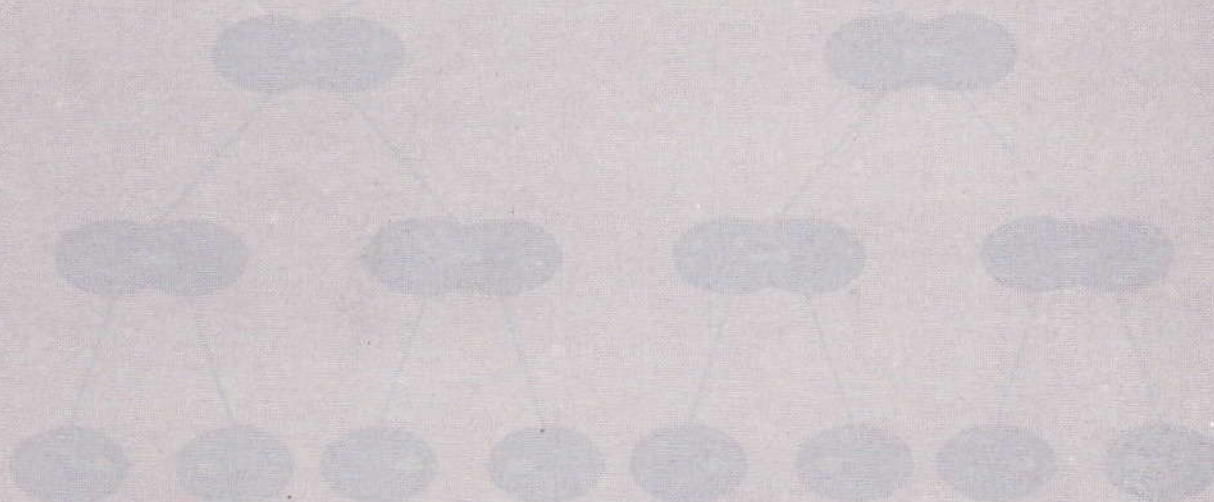


3. Parte prima

Legge esponenziale e logaritmo

1. La legge esponenziale nella natura
2. Il logaritmo nella natura
3. Potenze ad esponente reale. La funzione esponenziale
4. La curva esponenziale
5. L'inversa della funzione esponenziale: la funzione logaritmica
6. La curva logaritmica
7. Esponenziale e logaritmo con il calcolatore tascabile.
Due basi privilegiate
8. Proprietà dei logaritmi decimali
9. Dai logaritmi decimali ai logaritmi in un'altra base
10. Cambiamento di base e trasformazioni della curva logaritmica



1. La legge esponenziale nella natura

In questo paragrafo studieremo “con occhio matematico” alcuni fenomeni naturali, apparentemente molto diversi fra loro: la riproduzione per scissione, la fissione, il decadimento radioattivo. Non analizzeremo questi fenomeni in dettaglio, ma cercheremo, invece, di capirne la struttura essenziale; scopriremo così che c'è, dietro l'apparente diversità, un'unica legge matematica: **la legge esponenziale**.

A) La riproduzione per scissione

Osserviamo la figura 1. Rappresenta un batterio, ingrandito circa 80.000 volte e fotografato durante la riproduzione. In fig. 2 è schematizzato il processo di riproduzione: il batterio si allunga, fino a raddoppiare la sua lunghezza, si strozza al centro e, infine, si divide in due, producendo due batteri simili al genitore e, così, il genitore scompare.

Se seguiamo per qualche tempo la riproduzione di un batterio, osserviamo, ogni mezz'ora, una divisione come quella descritta prima; avremo dunque in poche ore una colonia molto numerosa di batteri.

Quanto numerosa? Quanti batteri ci saranno, per esempio, dopo due o tre ore? È facile rispondere, se analizziamo il fenomeno basandoci su uno schema come quello di fig. 2.

