4
Esercizi

La media aritmetica

Gli esercizi dall'1 al 6 conducono a valersi della media aritmetica per trattare dati sperimentali.

Per svolgere gli esercizi è opportuno tenere presenti le considerazioni esposte nel paragrafo 1. È consigliabile valersi di un calcolatore tascabile per eseguire i calcoli richiesti.

1. Si è rilevata l'accelerazione di gravità al livello del mare a diverse latitudini, ottenendo i seguenti valori:

9,78039 - 9,78195 - 9,78641 - 9,79329 - 9,80171 - 9,81071 - 9,81918 - 9,82608 - 9,83059 - 9,83217.

Qual è il valore più attendibile dell'accelerazione di gravità al livello del mare?

2. Ogni alunno di una classe ha misurato, con una riga graduata in millimetri, la distanza d fra il bordo della porta dell'aula e la parete più vicina; si sono ottenuti i seguenti valori della distanza d (in millimetri):

216 - 217 - 220 - 212 - 218 - 220 - 214 - 217 - 218 - 221 -
217 - 219 - 218 - 223 - 218 - 219 - 216 - 223 - 219 - 215.

Qual è il valore più attendibile della distanza d?

3. Si vuole determinare l'indice di rifrazione n, relativo al passaggio della luce dall'aria al vetro. Per questo si organizza un esperimento come quello descritto in fig. 1; si misura il valore n del rapporto delle semicorde AC e FD, in corrispondenza a diversi valori dell'angolo di incidenza e di rifrazione.
Si ottengono i seguenti valori di n:

1,50 - 1,49 - 1,49 - 1,51 - 1,50 - 1,51 - 1,50 - 1,51.

Qual è il valore più attendibile dell'indice di rifrazione n?

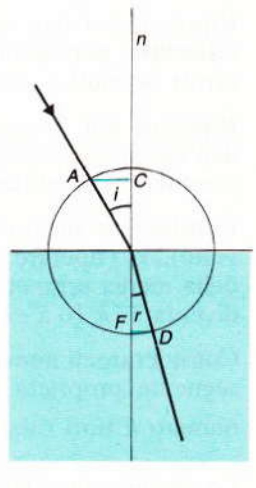

Fig. 1

4. Si vuole determinare il periodo di un pendolo; per questo si misura in secondi il tempo impiegato a compiere 50 oscillazioni complete. Questa misura viene ripetuta 10 volte e si ottengono i seguenti valori:

51,2 - 51,3 - 51,1 - 50,8 - 52,0 - 51,4 - 51,3 - 51,6 - 50,9 - 51,5.

Qual è il valore più attendibile del tempo impiegato dal pendolo a compiere 50 oscillazioni?
Qual è la misura più attendibile del periodo del pendolo?

5. Un albero motore, soggetto a sforzi che variano periodicamente nel tempo, può rompersi, anche se gli sforzi sono inferiori al carico di rottura; questo fenomeno è detto "rottura per fatica" e viene studiato sperimentalmente.
Ecco come si procede: da una partita di alberi motore ne vengono scelti 20 a caso; ogni albero

viene sottoposto a sforzi periodici, torcendolo prima in un verso e poi nell'altro, fino a che si rompe.
In un esperimento di questo tipo si è rilevato, per ogni albero motore, il numero N di cicli che porta alla rottura, ottenendo i dati seguenti:

1.263.821 - 1.127.711 - 1.222.403 - 1.197.189 - 1.271.997
1.249.576 - 1.229.112 - 1.137.892 - 1.151.020 - 1.299.181
1.300.019 - 1.131.011 - 1.265.011 - 1.290.008 - 1.191.189
1.169.556 - 1.189.910 - 1.270.029 - 1.240.014 - 1.217.916.

Qual è il valore più attendibile del numero N di cicli, dopo il quale può avvenire la rottura per fatica?

6. Una fabbrica produce alternatori che debbono avere una resistenza di 3,75 ohm. Per verificare questo "valore di targa", viene misurata la resistenza di 10 macchine in due condizioni: a freddo e a caldo (cioè dopo che l'alternatore ha funzionato per otto ore). La resistenza a caldo viene però misurata solo su sette macchine. Ecco i risultati delle misure:

Resistenza a freddo
3,78 - 3,72 - 3,75 - 3,79 - 3,71 - 3,75 - 3,74 - 3,77 - 3,76 - 3,73.

Resistenza a caldo
3,83 - 3,80 - 3,79 - 3,86 - 3,78 - 3,79 - 3,80.

Indicare:
- il valore M più attendibile per la resistenza a freddo,
- il valore N più attendibile per la resistenza a caldo,
- il valore P più attendibile della resistenza, ottenuto considerando tutte le misure,
- la media aritmetica Q fra M ed N.

