6
Esercizi

1. Dal calcolo di aree all'integrale definito

Determinare il risultato degli integrali definiti proposti negli esercizi dall'1 all'11, calcolando le corrispondenti aree con un procedimento analogo a quello seguito nel testo.

1. $\int_0^4 2\,dx, \quad \int_2^6 4\,dx$

2. $\int_0^3 x\,dx, \quad \int_0^5 x\,dx$

3. $\int_1^3 x\,dx, \quad \int_2^5 x\,dx$

4. $\int_0^4 \frac{1}{2}\cdot x dx, \quad \int_2^6 \frac{1}{2}\cdot x\,dx$

5. $\int_0^4 4x\,dx, \quad \int_0^4 4x\,dx$

6. $\int_0^2 (-2x+4)\,dx, \quad \int_2^1 (-2x+4)\,dx$

7. $\int_0^3 \left(-\frac{1}{2}x+4\right)dx, \quad \int_0^4 \left(-\frac{1}{2}x+4\right)dx$

8. $\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}\,dx, \quad \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$

9. $\int_{-2}^2 \sqrt{4-x^2}\,dx, \quad \int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx$

(Tenere presente che le funzioni $y=\sqrt{1-x^2}$ e $y=\sqrt{4-x^2}$ descrivono semicirconferenze di centro O).

10. $\int_0^2 \sqrt{2x-x^2}\,dx, \quad \int_1^2 \sqrt{2x-x^2}\,dx$

11. $\int_0^4 \sqrt{4x-x^2}\,dx, \qquad \int_2^4 \sqrt{4x-x^2}\,dx$

(Tenere presente che le funzioni $y=\sqrt{2x-x^2}$ e $y=\sqrt{4x-x^2}$ descrivono semicirconferenze).

12. Esaminare una funzione del tipo $y=mx$ (con $m>0$) nell'intervallo $[0, b]$ e determinare $T=\int_0^b mx\,dx$ in tre modi:

I) valutando l'area s_n degli scaloidi inscritti e calcolando $T=\lim_{n\to\infty} s_n$,

II) valutando l'area S_n degli scaloidi circoscritti e calcolando $T=\lim_{n\to\infty} S_n$,

III) calcolando direttamente T, che è l'area di un triangolo.

(Basandosi sulla fig. 1, per rispondere al 1° quesito, si trova:

$$s_n=0\cdot h+h\cdot mh+h\cdot 2mh+\ldots+h\cdot(n-1)mh=mh^2\cdot(1+2+\ldots+n-1)$$

e dato che risulta $1+2+\ldots+n-1=\dfrac{n(n-1)}{2}$ *e* $h=\dfrac{b}{n}$, *si ha:*

$$s_n=m\cdot\frac{b^2}{n^2}\cdot\frac{n(n-1)}{2}=\frac{mb^2}{2}\cdot\left(\frac{n-1}{n}\right)$$

Infine, tenendo presente che risulta

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{n}=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)=1,$$

si ottiene $\lim_{n\to\infty} s_n=\dfrac{mb^2}{2}$.

procedere analogamente per rispondere al 2° quesito. Questi due procedimenti, lunghi e complicati rispetto al 3°, permettono di applicare il metodo degli scaloidi per calcolare l'area in un caso semplice).

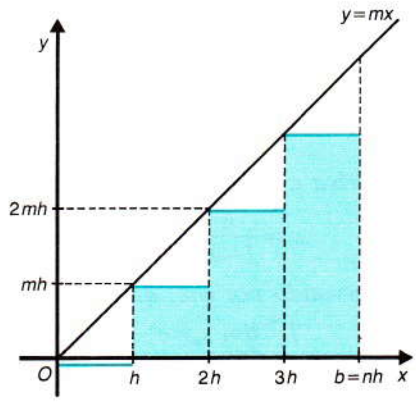

Fig. 1

13. Esaminare una funzione del tipo $y=mx+q$ nell'intervallo $[a, b]$ e determinare $T=\int_a^b (mx+q)dx$ in tre modi:

I) valutando l'area s_n degli scaloidi inscritti e calcolando $T=\lim_{n\to\infty} s_n$,

II) valutando l'area S_n degli scaloidi circoscritti e calcolando $T=\lim_{n\to\infty} S_n$,

III) calcolando direttamente l'area T, che è l'area di un trapezio.

(Valgono considerazioni analoghe a quelle svolte nell'esercizio precedente; si trova, per esempio:

$$s_n=(ma+q)nh+mh^2(1+2+\ldots+n-1)=(ma+q)(b-a)+\frac{m(b-a)^2}{2}\left(\frac{n-1}{n}\right)$$

e quindi

$$T=\lim_{n\to\infty} s_n=(ma+q)(b-a)+\frac{m(b-a)^2}{2}.$$

Svolgendo i calcoli indicati, si può anche scrivere:

$$T=(b-a)\cdot\frac{(ma+q)+(mb+q)}{2},$$

ottenendo la stessa formula a cui si arriva con il 3° procedimento).

14. Esaminare la funzione $y=e^x$ nell'intervallo $[a, b]$ e determinare $T=\int_a^b e^x\, dx$ in due modi:

I) valutando l'area s_n degli scaloidi inscritti e calcolando $T=\lim_{n\to\infty} s_n$,

II) valutando l'area S_n degli scaloidi circoscritti e calcolando $T=\lim_{n\to\infty} S_n$.

(Basandosi sulla fig. 2, per rispondere al 1° quesito, si trova:

$$s_n=h\cdot e^a+h\cdot e^{a+h}+h\cdot e^{a+2h}+\ldots+h\cdot e^{a+(n-1)h}$$

ossia

$$s_n=h\cdot e^a\cdot(1+e^h+(e^h)^2+\ldots+(e^h)^{(n-1)}).$$

Ora, conviene ricordare i risultati sulle ridotte di una serie geometrica esposti nei Complementi del cap. 2 e scrivere che, per la serie geometrica di ragione e^h, risulta:

$$1+e^h+(e^h)^2+\ldots+(e^h)^{n-1}=\frac{1-(e^h)^n}{1-e^h}=\frac{1-e^{nh}}{1-e^h},$$

e quindi

$$s_n=\frac{h\cdot e^a\cdot(1-e^{nh})}{1-e^h}=\frac{h}{1-e^h}\cdot(e^a-e^{a+nh}).$$

Tenendo presente che risulta

$$h=\frac{b-a}{n}, \qquad e \text{ quindi} \qquad a+nh=b,$$

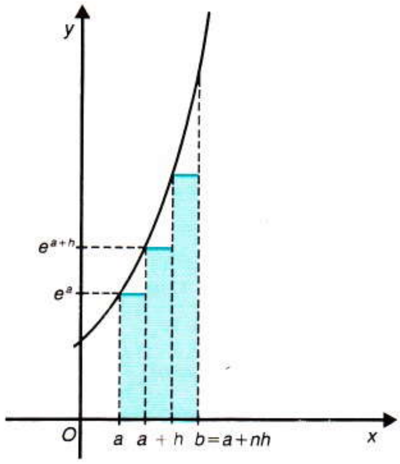

Fig. 2

si arriva a scrivere:

$$s_n=\frac{h}{1-e^h}\cdot(e^a-e^b).$$

Osservando poi che, quando $n\to\infty$, $h\to 0$ e risulta $\lim_{h\to 0}\frac{h}{1-e^h}=-1$, si conclude che

$$T=\lim_{n\to\infty} s_n=e^b-e^a.$$

Procedere analogamente per risolvere il 2° quesito.
Il procedimento è concettualmente semplice, ma sempre lungo e complicato da realizzare. Nei prossimi paragrafi si troverà un procedimento per calcolare le aree che è concettualmente sottile, ma molto semplice da realizzare, vedi teorema di Torricelli-Barrow).

2. Proprietà dell'integrale definito

Esaminare le uguaglianze proposte negli esercizi dal 15 al 20 e dimostrare che sono vere in due modi:

I) calcolando le corrispondenti aree con un procedimento analogo a quello seguito nel testo;
II) applicando la 2ª proprietà esposta nel testo e cioè

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx.$$

15. $\int_0^4 3\, dx=\int_0^1 3\, dx+\int_1^4 3\, dx, \qquad \int_0^1 3\, dx=\int_0^4 3\, dx-\int_1^4 3\, dx$

16. $\int_0^5 x\,dx=\int_0^3 x\,dx+\int_3^5 x\,dx, \qquad \int_3^5 x\,dx=\int_0^5 x\,dx-\int_0^3 x\,dx$

17. $\int_0^6 \frac{1}{2}x\,dx=\int_0^4 \frac{1}{2}x\,dx+\int_4^6 \frac{1}{2}x\,dx, \qquad \int_4^6 \frac{1}{2}x\,dx=\int_0^6 \frac{1}{2}x\,dx-\int_0^4 \frac{1}{2}x\,dx$

18. $\int_0^3 (-x+3)dx=\int_0^1 (-x+3)dx+\int_1^3 (-x+3)dx, \qquad \int_1^3 (-x+3)dx=\int_0^3 (-x+3)dx-\int_0^1 (-x+3)dx$

19. $\int_0^4 (2x+1)dx=\int_0^3 (2x+1)dx+\int_3^4 (2x+1)dx$

20. $\int_a^b (mx+q)dx=\int_a^c (mx+q)dx+\int_c^b (mx+q)dx$

21. Valersi della 1ª e della 2ª proprietà degli integrali per giustificare la seguente estensione del concetto di integrale definito:

$$\text{se risulta } c<a, \text{ si ha } \int_a^c f(x)dx=-\int_c^a f(x)dx.$$

(Tenere presente che in questo modo risulta

$$\int_a^c f(x)dx+\int_c^a f(x)dx=\int_a^a f(x)dx=\ldots)$$

Esaminare le uguaglianze proposte negli esercizi dal 22 al 27 e dimostrare che sono vere in due modi:

I) calcolando le corrispondenti aree con un procedimento analogo a quello seguito nel testo;
II) applicando la 3ª proprietà esposta nel testo e cioè

$$\int_a^b [mf(x)]dx=m\int_a^b f(x)dx$$

22. $\int_1^5 6\,dx=2\int_1^5 3\,dx, \qquad \int_1^5 3\,dx=\frac{1}{2}\int_1^5 6\,dx$

23. $\int_0^3 4x\,dx=4\int_0^3 x\,dx, \qquad \int_0^3 x\,dx=\frac{1}{4}\int_0^3 4x\,dx$

24. $\int_1^5 \frac{1}{2}x\,dx=\frac{1}{2}\int_1^5 x\,dx, \qquad \int_1^5 x\,dx=2\int_1^5 \frac{1}{2}x\,dx$

25. $\int_0^3 (2x+4)dx=2\int_0^3 (x+2)dx$

26. $\int_2^6 \left(\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}\right)dx=\frac{1}{3}\int_2^6 (x+2)dx$

27. $\int_a^b mx\,dx = m\int_a^b x\,dx$

28. Calcolare l'area T racchiusa dall'asse delle x e dall'arco di ellisse che ha equazione $y=\sqrt{\frac{1}{4}-\frac{1}{4}x^2}$.

