

4.

Statistica: il metodo dei minimi quadrati

1. Alla ricerca del "valore vero" di una grandezza, a partire da una serie di misure: la media aritmetica ponderata
2. Alla ricerca di leggi sperimentali che collegano due grandezze
Retta di regressione per l'origine
3. La retta di regressione
4. Dalla retta di regressione ad alcune leggi sperimentali

Bisogna arrivare all'inizio del XIX secolo per trovare le prime applicazioni di metodi statistici a dati forniti dalle scienze sperimentali. Il più significativo fra questi metodi è quello dei **minimi quadrati**. Lo sviluppo di questo metodo è legato ai nomi di tre grandi matematici: il tedesco Karl Friedrich Gauss e i francesi Adrien-Marie L egendre e Pierre Simon de Laplace. Ma   legato anche all'Osservatorio Astronomico di Palermo...; ecco perch .

La notte del 1  gennaio del 1801, Giuseppe Piazzi, direttore dell'Osservatorio di Palermo, notava un astro mai visto, nuovo; nelle notti successive, Piazzi aveva modo di osservare che questo astro si spostava rispetto alle stelle vicine: si trattava dunque di un nuovo pianeta, un piccolo pianeta, a cui diede il nome di Cerere. Ma, dopo poche settimane, il pianetino Cerere spariva dal cielo di stelle... Dove era andato? Quale era la sua orbita?

La scoperta di Giuseppe Piazzi non era destinata a rimanere senza conseguenze. E le conseguenze furono di due tipi: una di carattere astronomico, perch  in seguito alla scoperta di Cerere, si cercarono, e si trovarono, degli altri pianetini; l'altra di carattere matematico-statistico.   di questa che ci occuperemo nelle pagine seguenti.

Si   detto che il pianetino Cerere era sparito all'occhio dell'osservatore di Palermo. Come si poteva trovare la sua orbita?

Di questo problema era venuto a conoscenza Karl Friedrich Gauss quando aveva appena terminato i suoi studi universitari. Con i dati ricevuti da Piazzi, poteva provare ad applicare "un suo metodo", quello appunto dei minimi quadrati, che aveva elaborato quando era ancora studente. Il risultato dei calcoli di Gauss ebbe un successo clamoroso; il pianetino ricomparve nel cielo alla fine del 1802, proprio come aveva previsto. Cerere aveva percorso dunque l'orbita che Gauss aveva tracciato, in base ai pochi dati ricevuti.

  solo nel 1809 che Gauss pubblica, in un trattato sul movimento dei corpi celesti, l'idea che lo aveva guidato nella formulazione del suo metodo. Dice: «Siccome tutte le nostre misure non sono nulla di pi  che approssimazioni della verit , altrettanto deve valere per tutti i calcoli basati su di esse; lo scopo pi  importante dei calcoli che riguardano fenomeni reali deve essere quello di approssimare la verit  il meglio possibile. Ma questo pu  essere ottenuto solo con una opportuna **combinazione** di un certo numero di osservazioni...». «L'opportuna combinazione»  , appunto, indicata dal metodo dei minimi quadrati. Gauss scrive che tale metodo era stato pubblicato da L egendre tre anni prima.   infatti del 1806 un'opera sulla determinazione dell'orbita delle comete; L egendre scrive: «Fra tutti i principi che si possono suggerire per minimizzare gli errori d'osservazione, non ce n'  uno pi  semplice di quello che ho utilizzato nella mia trattazione: il metodo, cio , di minimizzare la somma dei quadrati degli errori».

Successivamente, nel 1812, Laplace pubblica la sua "Teoria analitica della probabilit ", in cui viene, fra l'altro, presentata una dimostrazione generale del metodo dei minimi quadrati; da allora questa teoria costituisce uno dei metodi pi  diffusi per trattare dati sperimentali.

Nelle pagine che seguono vedremo il metodo "all'opera", per lo studio di due questioni fondamentali:

- 1) elaborare pi  misure di una data grandezza allo scopo di individuare il valore pi  plausibile della grandezza stessa;
- 2) elaborare pi  misure relative a due grandezze allo scopo di individuare una legge che leghi le due grandezze.

1. Alla ricerca del "valore vero" di una grandezza, a partire da una serie di misure: la media aritmetica ponderata

Cominciamo a riflettere su un problema fisico ancora attuale: la determinazione della velocità della luce.

Si tratta di un problema che ha appassionato i fisici fin dall'epoca di Galileo e che risulta fondamentale sia nelle ricerche teoriche che in quelle applicate. Nella tabella seguente sono elencati alcuni valori della velocità della luce nel vuoto determinati negli ultimi cento anni.

	sperimentatore	velocità della luce in km/sec
1880	Michelson (U.S.A.)	299.910
1906	Rosa e Dorsey (U.S.A.)	299.781
1926	Michelson (U.S.A.)	299.796
1940	Huettel (Germania)	299.768
1950	Essen (Gran Bretagna)	299.792,5
1950	Hansen e Bol (U.S.A.)	299.789,3
1953	Froome (Gran Bretagna)	299.793,0
1958	Froome (Gran Bretagna)	299.792,5.

Fissiamo, in particolare, l'attenzione sugli ultimi quattro valori, che sono stati trovati negli anni '50 con esperienze analoghe, ma eseguite in laboratori diversi. Non abbiamo motivo di ritenere una misura più esatta delle altre e perciò non riusciamo ad individuare il "valore vero" della velocità della luce. Se indichiamo con x questo "valore vero", è facile descrivere l'errore e che si commette scegliendo una misura piuttosto che l'altra; si ha:

$$\begin{array}{llll} e_1 = (x - 299.792,5) & \text{relativamente alla 1ª misura,} \\ e_2 = (x - 299.789,3) & \text{»} & \text{»} & 2^{\text{a}} \text{ »} \\ e_3 = (x - 299.793,0) & \text{»} & \text{»} & 3^{\text{a}} \text{ »} \\ e_4 = e_1 & \text{»} & \text{»} & 4^{\text{a}} \text{ »} \end{array}$$

Si capisce subito che la misura migliore sarebbe quella che dà l'errore più piccolo, ma, dato che non conosciamo x , non possiamo indicare qual'è il più piccolo fra gli errori indicati prima.

Ecco allora una nuova idea: combinare insieme le misure trovate in modo da rendere più piccolo possibile l'errore complessivo commesso.

Bisogna però tener conto di una difficoltà: gli errori possono essere sia positivi che negativi, perciò, combinando le varie misure, si corre il rischio che errori positivi e negativi anche notevoli si elidano a vicenda, falsando completamente la validità del risultato.

Per ovviare a questo inconveniente, è venuto in mente di elevare al quadrato i singoli errori, in modo da renderli tutti positivi; si è poi considerata la somma di questi quadrati e si è cercato di minimizzarla. Questa è l'idea alla base del **metodo dei minimi quadrati**.

Calcoliamo dunque la somma dei quadrati degli errori, cioè

$$s = e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 + e_4^2;$$

si ottiene:

$$s = (x - 299.792,5)^2 + (x - 299.789,3)^2 + (x - 299.793,0)^2 + (x - 299.792,5)^2.$$

Non è agevole svolgere i calcoli con i numeri dati, che presentano molte cifre; conviene quindi valersi delle lettere, che scegliamo nel modo seguente:

$$x_1 = 299.792,5, \quad x_2 = 299.789,3, \quad x_3 = 299.793,0.$$

Così la somma diventa:

$$s = (x - x_1)^2 + (x - x_2)^2 + (x - x_3)^2 + (x - x_1)^2.$$

Riunendo i due termini uguali, si ha:

$$s = 2(x - x_1)^2 + (x - x_2)^2 + (x - x_3)^2.$$

Svolgendo poi i calcoli indicati, si ottiene un'espressione del tipo

$$s = ax^2 + bx + c,$$

dove si ha:

$$a = 1 + 1 + 2 = 4$$

$$b = -2(2x_1 + x_2 + x_3)$$

$$c = 2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2.$$

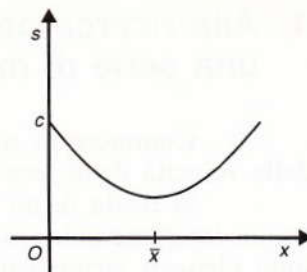


Fig. 1

Si ha dunque una somma s , che varia al variare di x secondo una legge parabolica, di cui abbiamo rappresentato il grafico in fig. 1.

