

7

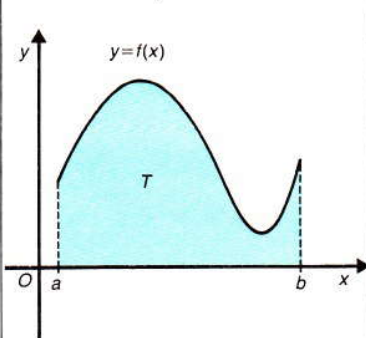
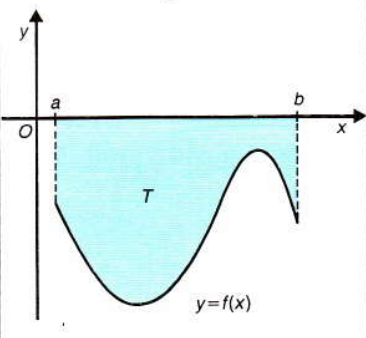
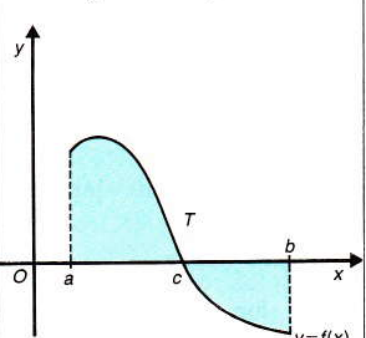
Esercizi

1. Calcolo dell'area racchiusa da una curva

Gli esercizi dall'1 al 37 conducono a calcolare l'area T sotto una curva d'equazione $y=f(x)$. Per risolvere questi esercizi occorre tenere presenti:

I) i risultati che sono stati ottenuti nel corso del paragrafo 1 di questo capitolo e che sono richiamati qui sotto (figg. 1-3):

Area T sotto una curva d'equazione $y=f(x)$

$f(x) \geq 0$ in $[a, b]$	$f(x) \leq 0$ in $[a, b]$	$f(x) \geq 0$ in $[a, c]$, $f(x) \leq 0$ in $[c, b]$
$T = \int_a^b f(x) dx$  <p>Fig. 1</p>	$T = - \int_a^b f(x) dx$  <p>Fig. 2</p>	$T = \int_a^c f(x) dx - \int_c^b f(x) dx$  <p>Fig. 3</p>

II) Il risultato fondamentale ottenuto nel paragrafo del cap. 6 e cioè

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a), \quad \text{con } F'(x) = f(x).$$

- Tracciare il grafico della parabola d'equazione $y = -x^2 + 2x$ e determinare l'area T della regione piana delimitata dall'asse delle x e dall'arco di parabola che si trova nel semipiano delle ordinate positive. $\left[T = \frac{4}{3} \right]$
- Tracciare il grafico della parabola d'equazione $y = x^2 - 2x$ e determinare l'area T della regione piana delimitata dall'asse delle x e dall'arco di parabola che si trova nel semipiano delle ordinate negative. $\left[T = \frac{4}{3} \right]$

3. Tracciare il grafico della parabola d'equazione $y = -x^2 + 2x$ e determinare l'area T della regione delimitata dall'asse delle x , dall'asse delle y , dalla retta d'equazione $x = 3$ e dalla parabola.

$$\left[T = \frac{8}{3} \right]$$
4. Tracciare il grafico della parabola d'equazione $y = -x^2 + 4x - 3$ e determinare l'area T della regione piana delimitata dall'asse delle x e dall'arco di parabola che si trova nel semipiano delle ordinate positive.

$$\left[T = \frac{4}{3} \right]$$
5. Tracciare il grafico della parabola d'equazione $y = x^2 - 4x + 3$ e determinare l'area T della regione piana delimitata dall'asse delle x e dall'arco di parabola che si trova nel semipiano delle ordinate negative.

$$\left[T = \frac{4}{3} \right]$$
6. Tracciare il grafico della parabola d'equazione $y = x^2 - 4x + 3$ e determinare l'area T della regione piana delimitata dall'asse delle x , dall'asse delle y e dall'arco di parabola relativo all'intervallo $[0, 3]$.

$$\left[T = \frac{8}{3} \right]$$
7. Tracciare il grafico della parabola d'equazione $y = -x^2 + 1$ e determinare l'area T della regione piana delimitata dall'asse delle x e dall'arco di parabola, che si trova nel semipiano delle ordinate positive.

$$\left[T = \frac{4}{3} \right]$$
8. Tracciare il grafico della curva d'equazione $y = -x^4 + 1$ e determinare l'area T della regione piana delimitata dall'asse delle x e dall'arco di parabola, che si trova nel semipiano delle ordinate negative.

$$\left[T = \frac{8}{5} \right]$$
9. Tracciare il grafico della curva d'equazione $y = -x^3 + 1$ e determinare l'area T della regione piana delimitata dall'asse delle x , dall'asse delle y e dall'arco di curva relativo all'intervallo $[0, 1]$.

$$\left[T = \frac{3}{4} \right]$$
10. Tracciare il grafico della curva d'equazione $y = -x^5 + 1$ e determinare l'area T della regione piana delimitata dall'asse delle x , dall'asse delle y e dall'arco di curva relativo all'intervallo $[0, 1]$.

$$\left[T = \frac{5}{6} \right]$$
11. Tracciare il grafico della curva d'equazione $y = x^3$ e determinare l'area T della regione piana delimitata dall'asse delle x e dall'arco di curva relativo all'intervallo $[-1, 1]$.

$$\left[T = \frac{1}{2} \right]$$
12. Tracciare il grafico della curva d'equazione $y = \frac{1}{x}$ e determinare l'area T della regione piana delimitata dall'asse delle x , dalle rette d'equazione $x = 1$ e $x = 3$ e dalla curva.

$$[T = \ln 3]$$
13. Tracciare il grafico della curva d'equazione $y = -\frac{1}{x}$ e determinare l'area T della regione piana delimitata dall'asse delle x , dalle rette d'equazione $x = 1$ e $x = 3$ e dalla curva.

$$[T = \ln 3]$$
14. Tracciare il grafico della curva d'equazione $y = -\frac{1}{x}$ e determinare l'area T della regione piana delimitata dall'asse delle x , dalle rette d'equazione $x = -1$ e $x = -3$ e dalla curva.

$$[T = \ln 3]$$
15. Tracciare il grafico della curva d'equazione $y = \frac{1}{x}$ e determinare l'area T della regione piana delimitata dall'asse delle x , dalle rette d'equazione $x = -1$ e $x = -3$ e dalla curva.

$$[T = \ln 3]$$

16. Tracciare il grafico della curva d'equazione $y = \frac{1}{x^2}$ e determinare l'area T della regione piana delimitata dall'asse delle x , dalle rette d'equazione $x=1$ e $x=3$ e dalla curva.

$$\left[T = \frac{2}{3} \right]$$
17. Tracciare il grafico della curva d'equazione $y = \frac{1}{x^3}$ e determinare l'area T della regione piana delimitata dall'asse delle x , dalle rette d'equazione $x=1$ e $x=3$ e dalla curva.

$$\left[T = \frac{16}{9} \right]$$
18. Tracciare il grafico della curva d'equazione $y = \sqrt{x}$ e determinare l'area T della regione piana delimitata dall'asse delle x , dalla retta d'equazione $x=1$ e dalla curva.

$$\left[T = \frac{2}{3} \right]$$
19. Tracciare il grafico della curva d'equazione $y = \sqrt[3]{x}$ e determinare l'area T della regione piana delimitata dall'asse delle x , dalla retta d'equazione $x=1$ e dalla curva.

$$\left[T = \frac{3}{4} \right]$$
20. Tracciare il grafico della curva d'equazione $y = e^x$ e determinare l'area T della regione piana delimitata dall'asse delle x , dall'asse delle y , dalla retta d'equazione $x=2$ e dall'arco di curva relativo all'intervallo $[0, 2]$.

$$[T = e^2 - 1]$$
21. Tracciare il grafico della funzione $y = \sin x$ e calcolare l'area racchiusa dall'asse delle x e dall'arco di curva relativo all'intervallo $[0, \pi]$.

$$[T = 2]$$
22. Tracciare il grafico della funzione $y = \cos x$ e calcolare l'area racchiusa dall'asse delle x e dall'arco di curva relativo all'intervallo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

$$[T = 2]$$
23. Tracciare il grafico della funzione $y = 2 \sin x$ e calcolare l'area racchiusa dall'asse delle x e dall'arco di curva relativo all'intervallo $[0, \pi]$.

$$[T = 4]$$
24. Tracciare il grafico della funzione $y = \sin(2x)$ e calcolare l'area racchiusa dall'asse delle x e dall'arco di curva relativo all'intervallo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

$$[T = 1]$$
25. Tracciare il grafico della funzione $y = 2 \sin(2x)$ e calcolare l'area racchiusa dall'asse delle x e dall'arco di curva relativo all'intervallo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

$$[T = 2]$$
26. Tracciare il grafico della funzione $y = \frac{1}{2} \sin x$ e calcolare l'area racchiusa dall'asse delle x e dall'arco di curva relativo all'intervallo $[0, \pi]$.

$$[T = 1]$$
27. Tracciare il grafico della funzione $y = \sin \frac{x}{2}$ e calcolare l'area racchiusa dall'asse delle x e dall'arco di curva relativo all'intervallo $[0, 2\pi]$.

$$[T = 4]$$
28. Tracciare il grafico della funzione $y = \frac{1}{2} \sin\left(\frac{x}{2}\right)$ e calcolare l'area racchiusa dall'asse delle x e dall'arco di curva relativo all'intervallo $[0, 2\pi]$.

$$[T = 2]$$
29. Esaminare i risultati degli esercizi 21 e 22 ed interpretarli dal punto di vista geometrico, ricordando che risulta

$$\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

e dunque si può ottenere la funzione $y = \cos x$, a partire dalla funzione $y = \sin x$, con una traslazione del piano.

