6
Integrali

1. Problemi che conducono al calcolo integrale

Il calcolo integrale è il risultato di un lavoro durato molti secoli e cominciato all'epoca degli antichi Greci: Democrito (IV secolo a.C.) e soprattutto Archimede (III secolo a.C.) trovarono metodi geniali per determinare le aree delle superfici piane a contorno curvilineo (in particolare il cerchio).

Gli studi degli antichi Greci furono ripresi nel Rinascimento da G. Galilei (1564-1642) e dai suoi allievi B. Cavalieri (1598-1647) e E. Torricelli (1606-1647), mentre si sviluppavano le ricerche sulla tangente ad una curva e sulla velocità di un corpo.

Nei capp. 4 e 5 abbiamo visto come queste ricerche hanno condotto al concetto di derivata di una funzione:

- la pendenza della tangente alla curva grafico della funzione $y=f(x)$ è data, per ogni valore di x, dalla derivata $y'=f'(x)$;
- la velocità di un corpo, che si muove al variare del tempo x secondo la legge oraria $y=f(x)$ è data, istante per istante, dalla derivata $y'=f'(x)$.

Ora, nelle applicazioni si presentano i seguenti due problemi:

- di una curva piana si conosce, per ogni valore di x, la pendenza della tangente e si vuole ricostruire l'equazione della curva;
- di un corpo si conosce, in ogni istante, la velocità e si vuole risalire alla legge oraria del moto.

I due problemi, apparentemente molto diversi, si riconducono facilmente ad uno solo: **determinare una funzione $y=f(x)$, di cui è data la derivata**.

È questo il problema fondamentale del calcolo integrale.

Così, nel XVII secolo, si sviluppano, in modo indipendente, le indagini su due tipi di problemi, apparentemente molto lontani:

- il calcolo di aree a contorno curvilineo,
- la ricerca di una funzione di cui è data la derivata.

Finalmente E. Torricelli (1608-1647) e, poco più tardi J. Barrow (1630-1677), riconobbero che la soluzione dei due problemi era basata sullo stesso procedimento. Questa scoperta ha stabilito un formidabile collegamento fra due correnti di indagini rimaste per secoli separate e ha fornito un impulso notevolissimo allo sviluppo di un nuovo ramo dell'analisi: **il calcolo integrale**, di cui ci occuperemo in questo capitolo.

I. Newton (1642-1727) e G. Leibniz (1646-1716) hanno dato i contributi più innovativi al calcolo integrale, che ha continuato a svilupparsi nel XIX secolo, fino a ricevere una sistemazione rigorosa soprattutto da parte di A.L. Cauchy (1798-1857) e B. Riemann (1826-1866).

In questo capitolo verranno esposti alcuni risultati fondamentali del calcolo integrale, seguendo, in linea di massima, lo sviluppo storico.

2. Dal calcolo di aree all'integrale definito

In questo paragrafo esaminiamo uno dei problemi che hanno determinato la nascita e lo sviluppo del calcolo integrale: determinare l'area di una superficie piana, limitata da un contorno curvilineo.

Cominciamo a cercare un procedimento valido nel caso seguente (fig. 1): data una funzione $y=f(x)$, continua in un intervallo $[a, b]$, si considera l'arco AB compreso fra i due punti $A[a, f(a)]$ e $B[b, f(b)]$; si vuole determinare l'area della superficie delimitata dalla poligonale $AA'B'B$ e dall'arco AB. Questa superficie prende il nome di **trapezoide** relativo alla funzione $y=f(x)$ nell'intervallo $[a, b]$.

Consideriamo il caso in cui l'arco AB si trovi tutto al disopra dell'asse delle x e cioè risulti

$$a<b \quad \text{e} \quad f(x)>0;$$

l'area cercata, che indichiamo con T, è un numero reale positivo che esprime quante volte l'unità di misura è contenuta nella superficie considerata (fig. 2).

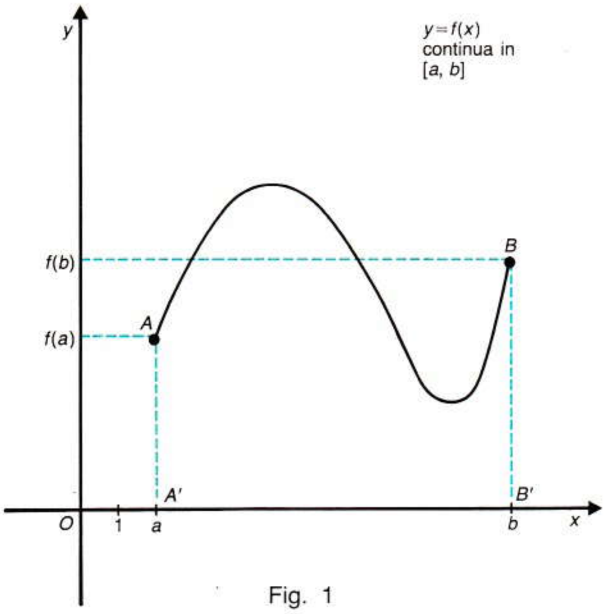

Fig. 1

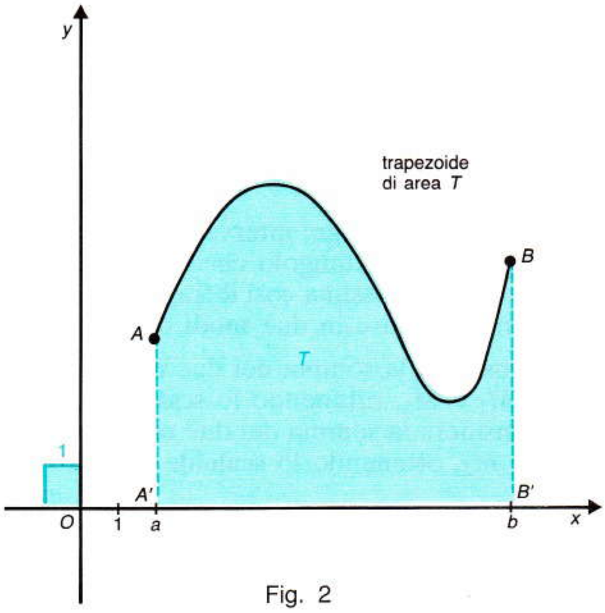

Fig. 2

Il procedimento per calcolare l'area T prende origine dal pensiero di Archimede e si basa su un'idea semplice, ma geniale: approssimare la superficie data con un'altra, di cui sia facile calcolare l'area.

Ora, la superficie più semplice da calcolare è certamente quella del rettangolo; ecco allora due valori approssimati dell'area T:

- l'area S_1 del rettangolo (fig. 3) che ha la base lunga $(b-a)$ e come altezza il massimo M della funzione;
- l'area s_1 del rettangolo (fig. 4) che ha la base lunga $(b-a)$ e come altezza il minimo m della funzione.

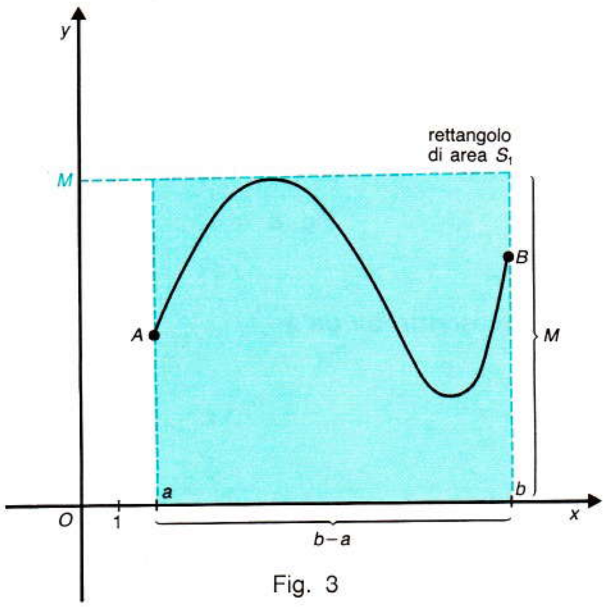

Fig. 3

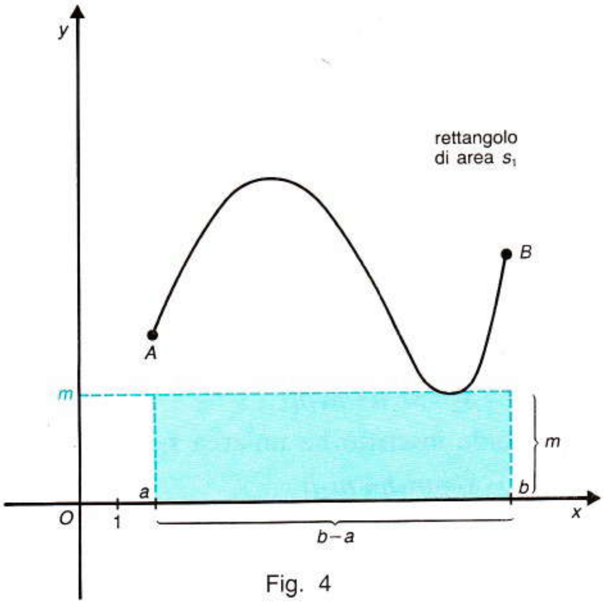

Fig. 4

Abbiamo così indicato due valori approssimati che è sempre possibile trovare, perché la funzione $y=f(x)$, che è continua nell'intervallo $[a, b]$, ammette certamente un massimo ed un minimo[1].
È chiaro che risulta

$$s_1<T<S_1$$

e perciò S_1 fornisce un'approssimazione per eccesso dell'area T, mentre s_1 fornisce un'approssimazione per difetto. Ci si rende subito conto che l'approssimazione ottenuta è molto grossolana.

Ecco allora come si può procedere per migliorare l'approssimazione (figg. 5 e 6): si divide l'intervallo $[a, b]$ in due parti, per semplicità uguali fra loro, e quindi lunghe

$$h=\frac{b-a}{2};$$

si costruiscono, in ogni intervallo, il rettangolo che ha per altezza il massimo (fig. 5) e il rettangolo che ha per altezza il minimo (fig. 6).

Si approssima così il trapezoide con una somma di rettangoli, che possiamo costruire in due modi differenti:

- si considera la somma dei due rettangoli che hanno per altezza i massimi, M_1 e M_2, ottenendo lo **scaloide circoscritto** al trapezoide (fig. 5),
- si considera la somma dei due rettangoli che hanno per altezza i minimi, m_1 e m_2, ottenendo lo **scaloide inscritto** nel trapezoide (fig. 6).

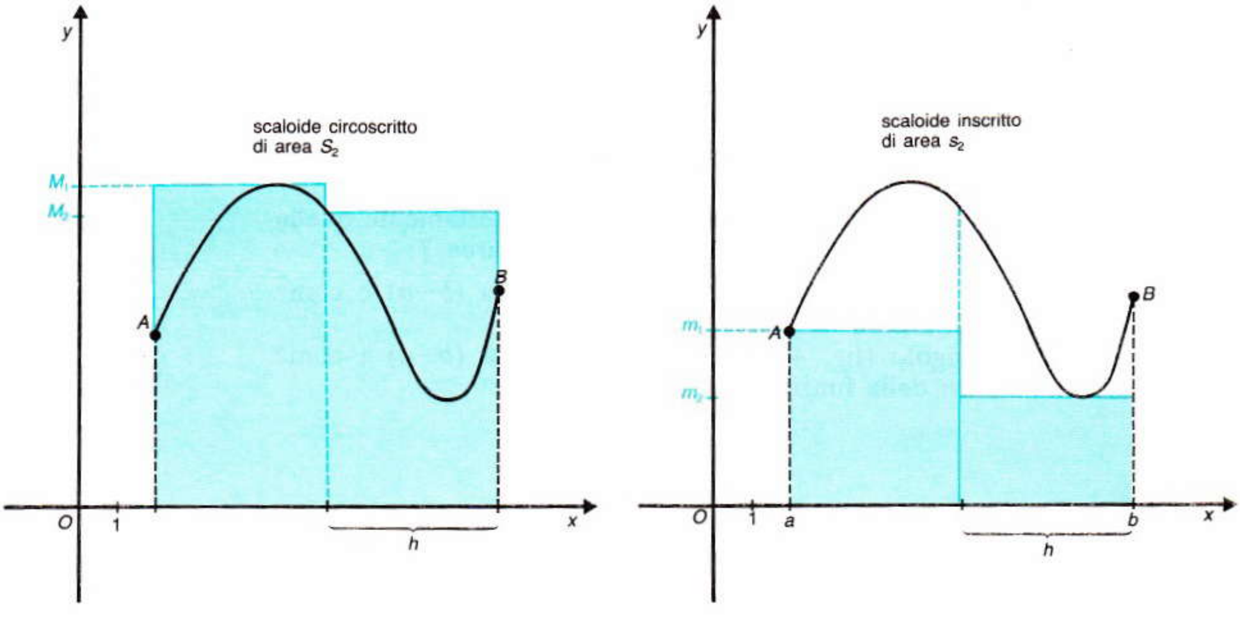

Fig. 5 Fig. 6

È facile calcolare l'area di questi scaloidi: lo scaloide circoscritto ha un'area S_2 data da:

$$S_2=M_1h+M_2h,$$

lo scaloide inscritto ha un'area s_2, data da

$$s_2=m_1h+m_2h.$$

[1] Vedi il teorema di Weierstrass, cap. 3, paragrafo 8.

È chiaro che S_2 fornisce un altro valore approssimato per eccesso dell'area T del trapezoide, mentre s_2 approssima ancora per difetto l'area T.

Ma ci si rende anche conto (fig. 7) che l'area S_2 dello scaloide circoscritto è più piccola di S_1 e fornisce dunque una migliore approssimazione dell'area T; analogamente (fig. 8), l'area s_2 dello scaloide inscritto approssima meglio l'area T, dato che è più grande di s_1.

