

7. Complementi

B. Lunghezza di una curva e area di una superficie di rotazione

Nel testo abbiamo visto che gli integrali permettono di determinare l'area di una superficie piana a contorno curvilineo e il volume di un solido di rotazione. Vedremo ora come calcolare la lunghezza di una curva o l'area di una superficie di rotazione, basandosi sempre sui classici procedimenti del calcolo integrale.

1. Lunghezza di una curva

Consideriamo una curva che sia il grafico di una funzione $y=f(x)$, continua in un intervallo $[a, b]$, e fissiamo l'attenzione sull'arco AB limitato dai punti $A[a, f(a)]$ e $B[b, f(b)]$ (fig. 11).

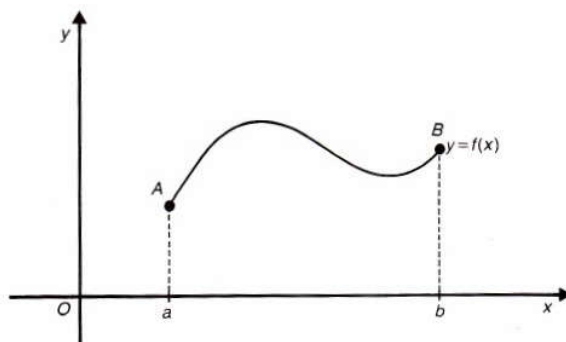


Fig. 11

Per valutare approssimativamente la lunghezza dell'arco AB , si può procedere così (fig. 12):

- si divide l'intervallo $[a, b]$ in n parti di lunghezza $h = \frac{b-a}{n}$, ottenendo le ascisse

$$a, \quad x_1 = a+h, \quad x_2 = a+2h, \quad \dots, \quad x_n = b = a+nh.$$

- si considerano sulla curva i punti seguenti

$$A[a, f(a)], \quad H_1[x_1, f(x_1)], \quad H_2[x_2, f(x_2)], \quad \dots, \quad H_n = B.$$

- si approssima la lunghezza L dell'arco AB con la lunghezza L_n della poligonale $AH_1H_2\dots B$.

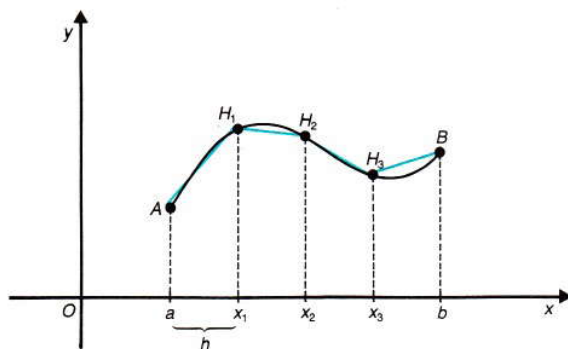


Fig. 12

Anche in questo caso è facile rendersi conto che, all'aumentare del numero n dei lati della poligonale, la lunghezza L_n approssima sempre meglio la lunghezza L dell'arco; si è così condotti a scrivere che risulta

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} L_n.$$

Per completare il calcolo, occorre dunque trovare una relazione fra L_n e l'equazione della curva; si procede nel modo seguente:

- si osserva la fig. 12 e si trova che risulta:

$$L_n = \overline{AH_1} + \overline{H_1H_2} + \dots + \overline{H_{n-1}H_n}$$

- si determina la lunghezza di ogni lato della poligonale applicando la formula per calcolare la distanza fra due punti del piano cartesiano; si ha:

$$\overline{AH_1} = \sqrt{(x_1 - a)^2 + [f(x_1) - f(a)]^2}, \quad \overline{H_1H_2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + [f(x_2) - f(x_1)]^2}, \dots$$

ossia

$$\overline{AH_1} = \sqrt{h^2 + [f(a+h) - f(a)]^2}, \quad \overline{H_1H_2} = \sqrt{h^2 + [f(x_1+h) - f(x_1)]^2}, \dots$$

- si applica il teorema di Lagrange, trovando che

- nell'intervallo $[a, a+h]$ esiste almeno un punto c_1 , per cui risulta

$$f(a+h) - f(a) = hf'(c_1),$$

- nell'intervallo $[x_1, x_1+h]$ esiste almeno un punto c_2 , per cui risulta

$$f(x_1+h) - f(x_1) = hf'(c_2),$$

.....