Risolvere il seguente problema più generale: disegnare la curva d'equazione $y = \sin(x + \beta)$ e determinare l'area racchiusa dall'asse delle x e dall'arco di curva relativo all'intervallo $[-\beta, \pi - \beta]$.

30. Esaminare i risultati degli esercizi 21, 23, 26 ed interpretarli dal punto di vista geometrico, ricordando che si può ottenere la funzione $y=k \sin x$, a partire dalla funzione $y=\sin x$, operando una dilatazione del piano che moltiplica per k tutte le ordinate.
Risolvere il seguente problema più generale: disegnare la curva d'equazione $y=k \sin x$ e determinare l'area racchiusa dall'asse delle x e dall'arco di curva relativo all'intervallo $[0, \pi]$.
31. Esaminare i risultati degli esercizi 21, 24, 27 ed interpretarli dal punto di vista geometrico, ricordando che si può ottenere la funzione $y=\sin \frac{x}{h}$, a partire dalla funzione $y=\sin x$, operando una dilatazione del piano che moltiplica per h tutte le ascisse.
Risolvere il seguente problema più generale: disegnare la curva d'equazione $y=\sin \frac{x}{h}$ e determinare l'area racchiusa dall'asse delle x e dall'arco di curva relativo all'intervallo $\left[0, \frac{\pi}{h}\right]$.
32. Esaminare i risultati degli esercizi 21, 25, 28 ed interpretarli dal punto di vista geometrico, ricordando che si può ottenere la funzione $y=k \sin \frac{x}{h}$, a partire dalla funzione $y=\sin x$, operando una dilatazione del piano che moltiplica per h le ascisse e per k le ordinate.
Risolvere il seguente problema più generale: disegnare la curva d'equazione $y=k \sin \frac{x}{h}$ e determinare l'area racchiusa dall'asse delle x e dall'arco di curva relativo all'intervallo $\left[0, \frac{\pi}{h}\right]$.
33. Disegnare la semicirconferenza d'equazione $y=\sqrt{1-x^2}$ e determinare l'area T racchiusa dalla curva e dall'asse delle x .
(Per il calcolo dell'integrale vedere l'esercizio 221 del cap. 6. Si ottiene $T=\frac{\pi}{2}$).
34. Disegnare la semicirconferenza d'equazione $y=\sqrt{1-x^2}$ e determinare l'area T racchiusa dalla curva, dall'asse delle x e dalle rette d'equazione $x=-\frac{1}{4}$ e $x=\frac{3}{4}$.
(Tenere presenti i suggerimenti dati nell'esercizio precedente; si ottiene $T \approx 0,9$).
35. Generalizzare i risultati ottenuti nell'esercizio 33: disegnare la semicirconferenza d'equazione $y=\sqrt{r^2-x^2}$ e determinare l'area T racchiusa dalla curva e dall'asse delle x .
(Per il calcolo dell'integrale vedere l'esercizio 222 del cap. 6. Si ritrova un noto risultato della geometria elementare $T=\frac{\pi}{2}r^2$).
36. Generalizzare i risultati ottenuti nell'esercizio 34: disegnare la semicirconferenza d'equazione $y=\sqrt{r^2-x^2}$ e determinare l'area T racchiusa dalla curva, dall'asse delle x e dalle rette d'equazione $x=a$ e $x=b$ (con $-r \leq a \leq b \leq r$).
(Per il calcolo dell'integrale vedere l'esercizio 222 del cap. 6).
37. Determinare l'area T della regione di piano delimitata dall'ellisse con i semiassi lunghi a e b (fig. 1).
(Tenere presente che l'ellisse assegnata ha equazione

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ed interseca l'asse delle x nei punti $A'(-a, 0)$, $A(a, 0)$ e l'asse delle y nei punti $B'(0, -b)$, $B(0, b)$.

Data la simmetria della curva, si ha che

$$T=4T_1,$$

dove T_1 è l'area della superficie indicata in colore in fig. 4.
Si ottiene

$$T_1 = \frac{b}{a} \cdot \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{\pi}{4} \cdot a \cdot b \quad \text{e quindi...}$$

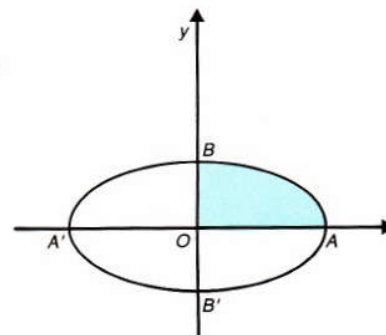


Fig. 4

Calcolare gli integrali definiti assegnati negli esercizi dal 38 al 46 e interpretare i risultati ottenuti dal punto di vista geometrico, individuando, in ogni caso, la superficie che si misura.

$$38. \quad \int_0^2 (x^2 - 6x + 8) dx, \quad \int_2^3 (x^2 - 6x + 8) dx$$

$$39. \quad \int_{-1}^0 (x+1)^3 dx, \quad \int_{-1}^0 (x^3+1) dx$$

$$40. \quad \int_{-1}^0 \frac{1}{x+2} dx, \quad \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{x} + 2 \right) dx$$

$$41. \quad \int_0^2 \frac{1}{(x-4)^2} dx, \quad \int_{\frac{1}{2}}^2 \left(\frac{1}{x^2} - 4 \right) dx$$

$$42. \quad \int_{-1}^3 \sqrt{x+1} dx, \quad \int_1^5 \sqrt{x-1} dx$$

$$43. \quad \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x dx, \quad \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\operatorname{sen} x + \cos x) dx$$

(Per calcolare il 1° integrale indefinito, vedi esercizio 138 del cap. 6).

$$44. \quad \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 3 \cos x dx, \quad \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \cos (3x) dx$$

$$45. \quad \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} \cos x dx, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos \left(\frac{x}{2} \right) dx$$

$$46. \quad \int_0^1 \operatorname{arcsen} x dx, \quad \int_0^1 \operatorname{arctg} x dx$$

(Per calcolare gli integrali indefiniti, vedi esercizi 186 e 187 del cap. 6).

2. Calcolo dell'area racchiusa fra due curve

Gli esercizi dal 47 al 90 conducono a calcolare l'area T racchiusa fra due curve d'equazione $y=f(x)$. Per risolvere questi esercizi occorre tenere presenti:

I) i risultati ottenuti nel paragrafo 2 di questo capitolo e cioè (fig. 5)

l'area T racchiusa fra due curve è data da

$$T = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$$

dove

$y=f(x)$ e $y=g(x)$ sono le equazioni delle curve,
 a e b sono le ascisse dei punti di intersezione delle due curve,
 si ha $f(x) \geq g(x)$, mentre x varia nell'intervallo $[a, b]$.

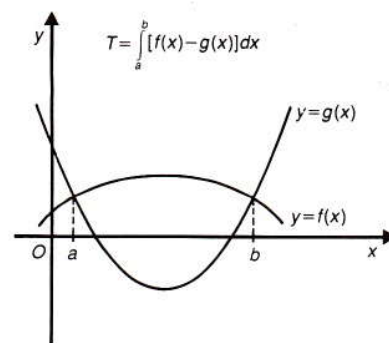


Fig. 5

II) Il risultato fondamentale ottenuto nel paragrafo del cap. 6 e cioè

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a), \quad \text{con } F'(x) = f(x).$$

Determinare l'area T della regione piana delimitata dalle curve che hanno le equazioni assegnate negli esercizi dal 47 al 70.

- | | | | | |
|-----|-----------------------|---|------------------------|---|
| 47. | $y = -x^2 + 4x - 1$ | e | $y = 2$ | $\left[T = \frac{4}{3} \right]$ |
| 48. | $y = x^2 - 4x + 2$ | e | $y = 1$ | $\left[T = \frac{4}{3} \right]$ |
| 49. | $y = -x^2 + 4$ | e | $y = -5$ | $[T = 36]$ |
| 50. | $y = -x^2 - x + 6$ | e | $y = 5 - x$ | $\left[T = \frac{4}{3} \right]$ |
| 51. | $y = \frac{1}{9}x^2$ | e | $y = \frac{1}{3}x + 2$ | $\left[T = \frac{27}{2} \right]$ |
| 52. | $y = -x^2 + 2x$ | e | $y = x$ | $\left[T = \frac{1}{6} \right]$ |
| 53. | $y = \frac{6}{x}$ | e | $y = x + 7$ | $\left[T = \frac{35}{2} - 6 \ln 6 \right]$ |
| 54. | $y = \frac{3}{x}$ | e | $y = -x + 4$ | $[T = 4 - 3 \ln 3]$ |
| 55. | $y = 4 - \frac{3}{x}$ | e | $y = x$ | $[T = 4 - 3 \ln 3]$ |
| 56. | $y = -x^2 + 3$ | e | $y = x^2 - 1$ | $\left[T = \frac{16}{3} \sqrt{2} \right]$ |
| 57. | $y = x^2 + 5$ | e | $y = 2x^2 + 1$ | $\left[T = \frac{32}{3} \right]$ |
| 58. | $y = x^2 + x - 1$ | e | $y = -x^2 + 4x - 2$ | $\left[T = \frac{1}{24} \right]$ |