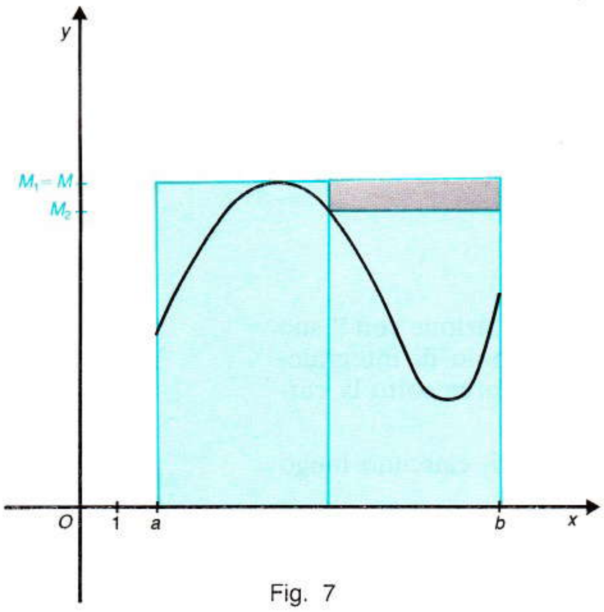

Fig. 7

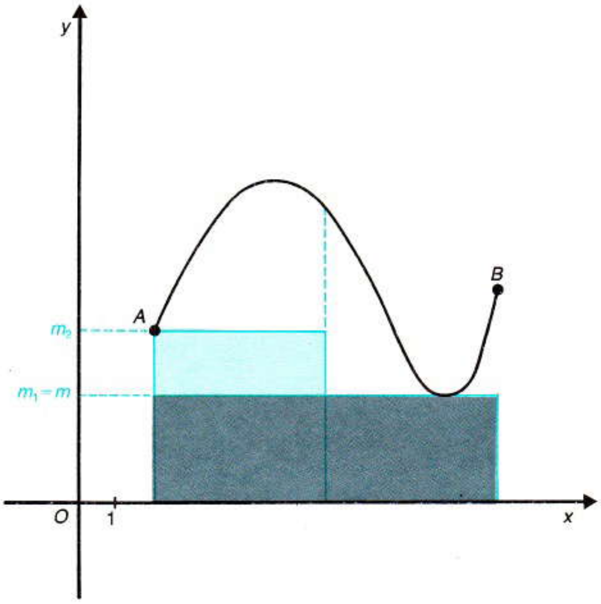

Fig. 8

Ora si può continuare ad infittire la suddivisione dell'intervallo $[a, b]$; si ha allora che:

- aumenta sempre più il numero n di parti,
- ognuna delle n parti ha un'ampiezza h sempre più piccola, data da

$$h=\frac{b-a}{n},$$

- l'area S_n degli scaloidi circoscritti approssima per eccesso l'area T del trapezoide,
- l'area s_n degli scaloidi inscritti approssima per difetto l'area T.

Esaminiamo ora l'andamento delle aree degli scaloidi, quando $n \to \infty$ e, quindi, $h \to 0$; si ha che:

- gli scaloidi circoscritti hanno un'area S_n che va decrescendo, tuttavia S_n non può diventare più piccola di T;
- gli scaloidi inscritti hanno un'area s_n che va crescendo, ma s_n non può superare il valore T.

Si è così condotti ad affermare che, per valutare l'area T del trapezoide relativo alla funzione $y=f(x)$ nell'intervallo $[a, b]$ (fig. 9), basta calcolare:

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} S_n = T.$$

Il numero T, valore comune dei due limiti, prende il nome di **integrale definito della funzione $y=f(x)$ nell'intervallo $[a, b]$.**

La funzione $y=f(x)$ è la **funzione integranda**, l'intervallo $[a, b]$ è **l'intervallo di integrazione**; i numeri a e b sono gli **estremi di integrazione**, più precisamente a è **l'estremo inferiore** e b è **l'estremo superiore**.

L'integrale definito T viene indicato con un apposito simbolo; si scrive:

$$T=\int_a^b f(x)dx.$$

A prima vista, sembra che il simbolo non abbia alcuna relazione con il suo significato; infatti, per capire come è nato questo simbolo di integrale, occorre considerare un altro metodo per approssimare l'area sotto la curva; si procede così (fig. 10):

- si divide l'intervallo $[a, b]$ in n piccoli intervalli uguali, ciascuno lungo

$$h=\frac{b-a}{n};$$

- si fissa, all'interno del primo intervallino un valore x_1 dell'ascissa e si calcola il corrispondente valore $f(x_1)$;
- si costruisce il rettangolo che ha la base lunga h, l'altezza lunga $f(x_1)$ e quindi l'area A_1 data da

$$A_1=f(x_1)h$$

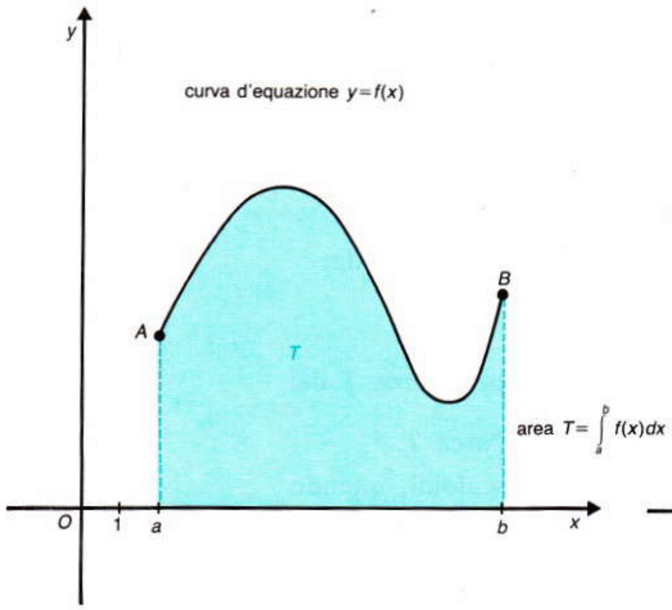

Fig. 9

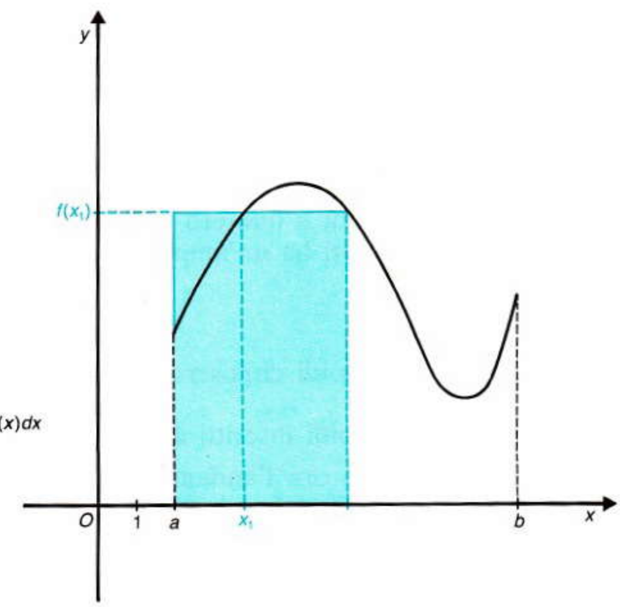

Fig. 10

Ora, dato che risulta (fig. 11)

$$m_1 \leq f(x_1) \leq M_1,$$

risulta anche

$$m_1\, h \leq f(x_1)h \leq M_1\, h.$$

Un'analoga costruzione si può ripetere su tutti gli intervallini, fino ad ottenere n rettangoli (fig. 12) che hanno un'area complessiva, data da

$$A_n = f(x_1)h + f(x_2)h + \ \dots\ + f(x_n)h.$$

È chiaro che risulta

$$s_n \leq A_n \leq S_n \qquad (1)$$

e perciò anche A_n fornisce un valore approssimato dell'area T del trapezoide.

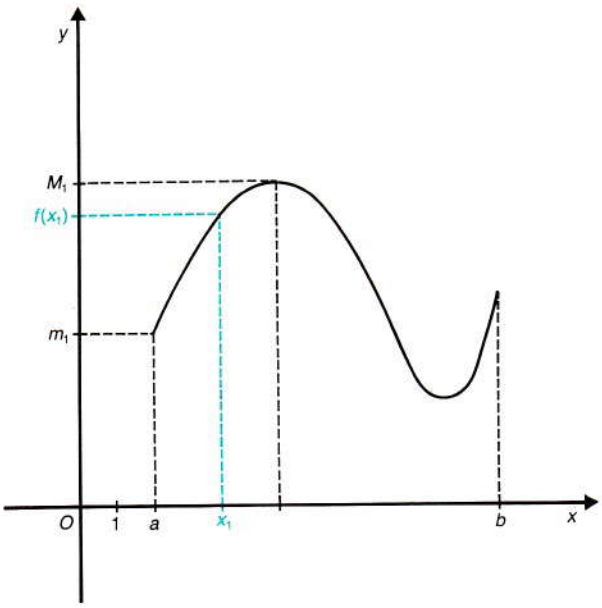

Fig. 11

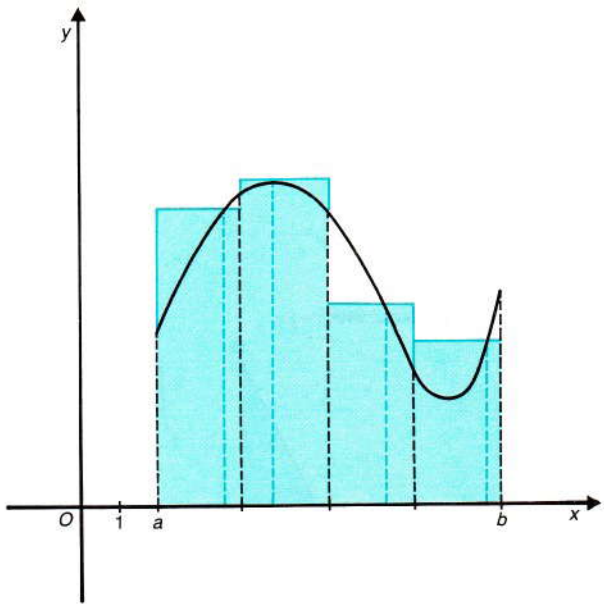

Fig. 12

Se ora "si infittisce la suddivisione" dell'intervallo $[a, b]$, facendo tendere a zero l'ampiezza h degli intervallini, rimangono ancora valide le limitazioni (1). Perciò A_n tende al valore T, dato che tendono a questo valore sia S_n che s_n[1]; possiamo dunque dire che risulta

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{h \to 0}\ [f(x_1)\cdot h + f(x_2)\cdot h + \ldots + f(x_n)\cdot h].$$

Si arriva così a capire che:

- il simbolo $\int$ è la lettera S (iniziale di "somma"), scritta secondo una grafia antica[2];
- il termine $f(x)dx$ ricorda che si sommano le aree di infiniti "rettangolini così sottili da avere altezza $f(x)$ e base dx".

[1] Vedi teorema del confronto, cap. 3, paragrafo 7.
[2] Il simbolo $\int$ compare, forse per la prima volta, in uno scritto di Leibniz del 1675.

Impadroniamoci ora del nuovo simbolo, osservando le figg. 13, 14, 15.

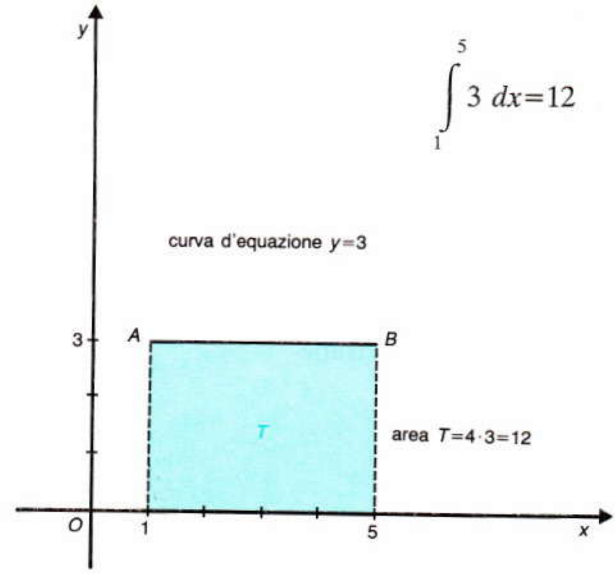

Fig. 13

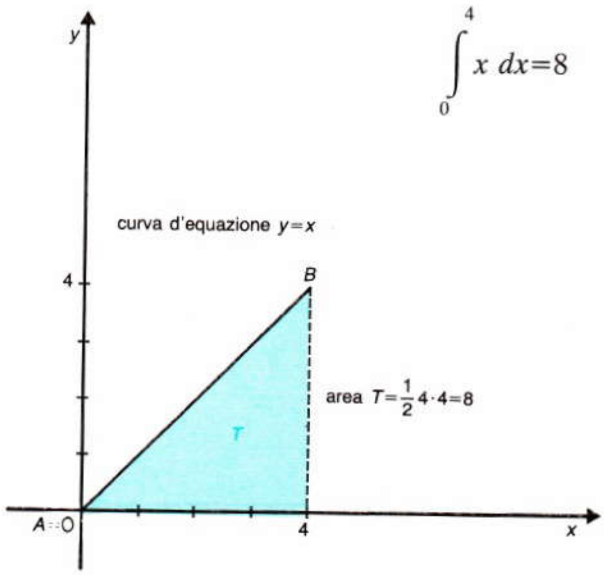

Fig. 14

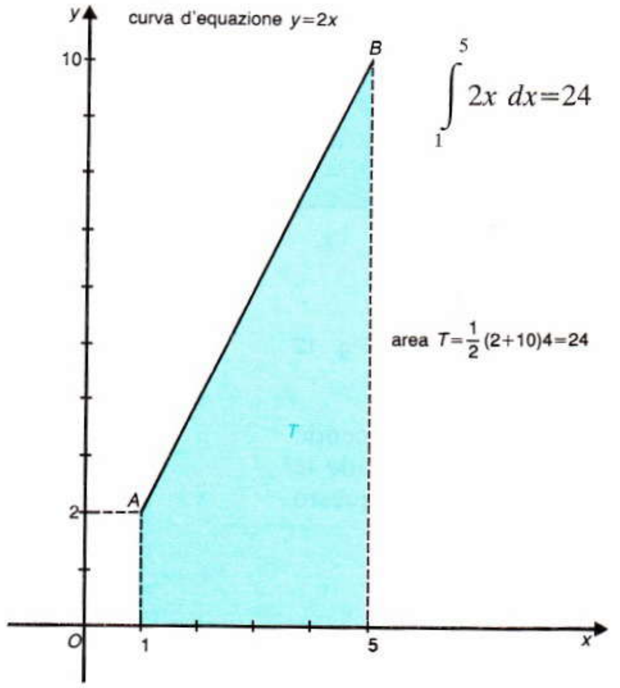

Fig. 15

Un'ultima osservazione: la variabile x nel simbolo di integrale non compare nel risultato finale, che è un numero; perciò si può usare al posto di x una qualunque lettera, scrivendo, per esempio

