B. Integrali generalizzati

Nel cap. 6 viene presentato l'integrale definito come limite di un'opportuna somma; si ha:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{h\to 0} [f(x_1)h + f(x_2)h + \ldots + f(x_n)h]$$

Ma, introducendo l'integrale definito, si è detto che debbono essere soddisfatte due condizioni:

1) l'intervallo $[a, b]$ deve essere limitato;
2) la funzione $y=f(x)$ deve essere continua nell'intervallo $[a, b]$.

Vediamo ora come è possibile estendere la nozione di integrale in modo da poter esaminare anche i casi seguenti

1') l'intervallo di integrazione è illimitato;
2') la funzione non è continua in uno dei due estremi di integrazione.

Esaminiamo separatamente questi due casi.

1. Integrali estesi ad intervalli illimitati

Consideriamo dunque una funzione definita e continua in un intervallo illimitato, per esempio $[a, +\infty)$. Se è possibile determinare

$$F(b) = \int_a^b f(x)dx,$$

si può anche calcolare

$$\lim_{b\to+\infty} F(b), \qquad \text{ossia} \qquad \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)dx.$$

Possono allora presentarsi i casi seguenti

I) $\lim_{b\to+\infty} F(b) = \infty$

II) $\lim_{b\to+\infty} F(b)$ non esiste

III) $\lim_{b\to+\infty} F(b) = S$, con S numero finito

Solo in quest'ultimo caso si può estendere l'integrale all'intervallo illimitato e si definisce

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)dx.$$

Nello stesso modo si definisce

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)dx$$

e anche

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^b f(x)dx + \int_b^{+\infty} f(x)dx.$$

Vediamo ora qualche applicazione delle nozioni introdotte.
Cominciamo col considerare la funzione

$$y=\frac{1}{x^2}$$

che è definita e continua nell'insieme $\mathbb{R}_0$ dei reali non nulli.
Possiamo allora calcolare

$$F(b)=\int_1^b \frac{1}{x^2}\,dx=\left[\frac{-1}{x}\right]_1^b=\frac{-1}{b}+1.$$

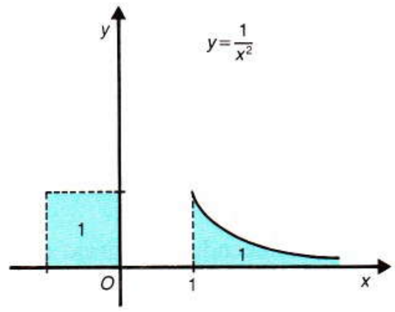

Fig. 16. Il quadrato di lato 1 e la superficie «sotto la curva» hanno la stessa area.

E, dato che risulta

$$\lim_{b\to+\infty}\frac{-1}{b}+1=1,$$

si ha

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}\,dx=1.$$

Questo risultato sembra davvero sorprendente, se viene interpretato dal punto di vista geometrico (fig. 16): la superficie racchiusa dalla retta $x=1$, dall'asse delle x e dalla curva d'equazione $y=\frac{1}{x^2}$ assume il valore finito 1, quando la curva si estende all'infinito!

Se invece consideriamo la funzione

$$y=\frac{1}{x},$$

che è ancora definita e continua nell'insieme $\mathbb{R}_0$ dei reali non nulli, dopo aver calcolato

$$F(b)=\int_1^b \frac{1}{x}\,dx=[\ln x]_1^b=\ln b,$$

troviamo che risulta

$$\lim_{b\to+\infty}\ln b=+\infty$$

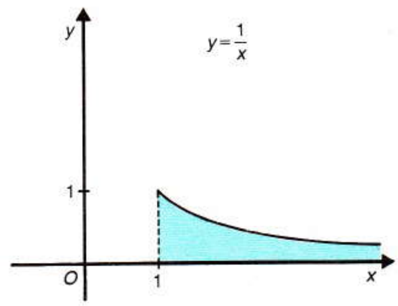

Fig. 17

e dunque non possiamo estendere l'integrale all'intervallo illimitato $[1, +\infty]$.
Dal punto di vista geometrico (fig. 17), troviamo che l'area racchiusa dalla retta $x=1$, dall'asse delle x e dalla curva d'equazione $y=\frac{1}{x}$ diventa sempre più grande, quando la curva si estende all'infinito.