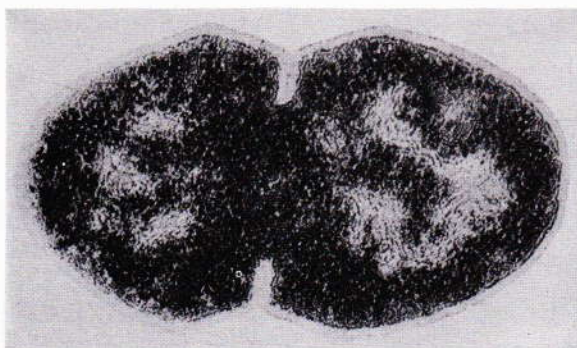


Fig. 1

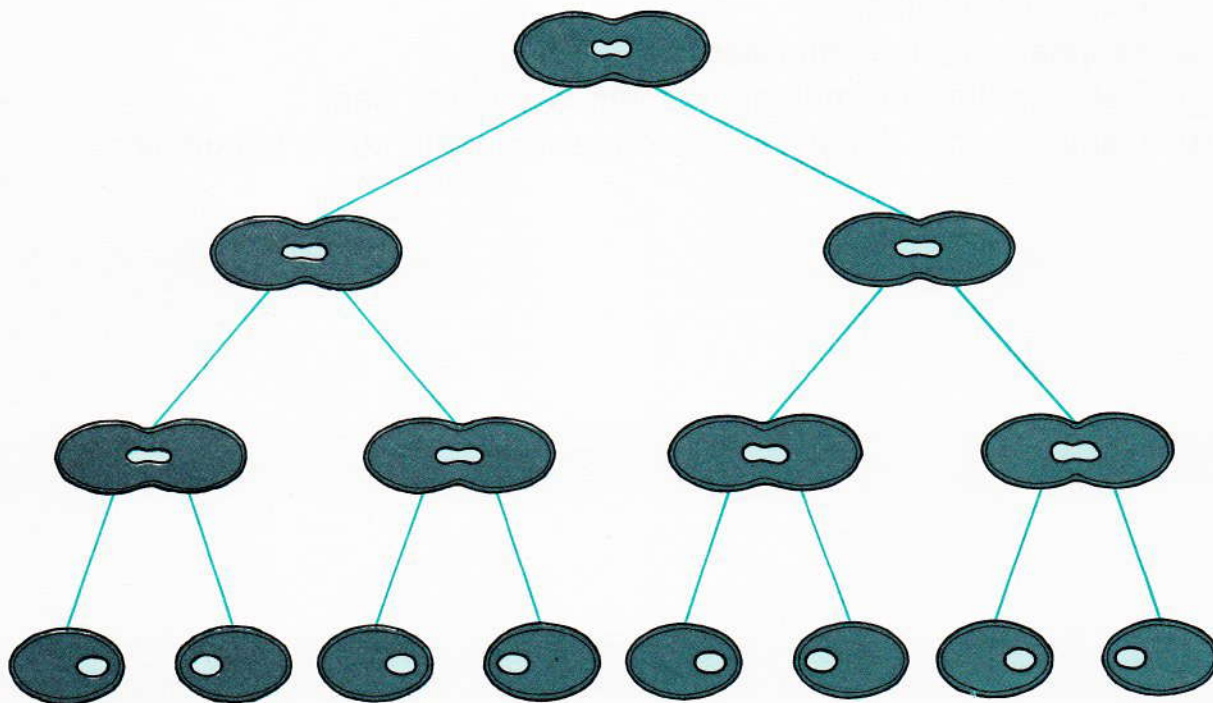


Fig. 2

Allo schema di fig. 2 possiamo sostituire la tabella seguente:

| Numero di scissioni s | Numero di batteri N |
|-------------------------------|-----------------------------|
| 0 | 1 |
| 1 | 2 |
| 2 | $4=2^2$ |
| 3 | $8=2^3$ |
| 4 | $16=2^4$ |
| ... | ... |
| s | 2^s |

Se indichiamo con N il numero dei batteri e con s il numero di scissioni, la legge che regola la riproduzione per scissione è la seguente:

$$N=2^s.$$

Ed ecco la stessa visualizzata in un grafico (fig. 3).

Abbiamo ottenuto un grafico piuttosto inconsueto: non una curva, come sempre si otteneva in geometria analitica, ma tanti punti, disposti con un preciso ordine.

Avrebbe senso unire questi punti con una linea continua?

Certamente no! Infatti un punto, in corrispondenza per esempio a $s=0,5$, indicherebbe qualcosa senza senso: il numero di batteri corrispondente a "mezza divisione"!

B) La fissione

La fissione, oggi di vitale importanza per i suoi impieghi pacifici e militari, è un fenomeno complesso, ma di cui è abbastanza semplice capire la struttura. Ne diamo una descrizione nei suoi punti essenziali, riferendoci all'uranio 235.

In fig. 4 è rappresentato un atomo di uranio descritto secondo il modello di Rutherford-Bohr: nel nucleo si trovano 92 protoni (con carica elettrica positiva) e 143 neutroni (elettricamente neutri).

Possiamo descrivere schematicamente la fissione in questo modo: si "bombarda" un blocco d'uranio con neutroni; quando un nucleo è colpito da un neutrone, si scinde in due nuclei più leggeri, liberando energia e tre neutroni (fig. 5). Se il blocco d'uranio ha una