(Tenere presente che risulta

$$T=\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1}{4}-\frac{1}{4}x^2}\,dx=\frac{1}{2}\cdot\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx$$

e rivedere l'esercizio 8).

29. Calcolare l'area T racchiusa dall'asse delle x e dall'arco di ellisse che ha equazione $y=\sqrt{1-\frac{1}{4}\cdot x^2}$.

(Tenere presente che risulta

$$T=\int_{-2}^{2}\sqrt{1-\frac{1}{4}\cdot x^2}\,dx=\frac{1}{2}\cdot\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}\,dx$$

e rivedere l'esercizio 9).

Esaminare le uguaglianze proposte negli esercizi dal 30 al 33 e dimostrare che sono vere in due modi:

I) calcolando le corrispondenti aree con un procedimento analogo a quello seguito nel testo;
II) applicando la 4ª proprietà esposta nel testo e cioè

$$\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx=\int_a^b [f(x)+g(x)]dx.$$

30. $\int_0^4 x\,dx+\int_0^4 3\,dx=\int_0^4 (x+3)dx$

31. $\int_0^6 \left(\frac{1}{3}x+2\right)dx=\int_0^6 \frac{1}{3}x\,dx+\int_0^6 2\,dx$

32. $\int_2^8 \left(4-\frac{1}{2}x\right)dx=\int_2^8 4\,dx-\int_2^8 \frac{1}{2}x\,dx$

33. $\int_a^b (mx+q)dx=\int_a^b mx\,dx+\int_0^4 q\,dx$

Esaminare le uguaglianze proposte negli esercizi dal 34 al 37 e dimostrare che sono vere in due modi:

I) calcolando le corrispondenti aree con un procedimento analogo a quello seguito nel testo;
II) applicando sia la 3ª che la 4ª proprietà.

34. $\int_0^3 (2x+5)dx=2\int_0^3 x\,dx+5\int_0^3 1\,dx$

35. $\int_3^9 \left(\frac{1}{3}x+4\right)dx=\frac{1}{3}\int_3^9 x\,dx+4\int_3^9 1\,dx$

36. $\int_a^b [mx+q]dx=m\int_a^b x\,dx+q\int_a^b 1\,dx$

37. $\int_a^b [hf(x)+kg(x)]dx=h\int_a^b f(x)dx+k\int_a^b g(x)dx$

Il teorema della media

Gli esercizi dal 38 al 45 conducono a riflettere sul teorema della media, che ora richiamiamo:
data una funzione $y=f(x)$, definita e continua in un intervallo $[a, b]$, si può sempre trovare. all'interno dell'intervallo $[a, b]$, almeno un valore c per cui risulti:

$$\int_a^b f(x)dx=(b-a)f(c).$$

38. Determinare l'ascissa c per cui risulta

$$\int_0^3 x\,dx=3c.$$

(Si trova $c=\frac{3}{2}$, cioè il punto medio dell'intervallo $[0, 3]$).

39. Determinare l'ascissa c per cui risulta

$$\int_1^6 x\,dx=(6-1)c.$$

(Si trova $c=\frac{7}{2}$, cioè il punto medio dell'intervallo $[1, 6]$).

40. Determinare l'ascissa c per cui risulta

$$\int_0^b x\,dx=bc.$$

(Si trova $c=\frac{b}{2}$, cioè il punto medio dell'intervallo $[0, b]$).

41. Determinare l'ascissa c per cui risulta

$$\int_a^b x\,dx=(b-a)c.$$

(Si trova $c=\frac{a+b}{2}$, cioè il punto medio dell'intervallo $[a, b]$).

42. Determinare l'ascissa c per cui risulta

$$\int_a^b (mx+q)dx=(b-a)(mc+q).$$

(Si trova $c=\frac{a+b}{2}$, cioè il punto medio dell'intervallo $[a, b]$).

43. Determinare l'ascissa c per cui risulta

$$\int_0^4 e^x\,dx=4e^c.$$

(Dall'esercizio 14 risulta $e^c=\frac{e^4-1}{4}$, cioè $e^c\approx 13{,}4$, da cui $c\approx 2{,}6$. In questo caso c non è il punto medio dell'intervallo $[0, 4]$).

44. Data una funzione definita e continua in un intervallo $[a, b]$, dividere l'intervallo in n parti uguali, lunghe $h=\frac{b-a}{n}$ e determinare i punti

$$x_1=a+h, \quad x_2=a+2h, \ldots, \quad x_n=a+nh=b.$$

Rispondere quindi ai seguenti quesiti:

- determinare la media y_m degli n valori $f(x_1)$, $f(x_2)$. ..., $f(x_n)$;
- determinare il valore medio μ della funzione, nell'intervallo $[a, b]$, calcolando $\lim_{n\to\infty} y_m=\mu$;
- verificare che risulta $\mu=\frac{1}{b-a}\cdot\int_a^b f(x)dx$.

(Si ha $y_m=\frac{f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n)}{n}=[f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n)]\cdot\frac{h}{b-a}, \ldots$*)*

45. Dopo aver svolto l'esercizio precedente, esaminare le seguenti affermazioni, relative ad una funzione $y=f(x)$, definita e continua in un intervallo $[a, b]$, e verificare che si tratta di enunciati equivalenti del teorema della media:

- «esiste almeno un valore c, all'interno dell'intervallo $[a, b]$, tale che $f(c)$ risulti uguale al valore medio μ della funzione nell'intervallo $[a, b]$,
- «il valore medio di una funzione continua in un intervallo $[a, b]$ appartiene all'immagine della funzione».

3. Il teorema fondamentale del calcolo integrale

Gli esercizi dal 46 al 54 conducono a riflettere sul teorema di Torricelli-Barrow, che ora richiamiamo:

integrando una funzione continua y=f(x) da un estremo inferiore fisso ad un estremo superiore variabile, si ottiene un'altra funzione Y=F(x), che ha per derivata la funzione y=f(x), calcolata nell'estremo superiore variabile.

46. Determinare la funzione

$$F(x)=\int_0^x 2\ dt$$

e calcolarne la derivata, verificando che risulta $F'(x)=2$.

47. Determinare la funzione

$$F(x)=\int_1^x t\ dt, \qquad \text{ossia} \qquad F(x)=\int_1^x x\ dx$$

e calcolarne la derivata, verificando che risulta $F'(x)=x$.

48. Determinare la funzione

$$G(x)=\int_1^x mt\ dt, \qquad \text{ossia} \qquad G(x)=\int_1^x mx\ dx$$

e calcolarne la derivata, verificando che risulta $G'(x)=mx$.

49. Confrontare i risultati degli esercizi 47 e 48 e verificare che:

- in base alla 3ª proprietà degli integrali risulta $G(x)=mF(x)$,
- in base all'algebra delle derivate deve essere $G'(x)=mF'(x)$.

50. Determinare la funzione

$$F(x)=\int_a^x (mt+q)dt, \qquad \text{ossia} \qquad F(x)=\int_a^x (mx+q)dx$$

e calcolarne la derivata, verificando che risulta $F'(x)=mx+q$.

51. Scrivere la derivata della seguente funzione

$$F(x)=\int_0^x \cos t\, dt, \qquad \text{ossia} \qquad F(x)=\int_0^x \cos x\, dx.$$

52. Scrivere la derivata della seguente funzione

$$F(x)=\int_1^x \sqrt{t}\, dt, \qquad \text{ossia} \qquad F(x)=\int_1^x \sqrt{x}\, dx.$$

53. Scrivere la derivata della seguente funzione

$$F(x)=\int_0^x t^3\, dt, \qquad \text{ossia} \qquad F(x)=\int_0^x x^3\, dx.$$

54. Scrivere la derivata della seguente funzione

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt, \qquad \text{ossia} \qquad F(x)=\int_a^x f(x)dx.$$

4. Dall'integrale definito all'integrale indefinito

Gli esercizi dal 55 al 60 conducono a riflettere sui tre simboli introdotti nel testo e cioè:

$$\int_a^b f(x)dx=T, \qquad \int_a^x f(x)dx=F(x), \qquad \int f(x)dx=F(x)+k.$$

55. Confrontare il significato dei seguenti simboli:

$$\int_0^4 2\, dx, \qquad \int_0^x 2\, dx, \qquad \int 2\, dx.$$

56. Confrontare il significato dei seguenti simboli:

$$\int_0^3 x\, dx, \qquad \int_0^x x\, dx, \qquad \int x\, dx.$$

57. Confrontare il significato dei seguenti simboli:

$$\int_0^3 2x\, dx, \qquad \int_0^x 2x\, dx, \qquad \int 2x\, dx.$$

58. Confrontare il significato dei seguenti simboli:

$$\int_1^4 (2x+3)dx, \qquad \int_1^x (2x+3)dx, \qquad \int (2x+3)dx.$$

59. Confrontare il significato dei seguenti simboli:

$$\int_a^b mx\, dx, \qquad \int_a^x mx\, dx, \qquad \int mx\, dx$$

60. Confrontare il significato dei seguenti simboli:

$$\int_a^b (mx+q)dx, \qquad \int_a^x (mx+q)dx, \qquad \int (mx+q)dx.$$

Gli esercizi dal 61 al 72 conducono a riflettere sul procedimento per ottenere l'integrale definito a partire dall'integrale indefinito e cioè:

dato $\int f(x)dx=F(x)+k$ ***con*** $F'(x)=f(x)$, ***si ha:*** $\int_a^x f(x)dx=F(x)-F(a)$ ***e*** $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$.