Quest'ultimo risultato è più facilmente accettabile dal punto di vista intuitivo, ma sembra curioso se confrontato con la situazione precedente: le curve delle figure 16 e 17 sembrano avviarsi all'infinito in modo analogo ed è davvero difficile prevedere che una racchiude un'area infinitamente grande e l'altra un'area che vale 1!

Consideriamo infine la funzione

$$y=\frac{1}{1+x^2}$$

che è definita e continua su tutto l'asse reale.
Possiamo allora calcolare

$$F(b)=\int_0^b \frac{1}{1+x^2}\,dx=[\text{arctg}\ x]_0^b=\text{arctg}\ b$$

E, dato che risulta

$$\lim_{b\to+\infty} \operatorname{arctg} b=\frac{\pi}{2},$$

si ha

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx=\frac{\pi}{2}.$$

Analogamente, si trova

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,dx=\frac{\pi}{2}$$

e quindi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx=\pi$$

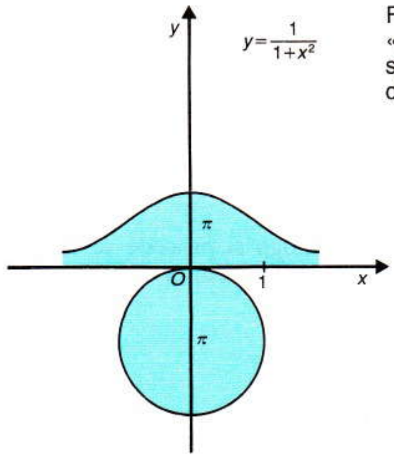

Fig. 18. La superficie «sotto la curva» ha la stessa area del cerchio di raggio 1.

Otteniamo ancora un risultato che è sorprendente, se viene interpretato dal punto di vista geometrico (fig. 18): l'area sotto la curva d'equazione

$$y=\frac{1}{1+x^2}$$

è equivalente al cerchio di raggio 1, dato che assume il valore finito π, quando la curva si estende all'infinito!

2. Integrali di funzioni con discontinuità infinite

Consideriamo ora una funzione che presenti le seguenti caratteristiche:

- è definita e continua in un intervallo aperto, per esempio $[a, b)$,
- risulta $\lim_{x\to b^-} f(x)=\infty$

In questa situazione, si può sempre scegliere un numero β che appartenga all'intervallo $[a, b)$ e calcolare

$$F(\beta)=\int_a^{\beta} f(x)dx.$$

Per decidere poi se si può estendere l'integrale fino all'estremo superiore b, si dovrà calcolare

$$\lim_{\beta\to b} F(\beta)=\lim_{\beta\to b}\int_a^{\beta} f(x)dx.$$

Possono anche ora presentarsi i casi seguenti:

I) $\lim_{\beta\to b^-} F(\beta)=\infty$

II) $\lim_{\beta\to b^-} F(\beta)$ non esiste

III) $\lim_{\beta\to b^-} F(\beta)=S$, con S numero finito

Solo in quest'ultimo caso si può estendere l'integrale all'intervallo $[a, b]$ e si definisce

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\beta \to b} \int_a^\beta f(x)dx.$$

In modo perfettamente analogo si procede se una funzione $y=f(x)$ è definita e continua in un intervallo $]a, b]$ e risulta

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \infty.$$

In questo caso si definisce

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\alpha \to a^+} \int_\alpha^b f(x)dx.$$

Vediamo ora qualche applicazione delle nozioni introdotte, considerando tre funzioni che sono definite e continue nell'insieme $\mathbb{R}_0$ dei reali non nulli ed hanno una discontinuità infinita nel punto d'ascissa 0:

$$y = \frac{1}{x}, \qquad y = \frac{1}{x^2}, \qquad y = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

Proviamo allora a calcolare in tutti e tre i casi l'integrale esteso all'intervallo $[0, 1]$.
Si ha, per la prima funzione

$$\int_\alpha^1 \frac{1}{x}\, dx = [\ln x]_\alpha^1 = -\ln \alpha$$

e, dato che risulta

$$\lim_{\alpha \to 0^+} (-\ln \alpha) = +\infty,$$

non è possibile estendere l'integrale all'intervallo $[0, 1]$.
Nel caso della seconda funzione, si ottiene poi

$$\int_\alpha^1 \frac{1}{x^2}\, dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_\alpha^1 = -1 + \frac{1}{\alpha}$$

e, dato che risulta

$$\lim_{\alpha \to 0^+} \frac{1}{\alpha} - 1 = +\infty,$$

di nuovo non è possibile estendere l'integrale all'intervallo $[0, 1]$.
Calcoliamo infine

$$\int_\alpha^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = [2\sqrt{x}]_\alpha^1 = 2 - 2\sqrt{\alpha}.$$