$$\int_1^5 2t\,dt=24 \quad \text{oppure} \quad \int_1^5 2z\,dz=24$$

3. Proprietà dell'integrale definito. Teorema della media

Nei due paragrafi precedenti è stata introdotta la nozione di integrale definito di una funzione $y=f(x)$ fra due estremi a e b; in particolare si è detto che l'area T (fig. 16) sotto la curva d'equazione

$$y=f(x)$$

è data da:

$$T=\int_a^b f(x)dx=\lim_{h\to 0}\,[f(x_1)h+f(x_2)h+\ldots+f(x_n)h]$$

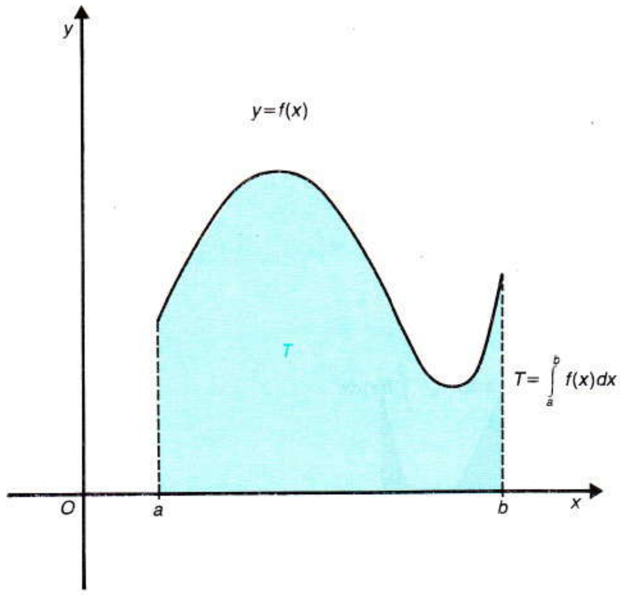

Fig. 16

È facile ora scoprire delle proprietà dell'integrale definito; si tratta di proprietà che valgono per qualunque valore di a e b (purché risulti $a<b$) e per qualunque funzione $y=f(x)$, che sia continua e si mantenga positiva nell'intervallo $[a, b]$.

1ª proprietà

Ci si basa su un'osservazione immediata: se i due estremi di integrazione a e b coincidono, il trapezoide sotto la curva ha la base di lunghezza nulla e, quindi, l'area che vale 0. Risulta dunque:

$$T=0,$$

ossia

$$\boldsymbol{\int_a^a f(x)dx=0}$$

2ª proprietà

Questa seconda proprietà è basata su una semplice costruzione (fig. 17): il trapezoide sotto la curva d'equazione $y=f(x)$ è stato diviso in due trapezoidi, tracciando la retta d'equazione $x=c$. Così si ha:

$$\int_a^b f(x)dx=T, \qquad \int_a^c f(x)dx=T_1, \qquad \int_c^b f(x)dx=T_2.$$

Ora, dato che risulta

$$T=T_1+T_2,$$

si arriva alla seguente proprietà:

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx \tag{2}$$

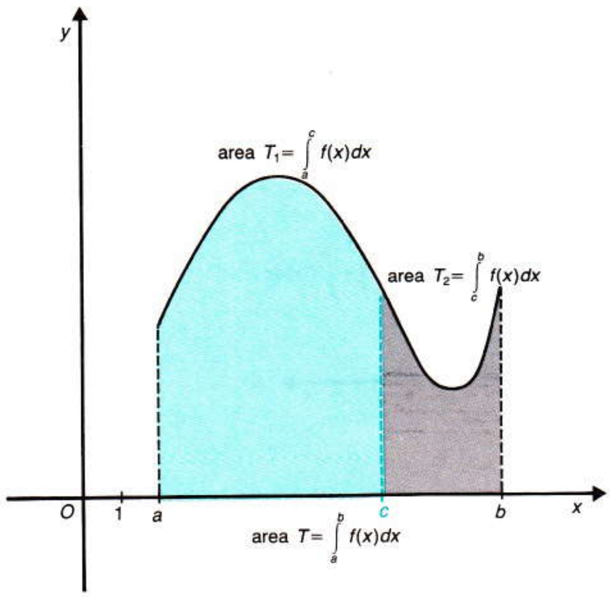

Fig. 17

3ª proprietà

La terza proprietà si ricava confrontando i due seguenti integrali definiti:

$$\int_a^b f(x)dx=T \quad \text{e} \quad \int_a^b m\cdot f(x)dx=T'.$$

È facile verificare che risulta

$$T'=mT,$$

ossia

$$\int_a^b m\cdot f(x)dx=m\cdot\int_a^b f(x)dx \tag{3}$$

Per verificare che è valida questa proprietà (3), basta valersi delle nozioni richiamate all'inizio del paragrafo; si ha:

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{h\to 0}\,[f(x_1)h+\ldots+f(x_n)h]$$

e quindi

$$\int_a^b m\cdot f(x)dx=\lim_{h\to 0}\,[m\cdot f(x_1)h+\ldots+m\cdot f(x_n)h].$$

Così si arriva subito al risultato cercato, dato che risulta:

$$\lim_{h\to 0}\,[m\cdot f(x_1)h+\ldots+m\cdot f(x_n)h]=m\cdot\lim_{h\to 0}\,[f(x_1)h+\ldots+f(x_n)h].$$

La proprietà ora stabilita ha un'intuitiva interpretazione geometrica (fig. 18): quando si passa dalla funzione

$$y=f(x)$$

alla funzione

$$y=mf(x),$$

si opera una trasformazione del piano che moltiplica le sole ordinate per m; la trasformazione è un'affinità che altera con lo stesso fattore m anche le aree.

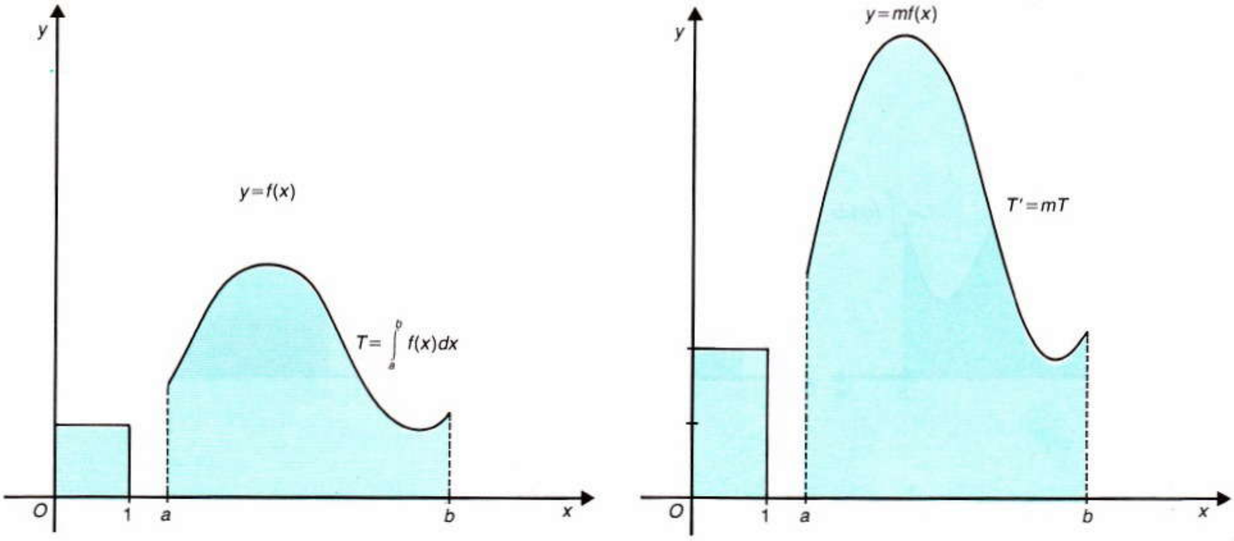

Fig. 18

4ª proprietà

Questa proprietà si ricava confrontando i seguenti integrali

$$\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx=T \quad \text{e} \quad \int_a^b [f(x)+g(x)]dx=T'$$

dove $y=f(x)$ e $y=g(x)$ sono due funzioni continue e positive nello stesso intervallo $[a, b]$. Si trova che risulta:

$$T=T',$$

ossia

$$\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx=\int_a^b [f(x)+g(x)]dx$$

Questa proprietà si può verificare analiticamente con un procedimento analogo a quello seguito per la proprietà (3) e si presta ad una suggestiva interpretazione geometrica (fig. 19).
La curva d'equazione

$$y=f(x)+g(x)$$

si può ottenere, a partire dalle curve d'equazione

$$y=f(x) \quad \text{e} \quad y=g(x)$$

mediante la somma grafica, che, per ogni ascissa, addiziona le ordinate "lette" sulle due curve. In questo modo, l'area sotto la curva d'equazione

$$y=f(x)+g(x)$$

è proprio uguale alla somma delle aree sotto le singole curve.

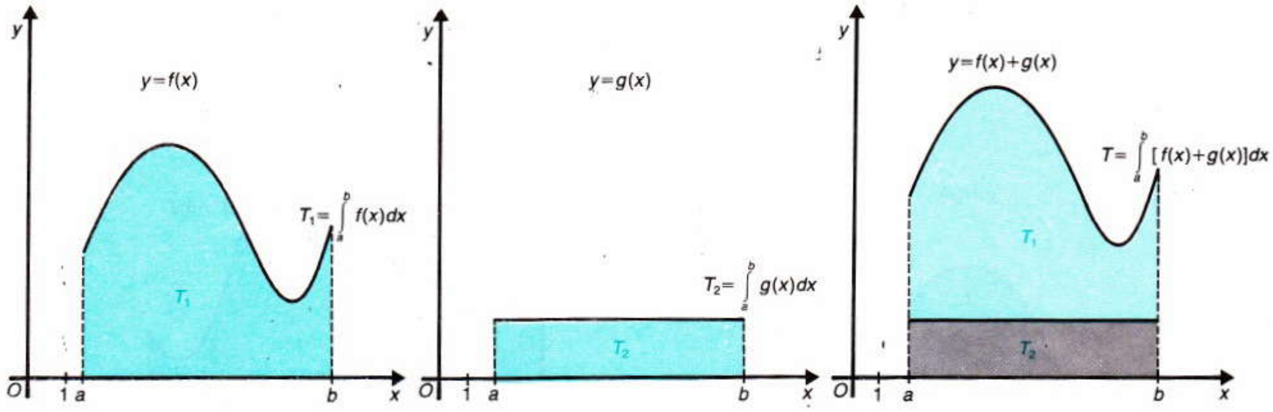

Fig. 19

5ª proprietà: il teorema della media

Data una funzione $y=f(x)$, definita e continua in un intervallo $[a, b]$, si può sempre trovare, all'interno dell'intervallo $[a, b]$, almeno un valore c per cui risulti:

$$\int_a^b f(x)dx=(b-a)\cdot f(c)$$

Per dimostrare il teorema, si riprende dal paragrafo 2 il più semplice metodo approssimato per valutare l'area T del trapezoide sotto una curva: l'area T del trapezoide (fig. 20) è compresa fra l'area di due rettangoli con la base lunga $(b-a)$, uno che ha per altezza il massimo M (fig. 21) e l'altro che ha per altezza il minimo m (fig. 22). Risulta dunque:

$$(b-a)m \leq T \leq (b-a)M,$$

ossia

$$(b-a)m \leq \int_a^b f(x)dx \leq (b-a)M.$$

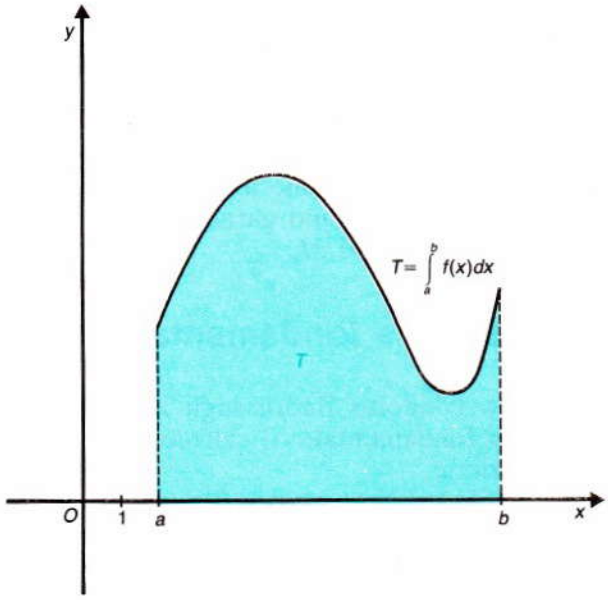

Fig. 20

Ora, partendo dal rettangolo con altezza m, si fa crescere con continuità l'altezza, fino a raggiungere il valore M (fig. 23); ad un certo momento, l'altezza dovrà assumere un valore k, tale che risulti proprio