61. Determinare la funzione $F(x)$ per cui risulta

$$\int 2x\, dx=F(x)+k$$

e calcolare il risultato dei seguenti integrali

$$\int_1^x 2x\, dx \quad \text{e} \quad \int_1^5 2x\, dx.$$

Interpretare geometricamente i risultati ottenuti.

62. Ripetere l'esercizio 61, a partire dai seguenti integrali:

$$\int 2\, dx=F(x)+k, \qquad \int_3^x 2\, dx, \qquad \int_3^6 2\, dx.$$

63. Ripetere l'esercizio 61, a partire dai seguenti integrali:

$$\int 3x^2\, dx=F(x)+k, \qquad \int_2^x 3x^2\, dx, \qquad \int_2^4 3x^2\, dx.$$

64. Ripetere l'esercizio 61, a partire dai seguenti integrali:

$$\int \cos x\, dx=F(x)+k, \qquad \int_0^x \cos x\, dx, \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx.$$

65. Ripetere l'esercizio 61, a partire dai seguenti integrali:

$$\int e^x\, dx=F(x)+k, \qquad \int_0^x e^x\, dx, \qquad \int_0^2 e^x\, dx.$$

66. Determinare la funzione $f(x)$ per cui risulta

$$\int f(x)dx=x^4+k$$

e calcolare il risultato dei seguenti integrali:

$$\int_1^x f(x)dx \quad \text{e} \quad \int_1^3 f(x)dx.$$

Interpretare geometricamente i risultati ottenuti.

67. Ripetere l'esercizio 66 a partire dai seguenti integrali:

$$\int f(x)dx=\sqrt{x}+k, \qquad \int_0^x f(x)dx, \qquad \int_0^4 f(x)dx.$$

68. Ripetere l'esercizio 66 a partire dai seguenti integrali:

$$\int f(x)dx=\frac{1}{x}+k, \qquad \int_{\frac{1}{4}}^x f(x)dx, \qquad \int_{\frac{1}{4}}^1 f(x)dx.$$

69. Ripetere l'esercizio 66 a partire dai seguenti integrali:

$$\int f(x)dx=\ln x+k, \qquad \int_1^x f(x)dx, \qquad \int_1^3 f(x)dx.$$

70. Ripetere l'esercizio 66 a partire dai seguenti integrali:

$$\int f(x)dx=\cos x+k, \qquad \int_0^x f(x)dx, \qquad \int_0^\pi f(x)dx.$$

71. Esaminare la seguente dimostrazione del teorema di Torricelli-Barrow e delle sue applicazioni al calcolo degli integrali definiti e confrontarla con quelle esposte nel testo, rilevando analogie e differenze.
Data una funzione $y=f(x)$, definita e continua in intervallo $[c, b]$, in cui risulta sempre $y \geq 0$, si indica con $F(x)$ la funzione che descrive l'area del trapezoide sotto la curva fra l'estremo inferiore fisso c e l'estremo superiore variabile x.
Considerando un'ascissa a, all'interno dell'intervallo $[c, b]$, si ha (fig. 3):

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a).$$

Considerando, nell'intervallo $[c, b]$, le ascisse x e $x+h$, si ha (fig. 4):

$$F(x+h)-F(x) \approx h \cdot f(x), \qquad \frac{F(x+h)-F(x)}{h} \approx f(x) \qquad \text{e quindi} \qquad F'(x)=f(x).$$

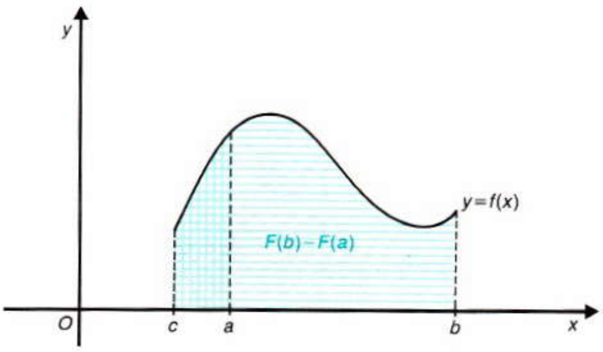

Fig. 3

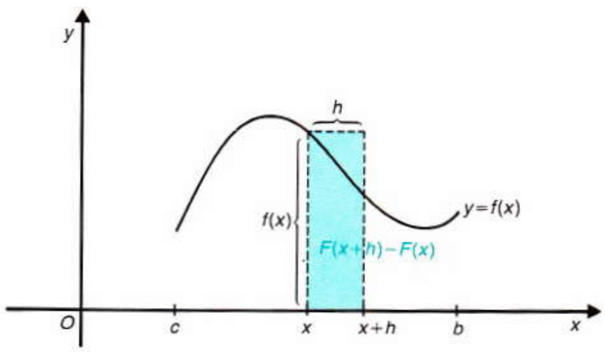

Fig. 4

72. Esaminare la seguente dimostrazione del teorema di Torricelli-Barrow e delle sue applicazioni al calcolo degli integrali definiti e confrontarla con quelle esposte nel testo, rilevando analogie e differenze.
Data la funzione $y=F(x)$, derivabile in un intervallo $[a, b]$, si divide l'intervallo $[a, b]$ in n parti uguali di lunghezza $h=\frac{b-a}{n}$, ottenendo i punti:

$$x_1=a+h, \qquad x_2=a+2h, \ldots, \qquad x_n=a+nh=b.$$

Si procede poi nel modo seguente:

– si scrive

$$F(b)-F(a)=[F(b)-F(x_{n-1})]+[F(x_{n-1})-F(x_{n-2})]+\ldots-F(x_1)+[F(x_1)-F(a)];$$

– si applica il teorema di Lagrange, ottenendo

$$F(b)-F(a)=hF'(c_1)+hF'(c_2)+\ldots+hF'(c_n),$$

con c_1 all'interno di $[a, x_1]$, c_2 all'interno di $[x_1, x_2]$, ...;

– si indica $F'(x)=f(x)$ e si scrive

$$F(b)-F(a)=hf(c_1)+hf(c_2)+\ldots+hf(c_n);$$

– si calcola il limite per $n\to\infty$ dei due membri, ottenendo

$$\lim_{n\to\infty}[F(b)-F(a)]=F(b)-F(a), \qquad \lim_{n\to\infty}[h\cdot f(c_1)+\ldots+h\cdot f(c_n)]=\int_a^b f(x)dx$$

e quindi

$$F(b)-F(a)=\int_a^b f(x)dx.$$

5. Calcolo di integrali indefiniti: integrali immediati

Gli esercizi dal 73 all'82 conducono a determinare le primitive di una funzione, valendosi della tabella degli integrali immediati, che è richiamata qui sotto.

Tabella degli integrali immediati

$y=x^{n+1}$	ha per derivata	$y'=(n+1)x^n$ con $n\neq-1$	perciò si ha	$\int x^n\,dx=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+k$
$y=\ln x$	» » »	$y'=\frac{1}{x}$,	» » »	$\int\frac{dx}{x}=\ln\|x\|+k$
$y=e^x$	» » »	$y'=e^x$,	» » »	$\int e^x\,dx=e^x+k$
$y=\text{sen } x$	» » »	$y'=\cos x$,	» » »	$\int\cos x\,dx=\text{sen } x+k$
$y=\cos x$	» » »	$y'=-\text{sen } x$,	» » »	$\int\text{sen } x\,dx=-\cos x+k$
$y=\text{tg } x$	» » »	$y'=1+\text{tg}^2 x$,	» » »	$\int(1+\text{tg}^2 x)dx=\text{tg } x+k$
		$y'=\frac{1}{\cos^2 x}$,	» » »	$\int\frac{dx}{\cos^2 x}=\text{tg } x+k$
$y=\text{arcsen } x$	» » »	$y'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,	» » »	$\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\text{arcsen } x+k$
$y=\text{arctg } x$	» » »	$y'=\frac{1}{x^2+1}$,	» » »	$\int\frac{dx}{x^2+1}=\text{arctg } x+k$

Determinare le primitive delle funzioni assegnate negli esercizi dal 73 al 77 e scrivere i risultati ottenuti, valendosi del simbolo di integrale indefinito.

73. $y=1, \quad y=x, \quad y=x^3, \quad y=x^4, \quad y=x^6$

74. $y=\frac{1}{x}, \quad y=\frac{1}{x^3}, \quad y=\frac{1}{x^4}, \quad y=\frac{1}{x^5}, \quad y=\frac{1}{x^6}$

75. $y=\sqrt{x}, \quad y=\sqrt[3]{x}, \quad y=\sqrt[4]{x}, \quad y=\sqrt[3]{x^2}, \quad y=\sqrt[4]{x^3}$

76. $y=\frac{1}{\sqrt{x}}, \quad y=\frac{1}{\sqrt[3]{x}}, \quad y=\frac{1}{\sqrt[4]{x}}, \quad y=\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}, \quad y=\frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}$

77. $y=\operatorname{sen} x, \quad y=\cos x, \quad y=1+\operatorname{tg}^2 x, \quad y=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad y=\frac{1}{x^2+1}$

Determinare gli integrali indefiniti assegnati negli esercizi dal 78 all'82.

78. $\int x^{-4}\,dx, \quad \int x^{\frac{4}{3}}\,dx, \quad \int x^{\frac{-5}{4}}\,dx$

79. $\int x^8\,dx, \quad \int \frac{1}{x^8}\,dx, \quad \int \sqrt{\frac{1}{x^8}}\,dx$

80. $\int \sqrt[4]{x}\,dx, \quad \int \sqrt[4]{x^2}\,dx, \quad \int \sqrt[4]{x^8}\,dx$

81. $\int x^{\pi}\,dx, \quad \int x^{e}\,dx, \quad \int e^{x}\,dx$

82. $\int \operatorname{sen} x\,dx, \quad \int \cos x\,dx, \quad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

83. $\int \frac{dx}{x^2+1}, \quad \int \frac{dx}{\cos^2 x}, \quad \int [1+\operatorname{tg}^2 x]dx$

6. Metodi di integrazione

Metodo di integrazione per scomposizione

Gli esercizi dall'83 al 93 conducono a determinare le primitive di una funzione, valendosi della tabella degli integrali immediati e della regola richiamata qui sotto

$$\int [af(x)+bg(x)]dx=a\int f(x)dx+b\int g(x)dx.$$

Calcolare le primitive delle funzioni assegnate negli esercizi dall'83 al 93 e scrivere i risultati ottenuti, valendosi del simbolo di integrale indefinito.