Confrontare i valori P e Q ottenuti. Come si potrebbe ottenere P, a partire da M ed N?

Gli esercizi dal 7 al 12 conducono a scoprire proprietà che valgono (o non valgono) per la media aritmetica.

7. Riprendere i dati esposti nell'esercizio 3 ed indicare con $\bar{x}$ la media aritmetica già calcolata. Calcolare, per ogni dato, l'errore e che si commette sostituendo la media al dato. Addizionare gli errori ottenuti e verificare che la somma vale 0.

8. Ripetere più in generale l'esercizio precedente: indicare con x_1, x_2, x_3 i tre dati numerici dell'esercizio 3 e con $\bar{x}$ la loro media aritmetica; verificare che vale 0 la somma degli errori che si commettono sostituendo ad ogni dato la media.

9. Considerare ancora i dati dell'esercizio precedente e cioè x_1 (ripetuto tre volte), x_2 (ripetuto due volte), x_3 (ripetuto tre volte), ed indicare con $\bar{x}$ la loro media. Verificare la seguente proprietà della media aritmetica: se si aggiunge (o si sottrae) uno stesso numero k a tutti i dati, la media diventa $\bar{x}+k$ (o $\bar{x}-k$).

10. Considerare di nuovo i dati dell'esercizio precedente ed indicare con $\bar{x}$ la loro media. Verificare la seguente proprietà della media aritmetica: se si moltiplicano (o si dividono) per uno stesso numero k tutti i dati, la media diventa $k\bar{x}$ $\left(\text{o } \frac{\bar{x}}{k}\right)$.

11. Lo svolgimento dell'esercizio 6 mostra una proprietà che **non vale** per la media aritmetica: si calcola la media M di 10 dati, la media N di 8 dati e la media P di tutti i 18 dati. Dimostrare che la media P di tutti i dati **non si può ottenere** calcolando $\frac{M+N}{2}$.

Verificare che, invece, è esatta la formula seguente:

$$P=\frac{10M+8N}{10+8}.$$

12. Dimostrare che è esatto il seguente procedimento generale: se n_1 dati hanno una media x_1 e n_2 dati hanno una media $\bar{x}_2$, la media $\bar{x}$ di tutti i dati è

$$\bar{x}=\frac{n_1\bar{x}_1+n_2\bar{x}_2}{n_1+n_2}.$$

Retta di regressione per l'origine

Gli esercizi dal 13 al 18 conducono a trattare dati sperimentali valendosi della retta di regressione che passa per l'origine.

Per svolgere gli esercizi tenere presenti le considerazioni svolte nel paragrafo 2. È consigliabile valersi di un calcolatore tascabile per eseguire i calcoli richiesti.

13. In un laboratorio di fisica si è organizzato un esperimento per studiare le deformazioni di una molla: si appendono ad una molla diversi pesi e si misurano i corrispondenti allungamenti della molla. Si tiene presente che, se la molla è in equilibrio, la tensione F della molla è uguale ed opposta al peso ad essa sospeso. Ecco i dati rilevati in un esperimento di questo tipo (la tensione F è misurata in kg e gli allungamenti x in millimetri):

tensione F	0	−1	−2	−3	−4	−5	−6
allungamento x	9	15	29	45	62	85	104

Rappresentare i dati su un piano cartesiano e calcolare, con il metodo dei minimi quadrati, la retta di regressione.
In base alla retta trovata, scrivere la legge che lega la tensione F all'allungamento x della molla: si otterrà **la legge di Hooke**.
Di quanto aumenta la lunghezza, quando il peso aumenta di 1 kg?
Quale allungamento si prevede in corrispondenza ad un peso di 8 kg?

14. In un laboratorio di fisica si è organizzato un esperimento per studiare la dilatazione termica di una sbarretta di metallo: si porta la sbarretta ad una temperatura di 0° e se ne misura la lunghezza; quindi si aumenta gradualmente la temperatura x a cui si trova la sbarretta e si misurano i corrispondenti allungamenti y. Ecco i dati rilevati in un esperimento di questo tipo (gli allungamenti sono misurati in decimi di millimetro e le temperature in gradi centigradi):

temperatura x	0	20	40	60	80	100
allungamenti y	0	2,4	4,9	7,1	9,7	11,9

Rappresentare i dati su un piano cartesiano e calcolare, con il metodo dei minimi quadrati, la retta di regressione.
In base alla retta trovata, scrivere la legge che lega l'allungamento y alla temperatura x: si otterrà **la legge della dilatazione termica lineare**.
Di quanto aumenta la lunghezza, quando la temperatura aumenta di 10°?
Quale allungamento si prevede in corrispondenza ad una temperatura di 130°?

