6
Complementi

A. Procedimenti numerici e grafici per integrare una funzione

Nel corso del cap. 6 abbiamo visto come lo studio degli integrali conduca a collegare due problemi apparentemente molto lontani fra loro: per calcolare l'area sotto una curva occorre conoscere una primitiva della funzione che ha per grafico quella curva. Tuttavia, nel ricercare le primitive di una funzione, si incontrano delle difficoltà inaspettate: non si hanno delle regole generali di "algebra degli integrali", ma solo dei metodi validi per alcune categorie di funzioni. Inoltre, i metodi di integrazione non possono essere applicati quando una funzione è data solo mediante un grafico o una tabella. Vediamo allora come si può procedere per calcolare l'area sotto una curva, quando non si riesce a determinare la primitiva della funzione che descrive la curva.

1. Integrazione numerica

Affrontiamo il seguente problema: è data una funzione $y=f(x)$, che si mantiene positiva in un intervallo $[a, b]$, e si vuole calcolare (fig. 1)

$$S=\int_a^b f(x)dx,$$

cioè l'area S del trapezoide relativo ad $y=f(x)$, ma non si riesce a trovare una primitiva della funzione. Per esempio, si deve calcolare (fig. 2)

$$S=\int_1^2 \frac{e^x}{x}\,dx$$

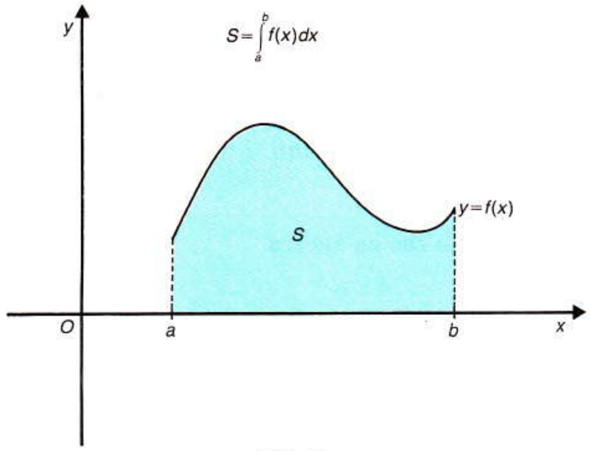

Fig. 1

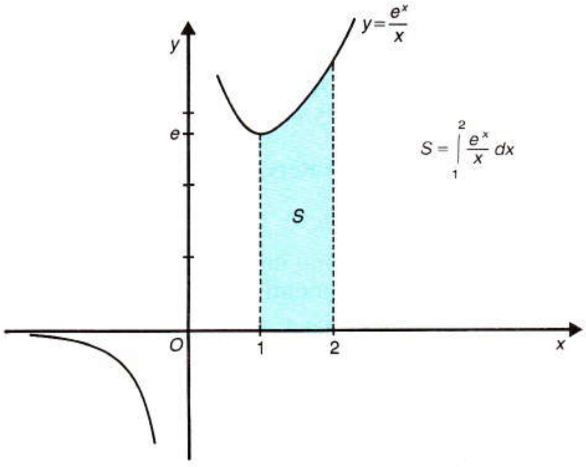

Fig. 2

Il metodo più semplice di risolvere il problema è strettamente legato alla definizione di integrale; si procede nel modo seguente (fig. 3):

- si divide l'intervallo $[a, b]$ in n intervallini uguali, tutti lunghi $h=\frac{b-a}{n}$;
- in ogni intervallo si considera il punto medio, in modo da avere

$$x_1=a+\frac{h}{2}, \quad x_2=a+3\frac{h}{2}, \quad x_3=a+5\frac{h}{2}, \ldots, \quad x_n=a+(2n-1)\frac{h}{2};$$

- si calcola

$$\Sigma_n=h\cdot f(x_1)+h\cdot f(x_2)+\ldots+h\cdot f(x_n);$$

- Σ_n viene scelto come valore approssimato dell'area S richiesta.

Con questo procedimento l'area S del trapezoide viene approssimata con l'area Σ_n di una superficie formata da tanti rettangoli (fig. 4); proprio per questo il procedimento prende il nome di **metodo dei rettangoli**.