84. $y=5, \quad y=4x, \quad y=4x+5$

85. $y=x^4, \quad y=-\frac{3}{4}x^3, \quad y=x^4-\frac{3}{4}x^3$

86. $y=\frac{5}{2}x^4, \quad y=-x, \quad y=\frac{5}{2}x^4-x$

87. $y=\frac{1}{x}, \quad y=-2x, \quad y=\frac{1}{x}-2x$

88. $y=-\frac{1}{x^2}, \quad y=x^2, \quad y=x^2-\frac{1}{x^2}$

89. $y=\sqrt{x}, \quad y=\frac{1}{\sqrt{x}}, \quad y=\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}$

90. $y=\sqrt{3}\,\text{sen}\,x,\quad y=-\frac{1}{2}\cos x,\quad y=\sqrt{3}\,\text{sen}\,x-\frac{1}{2}\cos x$

91. $y=-3\,\text{sen}\,x,\quad y=\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x,\quad y=\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x-3\,\text{sen}\,x$

92. $y=x+2\,\text{sen}\,x,\quad y=x^2-\frac{1}{4}\cos x,\quad y=\frac{1}{x}+\cos x$

93. $y=3x+e^x,\quad y=\frac{1}{3}e^x+\frac{1}{3x},\quad y=x^3-\sqrt{5}e^x$

Gli esercizi dal 94 al 98 conducono a determinare le primitive di una funzione, valendosi della tabella degli integrali immediati e della regola di scomposizione estesa a più funzioni, che possiamo scrivere nel modo seguente

$$\int[a_1\cdot f_1(x)+\ldots+a_n\cdot f_n(x)]dx=a_1\cdot\int f_1(x)dx+\ldots+a_n\cdot\int f_n(x)dx.$$

Calcolare le primitive delle funzioni assegnate negli esercizi dal 94 al 98 e scrivere i risultati ottenuti, valendosi del simbolo di integrale indefinito.

94. $y=2x^2+3x-1,\quad y=-\frac{3}{4}x^2+\frac{1}{2}x-\frac{5}{4}$

95. $y=5x^4-3x^2-2x,\quad y=-\frac{4}{3}x^3+x^2-\frac{2}{3}x$

96. $y=x-2+\frac{1}{x},\quad y=\frac{1}{2}x+4-\frac{1}{x^2}$

97. $y=\sqrt{x}-x+\frac{1}{\sqrt{x}},\quad y=3x^2-2x+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$

98. $y=x+2\,\text{sen}\,x-3e^x,\quad y=6x^5-4\cos x-7e^x$

Gli esercizi dal 99 al 109 conducono a determinare le primitive di una funzione, valendosi del seguente procedimento:

I) ci si basa su artifici algebrici per scrivere la funzione come combinazione lineare di funzioni che compaiono nella tabella degli integrali immediati,

II) ci si vale della regola di scomposizione.

Calcolare le primitive delle funzioni assegnate negli esercizi dal 99 al 109 e scrivere i risultati ottenuti, valendosi del simbolo di integrale indefinito.

99. $y=\frac{x^4-2x^2+2}{x},\quad y=\frac{2x^3-4x^2+3}{x^2}$

(Per esempio nel 1° caso, basta applicare la proprietà distributiva per scrivere $\frac{x^4-2x^2+2}{x}=x^3-2x+\frac{2}{x}$*).*

100. $y=\frac{4x^2-2x+6}{2x^2},\quad y=\frac{3x^5-2x^4+x}{3x^3}$

101. $y=\frac{x^2-\sqrt{x}+2x^3}{\sqrt{x}},\quad y=\frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{x}$

102. $y=\frac{2x^2-3x}{\sqrt{x}},\quad y=\frac{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[4]{x^3}}{x^2}$

103. $y=\text{tg}^2\,x,\quad y=\text{tg}^2\,x+3$

(Tenere presente che risulta $tg^2\,x=1+tg^2\,x-1,\ tg^2\,x+3=1+tg^2\,x+2$*).*

104. $y=\dfrac{\sqrt{1-x^2}-1}{\sqrt{1-x^2}}$, $\quad y=\dfrac{2+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}$

(Tenere presente che risulta $\dfrac{\sqrt{1-x^2}-1}{\sqrt{1-x^2}}=1-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, ...*)*

105. $y=\dfrac{x^2}{1+x^2}$, $\quad y=\dfrac{2x^2+3}{1+x^2}$

(Tenere presente che si può scrivere $\dfrac{x^2}{1+x^2}=\dfrac{x^2+1-1}{1+x^2}=1-\dfrac{1}{1+x^2}$, ...*)*

106. $y=\dfrac{1+x^2-x}{x(1+x^2)}$, $\quad y=\dfrac{2x^2+1}{x^2(x^2+1)}$

(Tenere presente che si può scrivere

a $\quad \dfrac{1+x^2-x}{x(1+x^2)}=\dfrac{1+x^2}{x(1+x^2)}-\dfrac{x}{x(1+x^2)}=\ldots,\qquad \dfrac{2x^2+1}{x^2(x^2+1)}=\dfrac{x^2+1+x^2}{x^2\cdot(x^2+1)}=\ldots$*)*

107. $y=\dfrac{x^4+x^2+1}{1+x^2}$, $\quad y=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$

(Tenere presente che si può scrivere

$x^4+x^2+1=x^2(x^2+1)+1 \qquad e \qquad x^2-1=x^2+1-2$, ...*)*

108. $y=\dfrac{\text{sen } 2x+\text{sen } x}{\text{sen } x}$, $\quad y=\dfrac{\text{sen } 2x}{\sqrt{1-\text{sen}^2 x}}$

(Tenere presente che, in base a note formule di trigonometria, risulta

$\text{sen } 2x=2 \text{ sen } x\cdot\cos x, \qquad \sqrt{1-\text{sen}^2 x}=\cos x$ $\quad$ *e quindi ...)*

109. $y=\ln 2x-\ln x$, $\quad y=e^{\ln x}$

(Tenere presente che, in base a note proprietà delle potenze e dei logaritmi, si può scrivere

$\ln 2x=\ln 2+\ln x, \qquad e^{\ln x}=x$, ...*)*

Metodo di integrazione per sostituzione

Gli esercizi dal 110 al 182 conducono a calcolare integrali indefiniti, valendosi della tabella degli integrali immediati e della regola richiamata qui sotto:

da ogni formula di integrazione del tipo

$$\int f(x)dx=F(x)+k,$$

se ne può ricavare una del tipo

$$\int f(z)dz=F(z)+k,$$

dove si ha

$$z=g(x) \qquad e \qquad dz=g'(x)dx.$$

In particolare, gli esercizi dal 110 al 131 conducono ad applicare la regola ora richiamata a partire dalla prima riga della tabella degli integrali immediati:

dalla formula di integrazione

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + k, \qquad con\ n \neq -1,$$

si ricava

$$\int z^n dz = \frac{1}{n+1} z^{n+1} + k, \qquad con\ n \neq -1,$$

dove si ha

$$z = g(x) \qquad e \qquad dz = g'(x)dx.$$

Esaminare gli integrali indefiniti proposti negli esercizi dal 110 al 131 e calcolare quelli a cui si può applicare la regola esposta sopra.

110. $\int (x+1)^2 dx, \quad \int (x-3)^3 dx$

(Nel 1° integrale si considera $z=x+1$, ossia $g(x)=x+1$ e quindi $g'(x)dx=dx$, cioè $dz=dx$. Procedere analogamente per il 2° integrale).

111. $\int \frac{1}{(x-4)^2} dx, \quad \int \frac{1}{(x+5)^3} dx$

112. $\int \sqrt{x+5}\, dx, \quad \int \sqrt[3]{x-6}\, dx$

113. $\int \frac{1}{\sqrt{x+8}} dx, \quad \int \frac{1}{\sqrt[4]{x-7}^{\,3}} dx$

114. $\int (x+b)^n dx$

(L'esercizio porta a scoprire la seguente regola generale:

$$\int (x+b)^n dx = \frac{1}{n+1}(x+b)^{n+1} + k).$$

115. $\int (x^2-3x)^2(2x-3)dx, \quad \int (x^2-3x)^2 dx$

(Il primo integrale si può calcolare in due modi:

I) valendosi della regola di sostituzione, considerando

$$z = x^2 - 3x \qquad e\ quindi \qquad dz = (2x-3)dx,$$

II) sviluppando i calcoli e applicando la regola di scomposizione.

Confrontare la rapidità ed efficacia dei due metodi.
Il secondo integrale non si può calcolare valendosi della regola di sostituzione, perché...)

116. $\int (2x^2+4)^3 \cdot 4x\, dx, \quad \int (2x^2+4)^3 dx$

(Tenere presenti i suggerimenti dati nell'esercizio precedente).

117. $\int \frac{6x-1}{(3x^2-x)^2} dx, \quad \int \frac{1}{(3x^2-x)^2} dx$

(Al primo integrale si può applicare la regola di sostituzione, considerando $z=3x^2-x$ e quindi $(6x-1)dx=dz$, ma non si può procedere analogamente per il secondo integrale perché...)

118. $\int \frac{-2x}{(1-x^2)^3}\,dx, \qquad \int \frac{1}{(1-x^2)^3}\,dx$

(Tenere presenti i suggerimenti dati nell'esercizio 117).

119. $\int 2x\cdot\sqrt{1+x^2}\,dx, \qquad \int \sqrt{1+x^2}\,dx$

(Tenere presenti i suggerimenti dati nell'esercizio 117).

120. $\int \frac{4x+1}{\sqrt{2x^2+x}}\,dx, \qquad \int \frac{1}{\sqrt{2x^2+x}}\,dx$

(Tenere presenti i suggerimenti dati nell'esercizio 117).

121. $\int \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx, \qquad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

(Attenzione: il 1° integrale si calcola valendosi della regola di sostituzione, considerando $z=1-x^2$ e quindi $-2x\,dx=dz$; il 2° integrale è invece un integrale immediato!)

122. $\int (ax^2+bx+c)^n\cdot(2ax+b)dx$

(L'esercizio conduce a scoprire la seguente regola generale:

$$\int (ax^2+bx+c)^n(2ax+b)dx=\frac{1}{n+1}(ax^2+bx+c)^{n+1}+k).$$

123. $\int (x^3+1)^2 3x^2 dx, \qquad \int (x^3+1)^2 dx$

(Tenere presenti i suggerimenti dati nell'esercizio 115).