15. In un laboratorio di fisica si è organizzato un esperimento classico per studiare la resistenza di un conduttore: si è montato un circuito come quello di fig. 2, si è applicata ai capi del conduttore una tensione V variabile e si è misurata l'intensità I della corrente che attraversa il conduttore. I dati ottenuti sono i seguenti (V è misurata in volt e I in ampère):

tensione V	8,0	12,0	16,7	19,8	22,3
corrente I	0,20	0,29	0,41	0,50	0,56

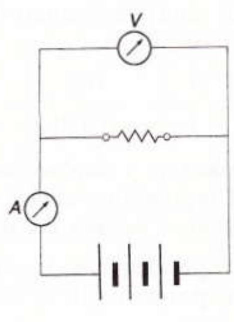

Fig. 2

Rappresentare i dati su un piano cartesiano e calcolare, con il metodo dei minimi quadrati, la retta di regressione.
In base alla retta trovata, scrivere la legge che lega la tensione V alla intensità I della corrente: si otterrà **la legge di Ohm**. Quale significato ha il coefficiente angolare della retta di regressione?
Di quanto aumenta la corrente, quando la tensione aumenta di 1 Volt?
Quale corrente si prevede in corrispondenza ad una tensione di 50 Volt?

16. Per studiare la capacità di un condensatore si è organizzato un esperimento, applicando alle armature del condensatore una tensione variabile V e rilevando la quantità di carica q, che si deposita sulle armature. I dati ottenuti sono i seguenti (V è misurata in volt e q in coulomb):

tensione V	50	80	100	150
carica q	$9{,}5\ 10^{-9}$	$15{,}5\ 10^{-9}$	$21\ 10^{-9}$	$28\ 10^{-9}$

Rappresentare i dati su un piano cartesiano e calcolare, con il metodo dei minimi quadrati, la retta di regressione.
In base alla retta trovata, scrivere la legge che lega la tensione V alla quantità di carica q.
Quale significato ha il coefficiente angolare della retta di regressione?
Di quanto aumenta la carica, quando la tensione aumenta di 100 Volt?
Quale carica si prevede in corrispondenza ad una tensione di 220 Volt?

17. Durante uno studio sulla temperatura all'interno della Terra, si è misurata la temperatura a diverse profondità all'interno di un pozzo artesiano. Si è scelto un punto che si trova circa 28 metri sotto terra come origine sia per le profondità che per le temperature, ottenendo i dati seguenti:

profondità h	0	40	150	220	270
temperatura T	0	1,2	4,7	9,3	10,5

Rappresentare i dati su un piano cartesiano e calcolare, con il metodo dei minimi quadrati, la retta di regressione.
Di quanto aumenta la temperatura ogni 100 metri?
Quale temperatura si prevede ad una profondità di 500 metri?

18. Uno studio storico della seconda guerra mondiale ha cercato di ricostruire l'effettivo numero di sottomarini affondati ogni mese dalla marina americana. Per questo si è esaminato il numero y di sottomarini effettivamente affondati ed il numero x di affondamenti comunicati durante gli ultimi 16 mesi di guerra. I dati considerati sono i seguenti:

y	3	2	6	3	4	3	11	9	10	16	13	5	6	19	15	15
x	3	2	4	2	5	5	9	12	8	13	14	3	4	13	10	16

Rappresentare i dati su un piano cartesiano e calcolare, con il metodo dei minimi quadrati, la retta di regressione, ipotizzando una retta di regressione che passa per l'origine.
Quale numero effettivo di sottomarini affondati si può considerare corrispondente a 20 affondamenti comunicati?

Spesso i ricercatori studiano un fenomeno esaminando delle grandezze che variano in un ristretto intervallo. In tal caso la relazione fra le variabili può essere con buona approssimazione lineare, anche se in un intervallo più ampio la relazione è molto lontana dall'essere lineare. È per questo che la retta di regressione è tanto importante nelle scienze sperimentali.
Gli esercizi dal 19 al 21 offrono alcuni esempi di situazioni di questo tipo.

19. La tabella seguente fornisce le coordinate di punti della parabola d'equazione $y=-\frac{1}{2}x^2+2x$; si tratta di punti che hanno l'ascissa x variabile in un intervallo piuttosto ristretto, dato che risulta $-0{,}2 \leq x \leq 0{,}2$.

x	$-0{,}2$	$-0{,}1$	0	0,1	0,2
y	$-0{,}420$	$-0{,}205$	0	0,195	0,380

Rappresentare i dati su un piano cartesiano e calcolare, con il metodo dei minimi quadrati, la retta di regressione che li raccorda.
Considerare l'ascissa $x_1=0{,}05$ e calcolare i seguenti valori:

y_r, corrispondente di x_1 sulla retta di regressione,
y_c, corrispondente di x_1 sulla curva.