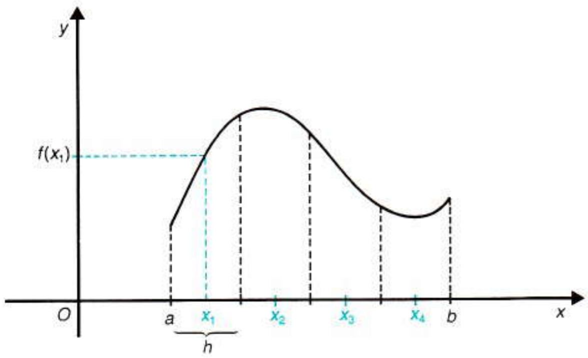

Fig. 3

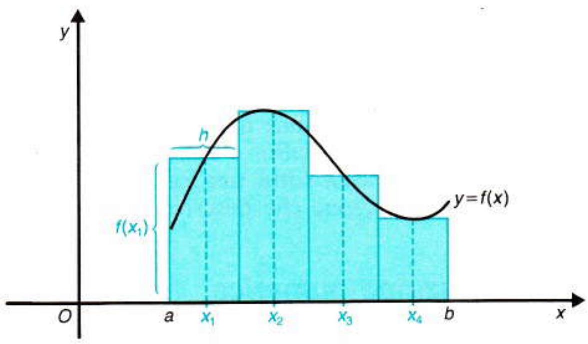

Fig. 4

D'altra parte, richiamando la definizione di integrale

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{h\to 0}\,[h\cdot f(x_1)+h\cdot f(x_2)+\ldots+h\cdot f(x_n)],$$

si capisce che, per avere una buona approssimazione, occorre scegliere h molto vicino a 0 e quindi n molto grande.

Un altro metodo che, in alcuni casi, fornisce delle approssimazioni più soddisfacenti è **il metodo dei trapezi**. Il nome è legato al fatto che si approssima l'area S del trapezoide con l'area T_n di una superficie formata da n trapezi, costruiti nel modo seguente (figg. 5 e 6):

- si divide $[a, b]$ in n intervalli lunghi $h=\frac{b-a}{n}$, indicando sull'asse delle x i punti

$$a, \quad x_1=a+h, \quad x_2=a+2h, \quad x_3=a+3h, \ldots, \quad x_n=b=a+nh$$

- relativamente al primo intervallo si calcola l'area A_1 del trapezio che ha altezza h e come basi i segmenti lunghi $f(a)$ e $f(x_1)$, ottenendo

$$A_1=h\cdot\frac{f(a)+f(x_1)}{2}.$$

- si ripete questo calcolo relativamente ai trapezi costruiti sui vari intervalli, ottenendo

$$A_2=h\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}, \ldots, \quad A_n=h\frac{f(x_{(n-1)})+f(b)}{2}$$

– si calcola l'area T_n, somma dell'area dei trapezi, ottenendo

$$T_n = h \cdot \frac{f(a)+f(x_1)+f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_{n-1})+f(b)}{2}$$

ossia

$$T_n = h \cdot \left(\frac{f(a)}{2}+f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_{n-1})+\frac{f(b)}{2}\right).$$