59. $y = \frac{2}{3}x^2$ e $y = -2x^2 + 8x$ $[T=12]$
60. $y = -2x^2 + 4x + 7$ e $y = \frac{2}{3}x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{5}{2}$ $[T=12]$
61. $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x$ e $y = -\frac{1}{2}x^2 + 3x$ $\left[T = \frac{125}{6}\right]$
62. $y = -x^2 + 7$ e $y = \frac{6}{x}$ $\left[T = \frac{14}{3} - 6 \ln 2\right]$
63. $y = -\frac{5}{4}x^2 + \frac{21}{4}x$ e $y = \frac{4}{x}$ $\left[T = \frac{105}{8} - 4 \ln 4\right]$
64. $y = 1 - x^2$ e $y = x^3 - x$ $\left[T = \frac{4}{3}\right]$
65. $y = \sin x$ e $y = \cos x$ nell'intervallo $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{5}{4}\pi\right]$ $[T=2\sqrt{2}]$
66. $y = \sin x$ e $y = 2 \sin \frac{x}{2}$ nell'intervallo $[0, 2\pi]$ $[T=8]$
67. $y = -x^2 + 2x$ e $y = x^3 - 2x^2$ $\left[T = \frac{37}{12}\right]$

(Prestare particolare attenzione allo svolgimento di questo esercizio, basandosi sulla fig. 6. L'area T si calcola con il procedimento seguente:

$$T = \int_{-1}^0 [(x^3 - 2x^2) - (-x^2 + 2x)] dx + \int_0^2 [(-x^2 + 2x) - (x^3 - 2x^2)] dx.$$

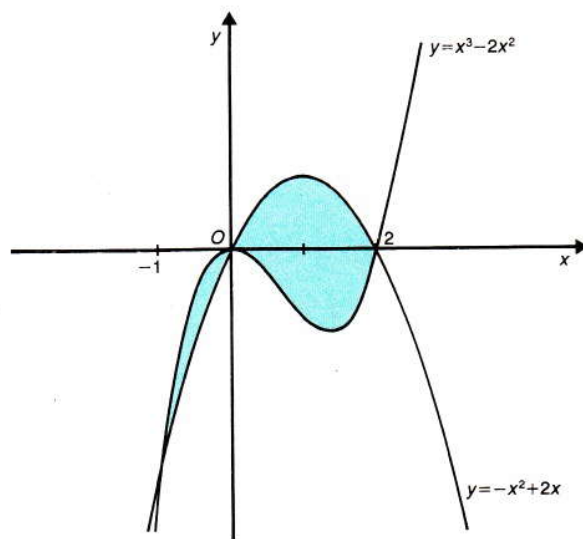


Fig. 6. Nell'intervallo $[-1, 0]$ si ha $x^3 - 2x^2 \geq -x^2 + 2x$; nell'intervallo $[0, 2]$ si ha $-x^2 + 2x \geq x^3 - 2x^2$.

68. $y = x^3 - 4x$ e $y = \frac{9}{4}x$ $[T \approx 19,5]$
- (Tenere presenti i suggerimenti dati nell'esercizio 67. In questo caso ci si può anche basare sulla simmetria della figura rispetto ad O ...)
69. $y = 4x^3 - 3x - 1$ e $y = -2x^2 + x + 1$ $[T \approx 2,96]$
- (Tenere presenti i suggerimenti dati nell'esercizio 67).
70. $y = x^3 - 4x$ e $y = -x^2 + 2x$ $[T \approx 21,1]$
- (Tenere presenti i suggerimenti dati nell'esercizio 67).

71. $y = \sin x$ e $y = \frac{1}{2} \sin 2x$ nell'intervallo $[0, 2\pi]$

[T=4]

(Tenere presenti i suggerimenti dati nell'esercizio 67).

72. $y = 2 \sin \frac{x}{2}$ e $y = \sin x$ nell'intervallo $[0, 4\pi]$

[T=15]

(Tenere presenti i suggerimenti dati nell'esercizio 67).

73. Determinare l'area T della regione piana delimitata dall'asse delle x e dalle due parabole d'equazione $y = x^2 + 4x + 4$ e $y = x^2 - 4x + 4$.

(Basandosi sulla fig. 7, si trova che le due parabole sono simmetriche rispetto all'asse delle y e dunque l'area T è data da

$$T = 2 \int_0^2 (x^2 - 4x + 4) dx = \dots$$

74. È data la parabola d'equazione $y = -x^2 + 3x$. Scrivere le equazioni delle seguenti curve:

- la parabola simmetrica a quella data rispetto all'asse delle ordinate,
- le parabole simmetriche alle due precedenti rispetto alla retta congiungente i loro vertici.

Calcolare l'area della regione finita di piano delimitata dalle quattro parabole.

(Basandosi sulla fig. 8 si trova che risulta

$$T = 4 \cdot \int_0^{\frac{3}{2}} \left[\frac{9}{4} - (-x^2 + 3x) \right] dx = \dots$$

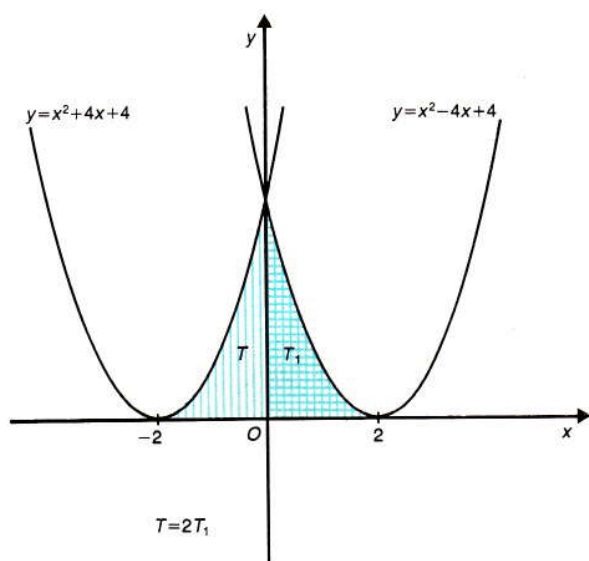


Fig. 7

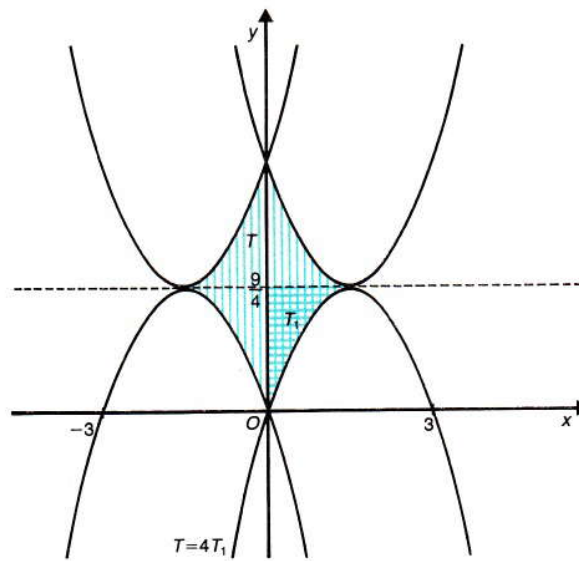


Fig. 8

75. Determinare l'area T della regione piana delimitata dalle rette d'equazione $y = x$, $y = 2x$ e dall'iperbole d'equazione $y = \frac{1}{x}$.

(Basandosi sulla fig. 9 a pag. 580, l'area T si calcola con il procedimento seguente:

$$T = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} 2x \, dx + \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 \frac{1}{x} \, dx - \int_0^1 x \, dx = -\ln \frac{1}{\sqrt{2}} \cong 0,35$$

Se ora si tiene presente la definizione esposta nell'esercizio 21 del cap. 6, si arriva a scrivere

$$-\int_0^1 x \, dx = \int_1^0 x \, dx \quad \text{e quindi} \quad T = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} 2x \, dx + \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 \frac{1}{x} \, dx + \int_1^0 x \, dx.$$

Generalizzando le considerazioni precedenti si arriva alla seguente regola generale che risulta spesso utile nelle applicazioni (fig. 10):

si considera una superficie S che ha il contorno (non intrecciato) costituito dagli n archi A_1A_2 , d'equazione $y=f_1(x)$, A_2A_3 , d'equazione $y=f_2(x)$, ..., A_nA_1 , d'equazione $y=f_n(x)$; $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ sono le ascisse dei vertici A_1, A_2, \dots, A_n , che si incontrano percorrendo il contorno della superficie in senso orario. In queste condizioni l'area T della superficie S è data da

$$T = \int_{a_1}^{a_2} f_1(x) dx + \int_{a_2}^{a_3} f_2(x) dx + \dots + \int_{a_n}^{a_1} f_n(x) dx$$