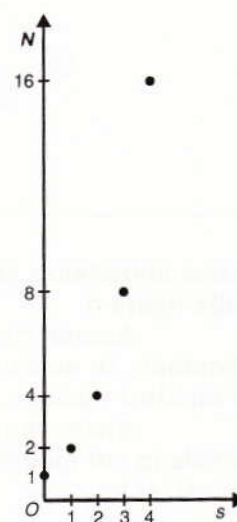


Fig. 3

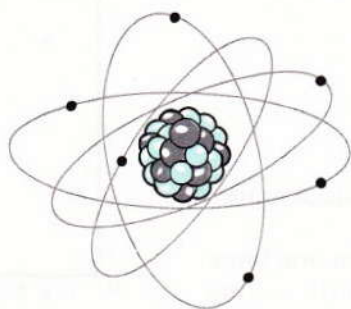


Fig. 4

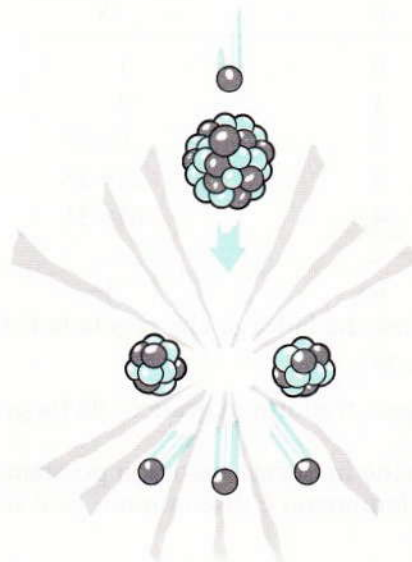


Fig. 5

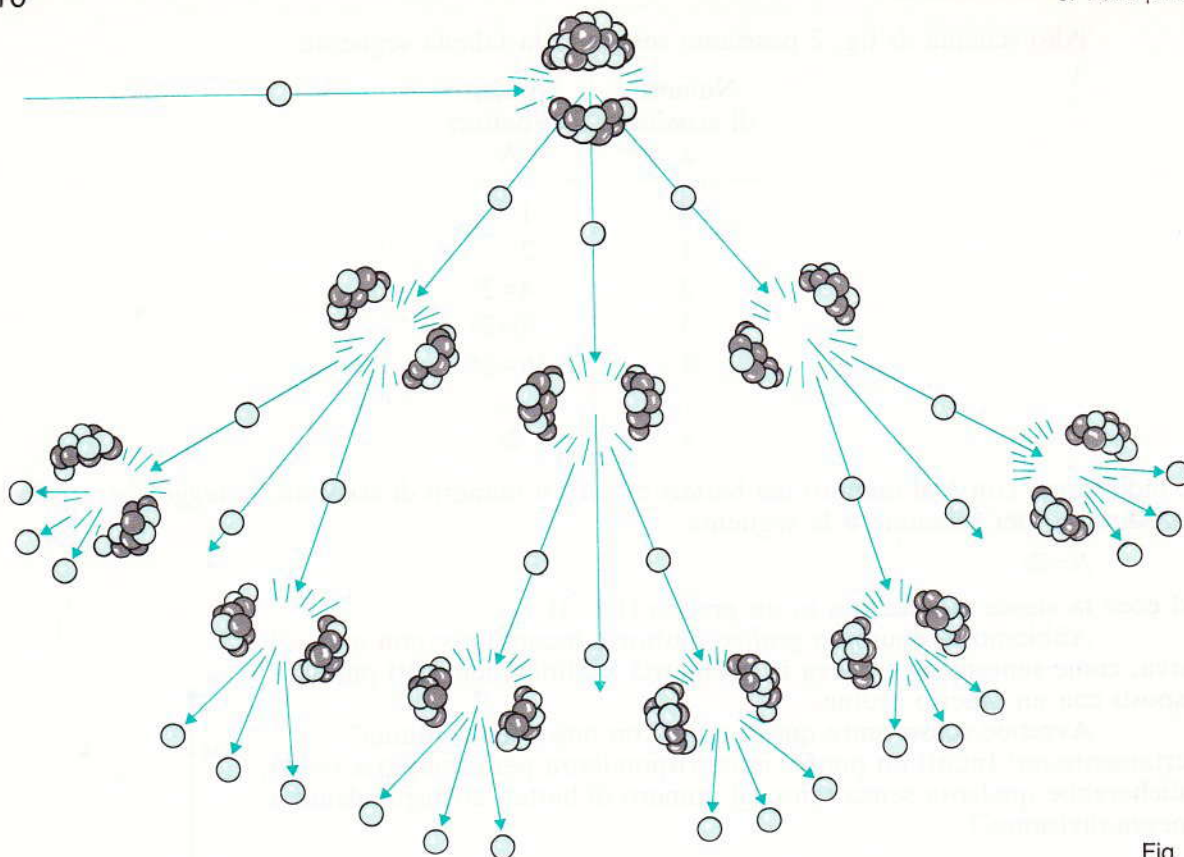


Fig. 6

massa abbastanza grande, si innesca la **reazione a catena**, schematizzata nella figura 6.

Accade cioè che un neutrone “spacca” un atomo di uranio, liberando, in media, tre neutroni, ciascuno dei quali provoca la fissione di un altro nucleo... e così via.

Anche in questo caso, possiamo sostituire allo schema una tabella in cui indichiamo con N il numero di neutroni e con u il numero di urti; si ha:

| Numero urti u | Numero neutroni N |
|--------------------|------------------------|
| 0 | 1 |
| 1 | 3 |
| 2 | $9=3^2$ |
| 3 | $27=3^3$ |
| 4 | $81=3^4$ |
| ... | ... |
| u | 3^u |

Si intuisce così che la legge che regola la fissione nucleare è:

$$N=3^u$$

La stessa legge, tradotta in grafico, dà luogo ancora ad una successione di punti (fig. 7).

Anche in questo caso non possiamo unire i punti con una linea continua: il fenomeno è discontinuo, cioè si hanno 1 urto, 3 urti, ..., ma non $\frac{1}{2}$ urto!

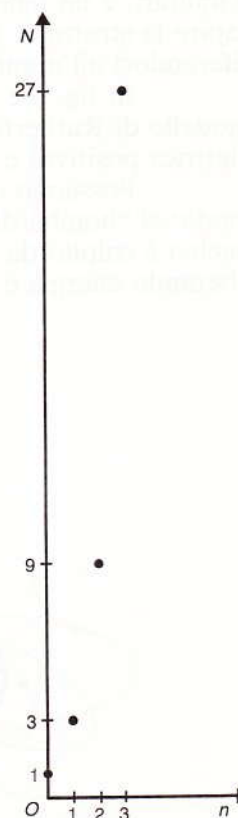


Fig. 7

C) Il decadimento radioattivo

Anche la radioattività, scoperta ai primi del '900 dal fisico francese H. Becquerel, è un fenomeno nucleare; consiste in questo: alcuni minerali, presenti in natura, emettono spontaneamente radiazioni e l'emissione di queste radiazioni provoca la trasformazione dei minerali in nuove sostanze. In fig. 8 si trova rappresentata schematicamente la serie di decadimento radioattivo che conduce l'uranio a trasformarsi in piombo.

Ma allora – ci si chiede – il decadimento radioattivo porta rapidamente alla scomparsa degli elementi “progenitori”? Per rispondere a questa domanda occorre conoscere meglio questi processi di decadimento.

Cominciamo con l'osservare che se un minerale contiene oggi una certa massa di una sostanza radioattiva, dopo un certo tempo, (il cosiddetto tempo di dimezzamento τ , caratteristico della sostanza esaminata) metà della massa avrà subito il decadimento radioattivo e metà sarà rimasta inalterata. Dopo un altro intervallo di tempo lungo τ , la sostanza radioattiva dimezzerà ancora, ... e così via.

