

3

Complementi

I frattali

Può la matematica dare una rappresentazione della natura?

Cominciamo con l'osservazione di un fenomeno naturale: i fiocchi di neve. Un fiocco di neve appare come un batuffolo, un qualcosa di "compatto", e la sua struttura non suscita, a prima vista, nessun interesse. Ma se un fiocco di neve viene osservato con una lente d'ingrandimento, o, meglio, con un microscopio, appaiono delle configurazioni estremamente regolari (fig. 1); queste configurazioni, all'aumentare della potenza dello strumento, sono sempre più numerose e presentano sempre lo stesso "motivo".



Fig. 1

Per rendersi conto del come delle configurazioni possono riprodursi all'infinito, ragioniamo su un triangolo equilatero (fig. 2). Dividiamo ogni lato in 3 segmenti uguali; se si indica con $3a$ la lunghezza del lato, ognuno dei tre segmenti sarà lungo a . Ora, sui segmenti "centrali", costruiamo esternamente al triangolo dato un triangolo equilatero; questo avrà il lato lungo a (fig. 3). Togliendo poi il segmento "base" si avrà la stella a sei punte di fig. 4.

Ripetiamo la stessa costruzione sui triangoli equilateri di lato a della fig. 4: dividiamo cioè ciascuno dei lati lunghi a in 3 segmenti uguali, lunghi $\frac{a}{3}$, e sul segmento di mezzo costruiamo un triangolo equilatero (fig. 5).

Continuando con la stessa costruzione, si otterranno dei triangoli equilateri sempre più piccoli (fig. 6), aventi il lato uguale a $\frac{1}{3}$ del lato del triangolo precedente. Le lunghezze dei lati si susseguono dunque così:

$$3a \quad a \quad \frac{a}{3} \quad \frac{a}{9} \dots;$$

e quindi i perimetri delle successive configurazioni risultano

$$9a \quad 12a \quad 16a \dots$$

e tendono a diventare sempre più grandi.

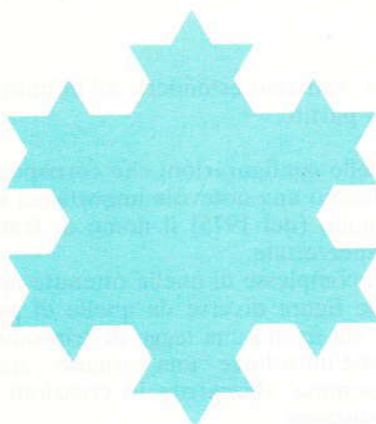
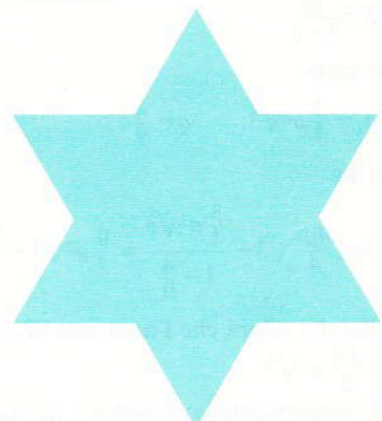
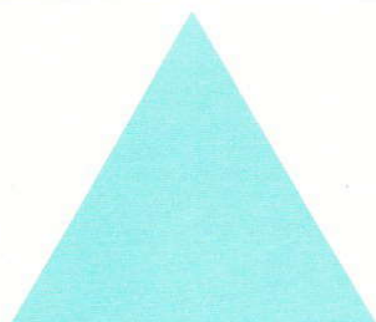
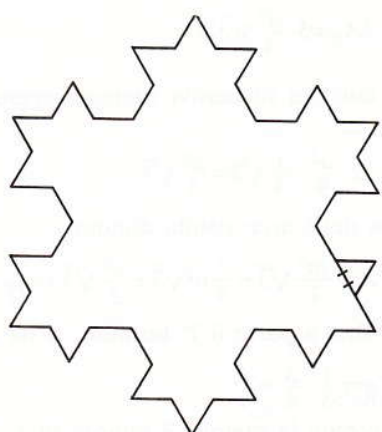
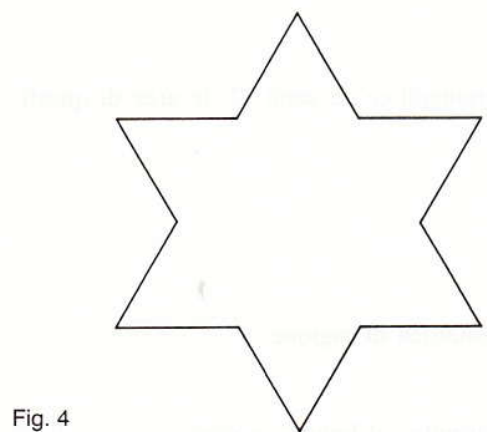
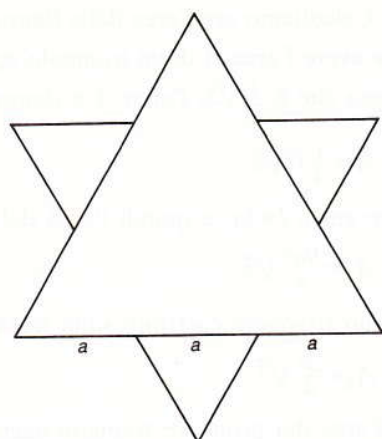
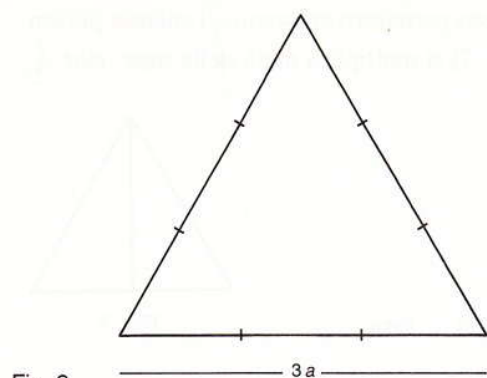