$$T=(b-a)k.$$

La base superiore di questo rettangolo di area T incontra l'arco AB di curva almeno in un punto C; indicando con c l'ascissa del punto C, si ha:

$$k=f(c) \quad \text{e quindi} \quad T=(b-a)\cdot f(c).$$

Si conclude così la dimostrazione, dato che si è trovato il valore c per cui risulta

$$\int_a^b f(x)dx=(b-a)\cdot f(c)$$

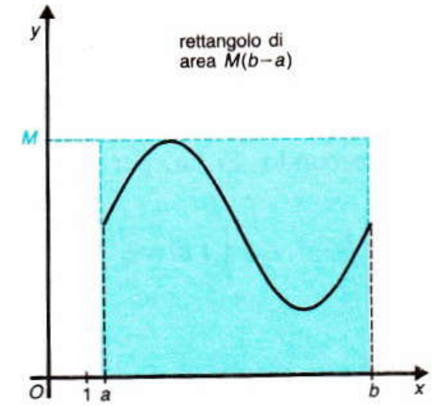

Fig. 21

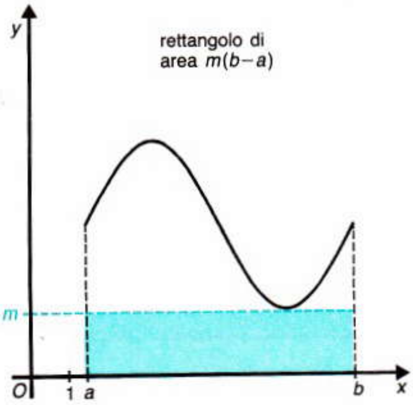

Fig. 22

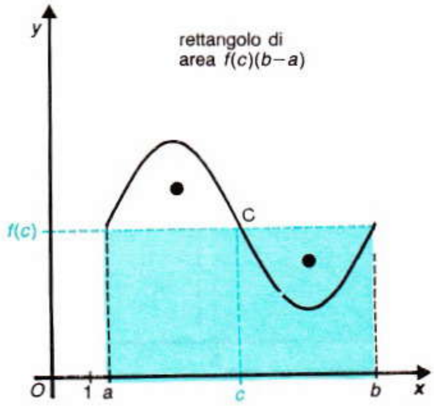

Fig. 23

Un' osservazione importante: la dimostrazione di questo teorema è basata sul fatto che la funzione $y=f(x)$ è continua in un intervallo chiuso e perciò si possono applicare i teoremi sulle funzioni continue. Più precisamente sono essenziali i teoremi di Weierstrass e di Bolzano:

- il teorema di Weierstrass garantisce che la funzione ammette nell'intervallo $[a, b]$ un massimo assoluto M ed un minimo assoluto m;
- il teorema di Bolzano garantisce che la funzione assume tutti i valori compresi fra m ed M.

4. Il teorema fondamentale del calcolo integrale

Lo studio condotto finora sugli integrali definiti non ha affrontato un problema fondamentale: il calcolo effettivo dell'integrale definito di una data funzione.

Ci occuperemo ora di questo problema, cominciando ad esaminare il teorema più importante del calcolo integrale – il teorema di Torricelli-Barrow – che fu enunciato indipendentemente da due grandi matematici: l'italiano E. Torricelli nel 1646 e l'inglese J. Barrow una ventina d'anni dopo.

Il teorema ha un significato non immediato da cogliere ed è basato su un'idea molto originale, che si capisce meglio esaminando qualche situazione particolare. Perciò, prima di enunciare il teorema, riprendiamo un esempio trattato nel paragrafo 2.

Consideriamo la funzione $y=x$ e calcoliamo l'area sotto la curva nell'intervallo $[0, 4]$ (fig. 24); si ha:

$$\int_0^4 t\, dt=\frac{1}{2}\cdot 4^2.$$

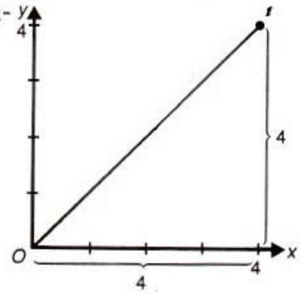

Fig. 24

Consideriamo ora degli altri casi: riferendoci sempre alla funzione $y=x$, teniamo fisso il primo estremo di integrazione e variamo il secondo. Si ha, per esempio (fig. 25):

$$\int_0^5 t\, dt=\frac{1}{2}\cdot 5^2, \qquad \int_0^7 t\, dt=\frac{1}{2}\cdot 7^2.$$

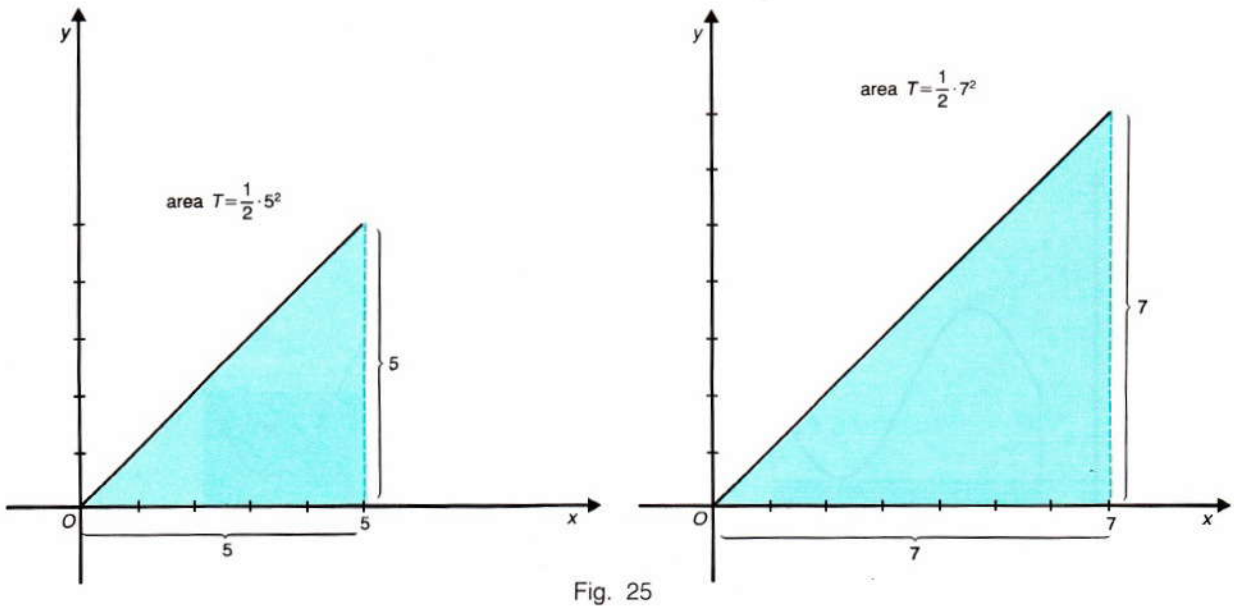

Fig. 25

Si osserva che, nei vari casi esaminati, l'area risulta data dal quadrato dell'estremo superiore moltiplicato per $\frac{1}{2}$.

Si arriva così ad una conclusione di carattere generale: lasciando variare l'estremo superiore di integrazione (fig. 26), si ottiene

$$\int_0^x t\,dt=\frac{1}{2}\cdot x^2.$$

si crea così una nuova funzione, che indichiamo con

$$Y=\frac{1}{2}\cdot x^2.$$

Questa funzione (fig. 27) associa, ad ogni valore di x, l'area sotto la retta d'equazione $y=x$, calcolata dall'estremo fisso 0 all'estremo variabile x.

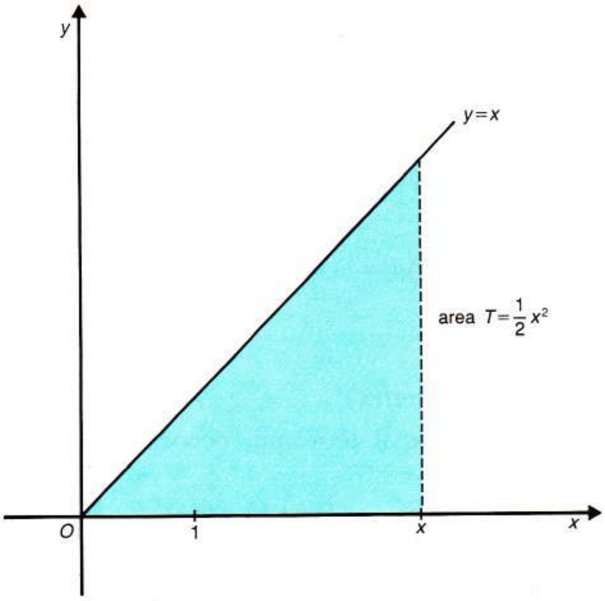

Fig. 26

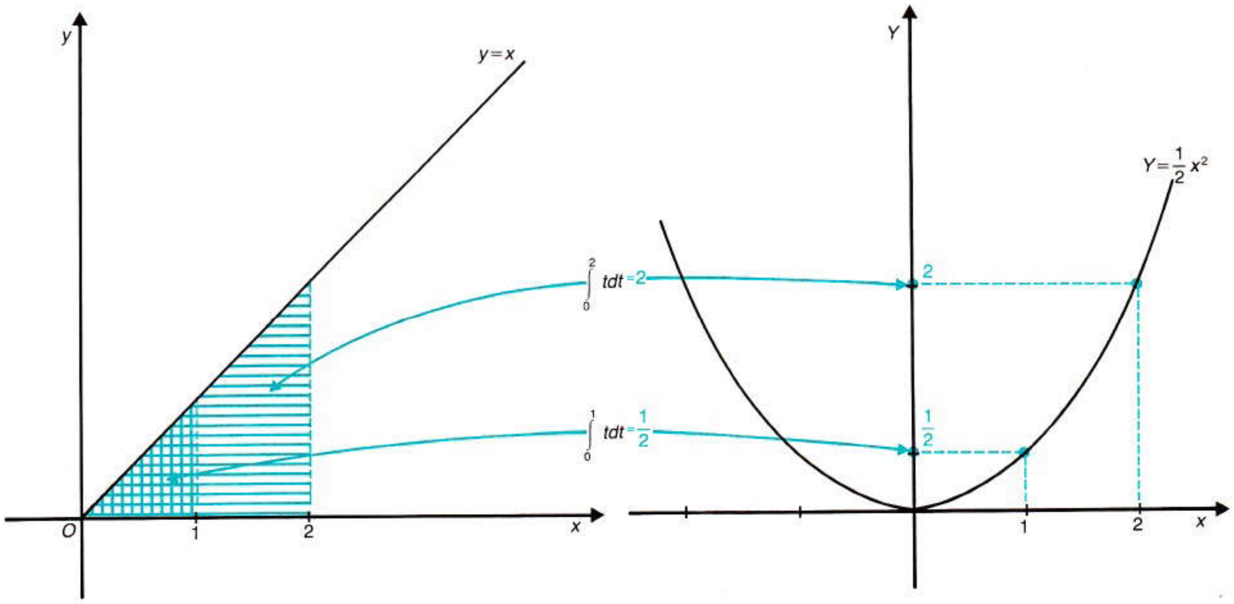

Fig. 27

Ora, ecco un fatto davvero imprevedibile: se si calcola la derivata della funzione "area variabile sotto la curva", ossia di

$$Y=\frac{1}{2}\cdot x^2,$$

si ottiene

$$Y'=x,$$

e cioè proprio la funzione $y=x$ da cui si è partiti per calcolare l'area!

Il teorema di Torricelli-Barrow garantisce che questo risultato non è dovuto ad una fortunata scelta della funzione di partenza, ma ha carattere generale.

Teorema di Torricelli-Barrow

Integrando una funzione continua $y=f(x)$ da un estremo inferiore fisso ad un estremo superiore variabile, si ottiene un'altra funzione $Y=F(x)$, che ha per derivata la funzione $y=f(x)$, calcolata nell'estremo superiore variabile.

Si vuole dunque dimostrare che, data la funzione

$$\int_a^x f(t)dt=F(x).$$

risulta

$$F'(x)=f(x).$$

Per dimostrare il teorema, occorre derivare la funzione $Y=F(x)$, calcolando

$$F'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}.$$

Cominciamo allora col determinare il valore del rapporto incrementale. Tenendo presente che risulta (figg. 28 e 29)

$$\int_a^x f(t)dt=F(x) \quad \text{e} \quad \int_a^{x+h} f(t)dt=F(x+h)$$

e valendosi della 2ª proprietà esposta nel paragrafo 3, si ottiene (fig. 30):

$$F(x+h)-F(x)=\int_x^{x+h} f(t)dt.$$

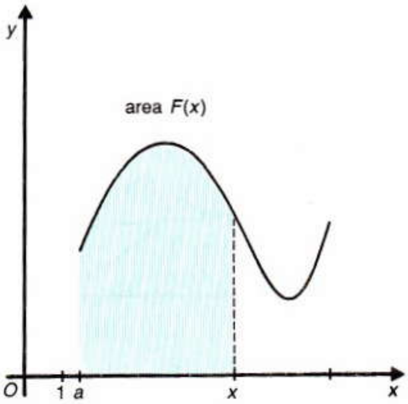

Fig. 28

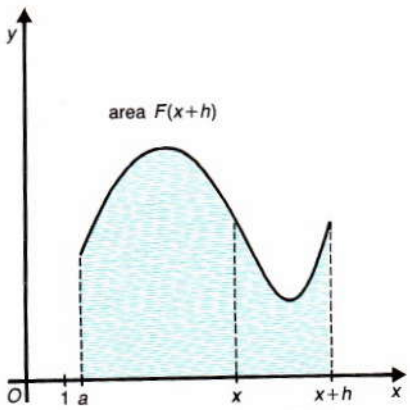

Fig. 29

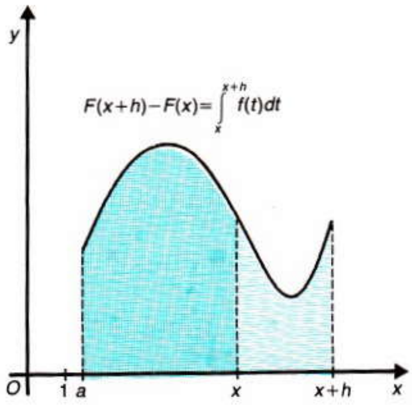

Fig. 30

Ora, per il teorema della media, esiste certamente nell'intervallo $[x, x+h]$ almeno un valore z, tale che risulti (fig. 31)

$$\int_x^{x+h} f(t)dt = h \cdot f(z)$$

si ha quindi

$$F(x+h) - F(x) = h \cdot f(z):$$

e perciò

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = f(z),$$

dove z è un valore interno all'intervallo $[x, x+h]$.