È chiaro che s risulta minima in corrispondenza all'ascissa del vertice, cioè in corrispondenza al valore \bar{x} dato dalla relazione:

$$\bar{x} = -\frac{b}{2a}.$$

In questo caso si ottiene:

$$\bar{x} = \frac{2x_1 + x_2 + x_3}{4} = 299.791,8.$$

È questo numero che possiamo considerare il valore più plausibile della velocità della luce.

Le considerazioni ora svolte possono essere facilmente estese a tutti i casi in cui si effettuano N misure di una grandezza e non si ha motivo di ritenere che una misura sia migliore delle altre. Indichiamo con:

n_1	il numero delle misure che valgono	x_1 ,
n_2	» » » » » »	x_2 ,
....	
n_k	» » » » » »	x_k .

Calcoliamo, come abbiamo fatto prima, il valore \bar{x} che rende minima la seguente somma s dei quadrati degli errori:

$$s = \underbrace{(x-x_1)^2 + \dots + (x-x_1)^2}_{n_1 \text{ volte}} + \underbrace{(x-x_2)^2 + \dots + (x-x_2)^2}_{n_2 \text{ volte}} + \dots + \underbrace{(x-x_k)^2 + \dots + (x-x_k)^2}_{n_k \text{ volte}}.$$

Riunendo i termini uguali, si ha:

$$s = n_1(x-x_1)^2 + n_2(x-x_2)^2 + \dots + n_k(x-x_k)^2;$$

infine, svolgendo i calcoli indicati, la somma s assume la forma

$$s = ax^2 + bx + c, \tag{1}$$

dove risulta

$$a = n_1 + n_2 + \dots + n_k,$$

$$b = -2(n_1x_1 + n_2x_2 + \dots + n_kx_k),$$

$$c = n_1x_1^2 + n_2x_2^2 + \dots + n_kx_k^2.$$

La legge (1) ottenuta è sempre parabolica e presenta il coefficiente a certamente positivo; dunque, rappresentando s su un piano cartesiano, si ha un grafico come quello di fig. 2. Perciò il valore di x cercato è sempre dato dalla relazione

$$\bar{x} = -\frac{b}{2a},$$

che, in questo caso, è:

$$\bar{x} = \frac{n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + \dots + n_kx_k}{n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_k},$$

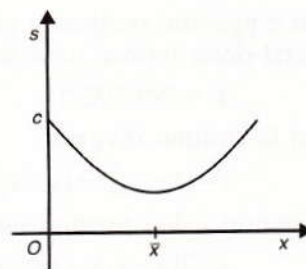


Fig. 2

ossia

$$\bar{x} = \frac{n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + \dots + n_kx_k}{N} \quad (2)$$

Il valore di x individuato dalla (2) si chiama **media aritmetica ponderata** delle misure; i pesi attribuiti ad ogni misura sono $n_1, n_2, n_3, \dots, n_k$ ed indicano, in questo caso, il numero di volte in cui la misura si è presentata.

Si conclude che la **media ponderata** di più misure è caratterizzata da questa proprietà: **è il numero che rende minima la somma dei quadrati degli errori**. È per questo che gli sperimentatori calcolano la media ponderata di più misure per avere il valore più attendibile di una grandezza misurata.

2. Alla ricerca di leggi sperimentali che collegano due grandezze. Retta di regressione per l'origine

Partiamo ancora una volta da un problema reale. Osserviamo un edificio in costruzione (fig. 3): si intuisce che il peso dei mobili e dei solai è sostenuto da una struttura del tipo di quella rappresentata in fig. 4.

Per capire come una struttura di questo tipo possa sostenere il carico, abbiamo realizzato un semplice esperimento (fig. 5): un'asse di legno è appoggiata agli estremi, e al centro è sospeso un secchio di peso trascurabile, che viene riempito gradualmente d'acqua.

Si osserva che la trave si deforma sotto l'azione del peso dell'acqua; questa osservazione può essere resa più precisa misurando via via il peso p dell'acqua e valutando la conseguente deformazione della trave mediante la **freccia f** (fig. 6).

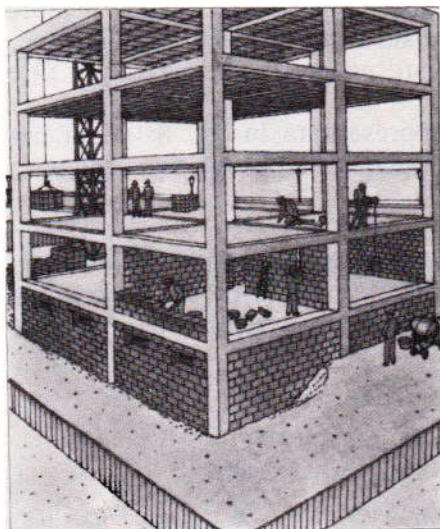


Fig. 3

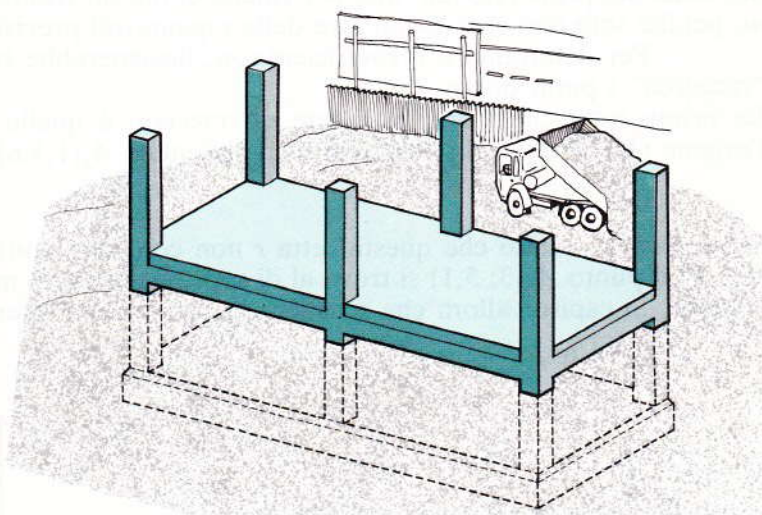


Fig. 4

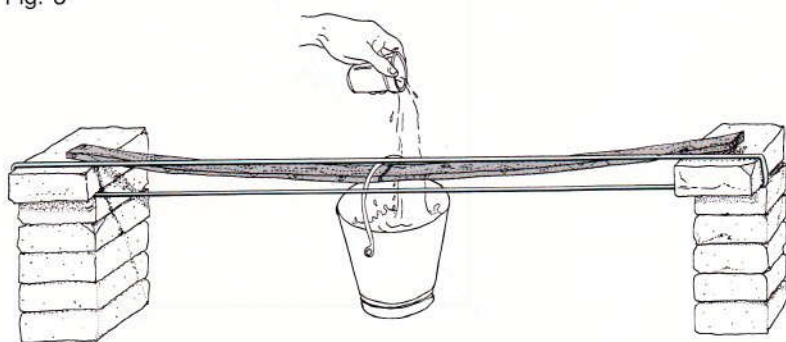


Fig. 5

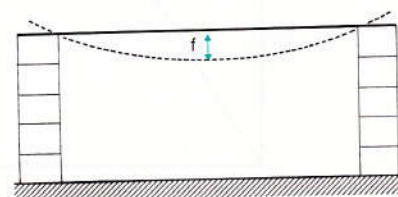


Fig. 6

In uno di questi esperimenti abbiamo ottenuto la seguente tabella, dove il peso p è misurato in "bicchieri d'acqua" e f è la freccia misurata in centimetri.

p	f
0	0
1	1,6
2	3,1
3	5,1
4	6,6
5	8,4
6	10,2
7	11,6
8	14,9
9	16,7

Per avere una prima idea della situazione, abbiamo rappresentato i dati su un grafico (fig. 7): i punti sembrano "quasi" allineati su una retta r che passa per O e che ha quindi un'equazione del tipo

$$f = mp. \quad (1)$$

Quest'equazione suggerisce che la freccia f ed il peso p sono, in prima approssimazione, direttamente proporzionali; ma, per valersi di questo risultato, occorre conoscere il coefficiente m , perché solo così si possono fare delle ragionevoli previsioni sul comportamento della trave.

