. 5. Questo fascio di semicirconferenze è l'integrale generale della (2).

Se ora si sceglie un punto $Q(a, b)$ nel semipiano $y > 0$, si può trovare l'integrale particolare che passa per questo punto: basta imporre che risulti

$$a^2 + b^2 = 2k,$$

ricavare k e sostituirlo nella (3). Si ottiene:

$$x^2 + y^2 = a^2 + b^2.$$

Questo è dunque l'integrale particolare della (2) che passa per il punto (a, b) .

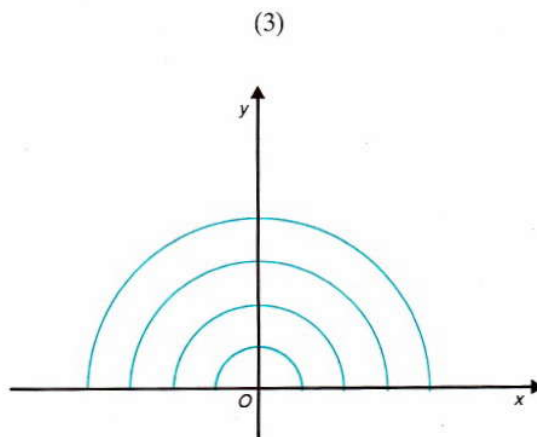


Fig. 5

2. Esistenza e unicità delle soluzioni

La (2) è un caso particolare dell'equazione differenziale seguente:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (4)$$

dove $f(x, y)$ indica una funzione delle due variabili x ed y .

L'esempio precedente mostra che le curve soluzione sono infinite, e costituiscono l'integrale generale della (4).

Se, però, aggiungiamo la condizione che la curva passi per un punto noto, $Q(a, b)$, allora il problema si riduce alla ricerca di un integrale particolare della (4): precisamente, quell'integrale particolare che soddisfa la condizione al contorno:

$$y'(a) = f(a, b).$$

Notiamo ora che il procedimento grafico utilizzato nell'esempio precedente si può applicare a qualunque equazione del tipo (4); si è così condotti a stabilire il seguente risultato:

data un'equazione differenziale del tipo

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

dove $f(x, y)$ è una funzione continua, esiste sempre una sola curva che soddisfa l'equazione e passa per un punto Q fissato.

Questo teorema assicura dunque che, se $f(x, y)$ è continua:

- 1) la soluzione esiste;
- 2) la soluzione è unica.

Per questo motivo è detto **teorema di esistenza e unicità**; è anche detto **teorema di Cauchy**, dal nome del matematico che lo dimostrò per primo. La dimostrazione di questo teorema è alquanto laboriosa, perciò ci accontenteremo della costruzione grafica vista prima.

3. Equazioni a variabili separabili

Il teorema di Cauchy garantisce l'esistenza e l'unicità della soluzione di un'equazione differenziale, ma non dice come trovarla. Il procedimento di risoluzione è più semplice quando l'equazione si presenta con le **variabili separabili**, come nell'esempio precedente. Il tipo più generale di equazione con le variabili separabili è il seguente:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)}.$$

Equazioni di questo tipo si risolvono riscrivendole nella forma

$$g(y)dy = f(x)dx$$

ed uguagliando gli integrali indefiniti dei due membri; si ha:

$$\int g(y)dy = \int f(x)dx.$$

Se si riesce a calcolare gli integrali, si ottiene una relazione fra le variabili x ed y ed una costante che compare in seguito all'integrazione; si trova dunque l'integrale generale dell'equazione differenziale data.

Dunque, il metodo della separazione delle variabili riconduce la risoluzione dell'equazione al calcolo di integrali; quando questo avviene, si dice che l'equazione differenziale è **ridotta alle quadrature**. :“Quadratura” è un termine antiquato che sta per “integrazione”; il dover calcolare un integrale è il minimo che ci si aspetta, quando si cerca di risolvere un'equazione che contiene delle derivate.

Ma non sempre si riesce a ridurre un'equazione differenziale alle quadrature; anzi, non ci si riesce quasi mai. I trattati di analisi matematica elencano qualche migliaio di equazioni riducibili; ben poche rispetto a tutte quelle che si possono scrivere, che sono infinite.

4. Equazioni di ordine superiore al primo

Consideriamo ora il caso più semplice di oscillazioni meccaniche (fig. 6): una pallina è appesa ad una molla che viene allungata e quindi lasciata; la pallina inizia così un moto oscillatorio. Come si può trovare la legge oraria di questo moto?