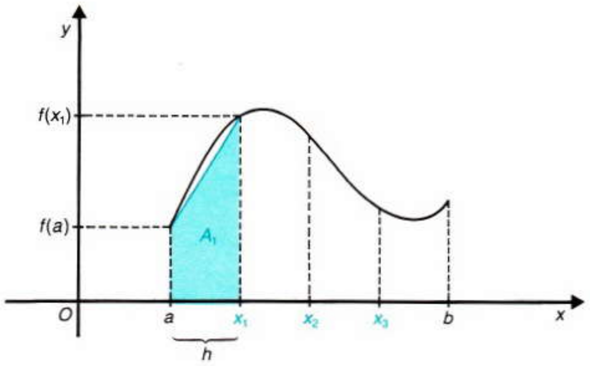

Fig. 5

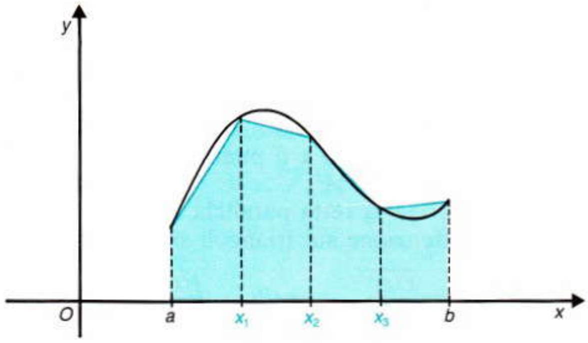

Fig. 6

Vediamo ora i due metodi a confronto per calcolare un'area di cui conosciamo il risultato esatto: per esempio l'area S sotto la parabola d'equazione $y=3x^2$ (fig. 7), nell'intervallo [0, 1]. Sappiamo infatti che risulta

$$S = \int_0^1 3x^2\, dx = [x^3]_0^1 = 1$$

e possiamo confrontare questo valore con quelli forniti dal metodo dei rettangoli e dal metodo dei trapezi, basandosi sulla tabella seguente.

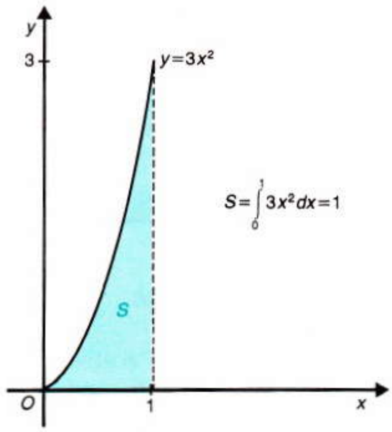

Fig. 7

n	Σ_n	T_n
1	0,75	1,5
2	0,9375	1,125
4	0,984375	1,03125
10	0,9975	1,005

Si osserva dunque che, anche dividendo l'intervallo in sole 10 parti, si arriva ad un risultato dell'integrale abbastanza vicino a quello esatto. Concludiamo l'esame di questi due metodi numerici dando dei valori approssimati dell'integrale indicato all'inizio e cioè

$$S = \int_1^2 \frac{e^x}{x}\, dx$$

Dividendo per esempio l'intervallo [1, 2] in 10 parti, si ottiene:

$$\Sigma_{10} = 3{,}05834 \qquad T_{10} = 3{,}06065.$$

2. Integrazione grafica

Consideriamo ora una funzione $y=f(x)$, data nell'intervallo $[a, b]$ mediante un grafico cartesiano, e vediamo come il metodo dei rettangoli esaminato prima possa anche essere realizzato per via grafica.
Questo procedimento grafico si basa su una costruzione che permette di visualizzare l'area di un rettangolo disegnato in un riferimento cartesiano. Vediamo meglio di che si tratta, cominciando ad esaminare un rettangolo $ABCD$, che ha per vertici i punti $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_A)$, $C(x_B, 0)$, $D(x_A, 0)$ (fig. 8); per determinare l'area Σ di questo rettangolo, si deve calcolare

$$\Sigma=\overline{DC}\cdot\overline{AD} \qquad (1)$$

Si effettua ora la costruzione seguente (fig. 9);

- il punto A viene proiettato sull'asse delle y, ottenendo il punto A',
- si fissa sull'asse delle x il punto $P(-1, 0)$,
- si traccia la retta PA',
- da D si traccia la retta parallela a PA', fino ad incontrare in H la retta CB,
- si fissa l'attenzione sui triangoli simili OPA' e CDH, per cui risulta

$$\frac{\overline{HC}}{\overline{DC}}=\frac{\overline{OA'}}{\overline{OP}}, \qquad \text{ossia} \qquad \frac{\overline{HC}}{\overline{DC}}=\frac{\overline{AD}}{1}, \qquad \text{da cui} \qquad \overline{HC}=\overline{DC}\cdot\overline{AD}.$$

Confrontando con la (1), si conclude che risulta $\Sigma=\overline{HC}$ e cioè **la lunghezza del segmento HC visualizza il valore numerico dell'area Σ del rettangolo**.