Per determinare il coefficiente m , bisognerebbe trovare una retta che passa per O e "racconta" i punti di fig. 7.

La prima retta che viene in mente di tracciare è quella rappresentata in fig. 8: passa per l'origine $O(0,0)$ e per il primo punto sperimentale $A_1(1;1,6)$ e dunque ha l'equazione seguente:

$$f = 1,6p.$$

Ma si osserva subito che questa retta r non congiunge tutti i punti sperimentali: per esempio (fig. 9) il punto $A_3(3; 5,1)$ si trova al di sopra della retta, mentre il punto $A_2(2; 3,1)$ si trova al di sotto. Si capisce allora che scegliere la retta r , cioè prendere per m il valore

$$m = 1,6$$

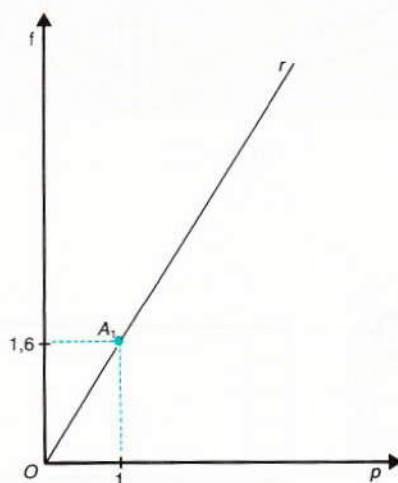


Fig. 8

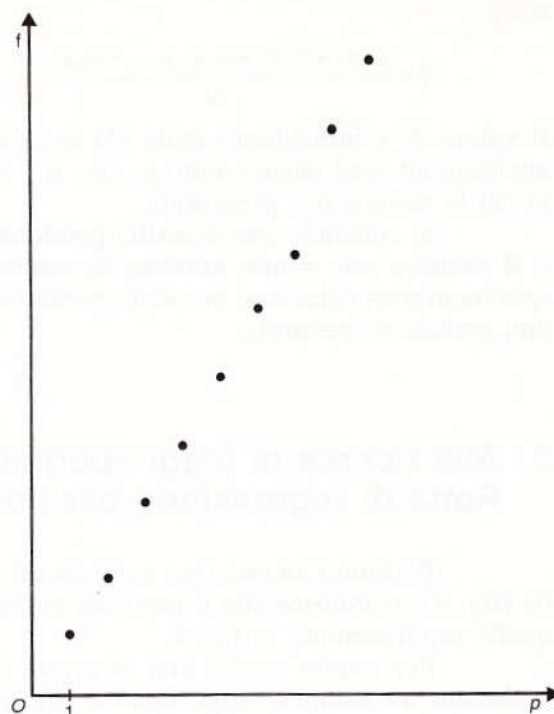


Fig. 7

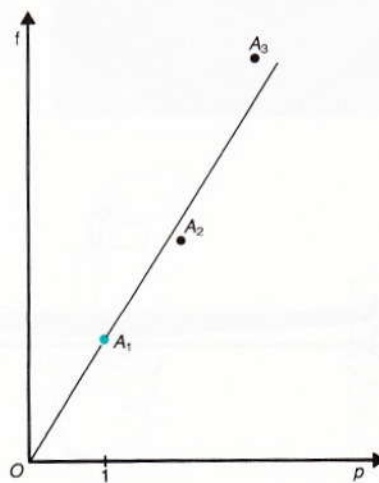


Fig. 9

significa comportarsi come se tutti i punti sperimentali si trovassero sulla retta r , mentre, per esempio (fig. 10), il punto A_3 non coincide con il punto R_3 , che ha la stessa ascissa 3, ma si trova sulla retta r .

Ora, per valutare in modo semplice l'errore commesso relativamente al punto A_3 , si può calcolare la differenza fra l'ordinata di A_3 e quella di R_3 . Analogamente si può procedere per gli altri punti assegnati. Così risulta, per esempio, per i punti di fig. 10

$$\begin{array}{lll} A_1(1;1,6)=R_1(1;1,6) & \text{e dunque} & e_1=1,6-1,6=0 \\ A_2(2;3,1)=R_2(2;1,6 \cdot 2) & \gg \gg & e_2=3,1-1,6 \cdot 2=3,1-3,2=-0,1 \\ A_3(3;5,1)=R_3(3;1,6 \cdot 3) & \gg \gg & e_3=5,1-1,6 \cdot 3=5,1-4,8=0,3. \end{array}$$

È chiaro che lo stesso confronto si potrebbe fare fra la posizione degli altri punti sperimentali rispetto alla retta r .

Se, poi, disegniamo un'altra retta, per esempio r' , che passa per $O(0,0)$ ed $A_2(2;3,1)$ ed ha equazione

$$f=1,55p,$$

troviamo (fig. 11) una situazione analoga.

E, allora, come scegliere il valore di m ? Ragionando come nel paragrafo precedente, si è condotti all'idea dei minimi quadrati: il valore più attendibile di m è quello che rende minima la somma dei quadrati degli errori. Tracciamo una qualunque retta d'equazione

$$f=mp$$

(fig. 12), e calcoliamo l'errore e_1 , relativo al 1° punto sperimentale; si ha:

$$e_1=1,6-m \cdot 1$$

e, analogamente, per gli altri punti

$$e_2=3,1-m \cdot 2$$

...

$$e_9=16,7-m \cdot 9.$$

Perciò la somma s dei quadrati degli errori è data da:

$$s=(1,6-m \cdot 1)^2+(3,1-m \cdot 2)^2+\dots+(16,7-m \cdot 9)^2;$$

sviluppando i calcoli indicati, si ottiene un'espressione del tipo

$$s=am^2+bm+c,$$

dove risulta:

$$a=1^2+2^2+\dots+9^2,$$

$$b=-2(1 \cdot 1,6+2 \cdot 3,1+\dots+9 \cdot 16,7)$$

$$c=1,6^2+3,1^2+\dots+16,7^2.$$

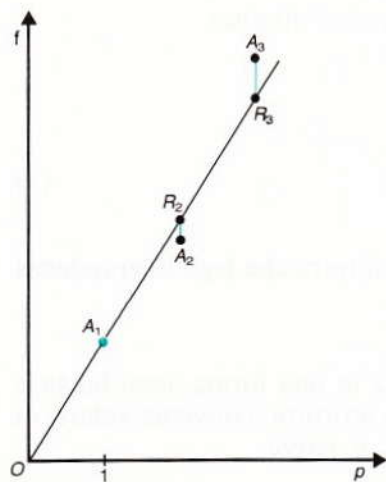


Fig. 10

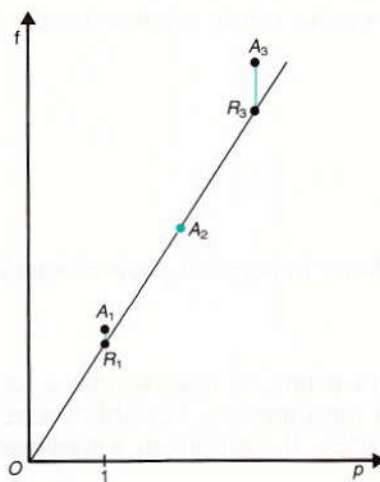


Fig. 11

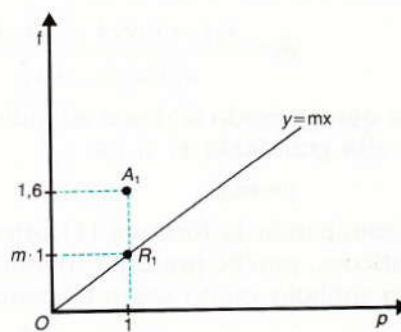


Fig. 12

Dunque s è legata alla pendenza m della retta da una legge parabolica, perciò, anche in questo caso, la somma s è minima quando m assume il valore

$$\bar{m} = \frac{-b}{2a},$$

ossia

$$\bar{m} = \frac{1 \cdot 1,6 + 2 \cdot 3,1 + \dots + 9 \cdot 16,7}{1^2 + 2^2 + \dots + 9^2} = 1,8.$$