Calcolare la differenza y_r-y_c.

20. La tabella seguente fornisce le coordinate di punti della circonferenza d'equazione $x^2+y^2+14x-14y=0$; si tratta di punti di ordinata positiva che hanno l'ascissa x variabile in un intervallo piuttosto ristretto, dato che risulta $-0{,}4 \leq x \leq 0{,}4$.

x	$-0{,}4$	$-0{,}2$	0	0,2	0,4
y	14,378	14,194	0	13,794	13,576

Rappresentare i dati su un piano cartesiano e calcolare, con il metodo dei minimi quadrati, la retta di regressione che li raccorda.
Considerare l'ascissa $x_1=0{,}1$ e calcolare i seguenti valori:

y_r, corrispondente di x_1 sulla retta di regressione,
y_c, corrispondente di x_1 sulla curva.

Calcolare la differenza y_r-y_c.

21. La tabella seguente fornisce le coordinate di punti della curva d'equazione $y=\ln(x+1)$; si tratta di punti che hanno l'ascissa x variabile in un intervallo piuttosto ristretto, dato che risulta $-0{,}2\leq x\leq 0{,}2$.

x	$-0{,}2$	$-0{,}1$	0	0,1	0,2
y	$-0{,}223$	$-0{,}105$	0	0,095	0,182

Rappresentare i dati su un piano cartesiano e calcolare, con il metodo dei minimi quadrati, la retta di regressione che li raccorda.
Considerare l'ascissa $x_1=0{,}05$ e calcolare i seguenti valori:

y_r, corrispondente di x_1 sulla retta di regressione,
y_c, corrispondente di x_1 sulla curva.

Calcolare la differenza y_r-y_c.

Gli esercizi dal 22 al 27 conducono a riflettere in modo più approfondito sulla retta di regressione per l'origine.

22. Rappresentare sul piano cartesiano i seguenti punti $A(2{,}4)$, $B(3{,}6)$, $C(5{,}10)$; calcolare con il metodo dei minimi quadrati la retta di regressione che li raccorda.

23. Dimostrare che ha pendenza k la retta di regressione per l'origine calcolata a partire dai punti seguenti: $A(x_1,\ kx_1)$, $B(x_2,\ kx_2)$, $C(x_3,\ kx_3)$.

24. Rappresentare sul piano cartesiano i tre punti seguenti (5,2), (5,4), (5,6); calcolare con il metodo dei minimi quadrati la retta di regressione che li raccorda.

25. Indicare una regola generale per calcolare la retta di regressione per l'origine, a partire dai punti seguenti: $A(x_1,\ y_1)$, $B(x_1,\ y_2)$, $C(x_1,\ y_3)$.

26. Rappresentare sul piano cartesiano i tre punti seguenti (1,4), (5,4), (8,4); calcolare con il metodo dei minimi quadrati la retta di regressione che li raccorda.

27. Indicare una regola generale per calcolare la retta di regressione per l'origine, a partire dai punti seguenti: $A(x_1,\ y_1)$, $B(x_2,\ y_1)$, $C(x_3,\ y_1)$.

Retta di regressione

Gli esercizi dal 28 al 34 conducono a trattare dati sperimentali valendosi della retta di regressione che passa per l'origine.

Per svolgere gli esercizi è opportuno tenere presenti le considerazioni svolte nel paragrafo 3. È consigliabile valersi di un calcolatore tascabile per eseguire i calcoli richiesti.

28. Una pallina viene lanciata verso il basso in un tubo da vuoto. Misurando la velocità v della pallina al passare del tempo t, si ottengono i dati seguenti (il tempo è misurato in secondi e la velocità in metri al secondo):

tempo t	0	0,05	0,1	0,15	0,2	0,25
velocità v	1,9	2,25	2,80	3,35	3,85	4,20

Rappresentare i dati su un piano cartesiano e calcolare, con il metodo dei minimi quadrati, la retta di regressione.
In base alla retta trovata, scrivere la legge che lega la velocità v al tempo t.
Quale significato ha il coefficiente angolare m della retta di regressione?
Quale significato ha il termine noto p della retta di regressione?
Di quanto aumenta la velocità ogni secondo?
Quale velocità si prevede dopo mezzo secondo?