In fig. 9 è schematizzato il decadimento del Carbonio 14, che ha un tempo di dimezzamento

$$\tau \cong 6000 \text{ anni.}$$

Anche in questo caso lo schema può essere sostituito da una tabella; nella tabella seguente M indica la massa di C_{14} e t il tempo, misurato a partire dal numero di tempi di dimezzamento trascorsi.

| Numero di tempi di dimezzamento t | Massa di C_{14} M |
|--|--|
| 0 | 1 |
| 1 | $\frac{1}{2}$ |
| 2 | $\frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^2$ |
| 3 | $\frac{1}{8} = \left(\frac{1}{2}\right)^3$ |
| \vdots | \vdots |
| t | $\left(\frac{1}{2}\right)^t$ |

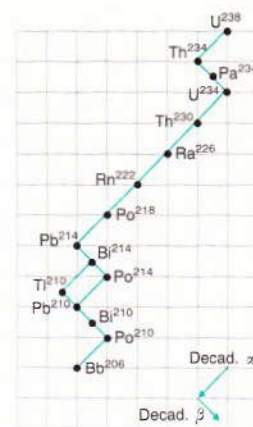


Fig. 8

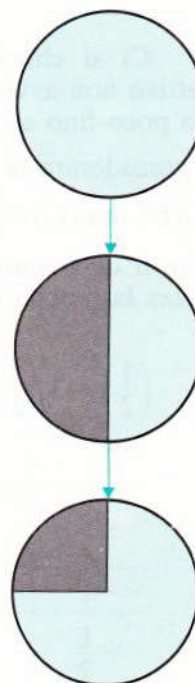


Fig. 9

Leggendo la tabella dal basso verso l'alto, si osserva che, mentre t diminuisce di un'unità (passando per esempio da 3 a 2), M raddoppia (passando da $\frac{1}{8}$ a $\frac{1}{4}$).

Viene spontaneo di completare la tabella, scrivendo anche i valori di M corrispondenti a valori di t negativi, valori che indicano “il passato”. È infatti evidente che se oggi troviamo 1 grammo di C_{14} , 6000 anni fa ce ne doveva essere il doppio, cioè

$$\text{per } t = -1, \quad M = 2;$$

analogamente si trova

$$\text{per } t = -2, \quad M = 4.$$

Ragionando così, si ottiene la tabella seguente:

| t | M |
|-----|--|
| -2 | $4 = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$ |
| -1 | $2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$ |
| 0 | $1 = \left(\frac{1}{2}\right)^0$ |
| 1 | $\frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^1$ |
| 2 | $\frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^2$ |
| 3 | $\frac{1}{8} = \left(\frac{1}{2}\right)^3$ |

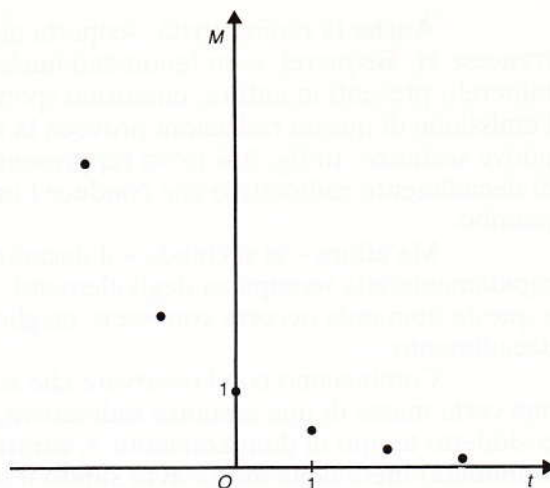


Fig. 10

Appare chiara la legge che regola il decadimento radioattivo; si ha:

$$M = \left(\frac{1}{2}\right)^t$$

Riportiamo ancora una volta su un grafico i valori presentati nella tabella (fig. 10)

Ci si chiede: ha senso unire i punti nella fig. 10? Riflettiamo: il decadimento radioattivo non avviene "a scatti". Se oggi troviamo 1 grammo di C_{14} , questa massa diminuirà poco a poco fino a che, dopo circa 6000 anni, si sarà ridotta a 0,5 grammi. In questo caso ha senso considerare la massa di C_{14} , corrispondente a $t = \frac{1}{3}$ ($\frac{1}{3}$ di tempo di dimezzamento, cioè circa 2000 anni), $t = \frac{3}{4}$, $t = \frac{1}{100}$, ... Possiamo quindi "infittire" quanto vogliamo la tabella che descrive il decadimento radioattivo ed ottenere un grafico come quello di fig. 11. Il grafico visualizza la tabella a fianco, dove ci siamo basati sulla notazione

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}, \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{\left(\frac{1}{2}\right)^3}, \quad \dots, \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{\left(\frac{1}{2}\right)^p}$$

| t | M |
|----------------|-------------------------|
| $-\frac{3}{2}$ | $\sqrt[3]{8}$ |
| -1 | 2 |
| $-\frac{1}{2}$ | $\sqrt{2}$ |
| 0 | 1 |
| $\frac{1}{2}$ | $\sqrt{\frac{1}{2}}$ |
| 1 | $\frac{1}{2}$ |
| $\frac{3}{2}$ | $\sqrt[3]{\frac{1}{8}}$ |
| \vdots | \vdots |