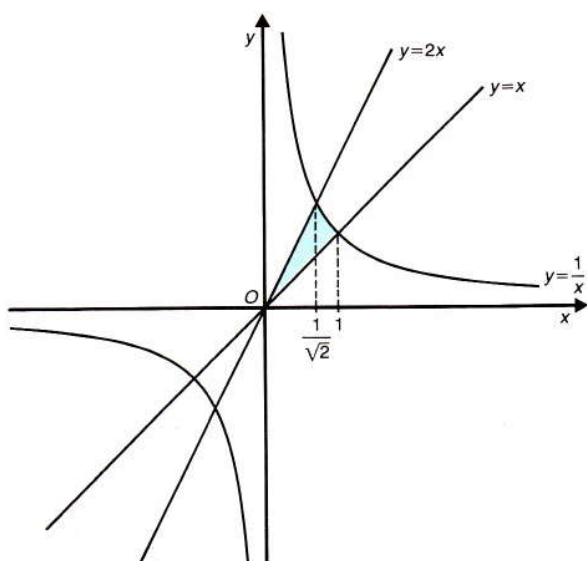


Fig. 9

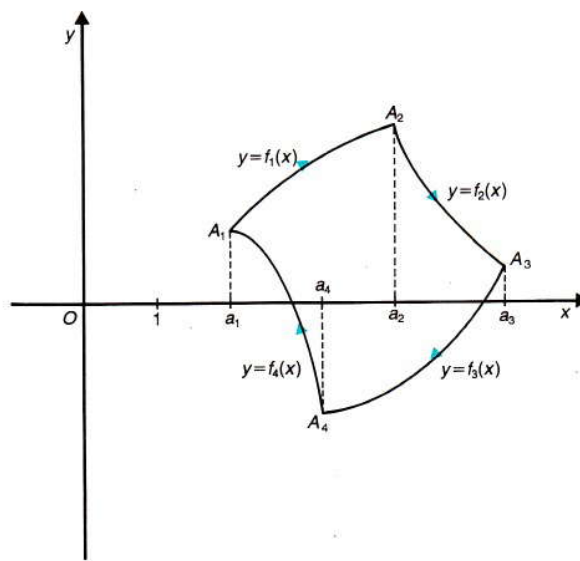


Fig. 10

76. Determinare l'area T della regione finita di piano delimitata dalle tre curve d'equazione $y=x^2$, $y=x$, $y=x+2$.

(Può essere utile la regola data nell'esercizio 75. Si ottiene $T=\frac{13}{3}$.)

77. Determinare l'area T della regione finita di piano delimitata dalle seguenti curve:

- la retta d'equazione $y=-x$,
- la retta d'equazione $y=\frac{2}{5}x-\frac{4}{5}$,
- l'arco di parabola d'equazione $y=x^2$, relativo all'intervallo $[0, 1]$.
- l'arco di parabola d'equazione $y=-x^2+2x$, relativo all'intervallo $[1, 2]$.

(Può essere utile la regola data nell'esercizio 75. Si ottiene $T=\frac{5}{3}$.)

78. Sono date le due parabole d'equazione $y=x^2-7x+12$ e $y=4x^2-25x+36$ e la retta r d'equazione $y=3x-13$; verificare che r è tangente ad ambedue le parabole e determinare l'area T della regione di piano delimitata dalle due parabole e dalla retta.

[Può essere utile la regola data nell'esercizio 75. Si ottiene $T\approx 0,95$.)

79. È data la parabola d'equazione $y = -x^2 + 2x$ ed il triangolo delimitato dalle seguenti rette:
 t , tangente alla parabola in $O(0, 0)$,
 n , normale in O , cioè perpendicolare a t in O ,
 r d'equazione $x = \frac{5}{2}$.

La parabola divide il triangolo in due superfici; calcolare le aree T_1 e T_2 di queste due superfici.

$$[T_1 \approx 5,2; T_2 \approx 2,6]$$

80. Data una parabola d'equazione $y = ax^2$ e una retta r parallela all'asse delle x , la superficie S racchiusa dalla parabola e dalla retta r prende il nome di **segmento parabolico** (in colore in fig. 11). Calcolare l'area T del segmento parabolico e dimostrare il seguente **teorema di Archimede**:

un segmento parabolico è equivalente ai $\frac{2}{3}$ del rettangolo ad esso circoscritto.

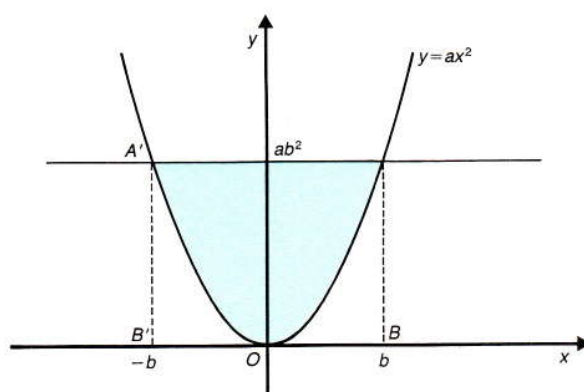


Fig. 11. Il rettangolo circoscritto al segmento parabolico è $AA'B'B$.

81. Data la parabola d'equazione $y = x^2$, determinare quale deve essere la pendenza m di una retta r d'equazione $y = mx$ in modo che l'area della superficie delimitata da r e dalla parabola valga $\frac{4}{3}$.

(La retta r incontra la parabola nei punti $O(0, 0)$ e $A(m, m^2)$; si deve determinare m in modo che risulti (fig. 12):

$$\int_0^m (mx - x^2) dx = \frac{4}{3}.$$

Si ottiene $m=2$).

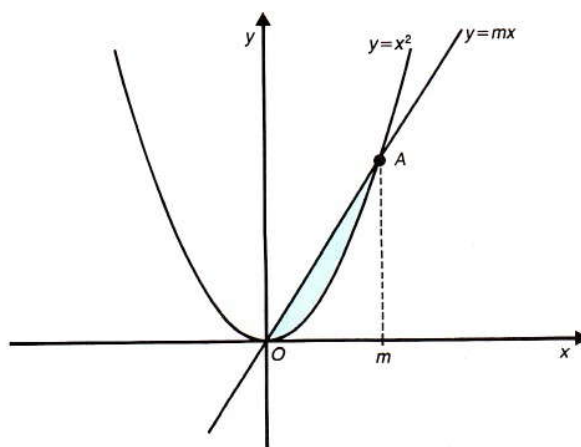


Fig. 12

82. È data la parabola d'equazione $y = -x^2 + 2x$, che incontra l'asse delle x nei punti $O(0, 0)$ e B . Determinare sull'arco OB il punto P per cui vale $\frac{7}{6}$ l'area T della superficie S delimitata dai segmenti OP e OB e dall'arco PB di parabola.

(Indicato con $P(t, -t^2 + 2t)$ il punto che percorre la parabola il problema si può risolvere in vari modi fra i quali segnaliamo i seguenti (fig. 13):

- I) si considera la superficie S come somma del triangolo OQP e del trapezoide QPB , per cui si trova

$$T = \frac{\overline{OQ} \cdot \overline{QP}}{2} + \int_t^2 (-x^2 + 2x) dx,$$

con $\overline{OQ} = t$ e $\overline{QP} = -t^2 + 2t$;

- II) si scrive l'equazione della retta OP , che è $y = (2-t)x$ e si determina l'intera area T con gli integrali, calcolando

$$T = \int_0^t (2-t) \cdot x \, dx + \int_t^2 (-x^2 + 2x) dx.$$

In ambedue i casi si trova $T = -\frac{1}{6}t^3 + \frac{4}{3}$ e quindi il punto richiesto è $P(1, 1)$.

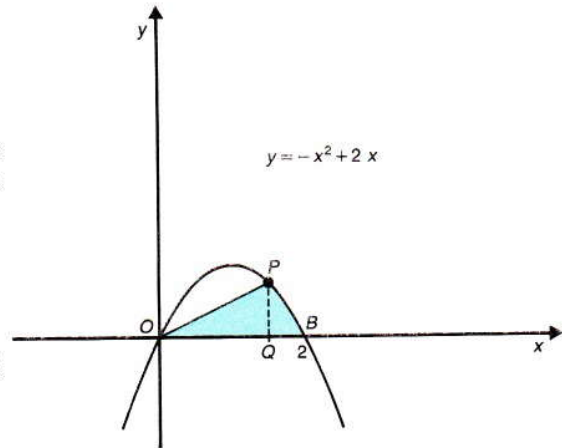


Fig. 13

83. È data la parabola p d'equazione $y = -x^2 + 2x$. Determinare la pendenza positiva m di una retta r d'equazione $y = mx$ in modo che la superficie delimitata da r e da p sia $\frac{1}{8}$ della superficie del segmento parabolico determinato dalla parabola e dall'asse delle x . [$m=1$]

84. È data la parabola d'equazione $y = \frac{1}{4}x^2 - x + 1$, che incontra l'asse della y nel punto A e tocca l'asse delle x nel punto V . Determinare un punto P sull'arco AV , in modo che la superficie delimitata dal segmento OP , dall'arco PV e dall'asse delle x valga $\frac{5}{24}$. [$P(1, \frac{1}{4})$]

85. Determinare il valore del parametro k in modo che valga 36 l'area T della regione finita di piano delimitata dall'asse delle x e dalla parabola d'equazione $y = -x^2 + k^2$.

(Si deve determinare k in modo che risulti

$$2 \int_0^k (-x^2 + k^2) dx = 36.$$

Si ottiene $k=3$).

86. Determinare il valore del parametro k in modo che valga $\frac{4}{3}$ l'area T della regione finita di piano delimitata dall'asse delle x e dalla parabola d'equazione $y = -x^2 + kx$. [$k=2$]

87. Sono date l'iperbole d'equazione $y = \frac{1}{x}$ e la retta r d'equazione $y = x$. Determinare il valore positivo m per cui vale 5 l'area della superficie delimitata dall'iperbole, da r e dalla retta d'equazione $y = m^2x$.

(Tenere presenti le considerazioni svolte negli esercizi 75 e 81; si trova $m=e^5$).

88. La parabola d'equazione $y = 4 - x^2$ delimita, insieme all'asse delle x , un segmento parabolico di area T . Una retta r parallela all'asse delle x divide tale segmento parabolico in due parti; la parte che ha la base sull'asse delle x ha area T_1 e l'altra ha area T_2 . Determinare la posizione della retta r in modo che risulti $T_1 = 7T_2$.