124. $\int \frac{4x^3-2x}{(x^4-x^2)^2}\,dx, \qquad \int \frac{1}{(x^4-x^2)^2}\,dx$

(Tenere presenti i suggerimenti dati nell'esercizio 117).

125. $\int \operatorname{sen}^2 x\cos x\,dx, \qquad \int \operatorname{sen}^2 x\,dx$

(Al primo integrale si può applicare la regola di sostituzione, considerando $z=\operatorname{sen} x$ e quindi $\cos x\,dx=dz$; ma non si può procedere analogamente per il 2° integrale perché...)

126. $\int \cos^3 x(-\operatorname{sen} x)dx, \qquad \int \cos^3 x\,dx$

(Tenere presenti i suggerimenti dati nell'esercizio 125).

127. $\int \frac{(-\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x}\,dx, \qquad \int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx$

(Attenzione: il 1° integrale si calcola valendosi della regola di sostituzione, considerando $z=\cos x$ e quindi $-\operatorname{sen} x\,dx=dz$; il 2° integrale è invece un integrale immediato).

128. $\int \cos x\sqrt{\operatorname{sen} x}\,dx, \qquad \int \sqrt{\operatorname{sen} x}\,dx$

(Tenere presenti i suggerimenti dati nell'esercizio 125).

129. $\int \operatorname{sen}^n x\cdot\cos x\,dx, \qquad \int \cos^n x(-\operatorname{sen} x)dx \qquad$ per $n\neq -1$

(L'esercizio conduce a scoprire le seguenti regole generali:

$$\int \operatorname{sen}^n x\cdot\cos x\,dx=\frac{1}{n+1}\cdot\operatorname{sen}^{n+1} x+k, \qquad per\ n\neq -1$$

$$\int \cos^n x\cdot(-\operatorname{sen} x)dx=\frac{1}{n+1}\cdot\cos^{n+1} x+k, \qquad per\ n\neq -1).$$

130. $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x}\,dx, \qquad \int \ln x\,dx$

(Al primo integrale si può applicare la regola di sostituzione, considerando $z=\ln x$ e quindi $\frac{1}{x}\,dx=dz$; ma non si può procedere analogamente per il 2° integrale perché...)

131. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x}\,dx, \qquad \int \sqrt{\ln x}\,dx$

(Tenere presenti i suggerimenti dati nell'esercizio 130).

Gli esercizi dal 132 al 140 conducono ad applicare il metodo di sostituzione a partire dalla 2ª riga della tabella degli integrali immediati:
dalla formula di integrazione

$$\int \frac{dx}{x}=\ln|x|+k,$$

si ricava

$$\int \frac{dz}{z}=\ln|z|+k,$$

dove si ha

$$z=g(x) \qquad e \qquad dz=g'(x)dx.$$

Esaminare gli integrali indefiniti proposti negli esercizi dal 132 al 140 e calcolare quelli a cui si può applicare la regola esposta sopra.

132. $\displaystyle\int \frac{1}{x+3}\,dx, \qquad \int \frac{1}{x-5}\,dx$

(Nel 1° integrale si ha si considera $z=x+3$ e quindi $dz=dx$; si procede analogamente per il 2° integrale).

133. $\displaystyle\int \frac{1}{x+b}\,dx$

(L'esercizio conduce a scoprire la seguente regola generale: $\displaystyle\int \frac{1}{x+b}\,dx=\ln|x+b|+k$).

134. $\displaystyle\int \frac{2x+5}{x^2+5x}\,dx, \qquad \int \frac{1}{x^2+5x}\,dx$

(Al primo integrale si può applicare la regola di sostituzione, considerando $z=x^2+5x$ e quindi $(2x+5)dx=dz$; ma non si può procedere analogamente per il 2° integrale perché...)

135. $\displaystyle\int \frac{2x}{1+x^2}\,dx, \qquad \int \frac{1}{1+x^2}\,dx$

(Attenzione: il 1° integrale si calcola valendosi della regola di sostituzione, considerando $z=1+x^2$ e quindi $2x\,dx=dz$; il 2° integrale è invece un integrale immediato).

136. $\displaystyle\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}\,dx$

(L'esercizio conduce a scoprire la seguente regola generale:

$$\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}\,dx=\ln|ax^2+bx+c|+k).$$

137. $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\,dx, \qquad \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\,dx$

(Al primo integrale si può applicare la regola di sostituzione, considerando $z=\operatorname{sen} x$ e quindi $dz=\cos x\,dx$; si può procedere analogamente per il 2° integrale, considerando $z=\cos x$, da cui si ottiene $dz=-\operatorname{sen} x\,dx$ e quindi, $\operatorname{sen} x\,dx=-dz$...)

138. $\displaystyle\int \operatorname{ctg} x\, dx, \qquad \int \operatorname{tg} x\, dx$

(Tenere presente che per due note formule di trigonometria risulta $ctg\ x=\dfrac{cos\ x}{sen\ x}$ *e* $tg\ x=\dfrac{sen\ x}{cos\ x}$*; valersi dei risultati del precedente esercizio per arrivare alle seguenti regole generali:*

$$\int ctg\ x\ dx=ln\ |sen\ x|+k, \qquad \int tg\ x\ dx=-ln\ |cos\ x|+k).$$

139. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x+\cos x}{\operatorname{sen} x-\cos x}\, dx, \qquad \int \frac{\cos x-\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x+\cos x}\, dx$

(Al primo integrale si può applicare la regola di sostituzione, considerando $z=sen\ x-cos\ x$ *e quindi* $dz=(cos\ x+sen\ x)dx$*; si può procedere analogamente per il 2° integrale).*

140. $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^x+2}\, dx, \qquad \int \frac{e^x+1}{e^x+x}\, dx$

(Al primo integrale si può applicare la regola di sostituzione, considerando $z=e^x+2$ *e quindi* $dz=e^x\ dx$*; si può procedere analogamente per il 2° integrale).*

Esaminare gli integrali indefiniti proposti negli esercizi dal 141 al 150 e calcolare quelli a cui si può applicare la regola di sostituzione a partire dalle restanti righe della tabella degli integrali immediati.

141. $\displaystyle\int \operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{3}\right) dx, \qquad \int \cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right) dx$

(Nel 1° integrale si ha si considera $z=x+\dfrac{\pi}{3}$ *e quindi* $dz=dx$*; si procede analogamente per il 2° integrale).*

142. $\displaystyle\int 2\operatorname{sen}(2x)dx, \qquad \int \frac{1}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) dx$

(Nel 1° integrale si considera $z=2x$ *e quindi* $dz=2\ dx$*; si procede analogamente per il 2° integrale).*

143. $\displaystyle\int \left[1+\operatorname{tg}^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right] dx, \qquad \int \frac{1}{\cos^2\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}\, dx$

144. $\displaystyle\int \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}\, dx, \qquad \int \frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}\, dx$

(Nel 1° integrale si ha si considera $z=x^2$ *e quindi* $dz=2x\ dx$*; nel 2° integrale si osserva che* $4x^2=(2x)^2$ *e si considera* $z=2x$*, da cui* $dz=2\ dx$*).*

145. $\displaystyle\int \frac{2x}{1+x^4}\, dx, \qquad \int \frac{2}{1+4x^2}\, dx$

(Tenere presenti i suggerimenti dati nell'esercizio precedente).

146. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-(x-1)^2}}\, dx, \qquad \int \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}\, dx$

(Il 1° integrale si calcola immediatamente per sostituzione; svolgendo il quadrato indicato, il 1° integrale coincide con il secondo).

147. $\displaystyle\int \frac{1}{1+(x-1)^2}\, dx, \qquad \int \frac{1}{x^2-2x+2}\, dx$

(Tenere presenti i suggerimenti dati nell'esercizio precedente).

149. $\displaystyle\int \cos x\, e^{\operatorname{sen} x}\, dx, \qquad \int e^{\operatorname{sen} x}\, dx$

(Il 1° integrale si può calcolare per sostituzione, considerando $z=sen\ x$ *e quindi* $dz=cos\ x\ dx$*; invece non si può procedere analogamente per il secondo integrale, perché...)*

150. $\displaystyle\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}\,dx, \qquad \int e^{\sqrt{x}}\,dx$

(Tenere presenti i suggerimenti dati nell'esercizio precedente).

151. Dimostrare che è corretta la seguente regola:

$$\int e^{f(x)} f'(x)dx = e^{f(x)} + k$$

152. Dimostrare che sono corrette le seguenti regole:

$$\int \operatorname{sen}\,[f(x)]f'(x)dx = -\cos\,[f(x)] + k, \qquad \int \cos\,[f(x)]f'(x)dx = \operatorname{sen}\,[f(x)] + k$$

153. Dimostrare che sono corrette le seguenti regole:

$$\int (1+\operatorname{tg}^2[f(x)])\cdot f'(x)dx = \operatorname{tg}\,[f(x)] + k, \qquad \int \frac{f'(x)}{\cos^2\,[f(x)]}\,dx = \operatorname{tg}\,[f(x)] + k$$

154. Dimostrare che sono corrette le seguenti regole:

$$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}}\,dx = \operatorname{arcsen}\,[f(x)] + k, \qquad \int \frac{f'(x)}{1+f^2(x)}\,dx = \operatorname{arctg}\,[f(x)] + k$$

Gli esercizi dal 155 al 185 conducono a calcolare integrali indefiniti valendosi del seguente procedimento:

I) ci si basa su artifici algebrici per scrivere la funzione integranda in una forma a cui si possa applicare il metodo di sostituzione;
II) ci si vale del metodo di sostituzione.

Esaminare gli integrali indefiniti proposti negli esercizi dal 155 al 166 e calcolare quelli a cui si può applicare il procedimento indicato sopra.

155. $\displaystyle\int (3x-2)^2dx, \qquad \int \left(\frac{3}{2}x+\frac{3}{4}\right)^2 dx$

(Per calcolare il 1° integrale, si considera $z=3x-2$, da cui $dz=3\,dx$ e quindi $dx=\frac{dz}{3}$. Ci si riconduce dunque a calcolare il seguente integrale:

$$\int \frac{1}{3}z^2\,dz = \frac{1}{3}\int z^2\,dz = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}z^3\right) + k,$$

ottenendo in definitiva

$$\int (3x-2)^2dx = \frac{1}{9}(3x-2)^3 + k.$$

Procedere analogamente per il 2° integrale).