In questo modo, a partire dai dati sperimentali di pag. 268, si è ottenuto che la freccia f è direttamente proporzionale al peso p del carico, secondo la legge

$$f = 1,8p.$$

Questa legge permette di conoscere, relativamente alla trave esaminata, la freccia f , corrispondente a diversi valori del peso p , senza dover ripetere alcuna prova sperimentale

Passiamo ora ad un caso più generale, considerando un numero N di misure relative a due grandezze x ed y . Rappresentando i dati su un piano cartesiano, si ottiene una nuvola di punti, che sembrano "addensarsi" intorno ad una retta passante per l'origine O . Se indichiamo i punti con

$$A_1(x_1, y_1), \quad A_2(x_2, y_2), \quad \dots, \quad A_N(x_N, y_N),$$

possiamo dire che la retta più vicina ai dati sperimentali ha un'equazione del tipo

$$y = mx,$$

dove m è il numero che rende minima la somma s dei quadrati degli errori (fig. 13), somma che è data da:

$$s = (y_1 - mx_1)^2 + (y_2 - mx_2)^2 + \dots + (y_N - mx_N)^2.$$

Sviluppando i calcoli indicati, la somma s è espressa sempre nella forma

$$s = am^2 + bm + c,$$

dove risulta:

$$a = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_N^2,$$

$$b = -2(x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_Ny_N),$$

$$c = y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_N^2.$$

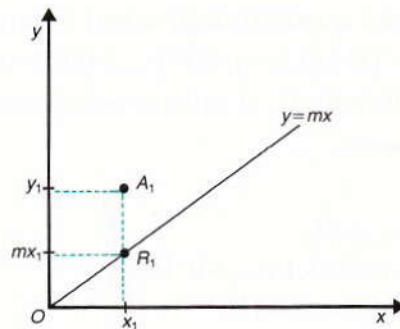


Fig. 13

È facile così calcolare il valore di m che rende minima la somma s ; si ottiene:

$$\bar{m} = \frac{-b}{2a},$$

ossia, nel caso considerato:

$$\bar{m} = \frac{x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_Ny_N}{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_N^2} \quad (1)$$

In questo modo si riesce ad individuare la legge di proporzionalità diretta che lega la grandezza y alla grandezza x ; si ha:

$$y = \bar{m}x.$$

Esaminando la formula (1) ottenuta prima, si osserva che è scritta in una forma assai lunga e faticosa, perché presenta somme di tanti numeri. Per abbreviare la scrittura, conviene valersi di un simbolo molto usato in matematica, il simbolo di **sommatoria**; si scrive:

$$x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_N = \sum_{k=1}^N x_k.$$

Il simbolo $\sum_{k=1}^N x_k$ si legge “sommatoria per k che va da 1 ad N di x con k ”, e significa che si deve eseguire un’addizione di tanti termini del tipo x_k , dove l’indice k assume tutti i valori interi da $k=1$ fino a $k=N$. Con questo simbolo scriveremo, più brevemente

$$\bar{m} = \frac{\sum_{k=1}^N x_k y_k}{\sum_{k=1}^N x_k^2}.$$

La retta che ha equazione

$$y = \bar{m}x$$

prende il nome di **retta di regressione**; il termine “regressione” ricorda che la retta permette di regredire, cioè di passare dai valori di una delle grandezze ai corrispondenti valori dell’altra.

In questo paragrafo ci siamo limitati a trattare il caso in cui si cerca una retta che passa per l’origine, ma nel paragrafo seguente vedremo come si può determinare la retta di regressione che non passa per l’origine.

3. La retta di regressione

Ci occupiamo in questo paragrafo di un problema abbastanza complesso, ma anche molto ricco di applicazioni. Vediamo subito di che cosa si tratta.

Si sono effettuate N misure di due grandezze x e y . Rappresentando i dati su un piano cartesiano, si ottiene una nuvola di punti che “sembrano addensati” intorno ad una retta che non passa per O (fig. 14).

La figura conduce ad intuire che, in prima approssimazione, y ed x sono legate da una legge del tipo

$$y = mx + p,$$

che rappresenta l’equazione di una retta non passante per O . Come trovare il valore più plausibile per m e p ?

Se ripetiamo il ragionamento seguito nel paragrafo precedente, siamo condotti a determinare m e p scegliendo la retta che rende minima la somma s dei quadrati degli errori. Ma, in questo caso, la situazione si presenta più complicata.

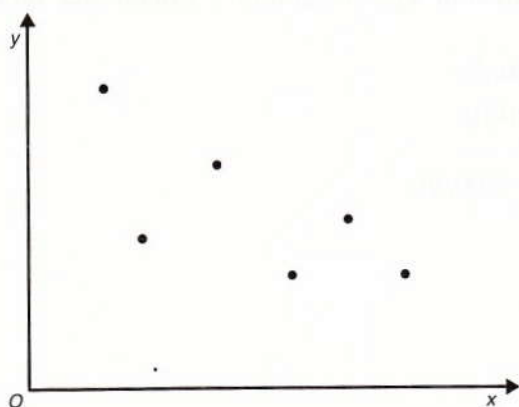


Fig. 14

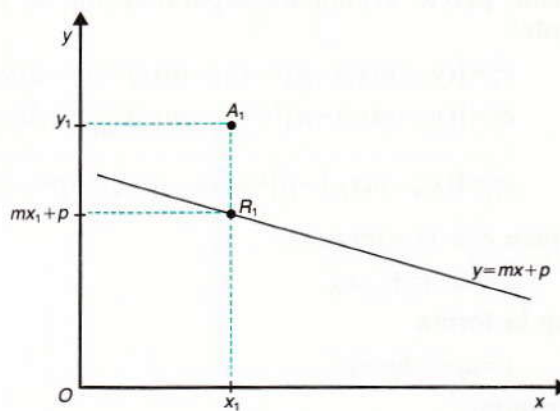


Fig. 15

Osserviamo, infatti, la fig. 15, dove abbiamo rappresentato una retta r d’equazione

$$y = mx + p,$$

scelta per “raccordare i punti”; abbiamo anche indicato il 1° punto sperimentale

$$A_1(x_1, y_1).$$

Ora, l'errore che si commette scegliendo la retta r è, relativamente al punto A_1 ,

$$e_1 = y_1 - (mx_1 + p),$$

e, così (fig. 16), per gli altri punti $A_2(x_2, y_2)$, ..., $A_N(x_N, y_N)$, gli errori sono

$$e_2 = y_2 - (mx_2 + p),$$

...

$$e_N = y_N - (mx_N + p).$$

Dunque, la somma s dei quadrati degli errori è, in questo caso,

$$s = \sum_{k=1}^N e_k^2, \quad (1)$$

cioè

$$s = \sum_{k=1}^N [y_k - (mx_k + p)]^2. \quad (2)$$

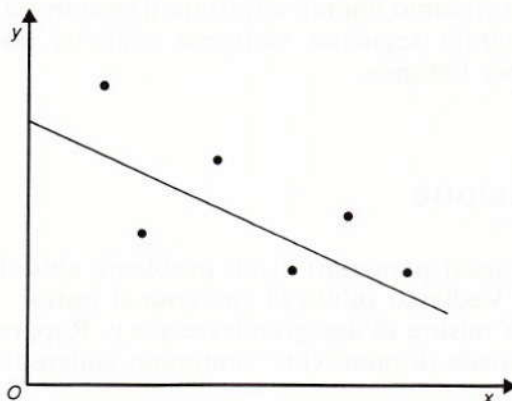


Fig. 16

È chiaro che ora s dipende da due variabili, m e p ; perciò dobbiamo scegliere sia m che p in modo che s risulti minima.