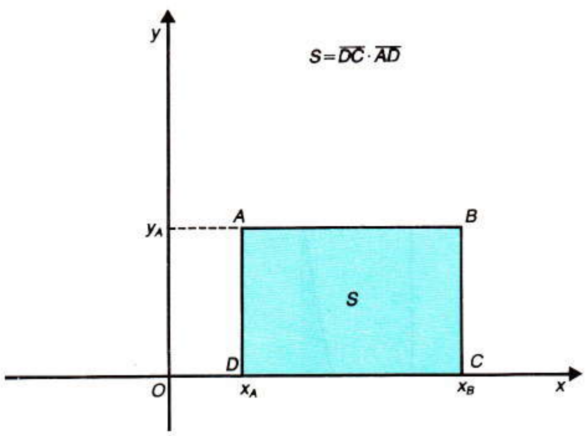

Fig. 8

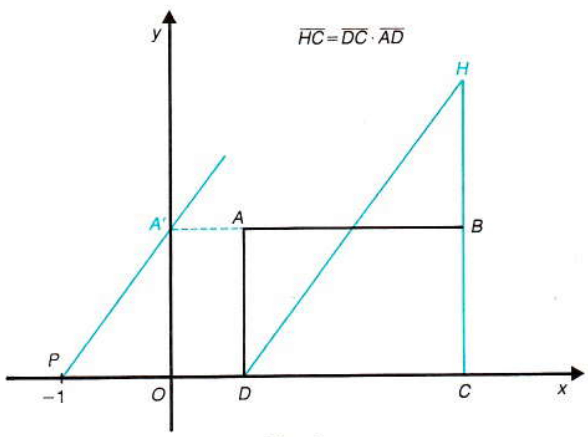

Fig. 9

Vediamo ora come questa costruzione permette di approssimare per via grafica l'area S del trapezoide relativo ad una funzione $y=f(x)$, che si mantiene continua e positiva in un intervallo $[a, b]$; si procede così (fig. 10):

- si divide l'intervallo $[a, b]$ in n intervallini uguali, tutti lunghi $h=\dfrac{b-a}{n}$, in modo da avere sull'asse delle x i punti A, C_1, C_2, ..., $C_n=B$,
- in ogni intervallo si considera il punto medio, in modo da avere

$$x_1=a+\frac{h}{2}, \qquad x_2=a+3\cdot\frac{h}{2}, \qquad x_3=a+5\cdot\frac{h}{2}, \ldots, \qquad x_n=a+(2n-1)\cdot\frac{h}{2},$$

- si fissa sull'asse delle x il punto $P(-1, 0)$,
- relativamente al primo intervallo si effettua la costruzione seguente
  - si costruisce il rettangolo $AC_1D_1E_1$, di base h ed altezza $f(x_1)$,
  - si proietta E_1 sull'asse delle y, ottenendo il punto F_1,
  - si traccia la retta PF_1,
  - da A si traccia la parallela a PF_1, fino ad incontrare C_1D_1 in H_1,
  - si ottiene così $C_1H_1=hf(x_1)$;
- si ripete una costruzione analoga a partire dal secondo intervallo e cioè
  - si costruisce il rettangolo $C_1C_2D_2E_2$, di base h ed altezza $f(x_2)$,
  - si proietta E_2 sull'asse delle y, ottenendo il punto F_2,
  - si traccia la retta PF_2,
  - da H_1 si traccia la parallela a PF_2, fino ad incontrare C_2D_2 in H_2,

• si ottiene così $H'_1H_2=hf(x_2)$ e $C_2H_2=hf(x_1)+hf(x_2)$.
– si continua la costruzione fino ad esaurire gli intervalli, ottenendo (fig. 11)