156. $\displaystyle\int (4x-1)^2dx, \qquad \int \frac{1}{(4x-1)^2}\,dx$

(Tenere presente il suggerimento dato nell'esercizio 155).

157. $\displaystyle\int \sqrt[3]{\frac{1}{3}x-\frac{3}{4}}\,dx, \qquad \int \frac{1}{\sqrt{5x+3}}\,dx$

(Tenere presente il suggerimento dato nell'esercizio 155).

158. $\displaystyle\int \frac{1}{4x+3}\,dx, \qquad \int \frac{1}{5-7x}\,dx$

(Anche in questo caso si considera $z=4x+3$, da cui $dz=4\,dx$ e quindi $dx=\frac{dz}{4}$. Ci si riconduce dunque a calcolare il seguente integrale:

$$\int \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{z}\,dz = \frac{1}{4}\int \frac{1}{z}\,dz = \frac{1}{4}\ln|z| + k,$$

ottenendo in definitiva

$$\int \frac{1}{4x+3}\,dx=\frac{1}{4}\cdot \ln|4x+3|+k.$$

Procedere analogamente per il 2° integrale).

159. $\int \text{sen}\,(2x)dx, \qquad \int \text{sen}\left(\frac{x}{2}\right)dx$

(Anche in questo caso si considera $z=2x$, da cui $dz=2\,dx$ e quindi $dx=\frac{dz}{2}$. Ci si riconduce dunque a calcolare il seguente integrale:

$$\int \frac{1}{2}\,\text{sen}\,z\,dz=\frac{1}{2}\int \text{sen}\,z\,dz=\frac{1}{2}(-\cos z)+k,$$

ottenendo in definitiva

$$\int \text{sen}\,(2x)dx=-\frac{1}{2}\cos(2x)+k.$$

Procedere analogamente per il 2° integrale).

160. $\int \cos(3x)dx, \qquad \int \cos\left(\frac{x}{3}\right)dx$

(Tenere presenti i suggerimenti dati nell'esercizio 159).

161. $\int \text{sen}\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)dx, \qquad \int \cos\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)dx$

(Tenere presenti i suggerimenti dati nell'esercizio 159).

162. $\int e^{4x}\,dx, \qquad \int e^{-2x}\,dx$

(Valgono suggerimenti analoghi a quelli dati negli esercizi 155, 158 e 159).

163. $\int e^{(3x-7)}\,dx, \qquad \int e^{(5-8x)}\,dx$

(Valgono suggerimenti analoghi a quelli dati negli esercizi 155, 158 e 159).

164. $\int \frac{1}{1+4x^2}\,dx, \qquad \int \frac{1}{4+x^2}\,dx$

(Per calcolare il 1° integrale conviene procedere così:

– *si osserva che risulta* $\frac{1}{1+4x^2}=\frac{1}{1+(2x)^2}$;

– *si considera $z=2x$, da cui $dz=2\,dx$ e quindi $dx=\frac{dz}{2}$;*

– *si calcola* $\frac{1}{2}\int \frac{1}{1+z^2}\,dz=\frac{1}{2}\,\text{arctg}\,z+k,$

– *si ottiene* $\int \frac{1}{1+4x^2}\,dx=\frac{1}{2}\cdot\text{arctg}\,(2x)+k,$

Si può seguire un procedimento analogo, a partire dal 2° integrale, cominciando ad osservare che risulta

$$\frac{1}{4+x^2}=\frac{1}{4\cdot\left(1+\frac{x^2}{4}\right)}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}).$$

165. $\int \frac{1}{x^2+2x+2}\,dx, \qquad \int \frac{1}{9x^2+12x+5}\,dx$

(Ripetere un procedimento analogo a quello seguito nell'esercizio 164, tenendo presente che risulta:

$$\frac{1}{x^2+2x+2}=\frac{1}{1+(x+1)^2} \qquad e \qquad \frac{1}{9x^2+12x+5}=\frac{1}{1+(3x+2)^2}).$$

166. $\int \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx, \quad \int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$

(Ripetere un procedimento analogo a quello seguito nell'esercizio 164).

167. Dimostrare che sono corrette le seguenti regole:

$$\int \frac{1}{a^2+x^2}\,dx=\frac{1}{a}\,\text{arctg}\,\frac{x}{a}+k, \qquad \int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx=\text{arcsen}\,\frac{x}{a}+k$$

168. Dimostrare che sono corrette le seguenti regole:

$$\int \frac{1}{1+(ax+b)^2}\,dx=\frac{1}{a}\,\text{arctg}\,(ax+b)+k, \qquad \int \frac{1}{\sqrt{1-(ax+b)^2}}\,dx=\frac{1}{a}\,\text{arcsen}\,(ax+b)+k$$

169. Dimostrare che è corretta la seguente regola

$$\int (ax+b)^n\,dx=\frac{1}{a}\,\frac{1}{n+1}(ax+b)^{n+1}+k, \qquad \text{per } n\neq -1$$

170. Dimostrare che è corretta la seguente regola

$$\int \frac{1}{ax+b}\,dx=\frac{1}{a}\ln|ax+b|+k$$

171. Dimostrare che sono corrette le seguenti regole

$$\int \text{sen}\,(ax+b)dx=-\frac{1}{a}\cos\,(ax+b)+k, \qquad \int \cos\,(ax+b)dx=\frac{1}{a}\,\text{sen}\,(ax+b)+k$$

172. Dimostrare che è corretta la seguente regola

$$\int e^{(ax+b)}\,dx=\frac{1}{a}e^{(ax+b)}+k$$

173. Dimostrare che è corretta la seguente regola

$$\int f(ax+b)dx=\frac{1}{a}F(ax+b)+k, \qquad \text{dove } F'(x)=f(x)$$

Integrazione di particolari funzioni razionali

Fissiamo ora l'attenzione sul calcolo di integrali di funzioni razionali dei tre tipi seguenti

$$1^\circ \int \frac{px+q}{ax^2+bx+c}\,dx, \qquad 2^\circ \int \frac{N(x)}{px+q}\,dx, \qquad 3^\circ \int \frac{N(x)}{ax^2+bx+c}\,dx$$

dove $N(x)$ indica un qualunque polinomio.

1° caso

Cominciamo con qualche esempio numerico che può condurre a considerazioni di carattere più generale; esaminiamo l'integrale seguente:

$$\int \frac{3x+2}{x^2-5x+6}\,dx$$

Ecco il procedimento da seguire

– *si risolve l'equazione $x^2-5x+6=0$, ottenendo le soluzioni $x_1=2$ e $x_2=3$;*

– *si scompone in fattori il denominatore ottenendo $x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$; così si può scrivere*

$$\frac{3x+2}{x^2-5x+6}=\frac{3x+2}{(x-2)(x-3)};$$

– *si cercano due numeri A e B, che permettano di scrivere*

$$\frac{3x+2}{(x-2)(x-3)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-3} \qquad (1)$$

Per trovare A e B si esegue l'addizione indicata al 2° membro della (1), ottenendo

$$\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-3}=\frac{A(x-3)+B(x-2)}{(x-2)(x-3)}=\frac{(A+B)x+(-3A-2B)}{(x-2)(x-3)}$$

e quindi

$$\frac{3x+2}{(x-2)(x-3)}=\frac{(A+B)x+(-3A-2B)}{(x-2)(x-3)}$$

così è chiaro che quest'ultima uguaglianza è verificata, se risulta

$$\begin{cases} A+B=3 \\ -3A-2B=2. \end{cases}$$

Risolvendo poi il sistema di due equazioni nelle incognite A e B, si ha:

$$A=-8, \qquad B=11.$$

– *si scrive*

$$\frac{3x+2}{(x-2)(x-3)}=\frac{11}{x-3}-\frac{8}{x-2}$$

– *si completa il calcolo dell'integrale, ottenendo:*

$$\int\frac{3x+2}{x^2-5x+6}\,dx=11\int\frac{1}{x-2}\,dx-8\int\frac{1}{x-3}\,dx=11\ ln\ |x-2|-8\ ln\ |x-3|+k$$

Ora è facile rendersi conto che il procedimento seguito si può ripetere solo se il trinomio di 2° grado al denominatore ha soluzioni reali e distinte.

Vediamo allora altri due esempi che permettono di completare lo studio delle varie situazioni possibili.
Esaminiamo l'integrale seguente

$$\int\frac{3x-5}{x^2-4x+4}\,dx$$

Ecco come si procede in questo caso:

– *si risolve l'equazione $x^2-4x+4=0$, ottenendo le soluzioni $x_1=x_2=2$;*
– *si scompone in fattori il denominatore ottenendo $x^2-4x+4=(x-2)^2$; così si può scrivere*

$$\frac{3x-5}{x^2-4x+4}=\frac{3x-5}{(x-2)^2};$$

– *si cercano due numeri A e B, che permettano di scrivere*

$$\frac{3x-5}{(x-2)^2}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{(x-2)^2} \tag{2}$$

Per trovare A e B si esegue l'addizione indicata al 2° membro della (2), ottenendo

$$\frac{A}{x-2}+\frac{B}{(x-2)^2}=\frac{A(x-2)+B}{(x-2)^2}=\frac{Ax+(B-2A)}{(x-2)^2}$$

e quindi

$$\frac{3x-5}{(x-2)^2}=\frac{Ax+(B-2A)}{(x-2)^2}$$

così è chiaro che quest'ultima uguaglianza è verificata, se risulta

$$\begin{cases} A=3 \\ B-2A=-5. \end{cases}$$

Risolvendo il sistema di due equazioni nelle incognite A e B, si ha:

$$A=3, \qquad B=1.$$

– *si scrive*

$$\frac{3x-5}{(x-2)^2}=\frac{3}{x-2}+\frac{1}{(x-2)^2}$$

– *si completa il calcolo dell'integrale, ottenendo:*

$$\int \frac{3x-5}{(x-2)^2}\,dx=3\int \frac{1}{x-2}\,dx+\int \frac{1}{(x-2)^2}\,dx=3\ln|x-2|-\frac{1}{x-2}+k$$

Esaminiamo infine l'integrale seguente

$$\int \frac{2x+3}{x^2+2x+2}\,dx$$

Ecco come si procede:

– *si risolve l'equazione $x^2+2x+2=0$, ottenendo soluzioni non reali e concludendo che i metodi finora seguiti non sono validi;*
– *si osserva che la derivata del denominatore è $2x+2$, perciò si riscrive il numeratore nella forma seguente*

$$2x+3=(2x+2)+1$$

e la funzione assegnata nella forma

$$\frac{2x+3}{x^2+2x+2}=\frac{2x+2}{x^2+2x+2}+\frac{1}{x^2+2x+2};$$

– *si completa il calcolo dell'integrale, dato che si ha:*

$$\int \frac{2x+2}{x^2+2x+2}\,dx=\ln|x^2+2x+2|+k$$

$$\int \frac{1}{x^2+2x+2}\,dx=\int \frac{1}{(x+1)^2+1}\,dx=\mathrm{arctg}\,(x+1)+k'$$

e quindi

$$\int \frac{2x+2}{x^2+2x+2}\,dx+\int \frac{1}{x^2+2x+2}\,dx=\ln|x^2+2x+2|+\mathrm{arctg}\,(x+1)+k.$$

A partire dagli esempi esaminati, siamo ora in grado di trarre qualche conseguenza di carattere generale per il calcolo di integrali del tipo

$$\int \frac{px+q}{ax^2+bx+c}\,dx$$

Le situazioni che si possono presentare sono le seguenti:

I) ***l'equazione $ax^2+bx+c=0$ ha due soluzioni reali e distinte x_1 e x_2;***
ci si riduce ad integrali già noti, determinando due numeri A e B in modo che risulti

$$\frac{px+q}{ax^2+bx+c}=\frac{A}{x-x_1}+\frac{B}{x-x_2}$$

II) ***l'equazione $ax^2+bx+c=0$ ha due soluzioni coincidenti $x_1=x_2$;***
ci si riduce ad integrali già noti, determinando due numeri A e B in modo che risulti

$$\frac{px+q}{ax^2+bx+c}=\frac{A}{x-x_1}+\frac{B}{(x-x_1)^2}$$

III) ***l'equazione $ax^2+bx+c=0$ non ha soluzioni reali;***
si cercano ***opportuni artifici algebrici*** *per ricondursi al calcolo di integrali dei tipi seguenti*

$$\int \frac{1}{z}\,dz=\ln|z|+k \qquad e \qquad \int \frac{1}{1+z^2}\,dz=\mathrm{arctg}\,z+k'$$

2° caso

Basta un esempio numerico per capire come si procede; calcoliamo dunque

$$\int \frac{3x^4-x^2+1}{x-2}\,dx$$

Conviene organizzare i calcoli nel modo seguente:

– *si esegue la divisione fra i polinomi assegnati ottenendo*

$$3x^4-x^2+1=(x-2)(3x^3+6x^2+11x+22)+45$$

e quindi

$$\frac{3x^4-x^2+1}{x-2}=3x^3+6x^2+11x+\frac{45}{x-2}$$

– *si calcola l'integrale della funzione ottenuta e cioè*

$$\int\left(3x^3+6x^2+11x+\frac{45}{x-2}\right)dx=\frac{3}{4}x^4+2x^3+\frac{11}{2}x^2+45\ ln\ |x-2|+k$$

3° caso

Anche in questo caso basta un esempio numerico per capire come si procede; calcoliamo dunque

$$\int\frac{x^4-5x^3+8x^2-x-5}{x^2-4x+4}\,dx$$

Si organizzano calcoli analoghi a quelli precedenti e cioè:

– *si esegue la divisione fra i polinomi assegnati ottenendo*

$$x^4-5x^3+8x^2-x-5=(x^2-4x+4)(x^2-x)+3x-5$$

e quindi

$$\frac{x^4-5x^3+8x^2-x-5}{x^2-4x+4}=x^2-x+\frac{3x-5}{x^2-4x+4}$$

– *si calcola l'integrale della funzione ottenuta, ricordando i risultati raggiunti nel 1° caso; si ha*

$$\int(x^2-x)dx+\int\frac{3x-5}{x^2-4x+4}\,dx=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+3\ ln\ |x-2|-\frac{1}{x-2}+k$$

Tenendo presenti i procedimenti indicati, calcolare gli integrali proposti negli esercizi dal 174 al 185, verificando i risultati indicati.

174. $\displaystyle\int\frac{x^3}{2x+1}\,dx=\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{8}x-\frac{1}{16}\ln|2x+1|+k$

175. $\displaystyle\int\frac{x^2-x+1}{x+1}\,dx=\frac{1}{2}x^2-2x+3\ln|x+1|+k$

176. $\displaystyle\int\frac{1+x^5}{x-2}\,dx=\frac{1}{5}x^5+\frac{1}{2}x^4+\frac{4}{3}x^3+4x^2+16x+33\ln|x-2|+k$

177. $\displaystyle\int\frac{1}{x^2-3x+2}\,dx=\ln|x-2|-\ln|x-1|+k$

178. $\displaystyle\int\frac{2x-1}{x^2-4x+3}\,dx=\frac{5}{2}\ln|x-3|-\frac{1}{2}\ln|x-1|+k$

179. $\displaystyle\int\frac{1}{4x^2-4x+1}\,dx=\frac{-1}{2(2x-1)}+k$

180. $\displaystyle\int\frac{x+1}{x^2-10x+25}\,dx=\ln|x-5|-\frac{6}{x-5}+k$

181. $\displaystyle\int\frac{2x+1}{x^2+9}\,dx=\ln(x^2+9)+\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{3}\right)+k$

182. $\displaystyle\int\frac{2x+3}{4+x^2}\,dx=\ln(4+x^2)+\frac{3}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{2}\right)+k$

183. $\displaystyle\int\frac{x^4+x^2+2}{x^2+1}\,dx=\frac{1}{3}x^3+2\operatorname{arctg}x+k$

184. $\displaystyle\int\frac{x^2+x-1}{x^2-4x}\,dx=x+\frac{1}{4}\ln|x|+\frac{19}{4}\ln|x-4|+k$

185. $\displaystyle\int\frac{x^4+2x^3+4}{x^2+2x+1}\,dx=\frac{1}{3}x^3-x+2\ln|x+1|-\frac{3}{x+1}+k$

Metodo di integrazione per parti

Gli esercizi dal 186 al 200 conducono a calcolare integrali indefiniti, valendosi della regola d'integrazione per parti che richiamiamo qui sotto:

$$\int f'(x)\cdot g(x)dx=f(x)g(x)-\int f(x)g'(x)dx+k \qquad (5)$$

Calcolare gli integrali proposti negli esercizi dal 186 al 200, verificando i risultati indicati:

186. $\int \text{arcsen}\, x\, dx=x\cdot\text{arcsen}\, x+\sqrt{1-x^2}+k$

187. $\int \text{arctg}\, x\, dx=x\, \text{arctg}\, x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+k$

188. $\int x\, \text{sen}\, x\, dx=\text{sen}\, x-x\cos x+k$

189. $\int x\ln x\, dx=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}+k$

190. $\int xe^x\, dx=xe^x-e^x+k$

191. $\int x\, \text{arctg}\, x\, dx=\frac{1}{2}(x^2\, \text{arctg}\, x-x+\text{arctg}\, x)+k$

192. $\int e^x\, \text{sen}\, x\, dx=\frac{e^x}{2}(\text{sen}\, x-\cos x)+k$

193. $\int e^x\cos x\, dx=\frac{e^x}{2}(\text{sen}\, x+\cos x)+k$

194. $\int x^2\, \text{sen}\, x\, dx=-x^2\cos x+2x\, \text{sen}\, x+2\cos x+k$

195. $\int x^2\cos x\, dx=x^2\, \text{sen}\, x+2x\cos x-2\, \text{sen}\, x+k$

196. $\int x^2e^x\, dx=x^2e^x-2xe^x+2e^x+k$

197. $\int x^2\, \text{arctg}\, x\, dx=\frac{x^3}{3}\text{arctg}\, x-\frac{x^2}{6}+\frac{1}{6}\ln(x^2+1)+k$

198. $\int x^2\ln x\, dx=\frac{x^3}{3}\ln x-\frac{x^3}{9}+k$

199. $\int x^n\ln x\, dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}\left(\ln x-\frac{1}{n+1}\right)+k$

Esercizi riassuntivi dei vari metodi

Calcolare gli integrali proposti negli esercizi dal 201 al 222, verificando i risultati indicati.

200. $\int \frac{x}{x^4-2x^2+1}\, dx=\frac{1}{2}\left(\frac{-1}{x^2-1}\right)+k$

(Tenere presente che risulta $x^4-2x^2+1=(x^2-1)^2$).

201. $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^6-2x^3+1}\,dx=\frac{1}{3}\left(\frac{-1}{x^3-1}\right)+k$

(Tenere presente che risulta $x^6-2x^3+1=(x^3-1)^2$.)

202. $\displaystyle\int \frac{x}{1+x^4}\,dx=\frac{1}{2}\cdot \text{arctg}\,(x^2)+k$

203. $\displaystyle\int \frac{x^4}{1+x^2}\,dx=\frac{1}{3}\cdot x^3-x+\text{arctg}\,x+k$

204. $\displaystyle\int \frac{2x^4-x^2}{4x^2+4x+1}\,dx=\frac{1}{6}\cdot x^3-\frac{1}{4}\cdot x^2+\frac{1}{8}\cdot x+\frac{1}{16}\cdot\left(\frac{1}{2x+1}\right)+k$

(Eseguire la divisione fra i due polinomi e tenere presente che risulta $4x^2+4x+1=(2x+1)^2$).

205. $\displaystyle\int \frac{1}{x^3-2x^2+x}\,dx=\ln|x|-\ln|x-1|-\frac{1}{x-1}+k$

(Tenere presente che risulta $x^3-2x^2+x=x(x-1)^2$; si può quindi estendere il procedimento indicato a pag. 552 e cercare tre numeri A, B, C che permettano di scrivere

$$\frac{1}{x^3-2x^2+x}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2}).$$

206. $\displaystyle\int \frac{x}{x^3+x^2-x-1}\,dx=\frac{1}{4}\ln(x-1)-\frac{1}{4}\ln(x+1)-\frac{1}{2(x+1)}+k$

(Risulta $x^3+x^2-x-1=(x-1)(x+1)^2$ e, analogamente all'esercizio 205...)

207. $\displaystyle\int \ln^2 x\,dx=x\ln^2 x-2x\ln x+2x+k$

(Basta valersi del metodo di integrazione per parti).