(Il problema si può risolvere in vari modi fra i quali segnaliamo i seguenti:

I) Dalla condizione

$$T_1 = 7T_2$$

si ottiene che deve essere

$$T = 8T_2 \quad \text{e quindi} \quad T_2 = \frac{1}{8}T.$$

Si indica con $y=k$ l'equazione della retta e si applica il teorema di Archimede per determinare:

- l'area T dell'intero segmento parabolico, che è data da $T = \frac{32}{3}$,
- l'area T_2 del segmento parabolico S_2 , che è data da

$$T_2 = \frac{2}{3} \cdot 2(4-k) \cdot \sqrt{4-k} = \frac{4}{3} \sqrt{(4-k)^3}.$$

Si determina infine k in modo che risulti

$$\frac{4}{3} \sqrt{(4-k)^3} = \frac{1}{8} \cdot \frac{32}{3}.$$

II) A partire dalla stessa condizione $T_2 = \frac{1}{8}T$, si considera sulla parabola un punto P di ascissa t positiva e di ordinata $y=4-t^2$ e si considera la parallela all'asse delle x per P ; questa retta avrà equazione $y=4-t^2$.

Applicando di nuovo il teorema di Archimede, si trova

$$T_2 = \frac{2}{3} [4 - (4-t^2)] 2t = \frac{4}{3} t^3.$$

Si determina infine t in modo che risulti

$$\frac{4}{3} t^3 = \frac{4}{3}.$$

III) Indicata con $y=k$ l'equazione della retta, ci si vale direttamente degli integrali per determinare le aree delle superfici indicate dal problema; tenendo presente la simmetria della figura rispetto all'asse delle y , si ha:

$$T_1 = 2 \left(\int_0^{\sqrt{4-k}} k \, dx + \int_{\sqrt{4-k}}^2 (4-x^2) \, dx \right), \quad T_2 = 2 \int_0^{\sqrt{4-k}} [(4-x^2) - k] \, dx.$$

Si determina quindi k in modo che sia verificata la condizione assegnata.

IV) Si ragiona come nel 2° procedimento, indicando con $y=4-t^2$ l'equazione della retta, ma si continua valendosi degli integrali per calcolare le aree richieste.

Il procedimento più semplice e rapido è certamente il 2°.

Si arriva sempre a determinare la retta d'equazione $y=3$.

89. Fra le parabole d'equazione $y=ax^2+bx+c$ che intersecano l'asse delle x in $O(0,0)$ e $A(4,0)$ determinare quella che forma con l'asse delle x un segmento parabolico di area $\frac{16}{3}$.

(Il modo più semplice di risolvere il problema è quello di assumere come incognita l'ordinata del vertice e valersi del teorema di Archimede; si ottiene $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x$).

90. Fra le parabole d'equazione $y=ax^2+bx+c$ determinare quelle che rispettano le seguenti condizioni:

- il vertice V ha ascissa 2,
- il punto $O(0,0)$ appartiene alle curve,
- la superficie delimitata dalla curva e dal segmento OV vale 1.

$$\left[y = \pm \frac{3}{4}(x^2 - 4x) \right]$$

3. Volume di un solido di rotazione

Gli esercizi dal 91 al 114 conducono a calcolare il volume W di solidi di rotazione. Per risolvere questi esercizi occorre tenere presenti:

I) i risultati ottenuti nel paragrafo 3 di questo Capitolo e cioè

il volume W del solido ottenuto ruotando intorno all'asse delle x la curva d'equazione $y=f(x)$ nell'intervallo $[a, b]$ è dato da:

$$W = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

II) Il risultato fondamentale ottenuto nel paragrafo del cap. 6 e cioè

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a), \quad \text{con} \quad F'(x) = f(x).$$

91. Determinare il volume del solido ottenuto ruotando intorno all'asse delle x il segmento della retta d'equazione $y=3$ nell'intervallo $[0, 4]$.
(Il solido è un cilindro; si ottiene $W=36\pi$).
92. Generalizzare il problema precedente, determinando il volume del cilindro ottenuto ruotando il segmento della retta $y=k$ nell'intervallo $[0, a]$.
(Si trova $W=\pi k^2 a$. Osservando che il cilindro ha altezza $h=a$ e raggio di base $r=k$, si ritrova il risultato della geometria elementare: $W=\pi r^2 h$).
93. Determinare il volume del solido ottenuto ruotando intorno all'asse delle x il segmento della retta d'equazione $y=2x$ nell'intervallo $[0, 3]$.
(Il solido è un cono; si ottiene $W=36\pi$).
94. Determinare il volume del solido ottenuto ruotando intorno all'asse delle x il segmento della retta d'equazione $y=2x$ nell'intervallo $[3, 6]$.
(Il solido è un tronco di cono; si ottiene $W=252\pi$).
95. Generalizzare il problema 93, determinando il volume del cono ottenuto ruotando il segmento della retta d'equazione $y=mx$ nell'intervallo $[0, a]$.
(Si trova $W=\frac{1}{3}\pi m^2 a^3$. Osservando (fig. 14) che il cono ha altezza $h=a$ e raggio di base $r=ma$, si ritrova il risultato della geometria elementare: $W=\frac{1}{3}\pi r^2 h$).

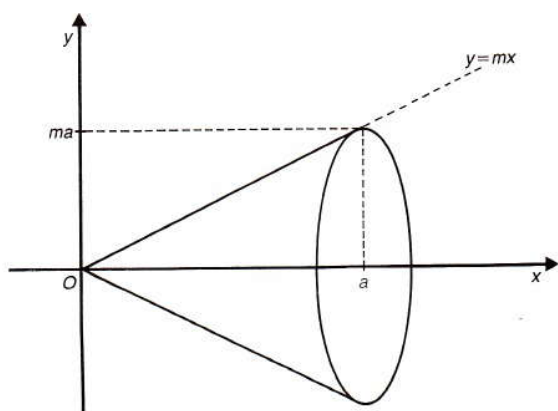


Fig. 14

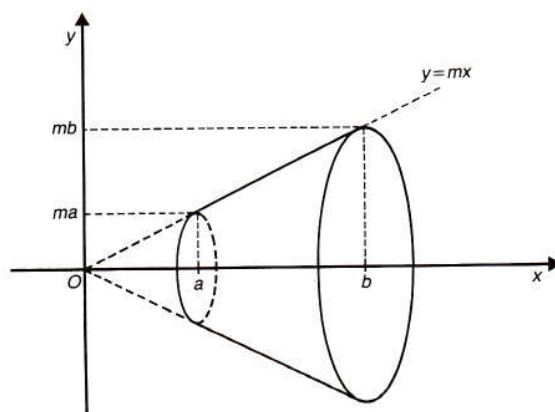


Fig. 15

96. Generalizzare il problema 94, determinando il volume del tronco di cono che si ottiene ruotando intorno all'asse delle x il segmento della retta d'equazione $y=mx$ nell'intervallo $[a, b]$.

(Si trova $W = \frac{1}{3} \pi m^2 (b^3 - a^3)$. Osservando (fig. 15) che in questo caso il tronco di cono ha altezza $h=b-a$ e raggi delle basi $r_1=ma$ e $r_2=mb$, si ritrova il noto risultato della geometria elementare:

$$W = \frac{1}{3} \pi h (r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2).$$

97. Determinare il volume del solido ottenuto ruotando intorno all'asse delle x la semicirconferenza d'equazione $y=\sqrt{1-x^2}$.

(Il solido è una sfera; si ottiene $W = \frac{4}{3} \pi$).

98. Determinare il volume del solido ottenuto ruotando intorno all'asse delle x l'arco di circonferenza d'equazione $y=\sqrt{1-x^2}$ nell'intervallo $\left[\frac{1}{4}, 1\right]$.

(Un solido è un segmento sferico ad una base; si ottiene $W = \frac{81}{192} \pi$).

99. Determinare il volume del solido ottenuto ruotando intorno all'asse delle x l'arco di circonferenza d'equazione $y=\sqrt{1-x^2}$ nell'intervallo $\left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$.

(Il solido è un segmento sferico a due basi; si ottiene $W = \frac{103}{192} \pi$).

100. Generalizzare il problema 97, determinando il volume della sfera che si ottiene ruotando intorno all'asse delle x la semicirconferenza d'equazione $y=\sqrt{r^2-x^2}$.

(Si ritrova il noto risultato della geometria elementare: la sfera di raggio r ha volume $W = \frac{4}{3} \pi r^3$).

101. Generalizzare il problema 98, determinando il volume del segmento sferico ad una base che si ottiene ruotando intorno all'asse delle x l'arco di circonferenza d'equazione $y=\sqrt{r^2-x^2}$ nell'intervallo $[a, r]$.

(Si trova $W = \frac{\pi}{3} (2r^3 + a^3 - 3ar^2)$. Osservando (fig. 16) che il segmento ha altezza $h=r-a$ e raggio $r_1=\sqrt{r^2-a^2}$, si può anche ritrovare il risultato della geometria elementare $W = \frac{\pi}{6} h (h^2 + 3r_1^2)$).

102. Generalizzare il problema 99, determinando il volume del segmento sferico a due basi che si ottiene ruotando intorno all'asse delle x l'arco di circonferenza d'equazione $y=\sqrt{r^2-x^2}$ nell'intervallo $[a, b]$.

(Si trova $W = \frac{\pi}{3} (3r^2(b-a) - (b^3 - a^3))$. Osservando (fig. 17) che il segmento ha altezza $h=b-a$ e raggi $r_1=\sqrt{r^2-a^2}$, $r_2=\sqrt{r^2-b^2}$ si può anche ritrovare il risultato della geometria elementare $W = \frac{\pi}{6} h (h^2 + 3r_1^2 + 3r_2^2)$).