L'idea più semplice è quella di considerare separatamente le due variabili e ripetere due volte il ragionamento esposto nel paragrafo precedente. Cominciamo dunque col fissare l'attenzione sulla variabile p e cerchiamo di esprimere la somma s nella forma:

$$s = ap^2 + bp + c.$$

Conviene perciò sviluppare separatamente le espressioni e_k^2 , svolgendo i calcoli nel modo seguente:

$$e_1^2 = [(y_1 - mx_1) - p]^2 = (y_1 - mx_1)^2 + p^2 - 2(y_1 - mx_1)p$$

$$e_2^2 = [(y_2 - mx_2) - p]^2 = (y_2 - mx_2)^2 + p^2 - 2(y_2 - mx_2)p$$

.....

$$e_N^2 = [(y_N - mx_N) - p]^2 = (y_N - mx_N)^2 + p^2 - 2(y_N - mx_N)p.$$

Si capisce che la somma

$$s = e_1^2 + e_2^2 + \dots + e_N^2$$

assume la forma

$$s = ap^2 + bp + c,$$

dove risulta:

$$a = N,$$

$$b = -2(y_1 - mx_1 + y_2 - mx_2 + \dots + y_N - mx_N)$$

$$c = (y_1 - mx_1)^2 + (y_2 - mx_2)^2 + \dots + (y_N - mx_N)^2.$$

Possiamo così indicare il valore di p che rende minima s ; si ha:

$$\bar{p} = \frac{-b}{2a},$$

cioè, in questo caso,

$$\bar{p} = \frac{y_1 - mx_1 + y_2 - mx_2 + \dots + y_N - mx_N}{N}.$$

Ora, esaminando la formula ottenuta, si osserva che si può riscriverla nel modo seguente:

$$\bar{p} = \frac{y_1 + y_2 + \dots + y_N}{N} - m \frac{(x_1 + x_2 + \dots + x_N)}{N}. \quad (3)$$

Si evidenziano così due espressioni particolari:

– la media aritmetica dei valori di y , data da

$$M_y = \frac{y_1 + y_2 + \dots + y_N}{N} = \frac{\sum_{k=1}^N y_k}{N}$$

– la media aritmetica dei valori di x , data da

$$M_x = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_N}{N} = \frac{\sum_{k=1}^N x_k}{N}.$$

La (3) si scrive dunque

$$\bar{p} = M_y - mM_x \quad (4)$$

È interessante fermarsi a riflettere su questo primo risultato, scrivendolo nella forma

$$M_y = mM_x + \bar{p}.$$

Quest'uguaglianza può essere interpretata geometricamente, dicendo che la retta r cercata, d'equazione

$$y = mx + p,$$

deve passare per il punto

$$M(M_x, M_y),$$

dove M è il punto che ha per ascissa la media aritmetica dei valori di x e per ordinata la media aritmetica dei valori di y (fig. 17).

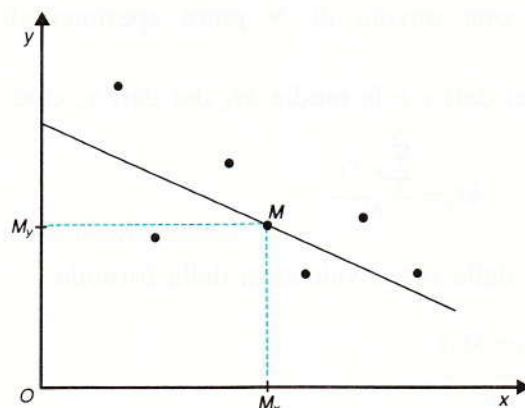


Fig. 17

Passiamo ora a considerare la pendenza m della retta r ; per questo sostituiamo l'espressione (3) nell'espressione (2), che fornisce la somma s dei quadrati degli errori; si ottiene:

$$s = \sum_{k=1}^N [y_k - (mx_k + M_y - mM_x)]^2.$$

Svolgiamo i calcoli indicati, considerando separatamente uno dei termini della sommatoria, cioè e_k^2 nella (1). Si può scrivere:

$$e_k^2 = [y_k - (mx_k + M_y - mM_x)]^2 = [(y_k - M_y) - (x_k - M_x)m]^2;$$

sviluppando il quadrato, si ottiene:

$$(y_k - M_y)^2 + (x_k - M_x)^2 m^2 - 2(x_k - M_x)(y_k - M_y)m.$$

Si capisce che la somma

$$s = \sum_{k=1}^N e_k^2$$

assume la forma

$$s = am^2 + bm + c,$$

dove ora risulta:

$$a = \sum_{k=1}^N (x_k - M_x)^2,$$

$$b = -2 \sum_{k=1}^N (x_k - M_x)(y_k - M_y),$$

$$c = \sum_{k=1}^N (y_k - M_y)^2.$$

Il valore che rende minima s è, ancora una volta, dato da:

$$\bar{m} = \frac{-b}{2a},$$

che, in questo caso diventa:

$$\bar{m} = \frac{\sum_{k=1}^N (x_k - M_x)(y_k - M_y)}{\sum_{k=1}^N (x_k - M_x)^2}.$$

Alla fine di questo procedimento siamo in grado di indicare i calcoli da svolgere per determinare la retta r d'equazione

$$y = mx + p,$$

che risulta più vicina ad una nuvola di N punti sperimentali $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$, ..., $A_N(x_N, y_N)$:

1) si calcola la media M_x dei dati x e la media M_y dei dati y , cioè

$$M_x = \frac{\sum_{k=1}^N x_k}{N} \quad \text{e} \quad M_y = \frac{\sum_{k=1}^N y_k}{N}$$

2) si calcola la pendenza \bar{m} della retta, valendosi della formula

$$\bar{m} = \frac{\sum_{k=1}^N (x_k - M_x)(y_k - M_y)}{\sum_{k=1}^N (x_k - M_x)^2}.$$

3) si calcola infine il termine noto \bar{p} , valendosi della relazione

$$\bar{p} = M_y - \bar{m} M_x.$$

La retta così ottenuta prende il nome di **retta di regressione** e permette di determinare i valori di una delle grandezze, a partire dai corrispondenti valori dell'altra.

4. Dalla retta di regressione ad alcune leggi sperimentali

In questo paragrafo vedremo la retta di regressione all'opera nello studio di vari fenomeni reali; scopriremo così che il campo di applicazione di questo strumento statistico è molto più ampio del previsto.

A) La retta di regressione e la legge lineare

Nello studio dei circuiti elettrici è importante conoscere le caratteristiche dei generatori di corrente; le due caratteristiche principali di una pila, che è un semplice generatore di corrente continua, sono le seguenti:

- la forza elettromotrice, che è la tensione massima che la pila può erogare;
- la resistenza interna che la pila offre al passaggio della corrente.

Vediamo ora come si possono determinare queste caratteristiche di una pila. Si realizza un circuito come quello mostrato nelle figg. 18 e 19.