Si può quindi scrivere

$$\overline{AH_1} = \sqrt{h^2 + h^2[f'(c_1)]^2}, \quad \overline{H_1H_2} = \sqrt{h^2 + h^2[f'(c_2)]^2}, \dots$$

o anche

$$\overline{AH_1} = h\sqrt{1 + [f'(c_1)]^2}, \quad \overline{H_1H_2} = h\sqrt{1 + [f'(c_2)]^2}, \dots$$

Si conclude dunque che risulta

$$L_n = \sqrt{1 + [f'(c_1)]^2}h + \sqrt{1 + [f'(c_2)]^2}h + \dots + \sqrt{1 + [f'(c_n)]^2}h.$$

Così, quando $n \rightarrow \infty$, si trova che:

- tende a zero la grandezza $\frac{b-a}{n} = h$, cioè $h \rightarrow 0$;
- la somma degli infiniti termini viene espressa dall'integrale.

Si arriva dunque a concludere che la lunghezza L dell'arco AB è data da

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

Vediamo subito un esempio di applicazione di questa formula.

L'applicazione più immediata è quella di verificare che con il procedimento ora introdotto si ritrova un risultato già noto: la lunghezza di una semicirconferenza.

Consideriamo la semicirconferenza indicata in fig. 13, che ha centro $O(0, 0)$, raggio r lungo 1 e quindi ha l'equazione

$$y = \sqrt{1 - x^2}.$$

Si ha dunque:

$$f(x) = \sqrt{1 - x^2}, \quad f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad \sqrt{1 + [f'(x)]^2} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Perciò la lunghezza L della semicirconferenza è data da

$$L = \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} dx = [\arcsen x]_{-1}^1 = \arcsen 1 - \arcsen(-1) = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi.$$

Si trova in definitiva che la lunghezza L della semicirconferenza è

$$L = \pi,$$

in pieno accordo con il noto risultato della geometria elementare per cui la lunghezza c della circonferenza di raggio r è data da

$$c = 2\pi r.$$

È chiaro che con il metodo degli integrali si può trovare immediatamente anche con la lunghezza L un qualunque altro arco di semicirconferenza, come quello indicato in colore nella fig. 14; si ha

$$L = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} dx = [\arcsen x]_a^b = \arcsen b - \arcsen a.$$

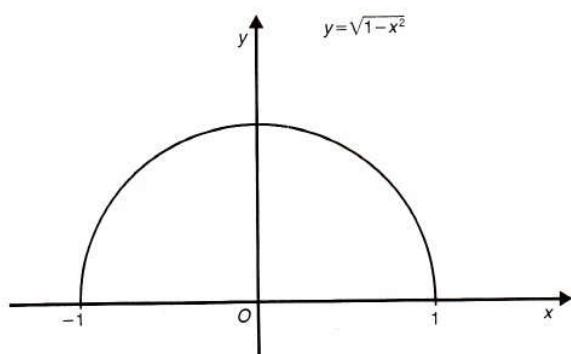


Fig. 13

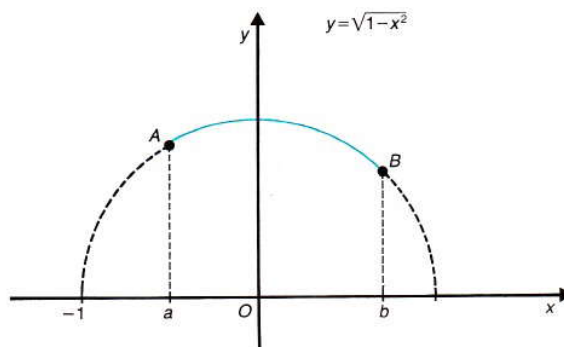


Fig. 14

2. Area di una superficie di rotazione

Riprendiamo la curva grafico della funzione $y=f(x)$ continua nell'intervallo $[a, b]$ (fig. 15) e immaginiamo di far ruotare l'arco AB di un giro completo intorno all'asse delle x : ogni punto P della curva descrive una circonferenza che ha il centro sull'asse delle x ; l'arco AB descrive una superficie (fig. 16).