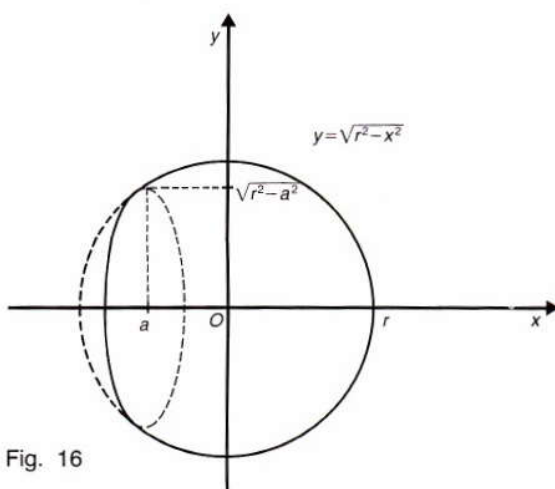


Fig. 16

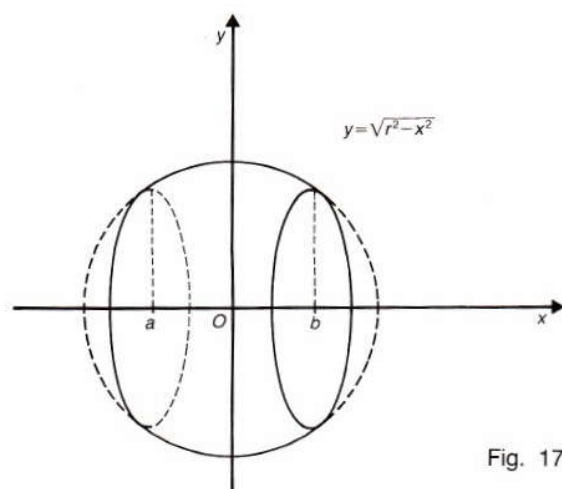


Fig. 17

103. Un'ellisse con l'asse maggiore lungo $2a$ e l'asse minore lungo $2b$ è disegnata sul piano cartesiano in modo da avere il centro in O e l'asse maggiore sull'asse delle x (fig. 18). Determinare il volume dell'ellissoide che si ottiene ruotando intorno all'asse delle x la semiellisse contenuta nel semipiano delle ordinate positive.

(L'ellisse ha equazione $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$; perciò l'arco

è il grafico della seguente funzione

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2},$$

definita per $-a \leq x \leq a$.

Il volume richiesto vale $W = \frac{4}{3} \pi ab^2$.

Se risulta $a=b=r$, la semiellisse diventa il semicerchio di raggio r e l'ellissoide diventa la sfera che ha raggio r e volume $w = \frac{4}{3} \pi r^3$.

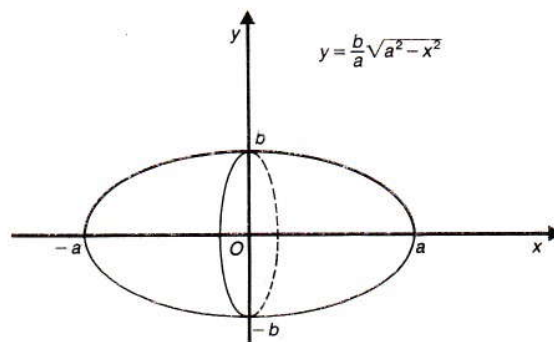


Fig. 18

104. Determinare il volume W del solido generato da una rotazione completa intorno all'asse delle x del triangolo che ha per vertici $O(0, 0)$ e i punti A e B , in cui la retta d'equazione $y = -3x + 6$ incontra gli assi cartesiani.

(Il solido è un cono di volume $W = 24\pi$).

105. Determinare il volume W del solido che si ottiene ruotando intorno all'asse delle x la figura limitata dall'asse delle x e dall'arco di parabola d'equazione $y = -x^2 + 2x$ nell'intervallo $[0, 2]$.

$$\left[W = \frac{16}{15} \pi \right]$$

106. Determinare il volume W del solido che si ottiene ruotando intorno all'asse della x la figura limitata dall'asse delle x e dall'arco di parabola d'equazione $y = -x^2 + 1$ nell'intervallo $[-1, 1]$.

$$\left[W = \frac{16}{15} \pi \right]$$

107. Determinare il volume W del solido che si ottiene ruotando intorno all'asse della x la figura limitata dall'asse delle x , dall'asse delle y e dall'arco di parabola d'equazione $y = x^2 - 4x + 4$ nell'intervallo $[0, 2]$.

$$\left[W = \frac{32}{5} \pi \right]$$

108. Determinare il volume W del solido che si ottiene ruotando intorno all'asse della x la figura limitata dall'asse delle x e dall'arco di curva d'equazione $y = \frac{1}{x+2}$ nell'intervallo $[0, 2]$.

$$\left[W = \frac{\pi}{4} \right]$$

109. Determinare il volume W del solido che si ottiene ruotando intorno all'asse della x la figura limitata dall'asse delle x e dall'arco di senoide d'equazione $y = \sin x$ nell'intervallo $[0, \pi]$.

(Per il calcolo dell'integrale vedi esercizio 209 del cap. 6, si ottiene $W = \frac{\pi^2}{2}$).

110. Determinare il volume W del solido che si ottiene ruotando intorno all'asse della x la figura limitata dall'asse delle x e dall'arco di curva d'equazione $y = \tan x$ nell'intervallo $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.

(Per il calcolo dell'integrale vedi esercizio 212 del cap. 6, si ottiene $W = \pi - \frac{\pi^2}{4}$).

111. Determinare l'area T della superficie limitata dall'asse delle x e dall'arco di curva d'equazione $y = \frac{1}{x^2}$ nell'intervallo $[1, a]$ (con $a > 0$). Determinare il volume W del solido che si ottiene ruotando intorno all'asse delle x tale superficie.

Calcolare il limite per $a \rightarrow +\infty$ dell'area T e del volume W .

$$\left[T = 1 - \frac{1}{a}, \quad W = \pi \left(3 - \frac{3}{a^3} \right) \right]$$

112. Determinare l'area T della superficie limitata dall'asse delle x e dall'arco di curva d'equazione $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ nell'intervallo $[1, a]$ (con $a > 0$). Determinare il volume W del solido che si ottiene ruotando intorno all'asse delle x tale superficie.
Calcolare il limite per $a \rightarrow +\infty$ dell'area T e del volume W .
 $[T = 2(\sqrt{a} - 1), W = \pi \ln a]$
113. Determinare l'area T della superficie limitata dall'asse delle x e dall'arco di esponenziale d'equazione $y = e^x$ nell'intervallo $[0, a]$ (con $a > 0$). Determinare il volume W del solido che si ottiene ruotando intorno all'asse delle x tale superficie.
Calcolare il limite per $a \rightarrow +\infty$ dell'area T e del volume W .
 $[T = e^a - 1, W = \frac{\pi}{2}(e^{2a} - 1)]$
114. Determinare l'area T della superficie limitata dall'asse delle x e dall'arco di esponenziale d'equazione $y = e^x$ nell'intervallo $[a, 0]$ (con $a < 0$). Determinare il volume W del solido che si ottiene ruotando intorno all'asse delle x tale superficie.
Calcolare il limite per $a \rightarrow -\infty$ dell'area T e del volume W .
 $[T = 1 - e^a, W = \frac{\pi}{2}(1 - e^{2a})]$

4. Il calcolo integrale in fisica

L'integrale indefinito

115. La velocità di una pallina lasciata cadere da una certa altezza nel vuoto varia secondo la legge
 $v = gt$
dove g è l'accelerazione di gravità costante. Scrivere la legge che regola la distanza s al passare del tempo.
116. La velocità di una pallina lanciata con velocità v_0 verticale verso l'alto nel vuoto varia secondo la legge
 $v = v_0 - gt$
dove g è una costante. Scrivere la legge che regola la distanza s al passare del tempo t .
117. La velocità di una pallina lasciata cadere da una certa altezza nell'aria varia secondo la legge
 $v = A(1 - e^{-bt})$
dove A e b sono due costanti. Scrivere la legge che regola la distanza s al passare del tempo t .
118. Data la legge $p(t)$ con cui varia la portata di un fiume al variare del tempo, scrivere la legge che regola la massa m che attraversa una data sezione del fiume al passare del tempo t .
(Vedere anche l'esercizio 4 del cap. 4).
119. Data la legge $i(t)$ con cui varia la corrente che circola in un conduttore, scrivere la legge che regola la quantità di carica q che attraversa una data sezione del conduttore al passare del tempo t .
(Vedere anche l'esercizio 5 del cap. 4 e l'esercizio 535 del cap. 5).
120. Calcolare la quantità di carica che passa attraverso una sezione di un conduttore percorso da una corrente alternata di intensità i data da $i = I_M \sin \omega t$ per un tempo $T = \frac{\pi}{\omega}$
 $[Q = \frac{2}{\omega} I_M]$
-

Valore medio di una funzione

Per svolgere gli esercizi dal 121 al 123, ricordare¹ che il valore medio μ di una funzione, definita e continua in un intervallo $[a, b]$ è dato da

$$\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

121. Considerare un pendolo che si muove di moto armonico con una velocità data da $v=v_0 \sin \omega t$ e rispondere ai seguenti quesiti:

- calcolare il valore medio della velocità in mezzo periodo,
- verificare che il valore medio della velocità in un periodo vale 0,
- calcolare il valore medio dell'energia cinetica $E_c = \frac{1}{2}mv^2$ in un periodo.