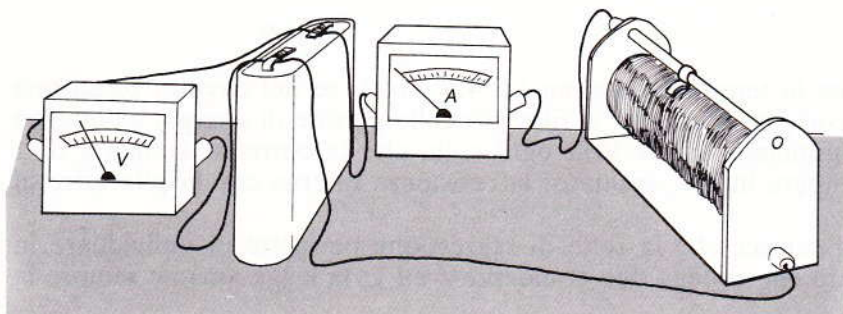


Fig. 18

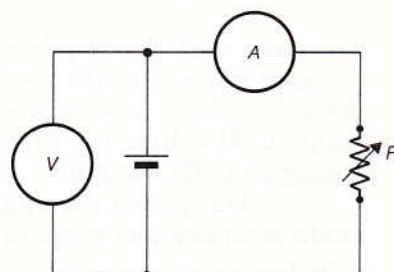


Fig. 19

Il voltmetro V misura la tensione y erogata dalla pila, mentre l'amperometro A indica l'intensità x della corrente, che attraversa il circuito al variare della resistenza R inserita. Durante un esperimento si sono ottenute le misure indicate nella tabella seguente:

x (in Ampère)	y (in Volt)
0	4,8
0,2	4,5
0,4	4,2
0,6	4
0,8	3,7
1	3,4

I dati sono rappresentati nella fig. 20: si ottiene una nuvola di punti che sembra "addensarsi" intorno ad una retta r , non passante per O .

Il procedimento esposto alla fine del paragrafo precedente permette di determinare rapidamente la retta r di regressione, che ha equazione

$$y = mx + p.$$

Si procede così.

1) Si calcola la media M_x dei dati x e la media M_y dei dati y ; si ottiene:

$$M_x = \frac{\sum_{k=1}^6 x_k}{6} = 0,5 \quad \text{e} \quad M_y = \frac{\sum_{k=1}^6 y_k}{6} = 4,1$$

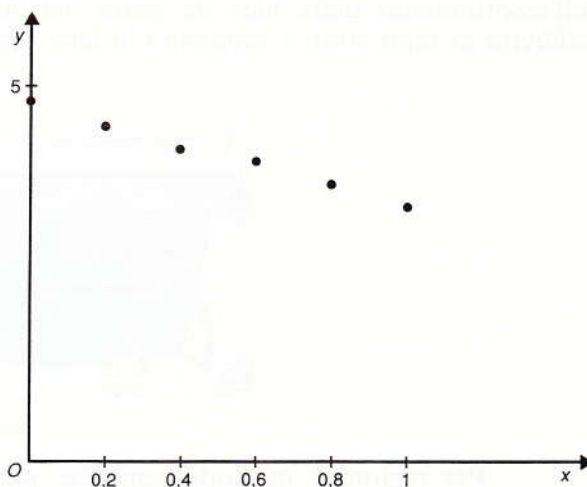


Fig. 20

2) La pendenza \bar{m} della retta è allora data da:

$$\bar{m} = \frac{\sum_{k=1}^6 (x_k - M_x)(y_k - M_y)}{\sum_{k=1}^6 (x_k - M_x)^2} = -1,4.$$

3) Il termine noto \bar{p} è dato da

$$\bar{p} = M_y - \bar{m}M_x = 4,8$$

La retta di regressione, che "raccorda" i punti sperimentali, basandosi sul metodo dei minimi quadrati (fig. 21), ha dunque l'equazione seguente:

$$y = -1,4x + 4,8.$$

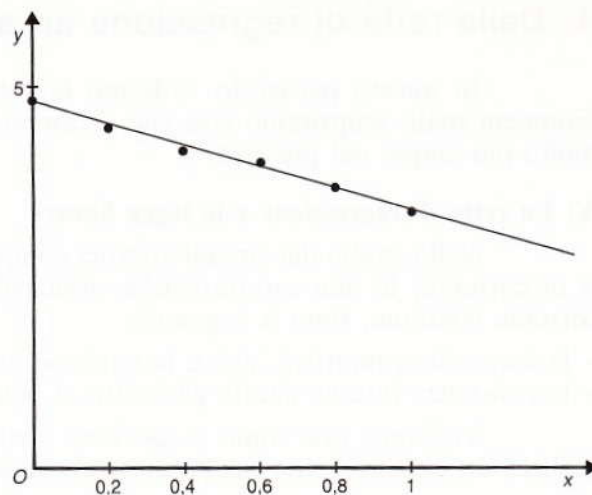


Fig. 21

Troviamo così che la pila eroga la tensione massima (di 4,8 Volt), se nel circuito passa una corrente nulla; quando poi la corrente aumenta, si rilevano delle perdite di energia all'interno del generatore: la tensione diminuisce di 1,4 Volt ogni volta che la corrente aumenta di 1 Ampère. Il valore 1,4 Volt/Ampère indica, appunto, la resistenza interna che la pila offre al passaggio della corrente.

Da questo esempio si capisce che la retta di regressione permette di individuare in modo semplice una legge lineare che collega due grandezze x ed y ; la legge assume sempre la forma

$$y = mx + p.$$

B) La legge esponenziale e la scala semilogaritmica.

Si legge spesso che conviene captare la luce del Sole fuori dell'atmosfera e questo perché anche dei mezzi trasparenti come l'aria o l'acqua assorbono la luce. Del resto è noto che, a grandi profondità marine, ci si trova quasi al buio. È facile avere un'idea intuitiva dell'assorbimento della luce da parte dell'acqua: immaginiamo (fig. 22) l'acqua del mare suddivisa in tanti strati e seguiamo la luce che attraversa i vari strati d'acqua.

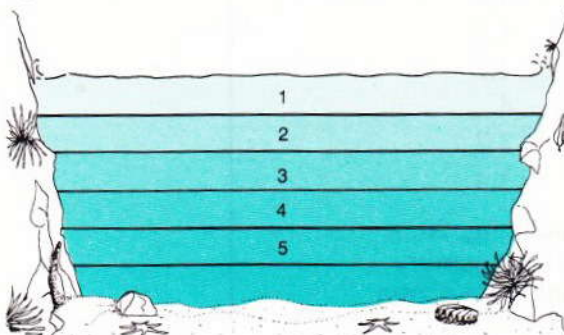


Fig. 22

Per ragionare in modo semplice, possiamo pensare che ogni strato assorba la metà dell'intensità della luce che gli arriva. Così si capisce che, dopo aver attraversato il 1° strato, l'intensità luminosa è dimezzata, dopo il 2° strato è diventata la metà della metà...; si intuisce che l'intensità della luce diminuisce con una legge esponenziale.

Per verificare e precisare quest'intuizione, si può organizzare l'esperimento mostrato in fig. 23. Si espone al Sole una vaschetta piena d'acqua; nella vaschetta è inserita una riga graduata lungo la quale può scorrere uno specchietto. In questo modo, la luce del Sole, dopo aver attraversato l'acqua, colpisce lo specchio e torna indietro. Un esposimetro, tenuto fuori dell'acqua nel punto in cui "riemerge" il raggio di luce, permette di misurare l'intensità della luce, dopo che ha attraversato l'acqua.

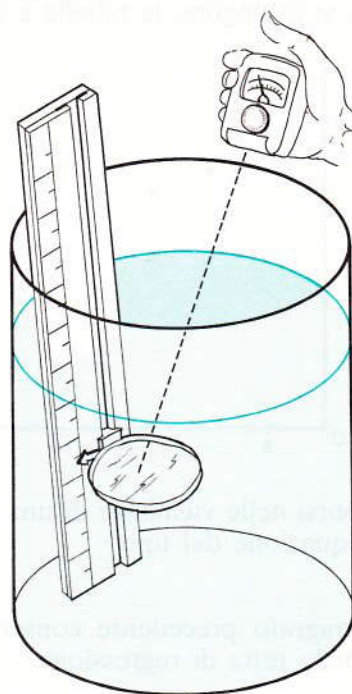


Fig. 23

Nella tabella seguente si trovano i dati che abbiamo ottenuto in un esperimento di questo tipo: abbiamo indicato con L l'intensità della luce espressa nelle unità dell'esposimetro usato e con x la misura in decimetri dello "spessore d'acqua attraversato dalla luce nel viaggio di andata e ritorno".

x	L
0	45
5	36
10	30
15	23
20	20
25	15
30	12
35	11
40	9

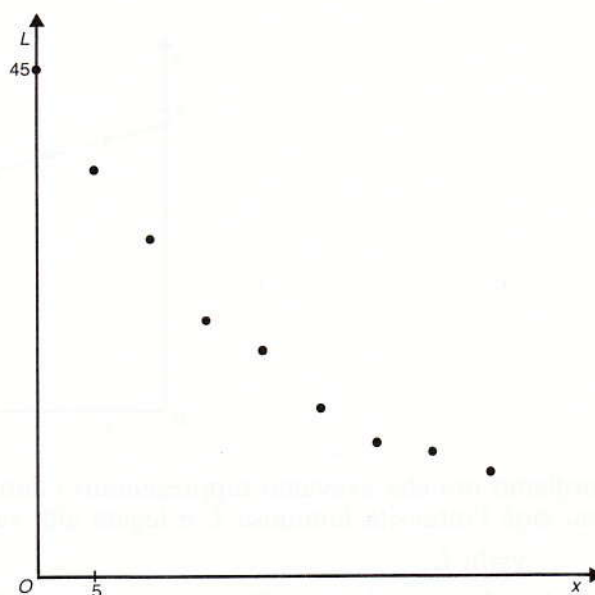


Fig. 24

Rappresentando i dati su un grafico cartesiano (fig. 24), si "intravede" una curva decrescente.