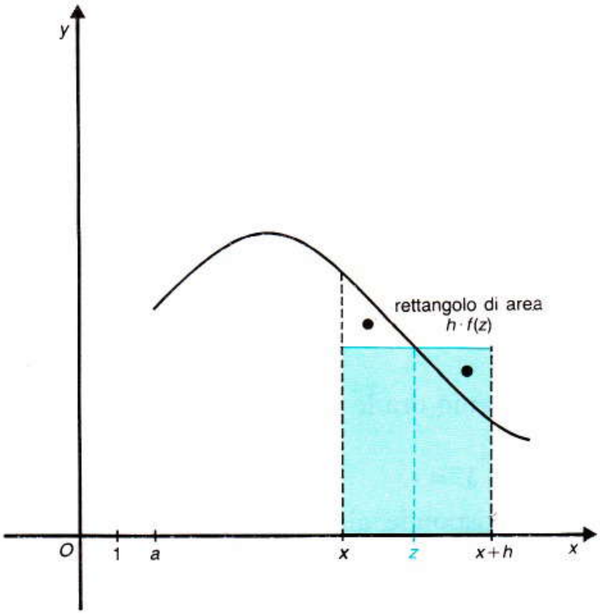

Fig. 31

Valutiamo infine il limite di questo rapporto incrementale per $h \to 0$: dato che $z \to x$, risulta

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = f(x),$$

ossia

$$\boldsymbol{F'(x) = f(x).}$$

Si conclude così la dimostrazione, trovando che "l'area variabile sotto la curva" d'equazione $y=f(x)$ è una funzione $Y=F(x)$, la cui derivata $F'(x)$ coincide con la funzione $f(x)$ di partenza.

Non è facile cogliere la portata di questo teorema, forse proprio perché "getta un ponte" fra due problemi che sembrano molto lontani: calcolare l'area sotto una curva e studiare una funzione di cui si conosce la derivata.

5. Dall'integrale definito all'integrale indefinito

Nel paragrafo precedente siamo passati dalla considerazione dell'area sotto una curva, fra due estremi fissi, all'area variabile al variare dell'estremo superiore; abbiamo così ottenuto, invece di un numero, una funzione. In questo paragrafo estenderemo ancora il concetto di integrale, lasciando variare anche l'estremo inferiore di integrazione. Per rendere più agevole l'esposizione cominciamo ad esaminare un caso particolare: il calcolo dell'area sotto la curva d'equazione $y=x$ al variare dell'estremo inferiore. Si ha, per esempio (figg. 32 e 33):

$$\int_0^x t\,dt = \frac{1}{2}x^2, \qquad \int_3^x t\,dt = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}3^2$$

e, in generale (fig. 34)

$$\int_a^x t\,dt = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}a^2.$$

Variando dunque l'estremo inferiore, si ottengono le funzioni seguenti:

$$Y=\frac{1}{2}x^2, \quad Y=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}3^2, \;\ldots, \quad Y=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}a^2.$$

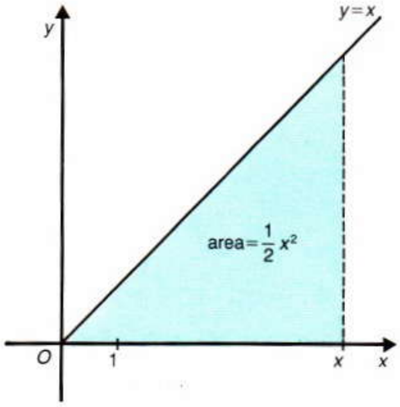

Fig. 32

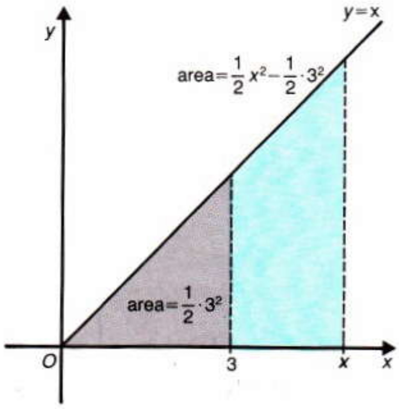

Fig. 33

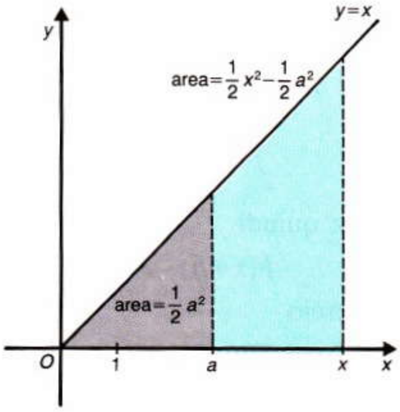

Fig. 34

Esaminiamo ora le proprietà che caratterizzano queste funzioni; si ha per tutte:

1) $Y'=x$.

Ciò corrisponde al fatto che, in base al teorema di Torricelli, tutte le funzioni ottenute hanno per derivata la funzione integranda $y=x$; proprio per questo differiscono fra loro solo per una costante, che "scompare" nel procedimento di derivazione.

2) $Y(a)=0$,

dove a indica l'estremo inferiore scelto.
Questa è una nota proprietà dell'integrale definito[1]: quando l'estremo superiore coincide con quello inferiore, l'area sotto la curva vale 0.

Si arriva così ad una prima, importante conclusione: a partire dal problema di calcolare l'area sotto la curva d'equazione $y=x$, si introducono tre simboli:

1) $\int_0^4 t\,dt=8$, che indica un numero, dato che sono fissi i due estremi;

2) $\int_0^x t\,dt=\frac{1}{2}x^2$, che indica una funzione, perché varia l'estremo superiore;

3) $\int_a^x t\,dt=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}a^2$, che indica un insieme di funzioni, perché variano i due estremi.

Fermiamoci ad esaminare meglio l'ultimo simbolo introdotto.
L'insieme di funzioni si può descrivere anche nel modo seguente:

$$Y=\frac{1}{2}x^2+k,$$

dove k indica un valore costante, legato alla scelta dell'estremo inferiore a.

Inoltre, nel simbolo di integrale si possono omettere gli estremi, dato che variano entrambi. Si arriva così a scrivere:

$$\int t\,dt=\frac{1}{2}x^2+k \quad \text{o anche} \quad \int x\,dx=\frac{1}{2}x^2+k$$

[1] Vedi paragrafo 3

Il simbolo

$$\int x\,dx$$

prende il nome di **integrale indefinito**, proprio perché non sono definiti gli estremi d'integrazione, mentre le funzioni

$$Y=\frac{1}{2}x^2+k,$$

che hanno tutte come derivata $y=x$, prendono il nome di **primitive** della funzione $y=x$.

Si arriva così alla seguente conclusione:

l'integrale indefinito indica l'insieme di tutte le primitive della funzione integranda.

Sembra di essere molto lontani dal problema di calcolare l'area sotto la curva, eppure è facile "risalire" dall'insieme delle primitive al calcolo di quest'area. Vediamo, per esempio, come si arriva a calcolare il seguente integrale definito

$$\int_5^9 x\,dx,$$

a partire all'integrale indefinito e cioè da

$$\int x\,dx=\frac{1}{2}x^2+k$$

Si procede così:

I) Si fissa l'estremo inferiore di integrazione, scegliendo il valore della costante k.

Questo valore viene scelto a partire dalla seguente proprietà: l'integrale deve valere 0, quando l'estremo superiore d'integrazione (indicato con x) coincide con l'estremo inferiore, che vale 5. Perciò, fra tutte le funzioni

$$Y=\frac{1}{2}x^2+k,$$

si sceglie l'unica per cui risulta $Y(5)=0$.
Nel caso esaminato si ha:

$$Y(5)=\frac{1}{2}5^2+k$$

e, quindi

$$Y(5)=0, \quad \text{se risulta} \quad \frac{1}{2}5^2+k=0, \quad \text{da cui} \quad k=-\frac{1}{2}5^2.$$

Si trova così

$$\int_5^x x\,dx=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}5^2$$

II) Si fissa l'estremo superiore di integrazione.

Sostituendo ad x il valore 9, si ottiene:

$$\int_5^9 x\,dx=\frac{1}{2}9^2-\frac{1}{2}5^2=28$$

Il ragionamento che abbiamo seguito, a partire dalla funzione $y=x$ può essere ripetuto a partire da qualunque funzione $y=f(x)$. Si introducono così i tre simboli:

1) $\int_a^b f(x)dx=T,$ che indica un numero

2) $\int_a^x f(x)dx=F(x),$ che indica una funzione

3) $\int f(x)dx=F(x)+k,$ che indica un insieme di funzioni

Nell'ultima scrittura

$$Y=F(x)+k$$

indica l'insieme di tutte le funzioni che hanno come derivata $y=f(x)$, ossia l'insieme delle **primitive** della funzione $y=f(x)$; il simbolo

$$\int f(x)dx$$

prende il nome di **integrale indefinito** della funzione $y=f(x)$.
Per passare dall'integrale indefinito all'integrale **definito**, ossia a

$$\int_a^b f(x)dx$$

si procede così:

I) Si fissa l'estremo inferiore d'integrazione (a), scegliendo fra le primitive della funzione quella per cui risulta Y(a)=0.

Ora, si ha

$$Y(a)=F(a)+k,$$

perciò risulta

$$Y(a)=0, \text{ se } F(a)+k=0, \quad \text{da cui} \quad k=-F(a).$$

Si ottiene dunque:

$$\int_a^x f(x)dx=F(x)-F(a).$$

II) Si fissa anche l'estremo superiore d'integrazione, scegliendo x=b.

Si ottiene:

$$\boldsymbol{\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a).}$$

Siamo così arrivati ad una conclusione fondamentale: per calcolare l'area sotto una curva d'equazione $y=f(x)$, fra gli estremi a e b, basta eseguire la differenza

$$F(b)-F(a),$$

dove

$$Y=F(x)$$

è una delle primitive della funzione data, cioè è una funzione tale che

$$F'(x)=f(x).$$

Dunque, **l'area sotto una curva si può calcolare a partire dalle primitive della funzione che descrive la curva**.

Per cogliere l'importanza di questo risultato, basta una semplice osservazione: il calcolo diretto dell'integrale definito, descritto nel paragrafo 2, è molto laborioso e si riesce ad effettuare solo in pochissimi casi molto semplici.

Ma ora abbiamo scoperto che, per calcolare un integrale definito, non è necessario ricorrere al calcolo di limiti, se si riesce a conoscere una primitiva della funzione integranda.

Nel paragrafo successivo tratteremo, appunto, il problema di determinare le primitive di una funzione assegnata; arriveremo così ad indicare una serie di regole e procedimenti che permettono di calcolare l'integrale indefinito delle funzioni che comunemente si incontrano nelle più semplici applicazioni.

6. Calcolo di integrali indefiniti: integrali immediati

Cominciamo con qualche osservazione semplice, ma ricca di conseguenze. Nel cap. 4 siamo arrivati a calcolare le derivate di una vasta classe di funzioni; i principali risultati ottenuti sono riassunti nella tabella. Ora, è chiaro che ognuna delle derivate ottenute ammette come primitiva la funzione di partenza.

Possiamo quindi indicare un metodo per calcolare integrali indefiniti: "leggere al contrario" una tabella che elenca le derivate di varie funzioni. Gli integrali indefiniti individuati in questo modo prendono il nome di **integrali immediati**.

La tabella seguente fornisce un elenco di integrali immediati, ottenuti a partire dalla tabella delle derivate.

TABELLA DEGLI INTEGRALI IMMEDIATI

$y=x^{n+1}$	ha come derivata	$y'=(n+1)x^n$ con $n\neq-1$	perciò	$\int x^n\,dx=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+k$
$y=\ln x$	» » »	$y'=\frac{1}{x}$,	»	$\int\frac{dx}{x}=\ln\lvert x\rvert+k$
$y=e^x$	» » »	$y'=e^x$,	»	$\int e^x\,dx=e^x+k$
$y=\text{sen}\,x$	» » »	$y'=\cos x$,	»	$\int\cos x\,dx=\text{sen}\,x+k$
$y=\cos x$	» » »	$y'=-\text{sen}\,x$,	»	$\int\text{sen}\,x\,dx=-\cos x+k$
$y=\text{tg}\,x$	» » »	$y'=1+\text{tg}^2\,x$,	»	$\int(1+\text{tg}^2\,x)dx=\text{tg}\,x+k$
$y=\text{arcsen}\,x$	» » »	$y'=\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}$,	»	$\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}}=\text{arcsen}\,x+k$
$y=\text{arctg}\,x$	» » »	$y'=\frac{1}{x^2+1}$,	»	$\int\frac{dx}{x^2+1}=\text{arctg}\,x+k$

Fermiamoci ora a riflettere su alcuni risultati esposti nella tabella.