29. In un laboratorio si è organizzato il seguente esperimento per studiare la dilatazione termica dei gas: il gas da studiare riempie una provetta che contiene un pistone a tenuta perfetta, ma con attrito trascurabile; la provetta è immersa in una bacinella piena d'acqua.
L'acqua viene riscaldata a varie temperature comprese fra quella ambiente e 100°; così, quando la temperatura aumenta, il gas si espande, mantenendo costante la sua pressione.
Si misura la temperatura T in gradi centigradi con un termometro immerso nell'acqua; si misura in cm^3 il corrispondente volume V occupato dal gas per mezzo di una scala graduata collegata con la provetta.
Durante un esperimento di questo tipo il gas racchiuso nella provetta era l'aria e si sono ottenuti i seguenti dati:

temperatura T	25,1	27,4	32,7	37,9	42,9	48,1	53,3	57,6	62,3	67,1	72,5
volume V	64,2	65,0	65,4	66,6	67,4	69,0	69,8	70,7	71,4	73,0	74,2

Rappresentare i dati su un piano cartesiano e calcolare, con il metodo dei minimi quadrati, la retta di regressione.
In base alla retta trovata, scrivere la legge che lega il volume V alla temperatura T.
Quale significato ha il termine noto p della retta di regressione?
Di quanto aumenta il volume, quando la temperatura aumenta di 1°?
Quale volume si prevede ad una temperatura di 150°?

30. Si ripete l'esperimento descritto nell'esercizio precedente, racchiudendo nella provetta prima anidride carbonica e poi propano. Così si ottengono i dati seguenti:

Anidride carbonica

temperatura T	25,1	30,3	35,0	40,1	45,0	50,1	54,8	59,9	64,5
volume V	64,2	65,4	66,2	67,0	68,2	69,4	70,2	71,4	72,4

Propano

temperatura T	25,1	30,1	35,3	40,2	45,1	50,0	54,9	60,2	65,0	70,0
volume V	64,2	64,6	65,8	67,0	68,2	69,0	70,2	71,4	72,6	73,4

Rappresentare ciascuna serie di dati su un piano cartesiano e calcolare, con il metodo dei minimi quadrati, la retta di regressione.
In base alla retta trovata, scrivere le leggi che legano il volume V alla temperatura T nei due casi. Che cosa si osserva?
Quale significato assume il punto d'intersezione della retta di regressione con l'asse delle ascisse?

31. Per studiare la caratteristica di un diodo si realizza il circuito di fig. 3.
L'amperometro A misura in milliampère l'intensità I della corrente; il voltmetro B misura in volt la tensione V.
I dati ottenuti sono riuniti nella tabella seguente:

I	0	0	0,5	1,5	6	11	20	30	50	70	120
V	0	0,4	0,5	0,6	0,65	0,7	0,73	0,76	0,78	0,80	0,85

Rappresentare graficamente i dati, riportando I sull'asse delle ascisse e V sull'asse delle ordinate.
Raccordare "a mano" i punti con una curva: si ottiene la caratteristica del diodo.
La parte di curva che più "somiglia" ad una retta è quella corrispondente ai valori di I che variano nell'intervallo $40 \leq I \leq 120$; calcolare la retta di regressione che meglio raccorda questi dati.
In base alla retta calcolata, quale tensione si prevede in corrispondenza ad una corrente $I=130$?

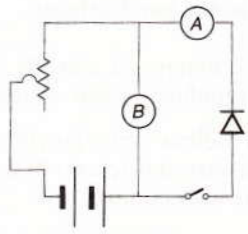

Fig. 3

32. La tabella seguente è un estratto delle registrazioni fornite dal calcolatore che ha seguito il lancio del missile Ariane, avvenuto il 21 dicembre 1981: è riportato il tempo t (misurato in secondi a partire dal lancio) e la corrispondente quota h a cui si trova il missile; h è misurata in metri.

tempo t	23	23,5	24	24,5	25	25,5	26	26,5	27	27,5	28	28,5	29	29,5	30
quota h	430	455	480	506	533	561	589	619	649	680	712	745	779	813	849

Rappresentare i dati su un piano cartesiano, scegliendo l'origine dei tempi in corrispondenza a $t=23$ secondi. Calcolare, con il metodo dei minimi quadrati, la retta di regressione.

In base alla retta trovata, scrivere la legge che lega la quota h al tempo t.
Quale significato ha il coefficiente angolare della retta di regressione?
Quale significato ha il coefficiente p della retta di regressione?
Di quanto aumenta la quota in un secondo?
Quale quota si prevede, dopo 40 secondi dal lancio?

33. Esaminiamo i dati, forniti dall'ISTAT, riguardo al numero di abbonamenti alla televisione, registrati a partire dal 1954 (anno in cui "arrivò" la televisione in Italia). Nella tabella seguente abbiamo scelto il 1954 come "anno zero" ed abbiamo indicato con NT il numero di abbonamenti alla televisione, espressi in migliaia.

tempo	0	5	10	15	20
NT	88	1573	5215	9016	11.816

Rappresentare i dati su un piano cartesiano, riportando il tempo sull'asse delle ascisse ed il numero NT sull'asse delle ordinate; calcolare, con il metodo dei minimi quadrati, la retta di regressione.
Quale significato ha il coefficiente p della retta di regressione?
Di quanto è aumentato il numero di abbonamenti alla televisione ogni anno?
Calcolare il numero di abbonamenti che si prevedono con la retta di regressione per l'anno 1975 (Tempo=21) e confrontare il risultato con il numero rilevato dall'Istat (NT=12 102 654).