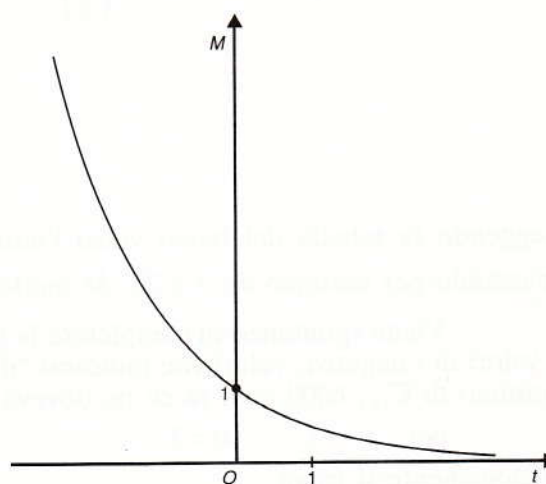


Fig. 11

Abbiamo esaminato tre fenomeni, molto diversi fra loro, regolati però da leggi molto simili. Mettiamo ora le tre leggi a confronto e consideriamole con "occhio matematico".

Nella riproduzione per scissione

le variabili

N = numero di batteri

s = numero di scissioni

sono legate dalla legge

$$N=2^s,$$

cioè s è l'esponente della base fissa 2 e N è il valore della potenza.

Nella fissione

le variabili

N = numero di neutroni

u = numero di urti

sono legate dalla legge

$$N=3^u,$$

cioè u è l'esponente della base fissa 3 e N è il valore della potenza.

Nel decadimento radioattivo

le variabili

M = massa della sostanza radioattiva

t = tempo trascorso

sono legate dalla legge

$$M=\left(\frac{1}{2}\right)^t,$$

cioè t è l'esponente della base fissa $\frac{1}{2}$ e M è il valore della potenza.

Dunque, in tutti e tre i casi, ci sono due grandezze variabili legate da una stessa legge: una, variabile indipendente, è l'esponente di una base fissa e l'altra, variabile dipendente è il valore della potenza. La legge che descrive questi fenomeni si chiama **legge esponenziale**.

2. Il logaritmo nella natura

Il decadimento radioattivo, di cui abbiamo parlato nel paragrafo precedente, è alla base di molti metodi usati per stabilire l'età di reperti archeologici.

Vediamo, sempre nelle sue linee essenziali, come si può stabilire l'età di un fossile, basandosi, per esempio, sul decadimento del Carbonio 14 (C_{14}).

Ogni organismo vivente contiene una quantità di C_{14} , che rimane costante fino a che l'organismo vive, perché il carbonio presente nel corpo viene continuamente rinnovato da quello ambientale. Non appena l'organismo muore, finisce il ricambio e inizia il decadimento del C_{14} , che dimezza ogni 6000 anni. Perciò, se un organismo contiene fino a che resta vivo 1 mg di C_{14} , dal momento della sua morte la massa M di C_{14} comincia a diminuire col passare del tempo t , secondo la legge

$$M=\left(\frac{1}{2}\right)^t.$$

Ora questa legge permette di risolvere sia problemi di previsione che problemi di datazione.

A) Problema di previsione

L'organismo oggi muore e si vuole prevedere quanto C_{14} conterrà fra 18.000 anni. È dunque noto il tempo t (18.000 anni, cioè 3 tempi di dimezzamento) e si vuole determinare la massa M ; questà sarà data da

$$M = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 0,125 \text{ mg.}$$

B) Problema di datazione

Si trova un fossile di un organismo che, da vivo, contiene 1 mg di C_{14} ; in questo fossile si trova una massa di C_{14} , uguale a

$$M = 0,0625 \text{ mg.}$$

Si vuole sapere da quanto tempo l'organismo è morto.

È noto dunque il valore della massa M e si vuole determinare il tempo t trascorso. Per risolvere il problema, si dovrà esprimere la massa M sotto forma di una potenza di base $\frac{1}{2}$, cioè si dovrà determinare l'esponente t in modo che risulti

$$\left(\frac{1}{2}\right)^t = 0,0625.$$

In questo caso particolare è facile trovare il risultato, dato che risulta

$$\left(\frac{1}{2}\right)^4 = 0,0625.$$

Si ha $t=4$; sono dunque trascorsi 4 tempi dimezzamento, cioè 24.000 anni. Abbiamo così determinato l'età del fossile.

La stessa legge

$$M = \left(\frac{1}{2}\right)^t$$

può dunque essere considerata da due punti di vista.

A) Previsione: è dato il tempo t e si vuole prevedere la massa M .

B) Datazione: è data la massa M e si vuole risalire al tempo trascorso t .

È più facile distinguere i due casi, seguendo una convenzione d'uso: si indica con x la variabile che si conosce e con y la variabile che si vuol ricavare; in questo modo la stessa legge

$$M = \left(\frac{1}{2}\right)^t$$

si scriverà

$$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x, \text{ quando è dato } t=x \text{ e si vuol prevedere } M=y;$$

$$x = \left(\frac{1}{2}\right)^y, \text{ quando è data } M=x \text{ e si vuole risalire a } t=y.$$

Si nota subito una differenza fra le due formule ora scritte: nella prima è facile calcolare la y , quando è data la x ; nella seconda, invece, non conosciamo un metodo per calcolare il valore di y a partire dal valore di x .

Si può descrivere questo secondo problema, dicendo che si deve esprimere la massa x sotto forma di una potenza con base $\frac{1}{2}$, cioè si deve determinare l'esponente y da assegnare alla base fissa $\frac{1}{2}$ in modo che la potenza $\left(\frac{1}{2}\right)^y$ dia come risultato x .