I) Esaminiamo la prima formula e cioè

$$\int x^n\,dx=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+k$$

La formula non è valida per $n=-1$; infatti l'espressione

$$\frac{1}{n+1}x^{n+1}+k$$

perde significato per $n=-1$, dato che condurrebbe a calcolare una divisione, in cui il divisore è uguale a 0.
Del resto, se si calcola la potenza x^n per $n=-1$, si ha:

$$x^{-1}=\frac{1}{x}$$

e per ottenere

$$\int\frac{1}{x}dx$$

è prevista la seconda formula della tabella.

La formula è invece valida per qualunque altro valore reale $n\neq-1$. Ecco qualche esempio:

per $n=2$,

$$\int x^2\,dx=\frac{1}{2+1}x^{2+1}+k \qquad \text{ossia} \qquad \int x^2\,dx=\frac{1}{3}x^3+k$$

per $n=1$, $x^1=x$

$$\int x\,dx=\frac{1}{1+1}x^{1+1}+k \qquad \text{ossia} \qquad \int x\,dx=\frac{1}{2}x^2+k$$

per $n=0$, $x^0=1$

$$\int 1\,dx=\frac{1}{0+1}x^{0+1}+k \qquad \text{ossia} \qquad \int 1\,dx=x+k$$

per $n=-2$, $x^{-2}=\frac{1}{x^2}$

$$\int\frac{1}{x^2}dx=\frac{1}{-2+1}x^{-2+1}+k, \qquad \text{ossia} \qquad \int\frac{1}{x^2}dx=-\frac{1}{x}+k$$

per $n=\frac{1}{2}$, $x^{\frac{1}{2}}=\sqrt{x}$

$$\int\sqrt{x}\,dx=\frac{1}{\frac{1}{2}+1}x^{\frac{1}{2}+1}+k, \qquad \text{ossia} \qquad \int\sqrt{x}\,dx=\frac{2}{3}\sqrt{x^3}+k$$

per $n=-\frac{1}{2}$, $x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{x}}$

$$\int\frac{1}{\sqrt{x}}dx=\frac{1}{-\frac{1}{2}+1}x^{-\frac{1}{2}+1}+k, \qquad \text{ossia} \qquad \int\frac{1}{\sqrt{x}}dx=2\sqrt{x}+k$$

II) Esaminiamo ora la seconda riga della tabella e cioè

$$y=\ln x \quad \text{ha} \quad y'=\frac{1}{x} \quad \text{e perciò risulta} \quad \int\frac{1}{x}\,dx=\ln|x|+k.$$

Cominciamo col considerare il grafico delle funzioni che vi compaiono:

$$y=\frac{1}{x} \quad \text{e} \quad y=\ln x.$$

La funzione

$$y=\ln x$$

è definita per $x>0$ (fig. 35). Perciò anche la sua derivata, che è data da

$$y'=\frac{1}{x},$$

sarà definita solo per $x>0$; il corrispondente grafico è dunque un solo ramo di iperbole equilatera (fig. 36).

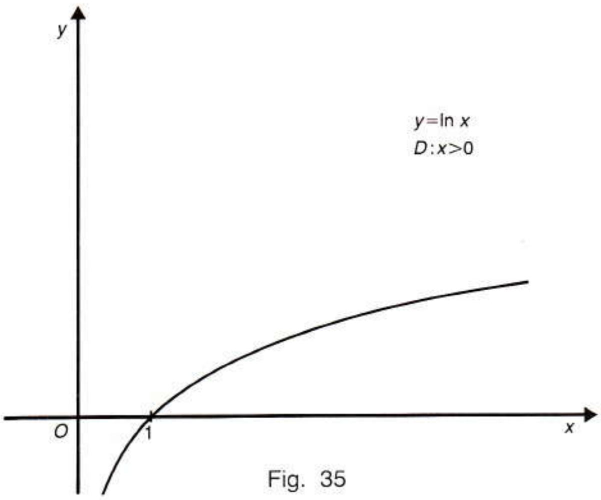

Fig. 35

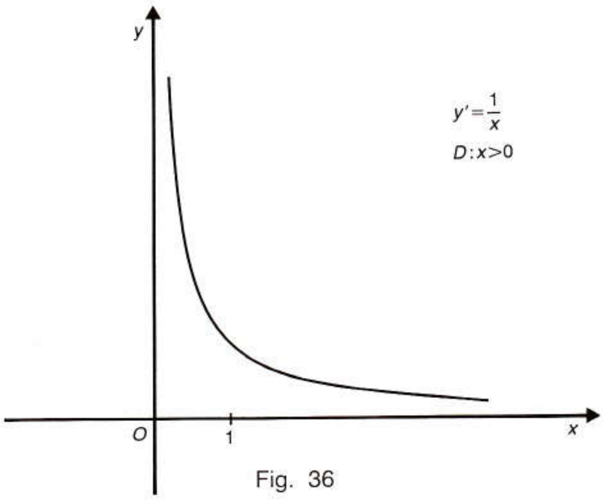

Fig. 36

Consideriamo ora il procedimento inverso: è data la funzione

$$y=\frac{1}{x},$$

definita su tutto l'asse reale, escluso il valore $x=0$, (fig. 37) e se ne debbono indicare le primitive.
È chiaro che occorre distinguere due casi (figg. 38 e 39):

$$\text{per } x>0 \qquad \int\frac{1}{x}\,dx=\ln x+k$$

$$\text{per } x<0 \qquad \int\frac{1}{x}\,dx=\ln(-x)+k$$

Questi due casi sono riassunti nell'unica formula indicata nella tabella.

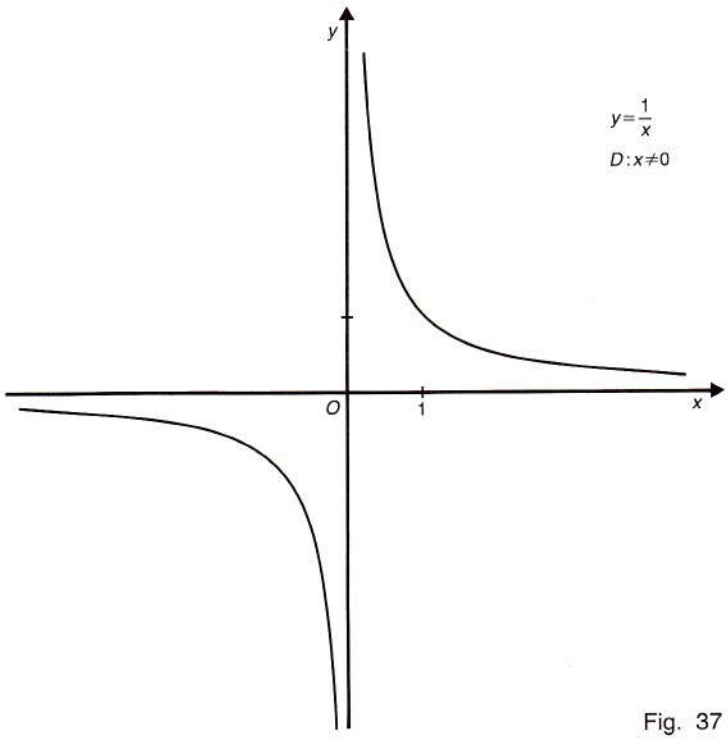

Fig. 37

per $x>0$ $\int \frac{1}{x}\, dx = \ln x + k$

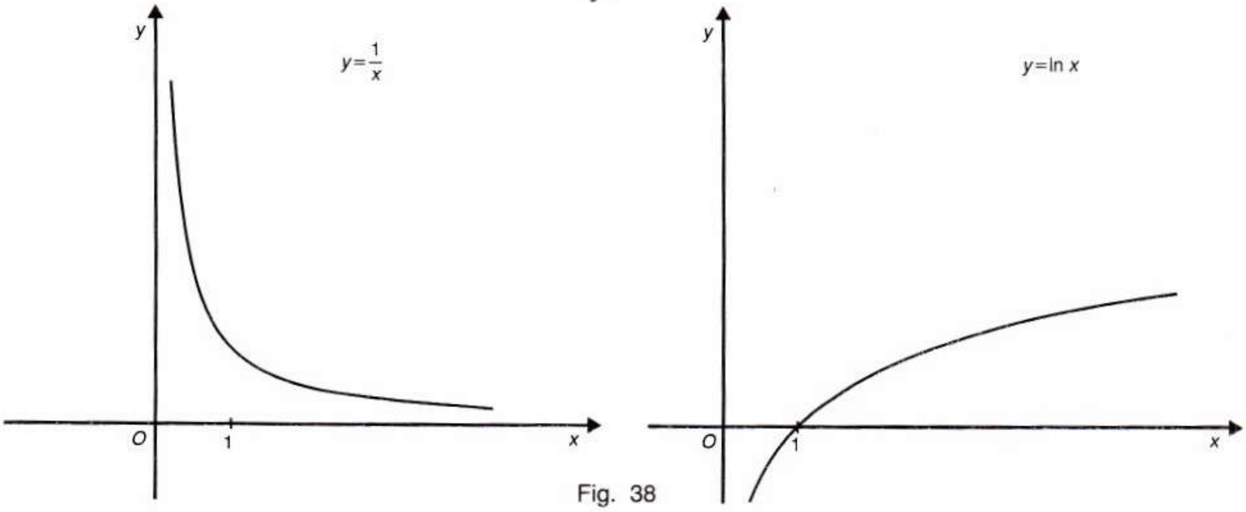

Fig. 38

per $x<0$ $\int \frac{1}{x}\, dx = \ln(-x) dx$

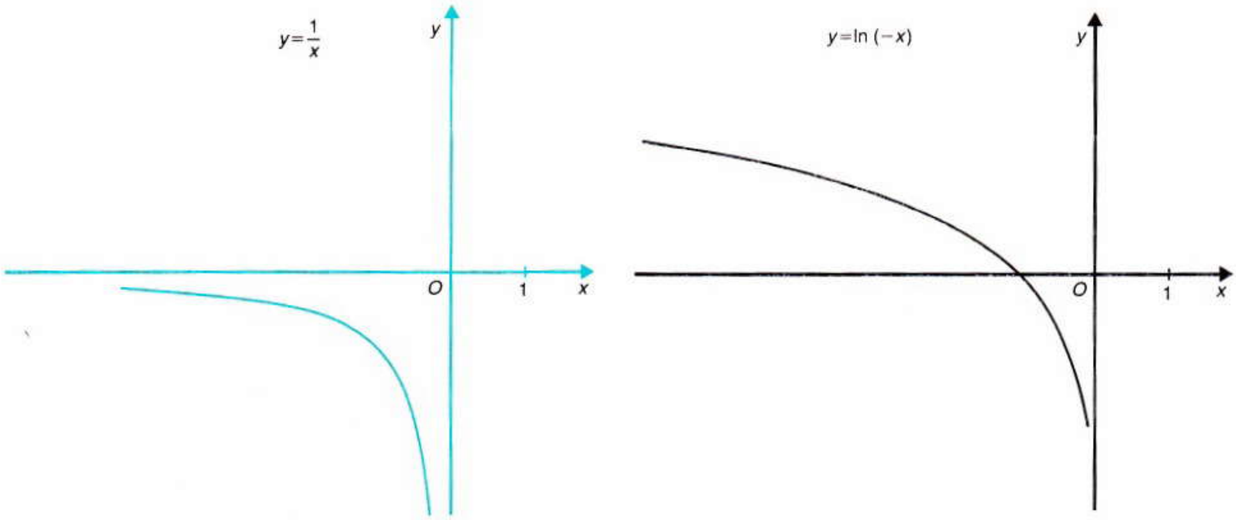

Fig. 39

La relazione fra integrali indefiniti e integrali definiti conduce poi ad un'osservazione che non è certo immediata; si ha:

$$\int_1^x \frac{1}{x}\, dx = \ln x$$

dato che risulta $\ln 1 = 0$.

Si arriva così alla seguente interpretazione della funzione logaritmo naturale: per $x>1$, $\ln x$ indica l'area sotto il corrispondente ramo di iperbole equilatera (fig. 40).

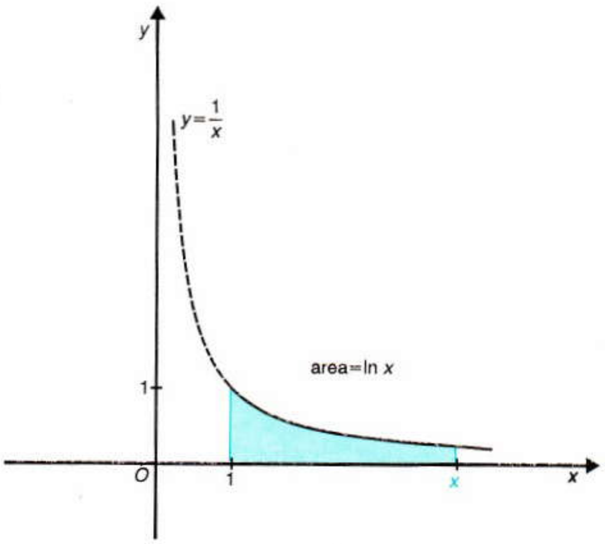

Fig. 40

III) Esaminiamo infine la seguente formula

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \text{arcsen } x + k. \tag{1}$$

Si osserva subito che la formula è valida solo quando x varia nell'intervallo aperto $(-1, 1)$, dove sono definite sia la funzione $y = \text{arcsen } x$ (fig. 41) che la sua derivata (fig. 42).