Fig. 6

Calcoliamo ora l'area della figura compresa entro questo perimetro crescente. Teniamo presente che per avere l'area A di un triangolo equilatero di lato l (fig. 7) si moltiplica metà della base, cioè $\frac{l}{2}$, per l'altezza che è $\frac{l}{2}\sqrt{3}$; l'area A è dunque data da

$$A = \frac{1}{4} l^2 \sqrt{3}.$$

Nel nostro caso, $l=3a$, e quindi l'area del triangolo dato è

$$A_1 = \frac{9a^2}{4} \sqrt{3}.$$

L'area di un triangolo costruito sulla terza parte del lato, cioè su a , sarà

$$A_2 = \frac{a^2}{4} \sqrt{3},$$

e quindi l'area dei primi tre triangoli aggiunti è

$$3A_2 = 3 \cdot \frac{a^2}{4} \sqrt{3}.$$

Poiché il lato dei successivi triangoli aggiunti è $\frac{a}{3}$ e di questi triangoli ce ne sono 12, le aree di questi valgono

$$12 \cdot \frac{a^2}{9} \cdot \frac{1}{4} \sqrt{3} = \frac{a^2}{3} \sqrt{3}.$$

La somma delle aree risulta dunque

$$A = \frac{9a^2}{4} \sqrt{3} + \frac{3}{4} a^2 \sqrt{3} + \frac{a^2}{3} \sqrt{3} + \frac{4}{27} a^2 \sqrt{3} + \dots$$

Si scopre che, a parte il 1° termine, si ha una progressione geometrica di ragione

$$q = \frac{1}{3} : \frac{3}{4} = \frac{4}{9}.$$

Allora, siccome la ragione è minore di 1, si può applicare la formula "al limite", e cioè

$$S = \frac{a_1}{1-q}.$$

Nel nostro caso

$$a_1 = \frac{3}{4} a^2 \sqrt{3}, \quad q = \frac{4}{9};$$

e quindi si ha

$$A = \frac{9a^2}{4} \sqrt{3} + \frac{\frac{3}{4} a^2 \sqrt{3}}{1 - \frac{4}{9}} = \frac{9}{4} a^2 \sqrt{3} + \frac{27}{20} a^2 \sqrt{3} = \frac{18}{5} a^2 \sqrt{3}.$$

Risulta allora che l'area non diventa infinitamente grande! Si avvicina, invece, sempre di più al valore $A = \frac{18}{5} a^2 \sqrt{3}$.

È interessante confrontare questa area A con l'area A_1 del triangolo da cui siamo partiti; si ha:

$$\frac{A}{A_1} = \frac{18}{5} a^2 \sqrt{3} : \frac{9}{4} a^2 \sqrt{3} = \frac{8}{5} = 1,6.$$

Riflettiamo: un'area compresa da un contorno che, col pensiero, vediamo estendersi all'infinito, risulta poco più di una volta e mezzo l'area del triangolo da cui siamo partiti!

Si rimane anche affascinati da una legge che genera delle configurazioni che corrispondono a quelle dei fiocchi di neve. A questo tipo di configurazioni, che hanno una notevole importanza sia nella matematica pura che nelle applicazioni, è stato dato recentemente (nel 1975) il nome di **frattali**, un termine che vuol sottolineare il fatto che appaiono frazionati, spezzettati.

Questi frattali possono presentarsi sotto forme ben più complesse di quelle ottenute operando solo con triangoli equilateri, perché si possono aggiungere delle figure diverse da quelle di partenza, scegliendole a caso ma operando su queste sempre in modo che sia fissata una legge di "riproduzione". Per esempio, nella configurazione a triangoli equilateri, si potrebbe introdurre "una variante", inserendo un quadrato dopo un certo numero di triangoli. Ci si può, insomma, sbizzarrire in creazioni diverse purché si rimanga sempre vincolati da una stessa legge di riproduzione.