208. $\displaystyle\int \cos^2 x\,dx=\frac{1}{2}(x+\text{sen}\,x\cos x)+k$

(L'integrale può essere calcolato in due modi:

I) riconducendosi ad integrali noti con le formule di duplicazione, che permettono di scrivere

$$\cos^2 x=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2x$$

II) valendosi dell'integrazione per parti, considerando $\cos^2 x=\cos x\cos x$.
Si ottiene in tal caso

$$\int \cos^2 x\,dx=\cos x\,\text{sen}\,x+\int \text{sen}^2 x\,dx.$$

Applicando poi la nota formula di trigonometria, $\text{sen}^2 x=1-\cos^2 x$, si può scrivere

$$\int \cos^2 x\,dx=\cos x\cdot\text{sen}\,x+\int 1\,dx-\int \cos^2 x\,dx,$$

da cui si ricava

$$2\int \cos^2 x\,dx=\cos x\,\text{sen}\,x+x+k...)$$

209. $\displaystyle\int \text{sen}^2 x\,dx=\frac{1}{2}(x-\text{sen}\,x\cos x)+k$

(Valgono considerazioni analoghe a quelle svolte nell'esercizio 208.)

210. $\displaystyle\int \cos^3 x\,dx=\text{sen}\,x-\frac{1}{3}\text{sen}^3 x+k$

(L'esercizio è molto più semplice del 208; basta infatti considerare $\cos^3 x=\cos x\cos^2 x$ e scrivere $\cos^3 x=\cos x(1-\text{sen}^2 x)$...)

211. $\int \text{sen}^3 x\, dx = -\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x + k$

(Valgono considerazioni analoghe a quelle svolte nell'esercizio 210).

212. $\int \text{tg}^2 x\, dx = \text{tg}\, x - x + k$

(Basta valersi delle formule di trigonometria per scrivere

$$tg^2 x = \frac{sen^2 x}{cos^2 x} = \frac{1-cos^2 x}{cos^2 x} = \frac{1}{cos^2 x} - 1).$$

213. $\int \text{tg}^3 x\, dx = \frac{1}{2}\text{tg}^2 x + \ln|\cos x| + k$

(Basta valersi delle formule di trigonometria per scrivere

$$tg^3 x = tg\, x\, tg^2 x = tg\, x \frac{sen^2 x}{cos^2 x} = tg\, x \frac{1-cos^2 x}{cos^2 x} = tg\, x\left(\frac{1}{cos^2 x} - 1\right)$$

e quindi

$$\int tg^3 x\, dx = \int tg\, x\left(\frac{1}{cos^2 x}\right)dx - \int tg\, x\, dx).$$

214. $\int \frac{\text{sen}\, x}{\cos^3 x}\, dx = \frac{1}{2}\text{tg}^2 x + k$

(Basta valersi delle formule di trigonometria per scrivere

$$\frac{sen\, x}{cos^3 x} = \frac{sen\, x}{cos\, x}\cdot\frac{1}{cos^2 x} = tg\, x \frac{1}{cos^2 x}).$$

215. $\int \frac{1}{\cos x \cdot \text{sen}\, x}\, dx = \ln|\text{sen}\, x| - \ln|\cos x| + k$

(Conviene scrivere

$$\frac{1}{cos\, x\cdot sen\, x} = \frac{sen^2 x + cos^2 x}{sen\, x\, cos\, x} = \frac{sen\, x}{cos\, x} + \frac{cos\, x}{sen\, x}).$$

216. $\int \frac{1}{\text{sen}\, x}\, dx = \ln\left|\text{sen}\,\frac{x}{2}\right| - \ln\left|\cos\frac{x}{2}\right| + k$

(Conviene valersi sempre della formula di duplicazione per scrivere $senx = 2\, sen\,\frac{x}{2}\, cos\,\frac{x}{2}$ e ricondursi all'esercizio precedente).

217. $\int \frac{1}{\cos x}\, dx = \ln\left|\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)\right| - \ln\left|\text{sen}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)\right| + k$

(Il procedimento può essere organizzato nel modo seguente:

– *ci si vale della trigonometria per scrivere $cos\, x = sen\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$;*

– *ci si vale del metodo di integrazione per sostituzione per scrivere*

$$\int \frac{1}{sen\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}dx = \int \frac{-1}{sen\, z}dz \qquad con \qquad z = \frac{\pi}{2} - z;$$

– *si tiene presente l'esercizio precedente per completare il calcolo).*

218. $\int \text{sen}\, 2x \cdot \cos x\, dx = -\frac{1}{6}\cos 3x - \frac{1}{2}\cos x + k$

(Basta valersi delle formule di Werner per scrivere $sen\, 2x\cdot cos\, x = \frac{1}{2}(sen\, 3x + sen\, x)$).

219. $\int \text{sen } 3x \cdot \text{sen } 2x \, dx = \frac{1}{2} \text{ sen } x - \frac{1}{10} \text{ sen } 5x + k$

(Basta valersi delle formule di Werner per scrivere $\text{sen } 3x \cdot \text{sen } 2x = \frac{1}{2} (\cos x - \cos 5x)$*).*

220. $\int \cos 4x \cdot \cos 2x \, dx = \frac{1}{4} \text{ sen } 2x + \frac{1}{12} \text{ sen } 6x + k$

(Basta valersi delle formule di Werner per scrivere $\cos 4x \cdot \cos 2x = \frac{1}{2} (\cos 2x + \cos 6x)$*).*

221. $\int \sqrt{1-x^2} \, dx = \frac{1}{2} (\text{arcsen } x + x \cdot \sqrt{1-x^2}) + k$

(L'integrale può essere calcolato in due modi:

I) riconducendosi ad integrali noti con il metodo di sostituzione, considerando

$$x = \text{sen } z \qquad \text{e quindi} \qquad dx = \cos z \, dz.$$

In questo modo l'integrale diventa, valendosi dei risultati ottenuti nell'esercizio 208,

$$\int \sqrt{1-\text{sen}^2 z} \cdot \cos z \, dz = \int \cos^2 z \, dz = \frac{1}{2} \cdot (z + \text{sen } z \cdot \cos z) + k.$$

Infine, per esprimere il risultato tramite la variabile x, basta ricordare che si è posto $x = \text{sen } z$ *e quindi* $z = \text{arcsen } x \ldots$*;*

II) valendosi dell'integrazione per parti, scegliendo

$$f(x) = \sqrt{1-x^2} \qquad e \qquad g'(x) = 1.$$

Si ottiene in tal caso

$$\int \sqrt{1-x^2} \, dx = x\sqrt{1-x^2} + \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} \, dx.$$

Scrivendo poi

$$\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{x^2-1+1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{x^2-1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

si può arrivare alla seguente espressione

$$\int \sqrt{1-x^2} \, dx = x\sqrt{1-x^2} + \text{arcsen } x - \int \sqrt{1-x^2} \, dx$$

da cui si arriva facilmente alla conclusione...)

222. $\int \sqrt{a^2-x^2} \, dx = \frac{1}{2} \left(a^2 \text{ arcsen } \frac{x}{a} + x\sqrt{a^2-x^2} \right) + k$

(Valgono considerazioni analoghe a quelle svolte nell'esercizio precedente).

7. Continuità, derivabilità, integrabilità di una funzione

223. Esaminare la funzione

$$y = \sqrt[3]{x-1}$$

e risolvere i seguenti quesiti:

a) verificare che la funzione è continua nel suo campo di esistenza;
b) verificare che la funzione è integrabile nel suo campo di esistenza;
c) calcolare le primitive della funzione, verificando che sono continue;
d) verificare che la funzione non è derivabile in $A(1, 0)$.

224. Esaminare la funzione

$$y=\sqrt{x-2}$$

e risolvere i seguenti quesiti:

a) stabilire se la funzione è continua nel suo campo di esistenza;
b) stabilire se la funzione è integrabile nel suo campo di esistenza;
c) calcolare le primitive della funzione e stabilire se sono continue;
d) stabilire se la funzione è derivabile nel suo campo di esistenza.

225. Esaminare la funzione $y=\dfrac{|x|}{x}$ e risolvere i seguenti quesiti:

a) verificare che la funzione è integrabile nel suo campo di esistenza;
b) verificare che si possono trovare delle primitive della funzione continue su tutto l'asse reale;
c) verificare che la funzione è discontinua nel punto d'ascissa 0.

226. Esaminare la funzione $y=\dfrac{|x-1|}{x-1}$ e risolvere i seguenti quesiti:

a) stabilire se la funzione è integrabile nel suo campo di esistenza;
b) stabilire se si possono trovare delle primitive della funzione continue su tutto l'asse reale;
c) stabilire se la funzione è continua nel suo campo di esistenza.

227. Esaminare la funzione $y=|x|$ e risolvere i seguenti quesiti:

a) verificare che la funzione è integrabile nel suo campo di esistenza;
b) verificare che si possono trovare delle primitive della funzione derivabili su tutto l'asse reale;
c) verificare che la funzione è continua, ma non derivabile nel punto d'ascissa 0.

228. Esaminare la funzione $y=|x-3|$ e risolvere i seguenti quesiti:

a) stabilire se la funzione è integrabile nel suo campo di esistenza;
b) stabilire se si possono trovare delle primitive della funzione derivabili su tutto l'asse reale;
c) stabilire se la funzione è continua nel suo campo di esistenza;
d) stabilire se la funzione è derivabile nel suo campo di esistenza.

229. Esaminare le seguenti affermazioni e stabilire se sono vere:

a) una funzione continua è anche integrabile;
b) una funzione integrabile è certamente continua;
c) si può sempre trovare una primitiva di una funzione continua;
d) si può trovare una primitiva anche di una funzione discontinua.

230. Esaminare le seguenti affermazioni e stabilire se sono vere:

a) una funzione derivabile è certamente integrabile;
b) una funzione integrabile è certamente derivabile;
c) si può sempre trovare una primitiva di una funzione derivabile;
d) si può trovare una primitiva anche di una funzione non derivabile.

231. Esaminare le seguenti affermazioni e stabilire quali sono vere e quali sono false:

a) una funzione derivabile è certamente continua;
b) una funzione continua è certamente derivabile;
c) una funzione continua può presentare dei punti in cui non è derivabile;
d) una funzione derivabile non può presentare punti di discontinuità.