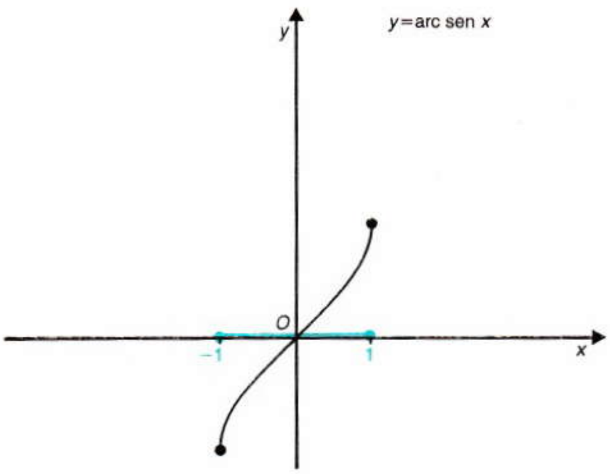

Fig. 41

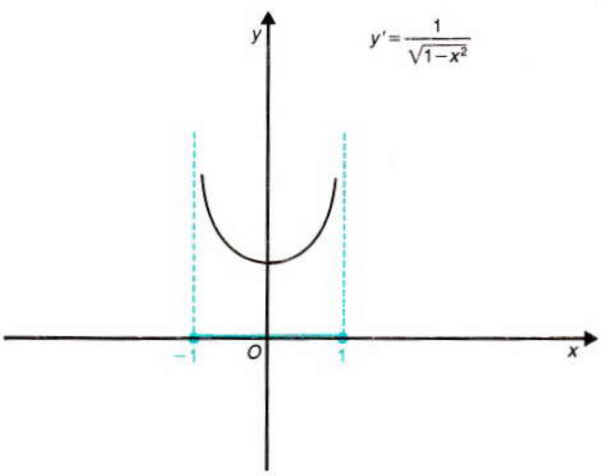

Fig. 42

Un'ultima osservazione è suggerita dal fatto seguente: la funzione

$$y = \arccos x$$

ha come derivata

$$y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Si è dunque condotti ad un altro integrale indefinito della stessa funzione:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=-\arccos x+k. \qquad (2)$$

Tuttavia, non c'è contraddizione fra la (1) e la (2), dato che risulta[1]:

$$\text{arcsen } x+\arccos x=\frac{\pi}{2},$$

ossia

$$\text{arcsen } x=-\arccos x+\frac{\pi}{2}.$$

I secondi membri della (1) e della (2) differiscono dunque solo per una costante, che "scompare" nel processo di derivazione e perciò indicano le primitive della stessa funzione.

7. Metodi di integrazione

Nel paragrafo precedente abbiamo visto un metodo per determinare le primitive di una funzione; questo metodo conduce a pensare che il problema di calcolare integrali indefiniti sia molto semplice, dato che ogni formula di derivazione può essere scritta in forma integrale, cioè

$$F'(x)=f(x) \qquad \text{diventa} \qquad \int f(x)dx=F(x)+k,$$

oppure

$$\int F'(x)dx=F(x)+k.$$

Così, avendo un elenco di funzioni di cui si conoscono le primitive, si è condotti a prevedere delle regole di "algebra degli integrali", analoghe a quelle dell'algebra delle derivate.

È proprio questa la linea che hanno seguito i matematici del 1600, all'inizio delle ricerche sul calcolo integrale. Ma, ben presto, si presentarono delle difficoltà insormontabili; ecco un esempio: non si riusciva a calcolare l'integrale seguente

$$\int \frac{e^x}{x}dx.$$

Eppure la funzione integranda è il quoziente di due funzioni elementari! Solo alla fine del XIX secolo si è arrivati a dimostrare che è impossibile calcolare quell'integrale indefinito valendosi solo di funzioni elementari. Questa scoperta ed altre analoghe hanno condotto a due tipi di ricerche:

I) individuare le funzioni **elementarmente integrabili**, cioè le funzioni che ammettono come primitive delle funzioni composte con funzioni elementari;
II) scoprire **metodi numerici** per calcolare in modo approssimato gli integrali delle funzioni non elementarmente integrabili.

[1] Basta ricordare la seguente proprietà: sono complementari due angoli tali che hanno come somma 90°, ossia $\frac{\pi}{2}$; in tal caso il seno dell'uno è uguale al coseno dell'altro.

I metodi numerici di integrazione, che si prestano particolarmente bene ad essere programmati su un calcolatore (anche su un piccolo personal), saranno trattati nei Complementi. In questo paragrafo sono invece sviluppati tre metodi per ricondurre il calcolo di un dato integrale ad uno o più integrali immediati; valendosi di questi metodi, chiamati brevemente **metodi di integrazione**, si possono individuare alcune categorie di funzioni elementarmente integrabili. I tre metodi si basano tutti sulla stessa idea: partire dalle regole di derivazione per trovare le corrispondenti regole di integrazione.

A) Metodo di integrazione per scomposizione

Dalle prime regole di derivazione ricavate nel cap. 4 si può trarre il seguente risultato:

$$S(x)=aF(x)+bG(x) \quad \text{ha per derivata} \quad S'(x)=aF'(x)+bG'(x)$$

dove a e b indicano due costanti numeriche.

Ora, la stessa regola si può esprimere in forma integrale; basta scrivere nel modo seguente:

$$\int S'(x)dx=S(x)+k,$$

ossia

$$\int [aF'(x)+bG'(x)]dx=aF(x)+bG(x)+k.$$

Indicando poi con $f(x)$ e $g(x)$ le funzioni $F'(x)$ e $G'(x)$, si ha:

$$F'(x)=f(x), \quad \text{ossia} \quad \int f(x)dx=F(x)+k$$

$$G'(x)=g(x), \quad \text{ossia} \quad \int g(x)dx=G(x)+k$$

e si arriva alla seguente espressione:

$$\boldsymbol{\int [af(x)+bg(x)]dx=a\int f(x)dx+b\int g(x)dx.}$$

Ci si rende conto che si è ottenuto un risultato facilmente prevedibile: sapendo che per derivare una somma di funzioni basta addizionare le derivate, è chiaro che, per "risalire" alla primitiva di una somma di funzioni, basta addizionare le primitive.

La formula ora ottenuta ha un'immediata applicazione: si riesce a calcolare l'integrale indefinito di tutte le funzioni che si possono scrivere nella forma

$$y=af(x)+bg(x),$$

dove a e b sono due qualunque costanti numeriche (che possono essere anche negative), mentre $y=f(x)$ e $y=g(x)$ sono due funzioni che hanno integrali immediati; in questi casi, si riesce infatti a **scomporre** l'integrale assegnato nella somma di due integrali noti. È questo **il metodo di integrazione per scomposizione**.

Si tratta di un metodo di notevole portata, dato che si estende facilmente a tutte le funzioni che si possono scrivere nella forma

$$y=a_1f_1(x)+a_2f_2(x)+ \ldots +a_nf_n(x),$$

dove $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sono n costanti qualunque e $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ sono n funzioni che hanno integrale immediato.

Vediamo ora alcune immediate applicazioni di questo metodo.

1) Sono elementarmente integrabili le funzioni del tipo y=a sen x+b cos x.

Ecco un esempio; si ha:

$$\int(\sqrt{2}\ \text{sen}\ x-3\cos x)dx=\sqrt{2}\int \text{sen}\ x\ dx-3\int\cos x\ dx.$$

Risulta quindi

$$\int(\sqrt{2}\ \text{sen}\ x-3\cos x)dx=-\sqrt{2}\cos x-3\ \text{sen}\ x.$$

2) I polinomi sono funzioni elementarmente integrabili.

I polinomi sono infatti le più semplici funzioni del tipo

$$y=a_1f_1(x)+a_2f_2(x)+\ \dots\ +a_nf_n(x),$$

dove le funzioni $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_n(x)$ sono potenze di x ad esponente intero positivo.
Ecco un esempio di applicazione di questo risultato; si ha:

$$\int(2x^2-4x-5)dx=2\int x^2\ dx-4\int x\ dx-5\int 1\ dx$$

Risulta quindi

$$\int(2x^2-4x-5)dx=2\frac{1}{3}x^3-4\frac{1}{2}x^2-5x+k=\frac{2}{3}x^3-2x^2-5x+k.$$

3) Sono elementarmente integrabili le funzioni del tipo

$$y=\frac{a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n}{x^m},\ \textit{con n ed m numeri reali.}$$

Si ha infatti

$$\frac{a_0+a_1\cdot x+\ldots+a_n\cdot x^n}{x^m}=a_0\cdot x^{-m}+a_1\cdot x^{1-m}+\ldots+a_n\cdot x^{n-m}$$

e dunque si tratta ancora di funzioni del tipo

$$y=a_1f_1(x)+a_2f_2(x)+\ \dots\ +a_nf_n(x),$$

con $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_n(x)$ potenze di x.
Applichiamo anche quest'ultimo risultato ad un caso numerico, considerando il seguente integrale:

$$\int\frac{2-3x+4x^2}{x}dx.$$

Dato che risulta

$$\frac{2-3x+4x^2}{x}=2\frac{1}{x}-3+4x$$

si ha

$$\int\frac{2-3x+4x^2}{x}dx=2\int\frac{1}{x}dx-3\int 1\ dx+4\int x\ dx$$

e quindi

$$\int\frac{2-3x+4x^2}{x}dx=2\ln|x|-3x+4\frac{1}{2}x^2+k.$$

B) Metodo di sostituzione

Questo metodo si ottiene a partire dalla regola di derivazione di funzioni composte e cioè:

$$S(x)=F[g(x)] \quad \text{ha per derivata} \quad S'(x)=F'[g(x)]\cdot g'(x)$$

Ora, la stessa regola si può esprimere in forma integrale; basta scrivere nel modo seguente:

$$\int S'(x)dx=S(x), \quad \text{ossia} \quad \int F'[g(x)]\cdot g'(x)dx=F[g(x)]+k.$$

Indicando poi con $f(x)$ la funzione $F'(x)$, si ha:

$$F'(x)=f(x), \quad \text{ossia} \quad \int f(x)dx=F(x)+k \tag{1}$$

e si arriva alla seguente formula

$$\int f[g(x)]\cdot g'(x)dx=F[g(x)]+k. \tag{2}$$

La formula (2) assume una forma più semplice se si indica $g(x)$ con il simbolo z, come si è già fatto nel ricavare la regola di derivazione di funzione composta; si ha infatti:

$$z=g(x) \quad \text{e quindi} \quad g'(x)=z'=\frac{dz}{dx}, \quad \text{da cui} \quad g'(x)dx=dz.$$

La regola (2) assume così la forma

$$\int f(z)dz=F(z)+k \tag{3}$$

che è identica alla (1) con un'unica differenza: al posto di x compare z, che indica una funzione di x.

Ecco dunque una prima, importante conclusione:

da ogni formula di integrazione del tipo

$$\int f(x)dx=F(x)+k,$$

se ne può ricavare una del tipo

$$\int f(z)dz=F(z)+k,$$

dove si ha

$$z=g(x) \quad \text{e} \quad dz=g'(x)dx.$$

Questo risultato ha un'immediata applicazione: si riescono a calcolare tutti gli integrali indefiniti che si possono scrivere nella forma

$$\int f[g(x)]g'(x)dx.$$

Infatti, in tal caso la **sostituzione**

$$g(x)=z \quad \text{e} \quad g'(x)dx=dz$$

trasforma l'integrale dato in

$$\int f(z)dz$$

e il calcolo si conclude facilmente se $f(z)$ è una funzione elementarmente integrabile.

In questo consiste **il metodo di integrazione per sostituzione**. Vediamo ora alcune immediate applicazioni di questo metodo.

1) Sono integrabili elementarmente le funzioni del tipo $y=(x+a)^n$, con $n \neq -1$ e risulta:

$$\int (x+a)^n dx = \frac{1}{n+1}(x+a)^{n+1}+k.$$

Infatti, ogni integrale indefinito del tipo

$$\int (x+a)^n dx$$

si può scrivere nella forma:

$$\int z^n dz \quad \text{con} \quad z=x+a \quad \text{e} \quad dz=1 \cdot dx = dx.$$

Si è così ricondotti ad una funzione che ha un integrale immediato, dato dalla formula

$$\int z^n \, dz = \frac{1}{n+1} z^{n+1}+k.$$

Sostituendo poi a z la sua espressione in funzione di x, si ottiene appunto il risultato indicato al punto (1).

Ecco un esempio di applicazione della regola ottenuta; si ha:

$$\int (x+a)^3 dx = \frac{1}{4}(x+a)^4+k.$$

2) Sono elementarmente integrabili tutte le funzioni che si possono scrivere nella forma $y=[f(x)]^n \cdot f'(x)$ con $n \neq -1$ e risulta:

$$\int [f(x)]^n \cdot f'(x) dx = \frac{1}{n+1}[f(x)]^{n+1}+k.$$

Infatti, ogni integrale indefinito del tipo

$$\int [f(x)]^n \cdot f'(x) dx$$

si può scrivere nella forma

$$\int z^n \, dz \quad \text{con} \quad z=f(x) \quad \text{e} \quad dz=f'(x) \cdot dx.$$

Si è così ricondotti ancora all'integrale immediato, dato dalla formula

$$\int z^n dz = \frac{1}{n+1} z^{n+1}+k.$$

Sostituendo infine a z la sua espressione in funzione di x, si ottiene appunto la formula data all'inizio.

Ecco un esempio di applicazione dell'ultima formula ottenuta:

$$\int [\text{sen } x]^2 \cdot \cos x \, dx = \frac{1}{3}[\text{sen } x]^3+k$$

dove si ha $z=\text{sen } x$, $dz=\cos x \, dx$ e $n=2$.

3) Sono elementarmente integrabili tutte le funzioni che si possono scrivere nella forma $y=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$ *e risulta:*

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx=\ln|f(x)|+k.$$

Infatti, ogni integrale indefinito del tipo

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx$$

si può scrivere nella forma

$$\int \frac{1}{z}\,dz \quad \text{con} \quad z=f(x) \quad \text{e} \quad dz=f'(x)\cdot dx.$$

Si è così ricondotti all'integrale immediato, dato dalla formula

$$\int \frac{1}{z}\,dz=\ln|z|+k.$$

Sostituendo poi a z la sua espressione in funzione di x, si ottiene appunto la formula data all'inizio.