34. Ripetere l'esercizio 33 a partire dai dati relativi al numero NR di abbonamenti alla sola radio, espressi sempre in migliaia; i dati sono esposti nella tabella seguente:

tempo	0	5	10	15	20
NR	5391	6014	4886	2197	825

Calcolare, anche in questo caso, il numero di abbonamenti, che si prevedono con la retta di regressione per l'anno 1975 (Tempo=21) e confrontare il risultato con il numero rilevato dall'Istat (NR=715).
Che significato ha il punto d'intersezione della retta di regressione con l'asse delle ascisse?

Gli esercizi dal 35 al 41 conducono a riflettere in modo più approfondito sulla retta di regressione.

35. Sono assegnati i tre punti seguenti $A(2,5)$, $B(3,6)$, $C(8,11)$.
Rappresentare i punti sul piano cartesiano e determinare l'equazione della retta di regressione, valendosi del metodo dei minimi quadrati.

36. Dimostrare che la retta di repressione calcolata a partire dai punti $A(x_1, x_1+k)$, $B(x_2, x_2+k)$, $C(x_3, x_3+\mathrm{k})$ ha pendenza $m=1$ e coefficiente $p=k$.

37. Rappresentare sul piano cartesiano i tre punti seguenti (1,4), (5,4), (8,4); calcolare con il metodo dei minimi quadrati la retta di regressione che li raccorda. Che cosa si osserva?

38. Indicare una regola generale per calcolare la retta di regressione per l'origine, a partire dai punti seguenti: $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_1)$, $C(x_3, y_1)$.

39. Rappresentare sul piano cartesiano i tre punti seguenti (5,2), (5,4), (5,6); provare a calcolare con il metodo dei minimi quadrati la retta di regressione che li raccorda. Che cosa succede?

40. Spiegare perché non si riesce a calcolare la retta di regressione col metodo dei minimi quadrati se i punti sperimentali hanno tutti la stessa ascissa.
Si riesce a prevedere qualche altra situazione, in cui non è possibile determinare la retta di regressione con il metodo dei minimi quadrati?

41. Dimostrare che se risulta $M_x=0$, la retta di regressione e la retta di regressione per l'origine hanno la stessa pendenza.

Leggi sperimentali scoperte con la scala semilogaritmica

Gli esercizi dal 42 al 47 conducono a ricercare leggi sperimentali, rappresentando i dati in scala semilogaritmica e valendosi della retta di regressione.

Per svolgere gli esercizi è opportuno tenere presenti sia le considerazioni svolte nel paragrafo 4, sia le nozioni sulla scala semilogaritmica esposte nel cap. 3, Parte seconda, paragrafo 6.

42. I seguenti dati approssimativi si riferiscono alla popolazione p rilevata nei censimenti ed espressa in milioni:

anno	1861	1871	1881	1901	1911	1921	1931	1936	1951	1961	1971	1981
p	22,18	27,30	28,95	32,96	35,84	38,45	41,65	42,99	47,52	50,62	54,14	56,24

Rappresentare i dati in scala semilogaritmica, riportando sull'asse delle ascisse il tempo x e sull'asse delle ordinate $y=\ln p$. A partire dai dati così elaborati, trovare la retta di regressione con i minimi quadrati. Infine scrivere la legge che lega p ad x.
Qual è il tasso di aumento annuo della popolazione?
Quale popolazione si prevede per il 2000 in Italia?

43. Si studia il decadimento radioattivo dell'uranio (U^{229}), misurando in grammi la massa M di un campione di questa sostanza al variare del tempo t, misurato in minuti. Si ottiene la tabella seguente:

t	0	10	20	30	40	50	60
M	5	4,44	3,93	3,49	3,10	2,76	2,44

Rappresentare i dati in scala semilogaritmica, riportando sull'asse delle ascisse il tempo x e sull'asse delle ordinate $y=\ln M$.
A partire dai dati così elaborati, trovare la retta di regressione con i minimi quadrati. Scrivere infine la legge che lega M ad x.
Qual è il tasso di diminuzione della massa ogni minuto?
Dopo quanto tempo la massa dimezza?