Ora, per verificare se si tratta effettivamente di una curva esponenziale, basta rappresentare i dati con una scala semilogaritmica, riportando sull'asse delle ascisse la profondità x e sull'asse delle ordinate la grandezza

$$y = \ln L.$$

Sappiamo infatti (cap. 3, Parte terza, paragrafo 6) che se i dati così rappresentati si dispongono lungo una retta, le due grandezze x ed L sono legate da una legge esponenziale.

Con i dati a disposizione, si ottengono la tabella e il grafico di fig. 25.

x	$y = \ln L$
0	3,81
5	3,58
10	3,40
15	3,14
20	2,99
25	2,71
30	2,48
35	2,40
40	2,20

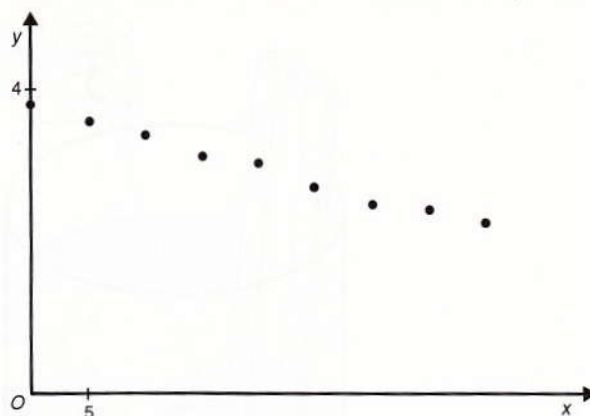


Fig. 25

Questa volta i punti sembrano disporsi nelle vicinanze di una retta che, certamente, non passa per l'origine O ed ha dunque un'equazione del tipo

$$y = mx + p.$$

I risultati esposti alla fine del paragrafo precedente consentono, anche in questo caso, di scrivere rapidamente l'equazione della retta di regressione.

Si ottiene:

- 1) $M_x = 20$ e $M_y = 2,98$,
- 2) $\bar{m} = -0,041$
- 3) $\bar{p} = 3,8$

In definitiva, l'equazione della retta r che più si avvicina ai punti (fig. 26) è

$$y = -0,041x + 3,8.$$

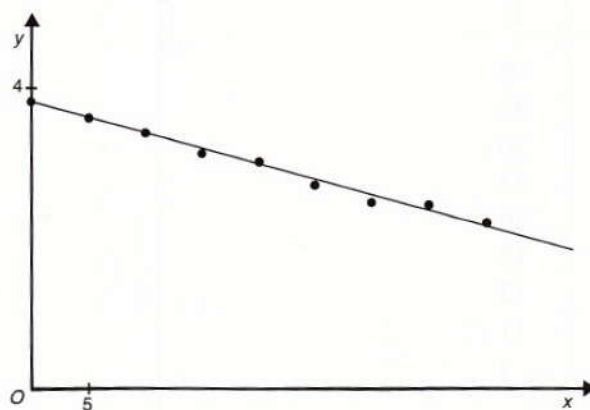


Fig. 26

Ricordiamo ora che avevamo rappresentato i dati in fig. 25, valendoci di una scala semilogaritmica, cioè l'intensità luminosa L è legata alla variabile y dalla relazione

$$y = \ln L.$$

Perciò la relazione che lega l'intensità luminosa L alla profondità x dell'acqua è la seguente:

$$\ln L = -0,041x + 3,8,$$

da cui si ottiene

$$L = e(-0,041x + 3,8),$$

ossia

$$L = e^{3,8} e^{-0,041x}$$

da cui si ricava:

$$L = 45e^{-0,041x}.$$

(1)

Si conclude così che l'assorbimento della luce da parte dell'acqua può essere descritto, con buona approssimazione, come un fenomeno di decrescita continua regolato da una legge esponenziale in base e (fig. 27).

Si può ancora osservare che risulta

$$e^{-0,041x} = (e^{-0,041})^x = 0,96^x,$$

così la legge (1) si esprime nella forma seguente:

$$L = 45 \cdot 0,96^x$$

$$L = 45(1 - 0,04)^x.$$

In questo modo si evidenziano meglio due caratteristiche della legge trovata:

- 1) 45 indica l'intensità della luce "fuori dall'acqua", dato che si ottiene
 $L = 45$ per $x = 0$;
- 2) $0,04 = 4\%$ indica il tasso di diminuzione dell'intensità della luce per ogni decimetro d'acqua attraversato (vedi anche cap. 3, Parte seconda, paragrafo 5).

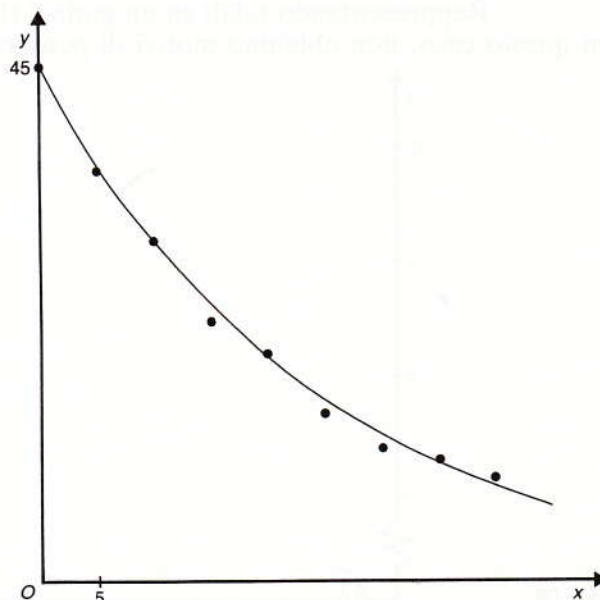


Fig. 27

L'esempio ora sviluppato conduce anche ad una conclusione di carattere più generale: la retta di regressione permette di individuare una legge esponenziale che collega due grandezze x ed y rappresentate in una scala semilogaritmica. Con questo tipo di scala si indicano infatti sull'asse delle ascisse le misure relative alla x , mentre sull'asse delle ordinate si rappresenta il logaritmo (per esempio in base e) dei dati relativi alla y . Così la retta di regressione conduce a legare le grandezze x ed y con un'equazione del tipo