Per determinare l'area S di questa superficie si può procedere così:

- si divide l'intervallo $[a, b]$ in n parti di lunghezza $h = \frac{b-a}{n}$, ottenendo le ascisse

$$a, \quad x_1=a+h, \quad \dots, \quad x_n=b=a+nh,$$

- si considerano sulla curva i punti seguenti

$$A[a, f(a)], \quad H_1[x_1, f(x_1)], \quad H_2[x_2, f(x_2)], \quad \dots, \quad H_n=B,$$

- si approssima l'arco AB con la poligonale $AH_1H_2\dots B$ (fig. 17),
- si fa ruotare la poligonale intorno all'asse delle x (fig. 18) e si approssima l'area S della superficie di rotazione con l'area S_n della superficie così ottenuta,
- si osserva che, all'aumentare del numero n dei lati della poligonale la superficie S_n approssima sempre meglio la superficie S ; si conclude quindi che

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n.$$

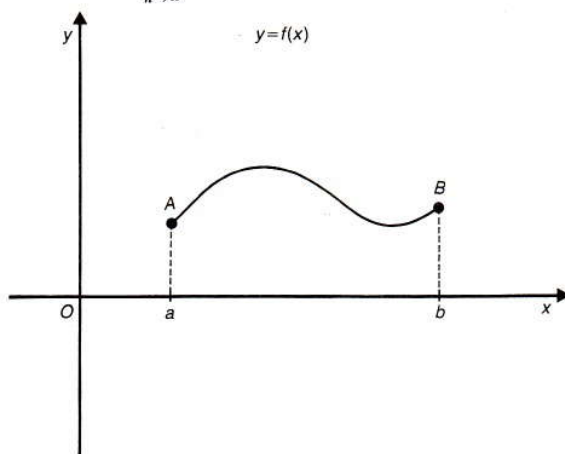


Fig. 15

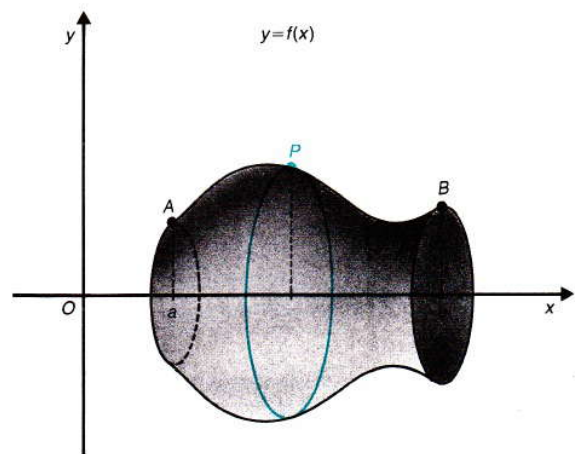


Fig. 16

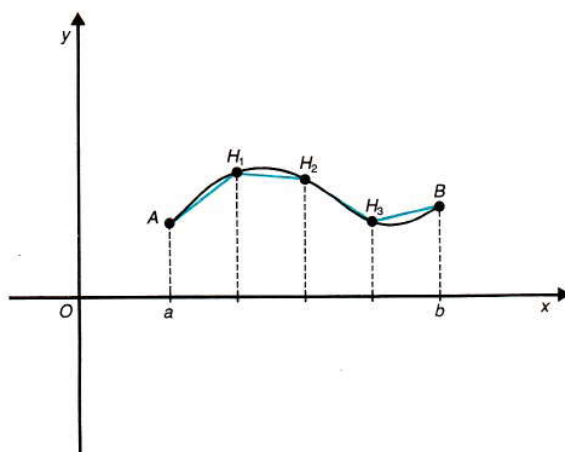


Fig. 17

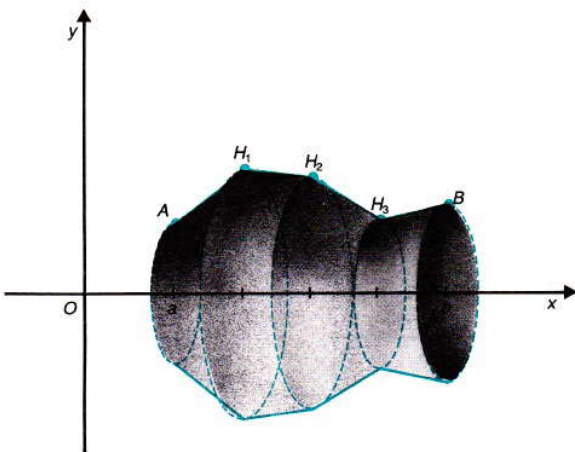


Fig. 18

Per completare il calcolo occorre trovare una relazione fra S_n e l'equazione della curva. Per questo si può procedere così:

- si osserva che la superficie generata dalla poligonale è formata dalla superficie laterale di n tronchi di cono;
- si ricorda (fig. 19) che la superficie laterale s di un tronco di cono è data da

$$s = 2\pi a \cdot \frac{r_1 + r_2}{2},$$

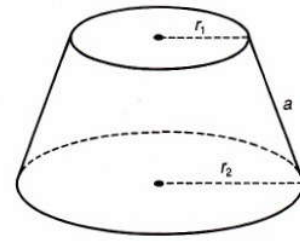