Ora, dato che risulta

$$\lim_{\alpha \to 0^+} (2 - 2\sqrt{\alpha}) = 2,$$

si può estendere l'integrale all'intervallo $[0, 1]$ e risulta

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2.$$

È interessante interpretare questi risultati dal punto di vista geometrico (figg. 19, 20, 21): nell'intervallo (0, 1], solo la curva d'equazione $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ racchiude un'area finita, quando si avvicina all'asintoto verticale.

Ancora una volta i risultati del calcolo non sono affatto prevedibili, né facilmente spiegabili dal punto di vista geometrico-intuitivo.

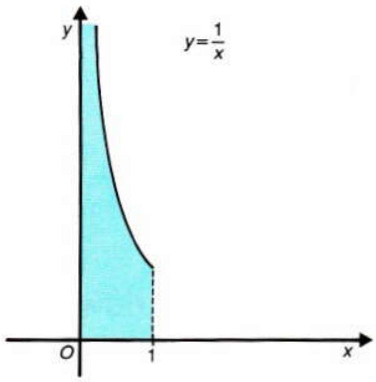

Fig. 19

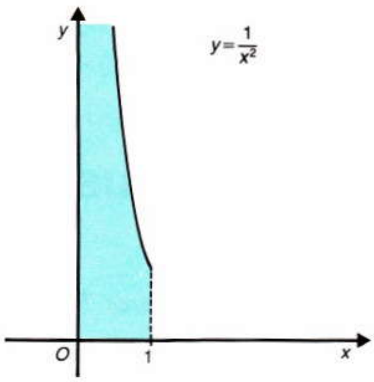

Fig. 20

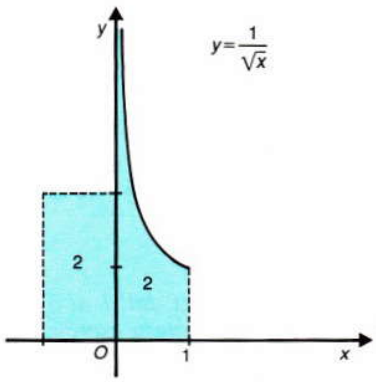

Fig. 21. La «superficie sotto la curva» è equivalente al rettangolo di dimensioni 1 e 2.

Concludiamo esaminando la funzione (fig. 22)

$$y=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

che è definita nell'intervallo $(-1, 1)$ e presenta una discontinuità infinita, sia nel punto d'ascissa 1 che nel punto d'ascissa -1.
Si può allora provare a calcolare l'integrale della funzione esteso all'intervallo $[0, 1]$; si ottiene

$$\int_0^{\beta} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=[\text{arcsen}\ x]_0^{\beta}=\text{arcsen}\ \beta$$

e, dato che risulta

$$\lim_{\beta\to 1^+} \text{arcsen}\ \beta=\frac{\pi}{2},$$

si ha

$$\int_0^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=\frac{\pi}{2}.$$

Inoltre, la simmetria della curva rispetto all'asse delle y, porta a concludere che risulta

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=\pi.$$

Abbiamo dunque trovato un'altra superficie che presenta una caratteristica sempre sorprendente: è delimitata da una curva che si estende all'infinito, ma è equivalente al cerchio di raggio 1.

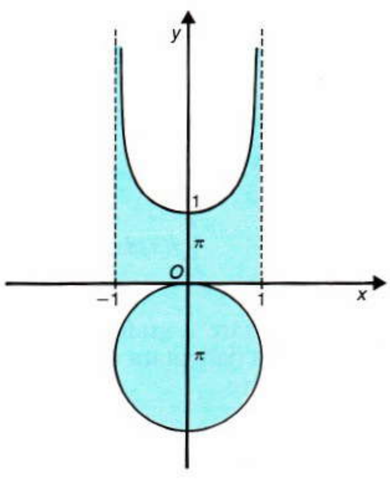

Fig. 22. La «superficie sotto la curva» è equivalente al cerchio di raggio 1.