La lunga frase ora scritta si sintetizza con il termine **logaritmo**. Questa "strana" parola, introdotta alla fine del 1500 dal matematico inglese John Napier (noto col nome latinizzato di Nepero), viene dal greco *logos-arytmòs* e significa "numero del rapporto", come si è detto nell'introduzione storica (pag. 205).

Così, invece di dire « y è l'esponente da assegnare alla base $\frac{1}{2}$ in modo che la potenza $\left(\frac{1}{2}\right)^y$ dia come risultato x », si dice « y è il logaritmo in base $\frac{1}{2}$ del numero x ». E, invece di scrivere

$$x = \left(\frac{1}{2}\right)^y$$

si scrive

$$y = \log_{\frac{1}{2}} x,$$

che si legge, appunto, « y è uguale al logaritmo in base $\frac{1}{2}$ di x ».

Il nuovo nome non dà, però, indicazioni sul procedimento da seguire per risolvere dei problemi di datazione. Se, per esempio, troviamo in un fossile una quantità di C_{14} data da 0,1 mg, come possiamo stabilire l'età del reperto, sapendo che l'organismo conteneva 1 mg di C_{14} fino a che era vivo? Dato che 0,1 non è una potenza ad esponente intero di $\frac{1}{2}$, come si può determinare l'esponente y in modo che risulti

$$0,1 = \left(\frac{1}{2}\right)^y?$$

Cominciamo a vedere il problema da un punto di vista grafico, tracciando il grafico della funzione

$$y = \log_{\frac{1}{2}} x,$$

ossia di

$$x = \left(\frac{1}{2}\right)^y$$

Si procede così: si parte dalla tabella seguente

| x | y |
|----------|---------------|
| -2 | 4 |
| -1 | 2 |
| 0 | 1 |
| 1 | $\frac{1}{2}$ |
| 2 | $\frac{1}{4}$ |
| \vdots | \vdots |

che si deve compilare per tracciare la curva esponenziale, d'equazione $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ e si scambia «il nome» delle variabili; si ha quindi la tabella seguente:

| y | x |
|----------|---------------|
| -2 | 4 |
| -1 | 2 |
| 0 | 1 |
| 1 | $\frac{1}{2}$ |
| 2 | $\frac{1}{4}$ |
| \vdots | \vdots |

E così alla curva esponenziale (fig. 12) d'equazione

$$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x \quad (1)$$

viene sostituita la curva logaritmica (fig. 13) d'equazione

$$x = \left(\frac{1}{2}\right)^y \quad (2)$$

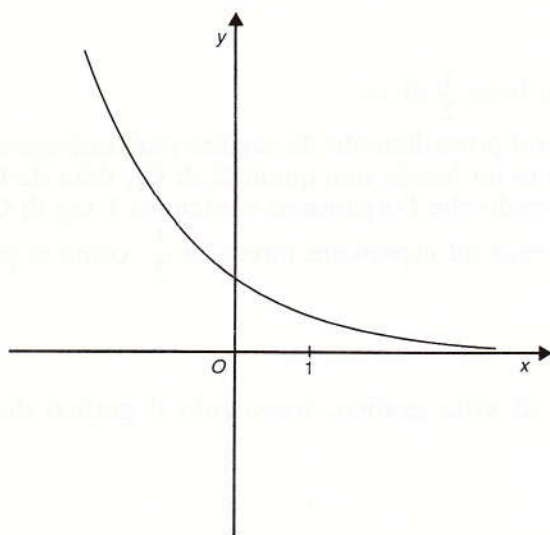


Fig. 12

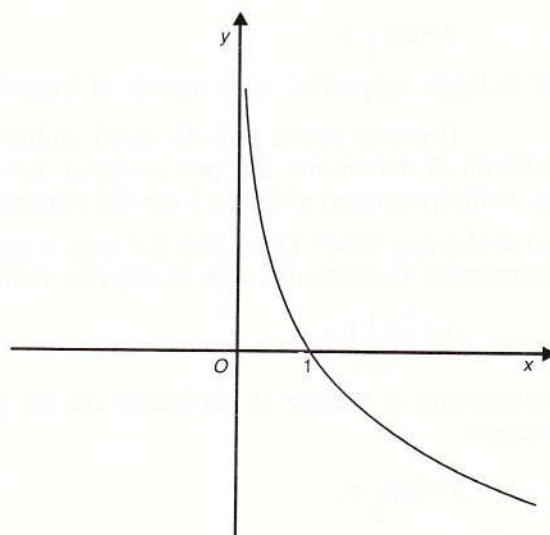


Fig. 13

Le due curve rappresentate in fig. 12 e in fig. 13 sono simmetriche rispetto alla bisettrice del I e II quadrante, cioè rispetto alla retta d'equazione

$$y = x,$$

(vedi Cap. 1, Parte terza, paragrafo 3) dato che scambiare x con y vuol dire portare un punto $P(a,b)$ nel punto $P'(b,a)$ (fig. 14). In fig. 15 sono rappresentate le due curve: l'esponenziale in nero e la logaritmica in colore.

Disegnato con cura su carta millimetrata il grafico di

$$y = \log_{\frac{1}{2}} x$$

avremo uno strumento per risolvere con buona approssimazione tanti problemi di datazione. In fig. 16 sono riportati alcuni esempi di soluzione di questo tipo di problemi.