Fig. 19

dove a è la lunghezza dell'apotema, r_1 ed r_2 sono i raggi delle due basi.

Si arriva così ad esprimere S_n nella forma seguente:

$$S_n = 2\pi \cdot \left(\overline{AH_1} \cdot \frac{f(a) + f(a+h)}{2} + \overline{H_1H_2} \cdot \frac{f(x_1) + f(x_1+h)}{2} + \dots + \overline{H_{n-1}B} \cdot \frac{f(x_{n-1}) + f(b)}{2} \right)$$

Si può ora riscrivere ciascun termine della somma considerata, tenendo presente che il procedimento per trovare la lunghezza della curva ha portato a scoprire che risulta

$$\overline{AH_1} = h \cdot \sqrt{1 + [f'(c_1)]^2}, \quad \overline{H_1H_2} = h \cdot \sqrt{1 + [f'(c_2)]^2}, \dots;$$

si ottiene

$$S_n = 2\pi \cdot \left(h \cdot \sqrt{1 + [f'(c)]^2} \cdot \frac{f(a) + f(a+h)}{2} + \dots + h \cdot \sqrt{1 + [f'(c_n)]^2} \cdot \frac{f(x_{n-1}) + f(b)}{2} \right)$$

Esaminando poi il comportamento della formula per $n \rightarrow \infty$, si trova che:

- tende a zero la grandezza $\frac{b-a}{n} = h$, cioè $h \rightarrow 0$
- $\frac{f(a) + f(a+h)}{2} \rightarrow f(a)$, $\frac{f(x_1) + f(x_1+h)}{2} \rightarrow f(x_1)$, ...
- la somma di infiniti termini viene espressa dall'integrale.

Si arriva dunque a concludere che l'area S della superficie è data da

$$S = 2\pi \cdot \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} \cdot f(x) dx.$$

Vediamo subito un'applicazione di questa formula: ritrovare con il procedimento ora introdotto la superficie della sfera.