$$BH_n=hf(x_1)+hf(x_2)+\ldots+hf(x_n).$$

Così la lunghezza di BH_n indica il valore Σ_n, che approssima l'area S, data da

$$S=\int_a^b f(x)dx,$$

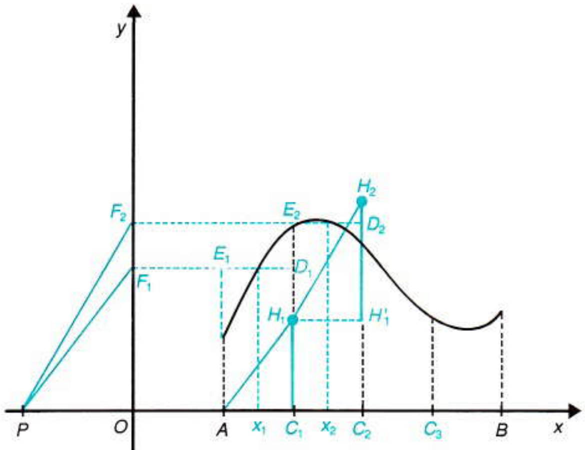

Fig. 10

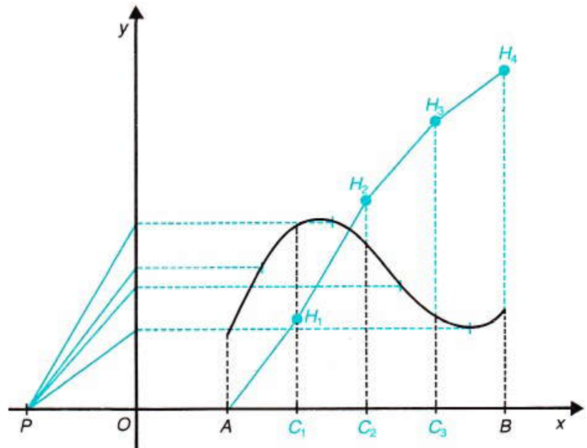

Fig. 11

Questo metodo grafico, come il corrispondente metodo numerico, dà un'approssimazione che migliora al crescere del numero n degli intervalli. Ma il metodo grafico fornisce un'opportunità in più: la poligonale $AH_1H_2\ldots H_n$ tende ad una curva, quando il numero n degli intervalli è elevato (fig. 12); su questa curva, in corrispondenza ad ogni ascissa x, si legge il valore

$$F(x)=\int_a^x f(x)dx.$$

Ci si rende così conto che il procedimento grafico può anche condurre a tracciare un grafico approssimativo di una primitiva della funzione $f(x)$; si tratta della primitiva caratterizzata dalla proprietà $F(a)=0$.

E così è chiaro che si può avere un'idea dell'insieme delle primitive della funzione data: basta disegnare tante curve come quella di fig. 12, opportunamente traslate lungo l'asse delle y (fig. 13).

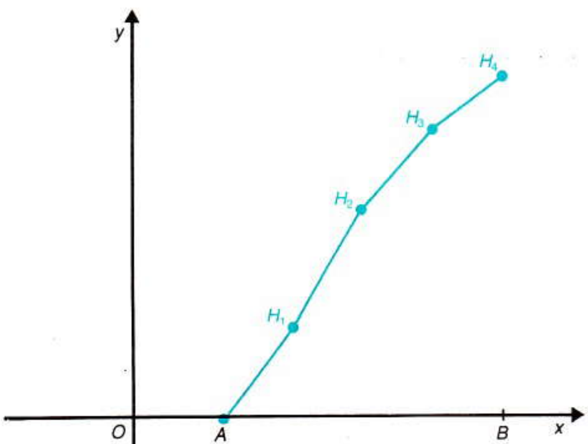

Fig. 12

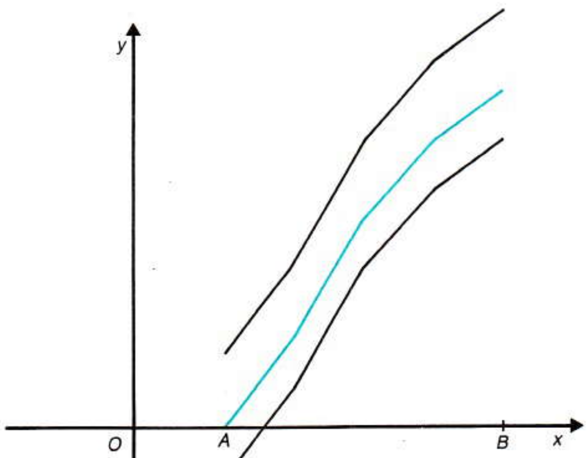

Fig. 13

Vediamo ora il metodo grafico all'opera per risolvere due problemi:

1°) tracciare il grafico di

$$F(x)=\int_0^x \cos x \, dx, \qquad \text{con } x \text{ variabile nell'intervallo } [0, \pi]$$

2°) tracciare il grafico di

$$F(x)=\int_{\frac{1}{2}}^{x} \frac{e^x}{x} \, dx, \qquad \text{con } x \text{ variabile nell'intervallo } \left[\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right]$$

Il 1° grafico (fig. 14) permette di apprezzare l'efficacia del metodo: sappiamo infatti che risulta

$$\int_0^x \cos x \, dx = \text{sen } x$$

e la poligonale in colore costruita dividendo l'intervallo $[0, \pi]$ in sole 6 parti è già abbastanza vicina all'arco di sinusoide.
Il 2° grafico (fig. 15) conduce invece a trovare per via grafica una primitiva che altrimenti non si può calcolare.

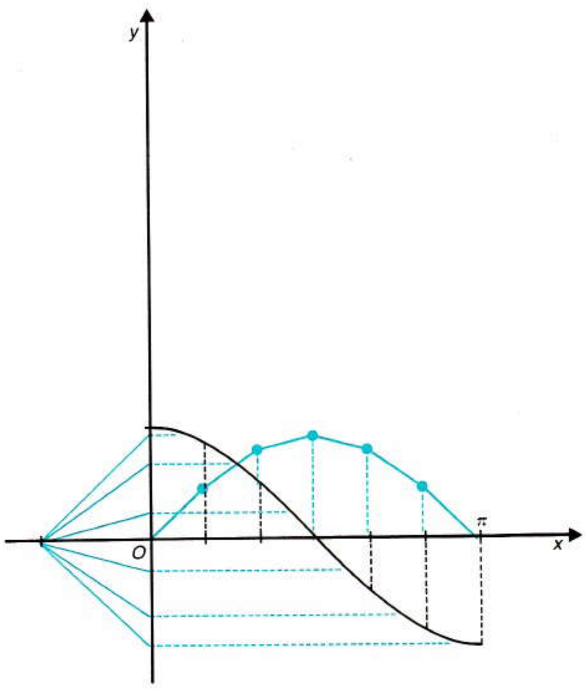

Fig. 14

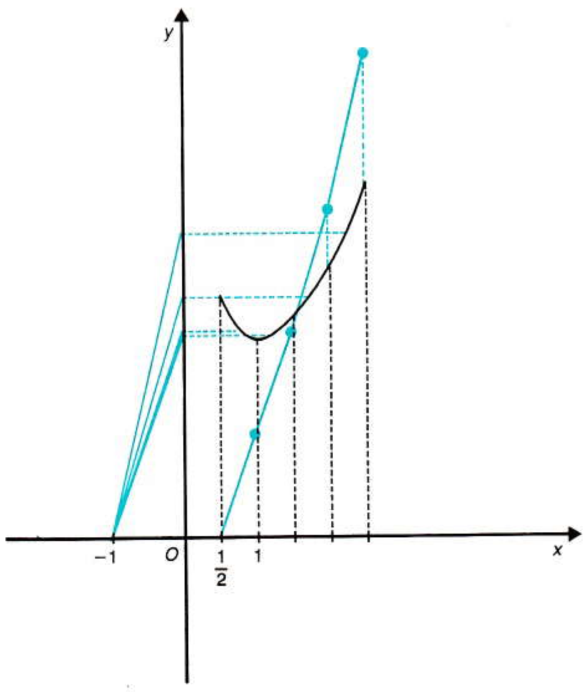

Fig. 15

Concludiamo osservando che questo metodo grafico ha avuto un'importanza rilevante prima che si diffondessero i calcolatori, mentre oggi sono universalmente usati i metodi numerici. È infatti molto semplice scrivere un programma per calcolare un integrale col metodo dei rettangoli o dei trapezi, dividendo l'intervallo assegnato in un gran numero di parti e i risultati si ottengono in un tempo molto breve. Per sapere come si procede basta consultare l'Appendice 3.