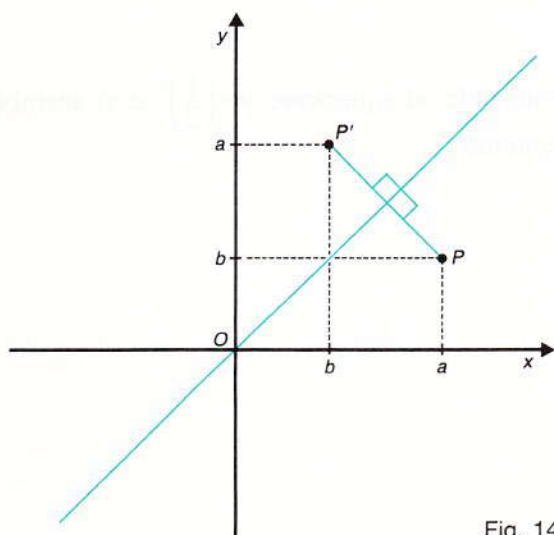


Fig. 14

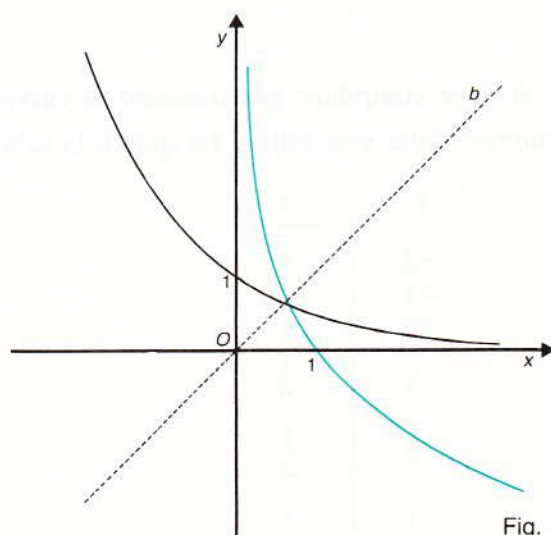


Fig. 15

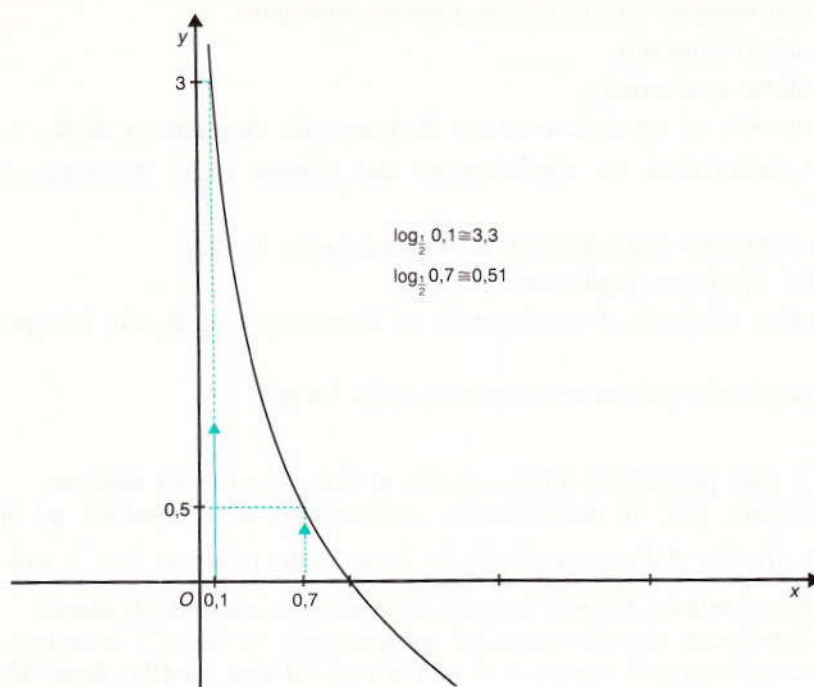


Fig. 16

3. Potenze ad esponente reale. La funzione esponenziale

Nel paragrafo 1 sono stati descritti alcuni fenomeni regolati da leggi esponenziali. In tutti i casi, per descrivere i fenomeni esaminati, è stato seguito lo stesso procedimento; schematizziamo ora tale procedimento, riferendoci, per esempio, alla riproduzione dei batteri.

- 1) Si fissa l'attenzione su due grandezze variabili, che caratterizzano il fenomeno (numero dei batteri N e numero di scissioni s).
- 2) Si trova una legge che fa corrispondere ad un valore di una delle variabili (s) un solo valore dell'altra variabile (N) e si esprime questa legge con una formula:

$$N = 2^s.$$

(1)

- 3) Si visualizza con un grafico cartesiano la legge trovata (fig. 17).

Ora, confrontando il grafico della fig. 17, con la legge (1), ci si trova di fronte ad un problema già trattato nel cap. 1 (Parte seconda, paragrafo 8): la sola formula (1) non esprime tutto quello che sappiamo sul fenomeno, perché non indica in quale insieme di numeri vanno scelti s e N . Alla (1) bisogna aggiungere l'informazione seguente: s deve assumere solo valori interi positivi o nulli, e N solo particolari valori interi positivi. Ecco allora il primo passo da compiere:

sostituire la nozione intuitiva di legge fisica con il concetto di funzione.

Ricordiamo che, per determinare una funzione, non basta indicare due variabili x ed y , ed una legge che fa corrispondere ad un valore di x un solo valore di y .

Occorre, prima di tutto, precisare in quale insieme – detto *dominio della funzione* – intendiamo scegliere x e precisare anche in quale insieme – detto *codominio della funzione* – possiamo trovare y . Indicheremo con A il dominio e con B il codominio.

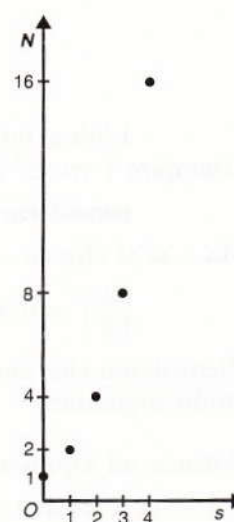


Fig. 17

Si individua dunque una funzione quando sono dati:

- 1) un insieme A , detto dominio,
- 2) un insieme B , detto codominio,
- 3) una legge che associa ad ogni elemento x di A un solo elemento y di B .