$$\ln y = mx + p.$$

Da questa relazione si ricava

$$y = e^{(mx+p)} = e^p \cdot e^{mx};$$

indicando poi

$$A = e^p,$$

si arriva a trovare una legge esponenziale del tipo

$$y = Ae^{mx}.$$

C) Leggi del tipo $y = Ax^m$ e scala logaritmica

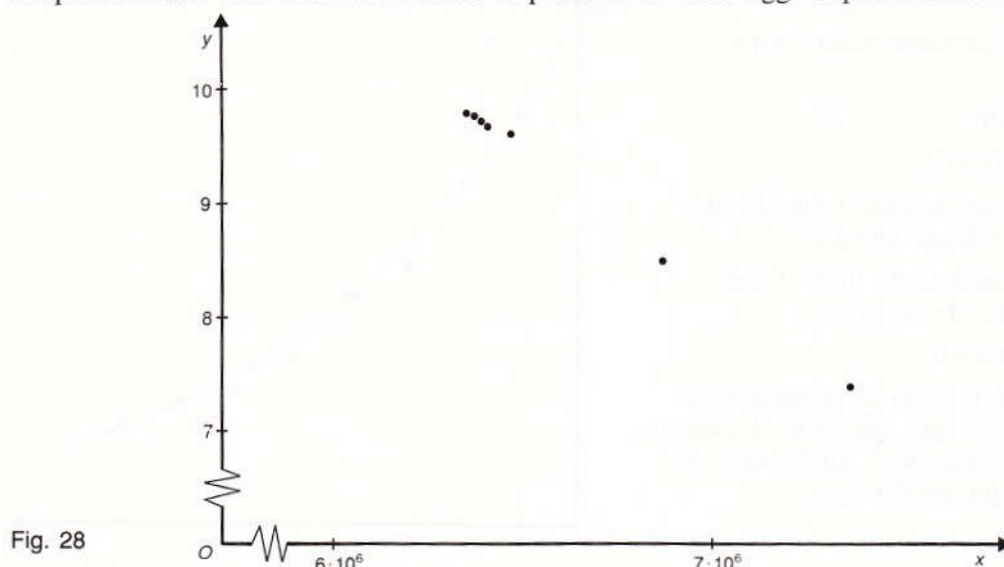
Esaminiamo infine un altro modo di rappresentare i dati, per cercare leggi sperimentali: la *scala logaritmica*, in cui viene rappresentato sia sull'asse delle ascisse che sull'asse delle ordinate il logaritmo (in base 10 o in base e) delle misure.

Vediamo subito come si procede, considerando ancora una volta un problema di fisica: si è misurata l'accelerazione di gravità g alla stessa latitudine, ma a quote differenti e si è rilevata una diminuzione di g all'aumentare della distanza R dal centro della Terra. Ecco i dati ottenuti:

R (in metri)	g (in m/sec ²)
$6,370 \cdot 10^6$	9,806
$6,378 \cdot 10^6$	9,782
$6,386 \cdot 10^6$	9,757
$6,402 \cdot 10^6$	9,71
$6,470 \cdot 10^6$	9,60
$6,870 \cdot 10^6$	8,53
$7,370 \cdot 10^6$	7,41

Il primo valore di R è quello del raggio della Terra e, dunque, la corrispondente accelerazione di gravità è misurata sulla superficie della Terra; l'ultimo dato, invece, si riferisce ad un'altezza di 10^6 metri, cioè di 1000 chilometri, raggiunta molto spesso dai satelliti artificiali.

Rappresentando i dati su un grafico (fig. 28) si "intravede" una curva decrescente ma, in questo caso, non abbiamo motivi di pensare ad una legge esponenziale.

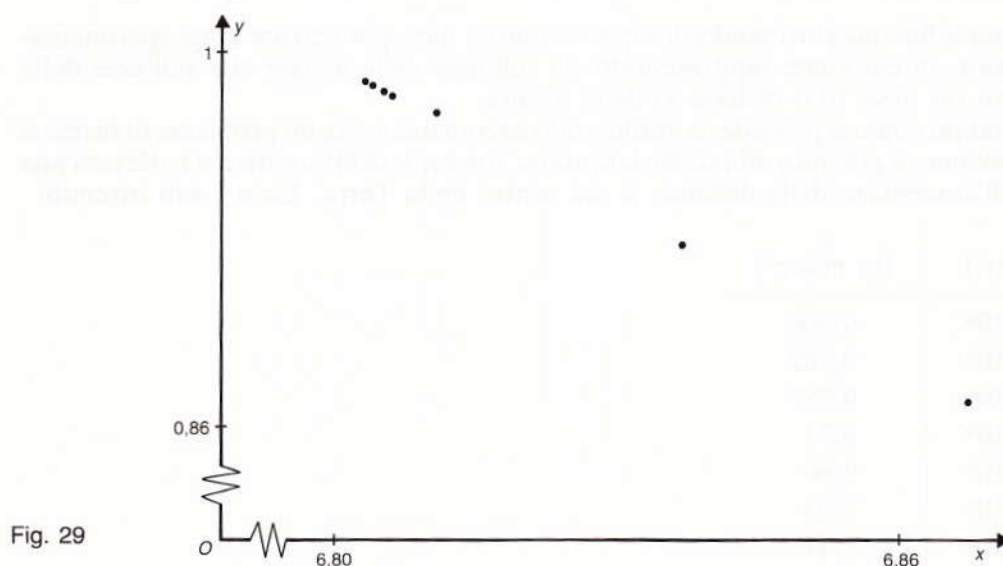


Proviamo allora a calcolare il logaritmo dei dati, osservando che la presenza ripetuta di potenze di 10 suggerisce di valersi dei logaritmi decimali. Si ottiene:

$x = \log R$	$y = \log g$
6,841	0,992
6,8047	0,990
6,8052	0,989
6,8063	0,987
6,811	0,98
6,837	0,93
6,867	0,87

Rappresentiamo i nuovi dati su un piano cartesiano (fig. 29): i punti sembrano addensarsi intorno ad una retta che non passa per O e che ha, dunque, un'equazione del tipo

$$y = mx + p;$$



possiamo ora determinare la pendenza m e il termine noto p , valendoci ancora una volta dei risultati esposti alla fine del paragrafo precedente.

Si procede così:

- 1) Si calcolano le medie dei dati; si ottiene:

$$M_x=6,819 \quad \text{e} \quad M_y=0,963.$$

- 2) Si determina la pendenza m , che vale

$$\bar{m} \cong -2;$$

- 3) Si determina il termine noto p , che è

$$\bar{p}=14.$$

Si ha dunque, per la retta di regressione, la seguente equazione:

$$y=-2x+14.$$

Ricordando poi che risulta

$$y=\log R \quad \text{e} \quad x=\log g,$$

si trova una prima relazione che collega le due variabili R e g ; si ha:

$$\log g=-2 \log R+14,$$

ossia

$$\log g+2 \log R=14.$$

Valendosi ora delle proprietà dei logaritmi esposte nel cap. 3, Parte 1, paragrafo 8, si scrive

$$\log (g \cdot R^2)=14,$$

da cui

$$g \cdot R^2=10^{14}$$

e, infine

$$g=\frac{10^{14}}{R^2}.$$

Si ottiene dunque che l'accelerazione di gravità è legata alla distanza dal centro della Terra dalla "legge dell'inverso del quadrato", una delle leggi fisiche più importanti, che ricorre sia nello studio della gravitazione che in quello dell'elettromagnetismo.

Anche da questo esempio possiamo trarre delle conclusioni più generali. Per esaminare più misure di due grandezze x ed y ci si può valere della scala logaritmica, considerando i logaritmi (per esempio in base 10) delle misure. In tal caso la retta di regressione conduce a collegare le grandezze x ed y con un'equazione del tipo

$$\log y=m \log x+p,$$

ossia,

$$p=\log y-m \log x.$$

Valendosi poi delle proprietà dei logaritmi (Cap. 3, Parte 1, paragrafo 8), si ottiene:

$$p=\log y-\log x^m,$$

o, anche

$$p=\log \left(\frac{y}{x^m} \right),$$

da cui si ricava:

$$10^p=\frac{y}{x^m}.$$

Ponendo ora

$$A=10^p,$$

si arriva a collegare le due grandezze x ed y con una legge del tipo

$$y = Ax^m.$$

Confrontando i procedimenti svolti in questi ultimi due casi B e C , si traggono alcune conclusioni di carattere generale:

- la scala semilogaritmica è particolarmente indicata per esaminare fenomeni in cui si intuisce una legge esponenziale;
- conviene valersi della scala logaritmica per cercare leggi sperimentali in cui una variabile sia collegata ad una potenza dell'altra.