Si procede nel modo seguente:

- si fissa la direzione della traiettoria come in fig. 6, indicando con O il punto in cui la pallina è in equilibrio e con y lo spostamento da O ;
- si trascurano gli attriti.

In queste condizioni, lo spostamento y della pallina avviene sotto l'azione della sola forza elastica di richiamo della molla, data da

$$F = -ky.$$

Ricordiamo ora che, in base al 2° principio della dinamica, si ha

$$F = ma.$$

Ne segue che:

$$ma = -ky, \quad \text{ossia} \quad a = -\frac{ky}{m}.$$

Occorre infine ricordare che l'accelerazione è la derivata seconda dello spostamento; risulta quindi:

$$a = y'' \quad \text{e dunque} \quad y'' = -\frac{ky}{m}.$$

Considerando, per semplicità, il caso in cui risulti $\frac{k}{m} = 1$, si ottiene l'equazione

$$y'' + y = 0. \quad (5)$$

È questa un'equazione differenziale in cui la funzione incognita, $y = f(t)$, compare insieme alla sua derivata seconda; per questo motivo è detta equazione differenziale del secondo ordine.

In generale, **un'equazione differenziale è di ordine ennesimo se vi compare la derivata ennesima della funzione incognita, ma non le derivate di ordine maggiore di n .**

In particolare, le equazioni (1) e (2) degli esempi precedenti erano del primo ordine.

Come si risolve l'equazione (5)? Si può ancora provare a scorrere la tabella delle derivate, cercando una funzione che, derivata due volte, sia l'opposta di se stessa. Per accelerare la ricerca, conviene anche riflettere sul significato fisico della soluzione: descrive un'oscillazione, quindi si tratterà di funzione periodica.

Si trova così che

$$y = \sin t \quad \text{e} \quad y = \cos t$$

sono due soluzioni della (5).

Ricordando ora le regole dell'algebra delle derivate, si trova che tutte le funzioni del tipo

$$y = m \sin t + n \cos t,$$

dove m e n sono costanti, sono ancora soluzioni della (5). Si ha così un insieme di soluzioni (fig. 7) che è l'integrale generale della (5).

Notiamo che questo integrale generale dipende da due costanti, mentre quello delle equazioni precedenti dipendeva da una costante sola. Questo fatto suggerisce la seguente osservazione: **l'integrale generale di un'equazione differenziale di ordine ennesimo dipende da n costanti.** Questo risultato può essere provato rigorosamente, ma qui tralasciamo la dimostrazione.

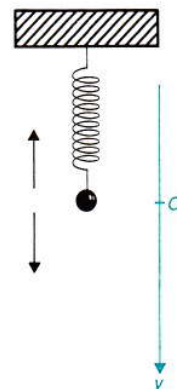


Fig. 6

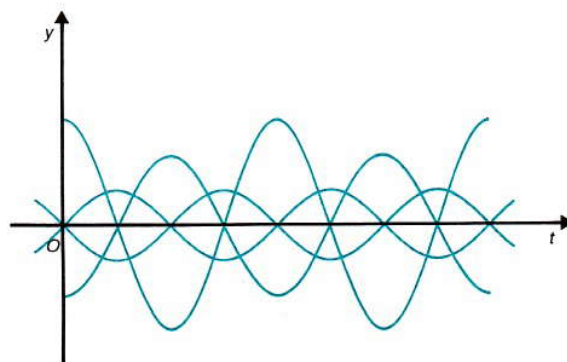


Fig. 7

5. Equazioni lineari omogenee

Particolarmente importanti sono le equazioni differenziali lineari, cioè le equazioni in cui **la funzione incognita e le sue derivate compaiono solo al primo grado**. Ad esempio, l'equazione:

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = c(x) \quad (6)$$

è un'equazione differenziale lineare del secondo ordine.

Il risultato più importante su queste equazioni è stato stabilito da Lie¹ ed è negativo: **non esiste un procedimento generale che permetta di ridurre alle quadrature le equazioni differenziali lineari**.

Occorre fare attenzione alla parola "generale": il teorema di Lie, infatti, non esclude che si possano risolvere alcune particolari equazioni. Ad esempio, la (4) era un caso particolare di equazione lineare, eppure è stato facile trovarne le soluzioni.

Fra le equazioni del tipo (6) hanno notevole importanza nelle applicazioni le **equazioni omogenee a coefficienti costanti**; si tratta delle equazioni del tipo

$$y'' + ay' + by = 0, \quad (7)$$

in cui i coefficienti a e b sono, appunto, delle costanti e $c(x)=0$.