Ecco un esempio di applicazione dell'ultima regola esaminata

$$\int \frac{1}{x+a}\,dx=\ln|x+a|+k$$

dove si ha: $z=x+a$ e quindi $dz=1dx=dx$.

C) Metodo di integrazione per parti

Il metodo si basa sulla regola di derivazione del prodotto di funzioni e cioè:

$$P(x)=f(x)\cdot g(x) \qquad \text{ha per derivata} \qquad P'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$

Per esprimere la stessa regola in forma integrale, si scrive:

$$\int P'(x)dx=P(x)+k,$$

ossia

$$\int [f'(x)g(x)+f(x)g'(x)]dx=f(x)g(x)+k.$$

Applicando all'ultima espressione la regola di scomposizione (pag. 222), si ha:

$$\int f'(x)g(x)dx+\int f(x)g'(x)dx=f(x)g(x)+k$$

da cui si ricava la seguente formula:

$$\boldsymbol{\int f'(x)g(x)dx=f(x)g(x)-\int f(x)g'(x)dx+k} \qquad (4)$$

La formula ora ottenuta prende il nome di **formula di integrazione per parti** e indica un metodo per trattare gli integrali indefiniti: si applica la formula (4), quando la funzione integranda si può scrivere nella forma

$$y=f'(x)g(x).$$

Osserviamo però che, in questo modo, non si arriva a risolvere il problema assegnato, dato che rimane ancora da calcolare il seguente integrale

$$\int f(x)g'(x)dx.$$

Se però quest'ultimo integrale è un integrale immediato o un integrale calcolabile con i metodi già noti, il problema è risolto.

Vediamo due applicazioni della regola ora trovata.

1) Calcolare: $\int x \cdot \cos x \, dx$

Si osserva subito che la funzione integranda è prodotto di due funzioni, che possono essere considerate derivate di funzioni note.
Cominciamo, per esempio, con lo scegliere

$$g(x)=x \text{ e } f'(x)=\cos x;$$

si ha

$$g'(x)=1 \text{ e } f(x)=\text{sen } x.$$

La formula (4) diventa in questo caso:

$$\int x \cdot \cos x \, dx = x \cdot \text{sen } x - \int \text{sen } x \, dx$$

e conduce a calcolare un integrale immediato. In definitiva si ottiene:

$$\int x \cdot \cos x \, dx = x \cdot \text{sen } x + \cos x + k.$$

È chiaro che si poteva scegliere

$$g(x)=\cos x \quad \text{e} \quad f'(x)=x;$$

da cui

$$g'(x)=-\text{sen } x \quad \text{e} \quad f(x)=\frac{x^2}{2}.$$

Con questa scelta, la formula di integrazione per parti fornisce però

$$\int x \cdot \cos x \, dx = \frac{x^2}{2} \cdot \cos x - \int \frac{x^2}{2} \cdot (-\text{sen } x) dx.$$

Ora, è immediato rendersi conto che resta da calcolare un integrale certamente non più semplice di quello di partenza; si conclude che, in questo modo, il procedimento di integrazione per parti non è efficiente e, dunque, deve essere rivista la scelta iniziale effettuata.

2) Calcolare: $\int \ln x \, dx$

Si rimane perplessi di fronte a questo integrale: vi compare una sola funzione ben nota; eppure di questa funzione conosciamo la derivata, ma non la primitiva. Ecco come si può ragionare per valersi della formula d'integrazione per parti: si considera $\ln x = \ln x \cdot 1$ e si sceglie

$$g(x)=\ln x \quad \text{e} \quad f'(x)=1,$$

da cui

$$g'(x)=\frac{1}{x} \quad \text{e} \quad f(x)=x.$$

La formula d'integrazione per parti diventa così

$$\int \ln x\, dx = x \cdot \ln x - \int 1 \cdot dx\, dx$$

e si ottiene subito

$$\int \ln x\, dx = x \cdot \ln x - x + k.$$

Una volta completato il calcolo, può rimanere il dubbio di aver ottenuto un risultato sbagliato; ma è facile verificare che le funzioni

$$y = x \ln x - x + k$$

hanno come derivata

$$y' = \ln x + x\frac{1}{x} - 1 = \ln x.$$

Dopo aver applicato il metodo di integrazione per parti, si osserva che questo metodo non consiste solo nell'applicare una regola, ma richiede spesso di "inventare" il procedimento più adatto; per questo ha applicazioni molto più varie degli altri due metodi presentati.

8. Continuità, derivabilità, integrabilità di una funzione

Nel corso di questo volume abbiamo esaminato tre proprietà notevoli di una funzione: la continuità, la derivabilità e l'integrabilità. Confrontiamo ora queste proprietà, basandoci su considerazioni di tipo geometrico-intuitivo:

- una **funzione continua** in un intervallo $[a, b]$ ha come grafico in quell'intervallo una curva continua, cioè una curva che può essere tracciata senza mai alzare la matita dal foglio (fig. 43);
- una **funzione derivabile** in un intervallo $[a, b]$ ha, in ogni punto di questo intervallo, come tangente una retta t, che non è parallela all'asse delle y (fig. 44);
- una **funzione integrabile** in un intervallo $[a, b]$ delimita un trapezoide di area finita (fig. 45).

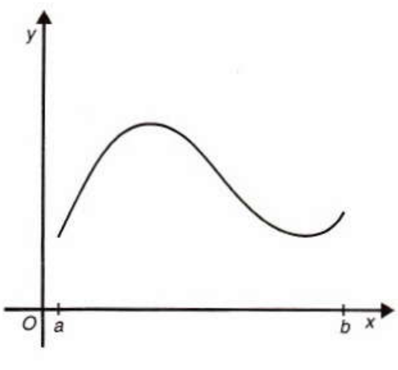

Fig. 43

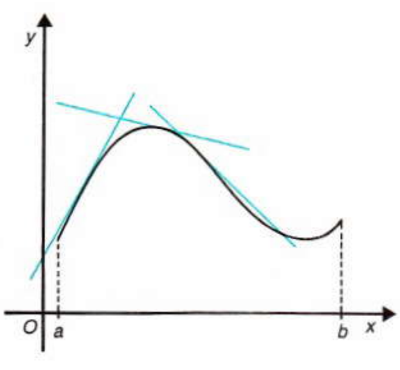

Fig. 44

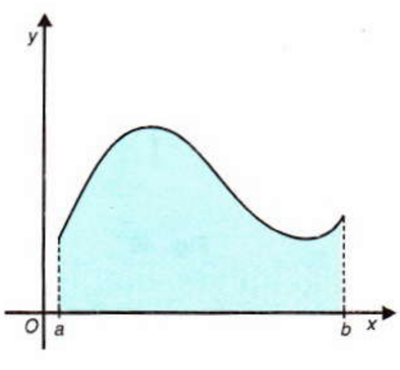

Fig. 45

Abbiamo già visto[1] che la derivabilità implica la continuità: se una curva "si appoggia" in ogni punto P ad una retta tangente, non può ammettere in quel punto una discontinuità.

E così si capisce che la continuità implica l'integrabilità: una curva continua in un intervallo $[a, b]$ delimita certamente un trapezoide di area finita.

Si ha dunque la situazione seguente[2]:

derivabilità ⇒ continuità ⇒ integrabilità.

Basta qualche esempio significativo per rendersi conto che, viceversa, l'integrabilità non implica la continuità e, come già sappiamo[3], la continuità **non** implica la derivabilità in ogni punto.

In fig. 46 abbiamo rappresentato la funzione

$$y=2+\frac{|x|}{x}$$

nell'intervallo $[-1, 1]$.

La funzione non è continua in tutti i punti di quell'intervallo perché presenta in $O(0, 0)$ un salto; tuttavia la curva delimita un trapezoide di area finita. Si tratta dunque di una funzione **integrabile, ma non continua**.

In fig. 47 abbiamo, invece, riproposto un esempio già trattato nel cap. 4, paragrafo 8: il grafico della funzione

$$y=\sqrt[3]{(x-1)}$$

nell'intervallo $[0, 2]$. La funzione è continua in tutto l'intervallo, dato che riusciamo a tracciarne il grafico senza alzare la matita dal foglio; tuttavia la funzione non è derivabile in tutti i punti dell'intervallo perché nel punto $A(1, 0)$ ammette come tangente la retta t, che è parallela all'asse delle y. Si tratta dunque di una funzione **continua, ma non derivabile**.

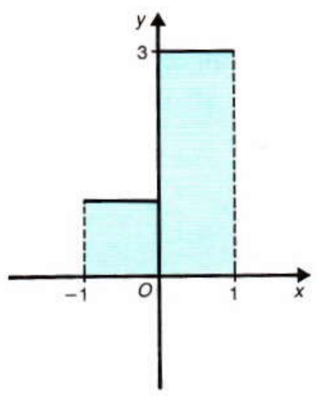

Fig. 46

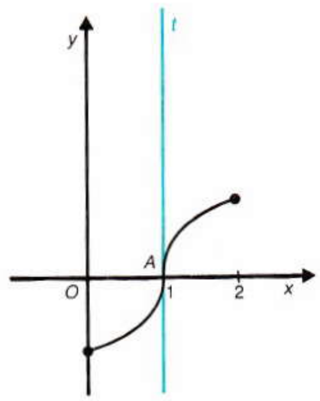

Fig. 47

[1] Vedi cap. 4, paragrafo 8.
[2] Per il simbolo ⇒ vedi pag. 338 e sgg.
[3] Vedi cap. 4, paragrafo 8.

Ci si rende dunque conto che l'insieme delle funzioni integrabili è molto vasto: fra le funzioni integrabili in un intervallo $[a, b]$ ci sono quelle che sono anche continue in quell'intervallo, e fra quelle continue in $[a, b]$ ci sono quelle che sono pure derivabili in tutti i punti dell'intervallo. La fig. 48 visualizza con una rappresentazione di tipo insiemistico queste considerazioni.

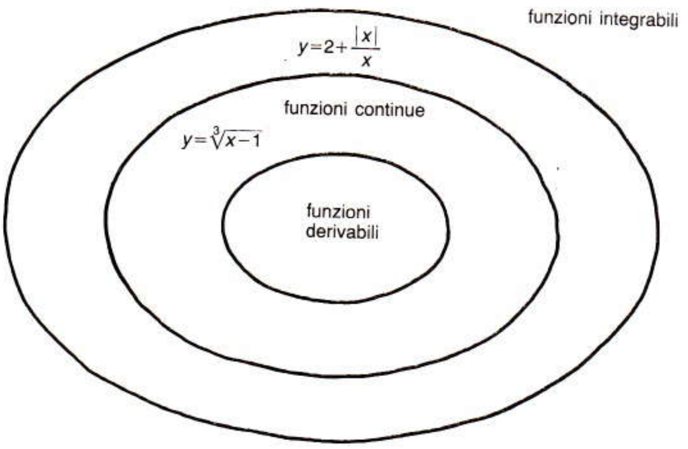

Fig. 48

Riflettiamo infine su una profonda differenza fra la derivazione e l'integrazione di una funzione.

Per esprimere in modo semplice le nostre riflessioni indichiamo con A l'insieme di tutte le funzioni che si ottengono a partire da quelle elementari mediante addizione, moltiplicazione, divisione e composizione di funzioni.

Ecco che cosa si verifica:

- se si deriva una funzione dell'insieme A, basandosi sulle regole dell'algebra delle derivate, si ottiene una funzione che si trova ancora nell'insieme A;
- se invece si integra una funzione dell'insieme A, si può ottenere una funzione che è al difuori dell'insieme A.

Un semplice esempio di una funzione di quest'ultimo tipo è quello già descritto a pag. 221 e cioè

$$\int \frac{e^x}{x}\,dx.$$

La funzione

$$y=\frac{e^x}{x},$$

definita per qualunque $x\neq 0$, è infatti il quoziente di due funzioni elementari; il suo grafico è rappresentato in fig. 49. Si tratta di una funzione continua nel suo campo di esistenza e perciò integrabile in qualunque intervallo che escluda il valore 0; eppure non si riescono ad esprimere le primitive di questa funzione mediante le funzioni elementari.

Il procedimento di integrazione porta dunque ad "uscir fuori" dall'insieme delle funzioni elementari: si possono così trovare delle nuove funzioni con delle proprietà del tutto inaspettate.

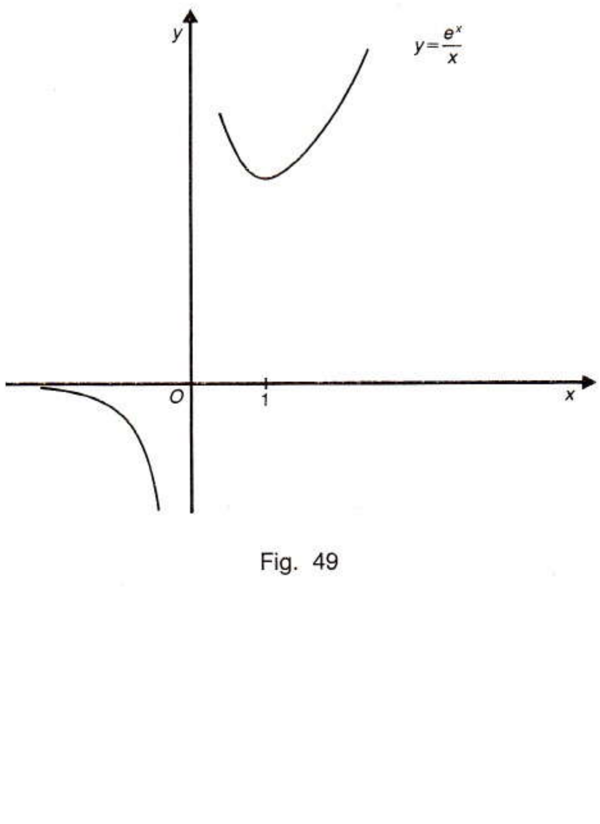

Fig. 49