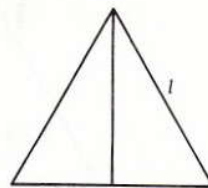


Fig. 7



Fig. 8

Fig. 9

Fig. 10

Si può, anche, partire da configurazioni a contorni curvilinei, come quelle di fig. 8, estendendole in modo da ottenere le figg. 9 e 10; si vede chiaramente che la fig. 10 è formata da tante “zone” uguali a quelle della fig. 9, ma rimpicciolite.

La fig. 10, osservata con un po' di fantasia, fa pensare a un insieme di nuvole. Ma non si tratta di sola fantasia! Le nuvole, gli ammassi di nuvole, i super-ammassi sembra che costituiscano effettivamente delle configurazioni che possono essere create con il metodo dei frattali; e il giorno in cui gli scienziati saranno certi di questa conclusione, tutto il problema delle previsioni meteorologiche dovrà essere rivisto sotto questa chiave.

Dalle nuvole alle stelle: astrofisici studiano oggi da un punto di vista frattale i raggruppamenti delle stelle in galassie, delle galassie in ammassi di galassie, e così via. Si scoprirà davvero uno spezzettamento dell'universo in grappoli frattali?

E ora, dalle nuvole, dalle stelle, dalle galassie rientriamo “in noi”: sembra che le ramificazioni successive dei vasi sanguigni possano, anch'esse, essere descritte con composizioni frattali...

Ci si chiede: potrebbero davvero tutti questi fenomeni, così diversi uno dall'altro, essere stretti in un unico quadro di leggi geometriche? Potrà, un giorno, la matematica dare una rappresentazione frattale della natura? E ci si chiede se potrà veramente realizzarsi l'idea del grande matematico e filosofo G.W. Leibniz (1646-1716) secondo cui «il corpo umano o quello di un altro animale, una parte qualunque, solida o fluida, contiene in se stessa, a sua volta, altre parti animali o vegetali; e questo fatto si ripete sempre uguale, all'infinito».

Leibniz, per far comprendere che il processo di cui parla è di carattere matematico, dice: «Immaginate un cerchio (fig. 11), e iscrivete in questo cerchio tre cerchi uguali fra loro e aventi il raggio massimo; poi, in ciascuno dei nuovi cerchi e nello spazio che rimane fra i cerchi iscrivete ancora tre cerchi uguali di raggio massimo, e immaginate che il processo vada all'infinito».

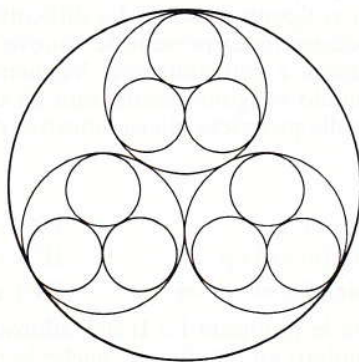


Fig. 11

Si capisce che si può affidare a un computer grafico la realizzazione di programmi su configurazioni frattali. Sul video compaiono allora le figure più varie ma che rivelano un processo iterativo (fig. 12). Si rimane affascinati da queste configurazioni che si sviluppano uguali e diverse, mostrando la stessa dinamicità, la stessa armonia di un motivo musicale. Anche l'arte, dunque, troverà forse nella geometria dei frattali una nuova corrente.

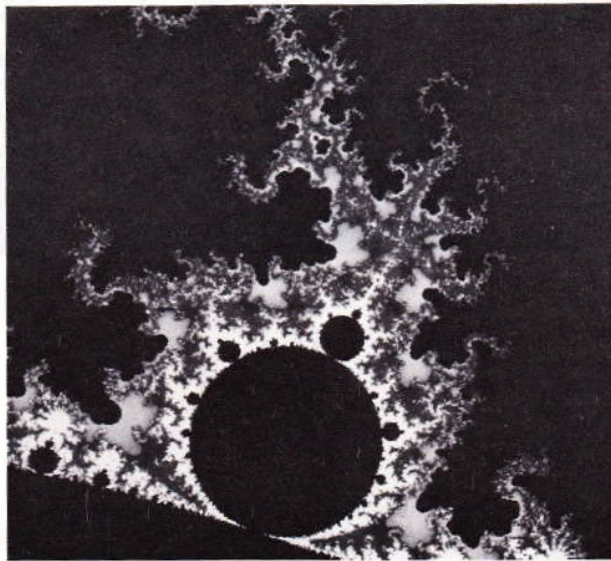


Fig. 12. Un disegno di geometria frattale eseguito con il calcolatore.