Consideriamo (fig. 20) la semicirconferenza che ha centro $O(0, 0)$, raggio r e quindi ha equazione

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}.$$

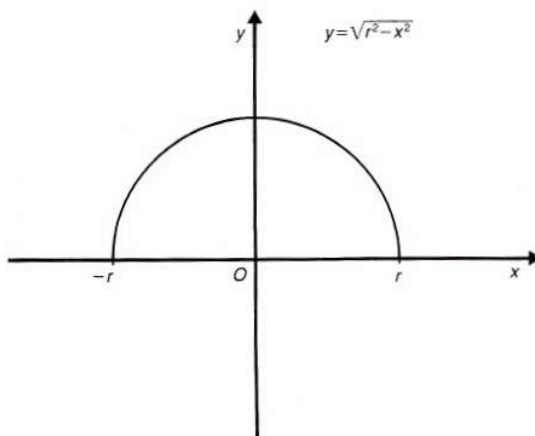


Fig. 20

Facendo ruotare questa semicirconferenza intorno all'asse delle x , si ottiene la sfera di raggio r (fig. 21). Per determinare la superficie richiesta, si ha dunque:

$$f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}, \quad f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}, \quad \sqrt{1 + [f'(x)]^2} = \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}}.$$

Perciò l'area S della sfera è data da

$$S = 2\pi \cdot \int_{-r}^r r \, dx = 2\pi \cdot [rx]_{-r}^r = 2\pi \cdot (2r) = 4\pi r^2.$$

Si ritrova così un risultato in pieno accordo con il noto risultato della geometria elementare: l'area S della sfera di raggio r è data da

$$S = 4\pi r^2.$$

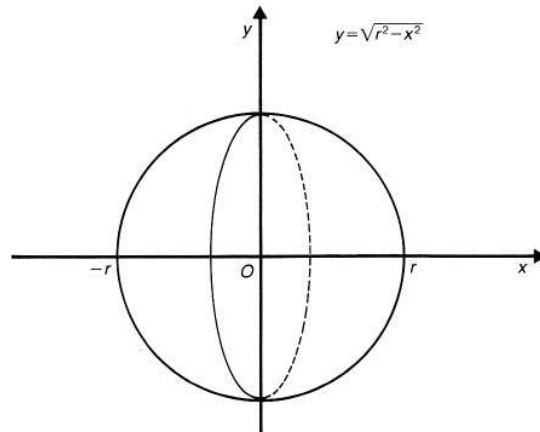


Fig. 21

È chiaro che con questo metodo si può trovare la superficie di una qualunque zona sferica, come quella indicata in colore nella fig. 22 che ha un'area S , data da

$$S = 2\pi \cdot \int_a^b r \, dx = 2\pi \cdot [rx]_a^b = 2\pi r(b-a).$$

Anche in questo caso, si ritrova un noto risultato della geometria elementare: l'area S di una calotta (fig. 23) o di una zona sferica (fig. 24) è data da

$$S = 2\pi rh,$$

dove r indica il raggio della sfera e h l'altezza della calotta (o della zona).

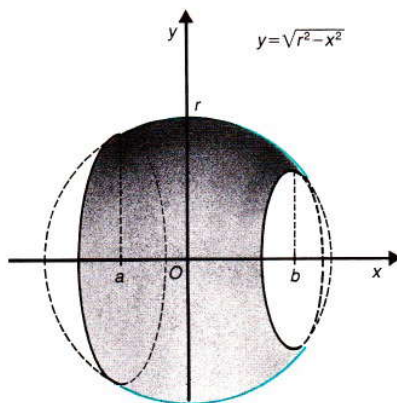
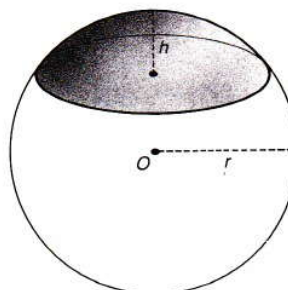
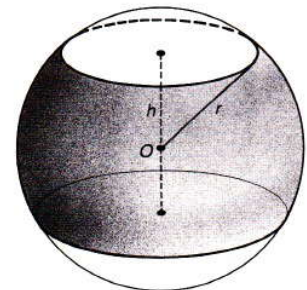


Fig. 22



calotta sferica

Fig. 23



zona sferica

Fig. 24