Interpretare i risultati ottenuti dal punto di vista della fisica.

122. Considerare una corrente alternata con l'intensità i data da $i=I_M \sin \omega t$ e rispondere ai seguenti quesiti:

- calcolare il valore medio dell'intensità in mezzo periodo,
- verificare che il valore medio dell'intensità in un periodo vale 0,
- calcolare il valore medio della potenza dissipata $\dot{W}=RI^2$ in un periodo.

Interpretare i risultati ottenuti dal punto di vista della fisica.

123. Considerare una tensione alternata regolata dalla legge $V=V_M \sin \omega t$ e rispondere ai seguenti quesiti:

- calcolare il valore medio della tensione in mezzo periodo,
- verificare che il valore medio della tensione in un periodo vale 0,
- calcolare il valore medio della potenza dissipata $W=\frac{V^2}{R}$ in un periodo.

Interpretare i risultati ottenuti dal punto di vista della fisica.

L'integrale definito

124. Nel nucleo di un atomo di carbonio è concentrata una carica $Q \approx 6 \cdot 10^{-19} C$. Un elettrone di carica $q \approx 10^{-19} C$ si trova nell'orbita più vicina al nucleo e cioè a distanza $r_1 \approx 5 \cdot 10^{-11} m$. Risolvere i seguenti quesiti:

- calcolare il lavoro che si deve compiere per portare l'elettrone sulla seconda orbita e cioè a distanza $r_2=4r_1$,
- calcolare il lavoro che si deve compiere per "estrarre" l'elettrone dall'atomo e cioè portarlo a distanza infinita dal nucleo.

(Tenere presente che fra il nucleo e l'elettrone agisce una forza elettrostatica attrattiva che ha l'intensità F data da

$$F = K \cdot \frac{Q \cdot q}{r^2}, \quad \text{con } K \approx 10^{10}.$$

Perciò si può ripetere un procedimento analogo a quello seguito per calcolare il lavoro della forza gravitazionale).

¹ Vedi esercizio 44 del cap. 6.

125. Considerare una molla fissata in un punto P di una parete, scegliendo come asse delle x la direzione della molla (fig. 19); per allungare la molla da una lunghezza x_1 ad una lunghezza x_2 si deve applicare una forza di intensità variabile data da $F=kx$. Calcolare il lavoro L che si compie per produrre l'allungamento.

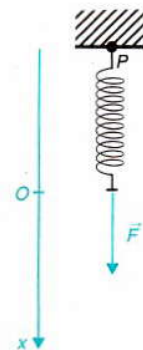


Fig. 19

126. Calcolare il lavoro L necessario per caricare un condensatore di capacità C , cioè per distribuire una carica Q sulle due piastre.

(Conviene schematizzare il processo di carica nel modo seguente:

le due piastre sono inizialmente neutre; un agente esterno (abituamente una batteria) toglie elettroni da una piastra e li deposita sull'altra, compiendo un lavoro L che resta immagazzinato nel condensatore sotto forma di energia potenziale elettrica.

Per calcolare questo lavoro L è opportuno tenere presente che:

- per spostare una carica Q da un punto A ad un punto B di un campo elettrico, occorre un lavoro L , dato da

$$L = QV, \quad (1)$$

dove V è la tensione costante fra i punti A e B ;

- nel caso del condensatore, la tensione V fra le due piastre è data da

$$V = \frac{q}{C}, \quad (2)$$

dove q è la carica sulle piastre e C è la capacità del condensatore;

- durante il processo di carica, V varia secondo la legge (2) e dunque il calcolo di L offre delle difficoltà.

Si può allora ragionare nel modo seguente: si fraziona Q in n particelle con carica h , tanto piccola da lasciare inalterata la tensione V . Così si può calcolare il lavoro per spostare ogni carica h e, quindi, determinare il lavoro che si ottiene sommando i vari contributi. Si ha:

$$L \approx \frac{q_1}{C}h + \frac{q_2}{C}h + \dots + \frac{q_n}{C}h.$$

In questo modo si ottiene solo un valore approssimato del lavoro richiesto, ma l'approssimazione è tanto migliore, quanto più piccola è l'ampiezza h degli intervallini; risulta dunque:

$$L = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q^2}{C}.$$

127. Calcolare l'energia che dissipa sotto forma di calore una corrente che ha intensità i variabile nel tempo, quando attraversa un filo conduttore per T secondi.

(Tenere presente che, quando una corrente di intensità I costante attraversa un filo conduttore di resistenza R per un periodo di tempo lungo T secondi, si dissipa sotto forma di calore un'energia L data da:

$$L = RI^2T. \quad (1)$$

Se invece il filo viene attraversato da una corrente che ha intensità $i(t)$, variabile nel tempo, per calcolare l'energia dissipata L ci si basa sul calcolo integrale: si fraziona l'intervallo di tempo $[0, T]$ in n parti molto piccole, ciascuna lunga h ; in ogni intervallo, si considera l'intensità di corrente costante e data dal valore che assume, per esempio, al centro dell'intervallo. Così si può calcolare l'energia dissipata in ogni intervallo e, quindi, calcolare l'energia totale sommando i contributi relativi a tutti gli intervalli. Si ottiene:

$$L \approx Ri_1^2h + Ri_2^2h + \dots + Ri_n^2h.$$

In questo modo si ottiene un valore approssimato dell'energia L , ma l'approssimazione migliora sempre di più quanto più è piccola l'ampiezza h degli intervallini; risulta dunque:

$$L = \int_0^T Ri^2(t) dt.$$

128. Calcolare l'intensità efficace i_{eff} di una corrente alternata di intensità massima I_M e pulsazione ω .
 (Tenere presente che
- l'intensità della corrente assegnata varia nel tempo secondo la legge

$$i = I_M \sin \omega t,$$
 - i_{eff} è l'intensità della corrente continua che dissipa la stessa energia L circolando nello stesso conduttore durante un tempo $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

Calcolando il valore di L dato dalla formula ottenuta nel precedente esercizio in corrispondenza al valore $T = \frac{2\pi}{\omega}$, si ottiene (vedi anche l'esercizio 209 del cap. 6)

$$L = \int_0^T R I_M^2 \sin^2 \omega t \, dt = \dots$$

Il risultato ottenuto si può riscrivere nella forma seguente:

$$L = R \left(\frac{I_M}{\sqrt{2}} \right)^2 T$$

trovando una formula analoga alla (1), valida per correnti continue; si ottiene dunque

$$i_{\text{eff}} = \frac{I_M}{\sqrt{2}}.$$

Baricentro di una superficie e teorema di Guldino

Cominciamo col ricordare alcune nozioni di fisica: se disponiamo sull'asse delle x due particelle di massa m_1 e m_2 nei punti di ascissa x_1 e x_2 (fig. 20), il centro di massa di questo sistema di particelle è il punto G che ha l'ascissa x_G data da

$$x_G = \frac{x_1 \cdot m_1 + x_2 \cdot m_2}{M}, \quad \text{con } M = m_1 + m_2 \quad (1)$$

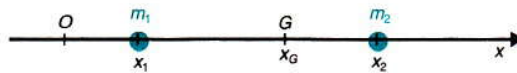


Fig. 20

Questo punto è caratterizzato dalla seguente proprietà: indicando con M la massa totale delle palline, si ha

$$M x_G = x_1 m_1 + x_2 m_2.$$

Questa proprietà, che suggerisce di sostituire l'insieme delle due palline con un'unica pallina di massa M concentrata nel punto G di ascissa x_G , permette di generalizzare la nozione di baricentro. Se sono date nei punti di ascissa x_1 , x_2 e x_3 tre palline di masse m_1 , m_2 e m_3 , si può procedere così:

- si sostituiscono le prime due palline con un'unica pallina che abbia massa $M = m_1 + m_2$ e sia disposta nel punto G di ascissa x_G , data dalla (1);
- si trova il baricentro G' delle due masse M e m_3 ;
- svolgendo i calcoli si ottiene

$$x_{G'} = \frac{x_1 \cdot m_1 + x_2 \cdot m_2 + x_3 \cdot m_3}{M}, \quad \text{con } M = m_1 + m_2 + m_3.$$

E così, ripetendo questo procedimento, si può trovare il baricentro di un sistema di n masse m_1 , m_2 , ..., m_n , distribuite nei punti x_1 , x_2 , ..., x_n ; si ottiene che il baricentro è il punto G con l'ascissa x_G , data da

$$x_G = \frac{x_1 \cdot m_1 + x_2 \cdot m_2 + \dots + x_n \cdot m_n}{M}, \quad \text{con } m = m_1 + m_2 + \dots + m_n \quad (2)$$

Proviamo ora a determinare il baricentro di una sbarra lunga a . Se la sbarra è costruita con un materiale omogeneo di densità ϱ , si può ragionare così (fig. 21): si pensa la sbarra come se fosse composta di n particelle che hanno lunghezza h e quindi massa ϱh e sono disposte, per esempio, nei punti di ascissa

$$x_1 = \frac{h}{2}, \quad x_2 = x_1 + h, \quad \dots, \quad x_n = x_{(n-1)} + h.$$

Possiamo in questo modo valutare approssimativamente l'ascissa x_G , valendoci della (2) e ottenendo

$$x_G \approx \frac{x_1 \cdot \varrho h + x_2 \cdot \varrho h + \dots + x_n \cdot \varrho h}{\varrho a} = \frac{x_1 \cdot h + x_2 \cdot h + \dots + x_n \cdot h}{a} \quad (3)$$

In questo modo si ottiene un valore approssimato dell'ascissa x_G , ma l'approssimazione migliora sempre di più quanto più è piccola l'ampiezza h degli intervallini; risulta dunque:

$$x_G = \frac{1}{a} \cdot \int_0^a x \, dx \quad (4)$$

Svolgendo il calcolo, si ottiene

$$x_G = \frac{a}{2};$$

si trova così un intuitivo risultato: il baricentro G di una sbarra omogenea è il punto medio della sbarra.