Per queste equazioni è sempre possibile trovare l'integrale generale; ecco come si arriva alla soluzione. Si osserva che la (1) era un caso particolare della (7) ed aveva come soluzione una funzione esponenziale; ci si domanda allora se anche la (7) potrebbe avere soluzioni di tale tipo.

Quando si intuisce che una certa soluzione può essere quella giusta, la prima cosa da fare è verificare se la soluzione pensata soddisfa l'equazione; perciò si prova a sostituire nella (7) la funzione esponenziale:

$$y = e^{kt}.$$

Si ottiene:

$$k^2 e^{kt} + a k e^{kt} + b e^{kt} = 0.$$

La funzione e^{kt} è diversa da zero per ogni t ; perciò si possono dividere i due membri per tale funzione, ottenendo:

$$k^2 + ak + b = 0. \quad (8)$$

Si scopre così che la funzione esponenziale è soluzione dell'equazione differenziale, purché k soddisfi la (8). Ora, questa è un'equazione di secondo grado, di cui è facile trovare le radici. Supponiamo che tali radici siano reali, e indichiamole con k_1 e k_2 ; allora le funzioni

$$y = e^{k_1 t} \quad \text{ed} \quad y = e^{k_2 t}$$

sono due soluzioni della (7).

Ripetendo ora il ragionamento seguito per studiare le oscillazioni della molla, è immediato verificare che tutte le funzioni del tipo

$$y = m e^{k_1 t} + n e^{k_2 t}, \quad \text{dove } m \text{ e } n \text{ sono costanti}$$

sono ancora soluzioni della (7); precisamente, ne sono l'integrale generale. Abbiamo così trovato un procedimento per risolvere le equazioni lineari omogenee a coefficienti costanti.

Ecco un esempio: risolvere l'equazione differenziale:

$$y'' + 3y' + 2y = 0$$

con le condizioni iniziali

$$y(0) = 0 \quad \text{e} \quad y'(0) = 4.$$

Per prima cosa si risolve l'equazione di secondo grado che ha gli stessi coefficienti:

$$k^2 + 3k + 2 = 0.$$

¹ Sophus Lie (1842-1899), matematico scandinavo, studiò la soluzione delle equazioni differenziali con metodi geometrici, stabilendo importanti risultati tra cui quello citato nel testo.

Le soluzioni sono -1 e -2 ; perciò l'integrale generale è:

$$y = me^{-t} + ne^{-2t}.$$

Le costanti m ed n si trovano a partire dalle condizioni iniziali; tenendo presente che risulta $y' = -me^{-t} - 2ne^{-2t}$, si ha:

$$y(0) = m + n \quad \text{e} \quad y'(0) = -m - 2n.$$

Si ricavano quindi m ed n risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} m + n = 0 \\ -m - 2n = 4; \end{cases}$$

si trova $m = 4$, $n = -4$ e quindi la soluzione cercata è (fig. 8):

$$y = 4e^{-t} - 4e^{-2t}.$$

Il teorema di Cauchy ci garantisce che questa soluzione è l'unica.

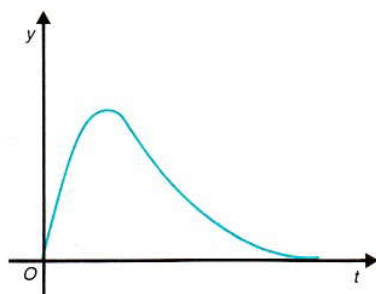


Fig. 8

Se le radici k_1 e k_2 sono coincidenti, il procedimento ora visto permette di trovare una sola soluzione:

$$y = e^{kt},$$

che non basta per poter scrivere l'integrale generale. Tuttavia una seconda soluzione è data da:

$$y = te^{kt},$$

come è facile verificare sostituendo. L'integrale generale è dunque:

$$y = me^{kt} + nte^{kt}, \quad \text{dove } m \text{ e } n \text{ sono costanti.}$$

Come si trovano le soluzioni se le radici della (8) non sono reali, ma complesse? Tutti i passaggi fatti restano validi anche se k_1 e k_2 sono numeri complessi. Posto allora:

$$k_1 = \alpha + i\omega \quad \text{e} \quad k_2 = \alpha - i\omega,$$

le funzioni

$$y = e^{(\alpha + i\omega)t} \quad \text{ed} \quad y = e^{(\alpha - i\omega)t} \quad (9)$$

sono due soluzioni dell'equazione; si tratta però di funzioni complesse che lasciano perplessi. Se, infatti, l'equazione differenziale descrive un fenomeno reale, che significato si può dare a queste soluzioni complesse?