44. In un laboratorio si studia la crescita di cellule cancerogene, mantenute in una coltura sperimentale; si rileva ogni giorno il numero N di cellule presenti nella coltura ottenendo i seguenti dati (il numero N di cellule è dato in migliaia ed il tempo t è misurato in giorni):

t	0	10	20	30	40	50	60
N	3	3,11	3,21	3,33	3,45	3,58	3,71

Rappresentare i dati in scala semilogaritmica, riportando sull'asse delle ascisse il tempo x e sull'asse delle ordinate $y=\ln N$.
A partire dai dati così elaborati, trovare la retta di regressione con i minimi quadrati. Scrivere infine la legge che lega N ad x.
Qual è il tasso giornaliero di crescita dei batteri?
Dopo quanto tempo raddoppierà il numero di batteri?

45. Si studia la scarica di un condensatore, misurando la corrente i al passare del tempo t; si ottiene la seguente tabella, dove i è misurata in milliampère e t in millisecondi:

t	0	1	2	3	4	5
i	8	4,85	2,95	1,79	1,09	0,66

Rappresentare i dati in scala semilogaritmica, riportando sull'asse delle ascisse il tempo x e sull'asse delle ordinate $y=\ln i$.
A partire dai dati così elaborati, trovare la retta di regressione con i minimi quadrati. Scrivere infine la legge che lega i ad x.
Qual è il tasso di diminuzione della corrente ogni millisecondo?
L'amperometro non rileva correnti più piccole di 0,1 milliampère; dopo quanto tempo l'amperometro segna una corrente 0?

46. La sensibilità delle pellicole fotografiche è misurata sia in unità ASA (American Standard Association) che in unità DIN (Deutsche Industrie Normen). In un manuale di fotografia si trova la seguente tavola di corrispondenze:

ASA	1,0	1,2	1,6	2	2,5	3	4	5	6	8	10	12	16	20	25	32	40	50	64	80	100
DIN	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21

Rappresentare i dati in scala semilogaritmica, riportando sull'asse delle ascisse la sensibilità x in DIN e sull'asse delle ordinate il logaritmo y della sensibilità in ASA.
A partire dai dati così elaborati, trovare la retta di regressione con i minimi quadrati. Scrivere infine la legge che lega la misura della sensibilità in ASA a quella in DIN.
Verificare l'attendibilità della legge ottenuta, calcolando in ASA la sensibilità di una pellicola valutata 30 DIN (*i manuali riportano 800 ASA*).

47. Per studiare la memoria dell'uomo, lo psicologo Strong ha ripetuto più volte un esperimento di questo tipo: leggeva ad una persona una lista di 20 parole; lasciava passare del tempo, poi chiedeva alla persona di riconoscere le parole precedenti, che erano mescolate a 20 nuove parole. In ogni situazione Strong calcolava il numero N di parole riconosciute, il numero M di parole riconosciute in modo errato e calcolava il punteggio R, dato da

$$R=100\frac{M-N}{20}.$$

In un esperimento di questo tipo si sono ottenuti i seguenti dati (R è il punteggio e t è il tempo in minuti che trascorre fra la lettura e la prova di memoria):

t	1	5	15	30	60	120	240	480	720	1440	2880	5760
R	84	71	61	56	54	47	45	38	36	26	20	16

Rappresentare i dati in scala semilogaritmica, riportando sull'asse delle ascisse $x=\log t$ e sull'asse delle ordinate $y=R$.
A partire dai dati così elaborati, trovare la retta di regressione con i minimi quadrati. Scrivere infine la legge che lega R a t.

Leggi sperimentali scoperte con la scala logaritmica

Gli esercizi dal 48 al 53 conducono a ricercare leggi sperimentali rappresentando i dati in scala logaritmica e valendosi della retta di regressione.

Per svolgere gli esercizi è opportuno tenere presenti le considerazioni svolte nel paragrafo 4. È consigliabile valersi del calcolatore tascabile.

48. Si studia il movimento di una pallina, misurando lo spostamento s al variare del tempo t; si ottengono i dati presentati nella tabella seguente (il tempo t è misurato in secondi e lo spostamento s in centimetri):

s	0,03	0,06	0,1	0,13	0,17	0,2	0,23	0,27	0,3	0,33
t	7,70	8,75	9,80	10,85	11,99	13,09	14,18	15,22	16,31	17,45

Rappresentare i dati in scala logaritmica, indicando sull'asse delle ascisse $x=\log t$ e sull'asse delle ordinate $y=\log s$.
A partire dai dati così elaborati, trovare la retta di regressione con i minimi quadrati. Scrivere infine la legge che lega s a t.
Quale spostamento si può prevedere dopo 1 secondo di movimento?