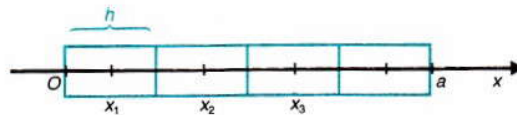


Fig. 21

La nozione di baricentro si può estendere al caso in cui n masse non siano allineate sull'asse delle x , ma disposte sul piano cartesiano nei punti che hanno le coordinate (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , ..., (x_n, y_n) ; si trova che il baricentro G è un punto del piano con le coordinate (x_G, y_G) , date da

$$x_G = \frac{x_1 \cdot m_1 + \dots + x_n \cdot m_n}{M}, \quad y_G = \frac{y_1 \cdot m_1 + \dots + y_n \cdot m_n}{M} \quad \text{con} \quad M = m_1 + \dots + m_n \quad (5)$$

E infine l'estensione più interessante legata al calcolo integrale: calcolare il baricentro di una superficie piana a contorno curvilineo.

Vediamo qui un caso semplice che presenta le seguenti caratteristiche:

- la superficie corrisponde al trapezoide (fig. 22) delimitato dall'arco AB di una funzione continua nell'intervallo $[a, b]$,
- la superficie è composta di un materiale omogeneo di densità ϱ e dunque ha una massa totale data da

$$M = \varrho T,$$

dove T indica l'area della superficie.

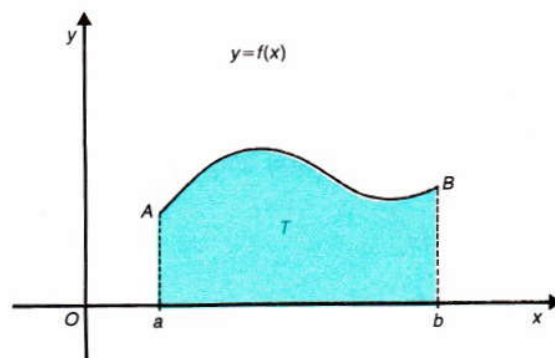


Fig. 22

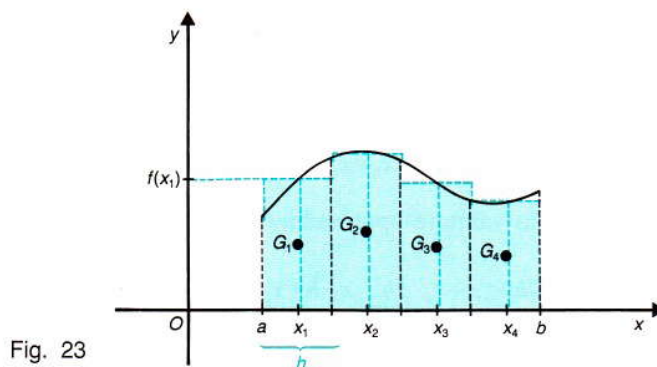


Fig. 23

Si può allora ragionare così (fig. 23):

- si divide l'intervallo $[a, b]$ in n parti, ciascuna lunga h e, all'interno di ogni intervallo, si considera il punto medio, ottenendo

$$x_1 = a + \frac{h}{2}, \quad x_2 = x_1 + h, \quad \dots, \quad x_n = x_{n-1} + h,$$

- si considera la superficie di n rettangolini di massa

$$m_1 = \varrho \cdot f(x_1)h, \quad m_2 = \varrho \cdot f(x_2)h, \quad \dots, \quad m_n = \varrho \cdot f(x_n)h,$$

- si trova il baricentro di ogni rettangolino, come se fosse una sbarretta appoggiata all'asse delle x , basandosi sulla (4); si hanno così gli n punti

$$G_i \left(x_i, \frac{1}{2} \cdot f(x_i) \right) \quad \text{con massa } m_i = \varrho \cdot f(x_i)h, \dots,$$

- si calcola il baricentro di questi n punti basandosi sulla (5); si ottiene

$$x_G = \frac{x_1 \cdot m_1 + \dots + x_n \cdot m_n}{M} = \frac{\varrho \cdot (x_1 \cdot f(x_1) \cdot h + \dots + x_n \cdot f(x_n) \cdot h)}{\varrho \cdot T},$$

$$y_G = \frac{y_1 \cdot m_1 + \dots + y_n \cdot m_n}{M} = \frac{\varrho \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot f(x_1) \cdot f(x_1) \cdot h + \dots + \frac{1}{2} \cdot f(x_n) \cdot f(x_n) \cdot h \right)}{\varrho \cdot T}.$$

Si ottengono così dei valori approssimati delle coordinate x_G, y_G , ma l'approssimazione migliora sempre di più quanto più è piccola l'ampiezza h degli intervallini; risulta dunque:

$$x_G = \frac{1}{T} \cdot \int_a^b (x \cdot f(x)) dx, \quad y_G = \frac{1}{2T} \cdot \int_a^b f^2(x) dx.$$

In questo modo è completamente determinato il procedimento per calcolare il baricentro $G(x_G, y_G)$, visto che l'area T della superficie è data da

$$T = \int_a^b f(x) dx.$$

A partire da questi risultati si può scoprire un importante teorema, effettuando una rotazione della superficie esaminata intorno all'asse delle x (fig. 24). Si ha che:

- la superficie genera un solido con il volume W , dato da

$$W = \pi \cdot \int_a^b f^2(x) dx,$$

- il baricentro G descrive una circonferenza lunghezza c , data da

$$c = 2\pi \cdot y_G = \frac{\pi}{T} \cdot \int_a^b f^2(x) dx.$$

Confrontando le ultime due formule, si trova che

$$W = Tc.$$

Questo è il risultato noto anche con il nome di **teorema di Guldino**¹, che può essere espresso nel modo seguente:

il volume di un solido generato dalla rotazione di una superficie intorno ad un asse si può ottenere moltiplicando l'area T della superficie per la lunghezza c della circonferenza descritta dal baricentro G della superficie.

Gli esercizi dal 129 al 132 conducono ad impadronirsi del teorema di Guldino e della nozione di baricentro di una superficie.

- 129.** Determinare il volume W del solido ottenuto ruotando intorno all'asse delle x un cerchio che ha raggio r e centro $C(0, h)$, con $h > r$.

(Il solido (fig. 25) prende il nome di *toro*; per motivi di simmetria, il baricentro del cerchio cade nel centro C e si ottiene $W = 2\pi^2 r^2 h$.)

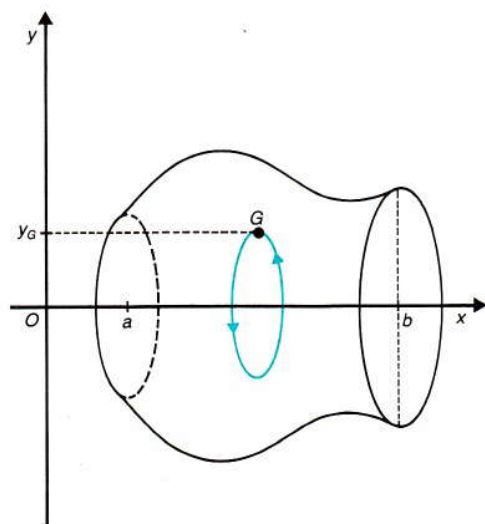


Fig. 24

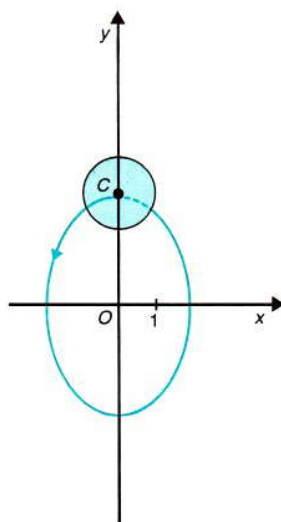


Fig. 25

- 130.** Determinare il baricentro G del segmento parabolico delimitato dalla parabola $y = 1 - x^2$ e dall'asse delle x .

[Tenere presente che, per il teorema di Archimede, esposto nell'esercizio 80, risulta $T = \frac{4}{3}$; si ottiene $G(0, \frac{2}{5})$.]

- 131.** Determinare il baricentro G del semicerchio delimitato dalla semicirconferenza d'equazione $y = \sqrt{1 - x^2}$ e dall'asse delle x .

(L'esercizio si svolge molto rapidamente applicando opportunamente il teorema di Guldino:

- il semicerchio ha area $T = \pi$,
- ruotando il semicerchio intorno all'asse delle x si ottiene la sfera di volume $W = \frac{4}{3} \pi r^3$,
- deve essere $W = T \cdot 2\pi y_G$...

Si ottiene $G(0, \frac{2}{3\pi})$.

- 132.** Generalizzare l'esercizio precedente, determinando il baricentro G del semicerchio delimitato dalla semicirconferenza d'equazione $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ e dall'asse delle x .

(Risulta $G(0, \frac{2r}{3\pi})$.)

¹ Il teorema fu presentato dal matematico svizzero P. Guldin (1577-1643), e dimostrato in forma rigorosa da B. Cavalieri, allievo di Galileo. Il teorema vale nel caso in cui l'asse di rotazione è nello stesso piano della superficie, ma non attraversa la superficie.