Conviene allora dare un'altra forma alle espressioni trovate.

Ricordando le **formule di Eulero**¹, si ha:

$$\begin{aligned} e^{i\omega t} &= \cos \omega t + i \sin \omega t \\ e^{-i\omega t} &= \cos \omega t - i \sin \omega t \end{aligned}$$

e quindi le (9) possono essere riscritte così:

$$y = e^{\alpha t}(\cos \omega t + i \sin \omega t) \quad \text{e} \quad y = e^{\alpha t}(\cos \omega t - i \sin \omega t).$$

¹ Vedi Appendice 2 "I numeri complessi".

Queste funzioni si ottengono come somma delle seguenti due funzioni reali:

$$y=e^{zt} \operatorname{sen} \omega t \quad \text{e} \quad y=e^{zt} \cos \omega t.$$

È facile verificare che anche queste due funzioni sono soluzioni della (7); abbiamo così trovato soluzioni reali. Si conclude perciò che l'integrale generale della (7) è dato da (fig. 9):

$$y=me^{zt}\operatorname{sen} \omega t+ne^{zt} \cos \omega t, \quad \text{dove } m \text{ e } n \text{ sono costanti.}$$

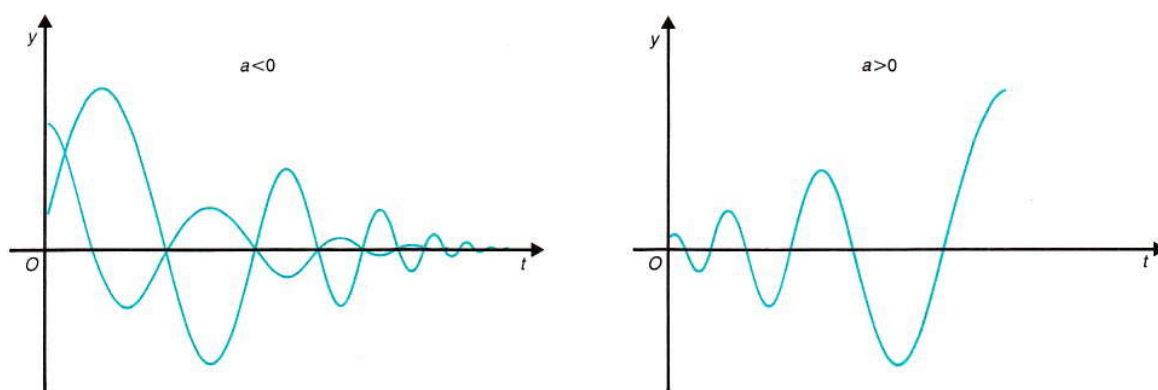


Fig. 9

Notiamo che la (5) era un caso particolare della (7), con $b=0$ e $c=1$; applicando il procedimento di soluzione, si ha:

$$k^2+1=0.$$

Le radici di questa equazione sono immaginarie:

$$k=\pm i.$$

Quindi $\alpha=0$ e $\omega=1$; dalla formula generale si ha

$$y=m \operatorname{sen} t+n \cos t, \quad \text{dove } m \text{ e } n \text{ sono costanti,}$$

come avevamo già trovato. Quindi, il procedimento generale fa ritrovare i casi particolari visti prima.

6. Importanza delle equazioni differenziali nelle scienze

Torniamo all'esempio delle oscillazioni meccaniche della fig. 6, e prendiamo in considerazione l'attrito che allora avevamo trascurato. Sulla pallina agiscono ora due forze: quella della molla, che vale $-ky$, e quella d'attrito che è proporzionale alla velocità: $-hy'$. Il segno negativo sta a significare che la forza d'attrito è diretta in verso opposto alla direzione del movimento, come è ovvio dal momento che è una forza frenante.

Si ha dunque:

$$F=-ky-hy'$$

e quindi, per il secondo principio della dinamica,

$$my''=-ky-hy'$$

ovvero:

$$y''+\frac{ky}{m}+\frac{h}{m}y'=0.$$

È questa un'equazione differenziale lineare, omogenea, a coefficienti costanti, del secondo ordine. È inutile scriverne la soluzione, perché l'abbiamo già trovata al punto precedente.