49. Studiando il movimento dei pianeti del sistema solare, si esamina la tabella seguente, dove R indica il raggio dell'orbita del pianeta (misurato in unità astronomiche, cioè assumendo il raggio dell'orbita della Terra come unità di lunghezza) e T il periodo (cioè il tempo impiegato a compiere una rotazione completa intorno al Sole), misurato in giorni:

Pianeta	R	T
Mercurio	0,387	88,0
Venere	0,723	224,70
Terra	1	365,26
Marte	1,524	686,96
Giove	5,203	4332,66
Saturno	9,555	10759,54
Urano	19,218	30689,24
Nettuno	30,11	60182,94
Plutone	38,518	90741,58

Rappresentare i dati in scala logaritmica, indicando sull'asse delle ascisse $x=\log T$ e sull'asse delle ordinate $y=\log R$.
A partire dai dati elaborati, trovare la retta di regressione con i minimi quadrati. Scrivere infine la legge che lega R a T: si troverà **la 3ª legge di Keplero**.

50. In un laboratorio si studia il comportamento di una lente convergente: si dispone una sorgente di luce S a distanza x da uno dei fuochi e se ne ricerca l'immagine reale S' con un piccolo schermo; si misura quindi la distanza x' di S' dall'altro fuoco F' della lente. In un esperimento di questo tipo si sono ottenuti i dati seguenti (x ed x' sono misurate in centimetri).

x	100	50	30	20	15	10	7,3	4,5	2,4
x'	2,4	4,5	7,3	11,5	15	21,5	32	48	95

Rappresentare i dati in scala logaritmica, indicando sull'asse delle ascisse $X=\log x$ e sull'asse delle ordinate $Y=\log x'$.
A partire dai dati così elaborati, trovare la retta di regressione con i minimi quadrati. Scrivere infine la legge che lega x ad x'.
Dove si prevede di trovare l'immagine S', se la sorgente S viene disposta ad una distanza $x=150$?

51. In un laboratorio si studiano le trasformazioni adiabatiche di un gas, cioè le trasformazioni che avvengono mentre il gas non può scambiare calore con l'esterno.
Per questo si racchiude il gas in un recipiente (tipo thermos) che limiti il più possibile le dipsersioni di calore; il recipiente è chiuso da un pistone a tenuta perfetta, ma con attrito trascurabile.
Il gas, inizialmente a temperatura ambiente, viene lentamente compresso; durante la compressione si misura in cm^3 il volume V occupato dal gas ed in gradi Kelvin la corrispondente temperatura T. Durante un esperimento di questo tipo il gas racchiuso nella provetta era l'aria e si sono ottenuti i seguenti dati:

temperatura T	294	312,7	336,3	367,8	412,6	485,3	640,3
volume V	70	60	50	40	30	20	10

Rappresentare i dati in scala logaritmica, indicando sull'asse delle ascisse $x=\log V$ e sull'asse delle ordinate $y=\log T$.
A partire dai dati così elaborati, trovare la retta di regressione con i minimi quadrati. Scrivere infine la legge che lega T a V.
Quale temperatura si prevede se risulta $V=5$?

52. Sempre studiando le trasformazioni adiabatiche di un gas come nell'esercizio precedente, si comprime lentamente un gas, misurandone in cm^3 il volume V ed in atmosfere la relativa pressione P. Durante un esperimento di questo tipo il gas racchiuso nella provetta era l'aria e si sono ottenuti i seguenti dati:

pressione P	1	1,24	1,60	2,19	3,27	5,78
volume V	70	60	50	40	30	20

Rappresentare i dati in scala logaritmica, indicando sull'asse delle ascisse $x=\log V$ e sull'asse delle ordinate $y=\log P$.
A partire dai dati così elaborati, trovare la retta di regressione con i minimi quadrati. Scrivere infine la legge che lega P a V.
Quale pressione si prevede se risulta $V=10$?

53. Agli inizi del nostro secolo, l'economista italiano V. Pareto osservò nei paesi ad economia capitalista una certa regolarità nella distribuzione dei redditi. Una delle serie di dati esaminati da Pareto è presentata nella tabella seguente: r indica il reddito (in dollari) ed N indica il numero di persone che hanno un reddito non inferiore a r (N è espresso in migliaia); i dati si riferiscono agli Stati Uniti nel 1919.

r	500	1000	1500	2000	3000	5000	10.000	25.000	50.000	100.000	200.000
N	35.541	23.010	10.512	5290	2225	841	254	62	21	7	2

Rappresentare i dati in scala logaritmica, indicando sull'asse delle ascisse $x=\log r$ e sull'asse delle ordinate $y=\log N$.
A partire dai dati così elaborati, trovare la retta di regressione con i minimi quadrati. Scrivere infine la legge che lega N ad r: si avrà l'equazione di una delle **curve di Pareto**.
Qual è il numero N che si può prevedere in corrispondenza ad $r=7000$?