Consideriamo ora il circuito elettrico della fig. 10, che è detto circuito RLC in serie. La tensione V_1 ai capi del condensatore è data in ogni istante da

$$V_1 = \frac{q}{C};$$

mentre la corrente i che attraversa la bobina è data da

$$i = q'.$$

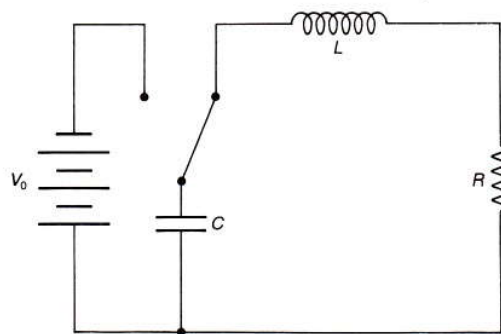


Fig. 10

Ora, è chiaro che l'intensità i della corrente non si mantiene costante nel tempo; perciò le variazioni di i generano, ai capi della bobina, una forza elettromotrice autoindotta V_2 data da

$$V_2 = Li',$$

e quindi

$$V_2 = Lq''.$$

Infine, ai capi della resistenza R è presente una tensione V_3 data dalla legge di Ohm:

$$V_3 = Ri = Rq'.$$

Si applica ora all'intero circuito la legge di Kirchhoff relativa alle maglie: nelle condizioni di fig. 10 nessuna batteria è collegata e, dunque, risulta $V_1 + V_2 + V_3 = 0$, ossia

$$\frac{1}{C}q + Lq'' + Rq' = 0$$

che si può anche scrivere nella forma

$$q'' + \frac{R}{L}q' + \frac{1}{LC}q = 0.$$

Abbiamo così ottenuto un'equazione differenziale del 2° ordine del tutto analoga a quella che regola il moto oscillatorio di una pallina appesa ad una molla.

Consideriamo ora il valore di un certo tipo di azioni in borsa; per semplicità, supponiamo che il valore iniziale di queste azioni sia zero, e indichiamo con $y=f(t)$ il loro valore ad un certo istante t . Come è noto, questo valore è determinato dalla legge della borsa: più le azioni vengono acquistate velocemente, più aumenta il loro valore. Indicando con $n(t)$ il numero di azioni acquistate all'istante t , la legge della borsa dice che il valore y è proporzionale alla rapidità di variazione di n , e cioè:

$$y = kn'.$$

D'altra parte, il numero di azioni acquistate n è dato dalla somma algebrica di due termini:

- un termine proporzionale alla rapidità con cui aumenta il valore y delle azioni: più rapidamente sale il valore, più le azioni sono acquistate. Questo termine è dunque proporzionale alla y' , e lo indicheremo con ay' ;
- un termine proporzionale al costo effettivo delle azioni: più le azioni sono care, meno sono acquistate. Questo termine è proporzionale a $-y$, e lo indicheremo con $-by$.

In conclusione, si ha:

$$n = ay' - by.$$

Derivando, e sostituendo nella precedente equazione, si trova:

$$y = ak y'' - bky'$$

ovvero:

$$y'' - \frac{b}{a}y' - \frac{1}{ak}y = 0.$$

Si tratta, ancora una volta, di un'equazione differenziale del 2° ordine del tutto analoga a quelle che regolano il moto di una pallina appesa ad una molla o la carica elettrica in un circuito *RLC*.

I tre esempi ora visti mettono in luce due fatti importanti:

1. Fenomeni molto diversi tra loro possono dar luogo alla stessa equazione differenziale. Si può quindi studiare una sola volta l'equazione differenziale, trovando risultati validi per tutti quei fenomeni. Ad esempio: un agente di borsa può chiedersi se il costo di un'azione subirà delle oscillazioni; un ingegnere meccanico può rispondergli, applicando le sue conoscenze sul moto di una molla.

2. Moltissime leggi scientifiche portano ad equazioni differenziali; perciò queste equazioni costituiscono un potente strumento per lo studio della natura e per lo sviluppo della tecnica. Si può ben dire che il progresso tecnico non sarebbe stato possibile senza le equazioni differenziali: è risolvendo queste equazioni che si progetta un motore, si mette in orbita un satellite, si studia un circuito integrato, si sviluppa la teoria del big bang, si analizzano le contrazioni intestinali, si progetta lo scafo di una nave, si esaminano gli stati dei neuroni, si crea una struttura portante, si prevede l'effetto di un'esplosione atomica, si valuta una crisi petrolifera e così via. Come Galileo aveva intuito, le leggi della natura sono scritte in un linguaggio matematico. Ma non è il linguaggio dei triangoli e dei cerchi, a cui egli pensava; è invece il linguaggio adatto a descrivere il legame tra il valore che una grandezza assume in un punto e quello che ha nei punti infinitamente vicini: è il linguaggio delle equazioni differenziali.