In base a questa definizione, la riproduzione dei batteri viene descritta, valendosi della seguente funzione:

- 1) il dominio A è l'insieme degli interi positivi (compreso lo 0),
- 2) il codominio B è l'insieme degli interi positivi,
- 3) ad ogni elemento x scelto in A corrisponde un elemento y di B , che è la potenza di 2 con esponente x .

La legge di corrispondenza può essere espressa nella forma

$$y=2^x.$$

In modo analogo si può procedere relativamente al fenomeno della fissione.

Per descrivere, poi, il decadimento radioattivo, si è condotti ad introdurre una funzione alquanto diversa dalle precedenti: la base delle potenze non è più intera (è $\frac{1}{2}$), e il dominio A e il codominio B sono insiemi numerici più ampi degli interi.

Infatti il fenomeno descritto non si presenta più "a scatti": la massa M diminuisce continuamente, mentre scorre il tempo t ; si arriva così ad una tabella, dove M assume valori reali (razionali e irrazionali), quando si assegnano a t valori razionali. Traducendo la tabella in grafico (fig. 18), si ottiene una curva che "sembra" continua, ma non lo è perché ha infiniti "vuoti" in corrispondenza ai valori irrazionali di t .

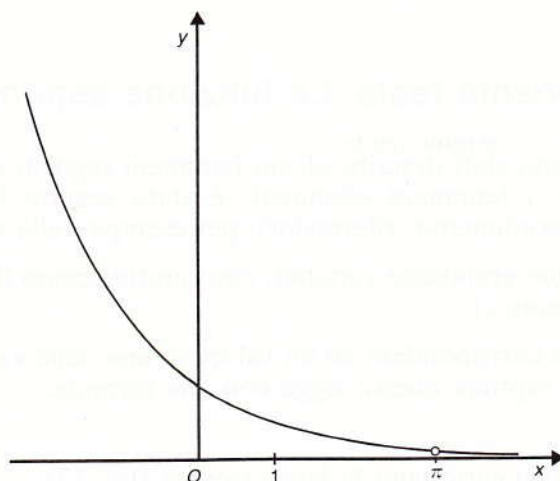


Fig. 18

L'idea intuitiva di "fenomeno continuo" e di "curva continua" conduce dunque a "riempire i vuoti" lasciati nel grafico e nella tabella e porta a compiere un secondo passo:

considerare le potenze ad esponente irrazionale.

Ma – ci si chiede – quale significato può avere un simbolo come

$$\left(\frac{1}{2}\right)^\pi = (0,5)^\pi?$$

Ricordiamo che finora sono state introdotte solo le potenze ad esponente razionale, definite nel modo seguente:

Potenze ad esponente intero positivo

$$a^m = \underbrace{a \ a \ a \ \dots \ a}_{m \text{ volte}} \quad (\text{con } m \text{ intero positivo})$$

Potenze con esponente zero

$$a^0=1$$

Potenze con esponente intero negativo

$$a^{-m}=\frac{1}{a^m} \text{ (con } m \text{ intero positivo)}$$

Potenze ad esponente frazionario

$$a^{\frac{p}{q}}=\sqrt[q]{a^p} \text{ (con } p \text{ e } q \text{ interi positivi).}$$

Per dare un significato anche al simbolo

$$(0,5)^\pi$$

si ragiona allora così: π è un numero irrazionale, che possiamo approssimare quanto vogliamo con numeri razionali come quelli seguenti

$$3; \quad 3,1; \quad 3,14 \dots$$

Perciò possiamo approssimare quanto vogliamo anche

$$(0,5)^\pi$$

valendoci dei seguenti numeri:

$$(0,5)^3=0,125; \quad (0,5)^{3,1}=\sqrt[10]{(0,5)^{31}}\cong 0,117; \quad (0,5)^{3,14}=(0,5)^{\frac{314}{100}}=\sqrt[100]{(0,5)^{314}}\cong 0,113; \dots$$

Questo ragionamento si può ripetere per approssimare quanto si vuole qualunque altra potenza con esponente irrazionale t : basta considerare le potenze che hanno per esponente i numeri razionali che approssimano t .

Abbiamo ora tutti gli elementi per compiere il terzo passo:

introdurre la funzione esponenziale.

Dal decadimento radioattivo siamo infatti condotti a considerare la seguente funzione:

- 1) il dominio A è l'insieme dei numeri reali,
- 2) il codominio B è l'insieme dei numeri reali,
- 3) ad ogni elemento x di A si fa corrispondere un solo elemento y di B , dato da

$$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$$

Questa funzione viene chiamata **funzione esponenziale con base $\frac{1}{2}$** .

In modo del tutto analogo si può determinare una funzione esponenziale considerando come base delle potenze altri numeri: 2 ; 3 ; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{4}$; $\sqrt{2}$; $\sqrt[3]{\frac{1}{5}}$...; in generale un qualunque numero reale positivo a . Si arriva così alla funzione esponenziale scritta nella sua forma più generale

$$y=a^x,$$

dove la base a può essere un qualunque numero reale positivo.

È importante osservare che, se si fissa come base delle potenze 0 o un numero reale negativo, non si può più scegliere l'insieme dei numeri reali né come dominio A né come codominio B . È facile capire perché riflettendo su qualche esempio numerico.

Fissiamo $a=0$, come base dell'esponenziale.

Se x è scelto nell'insieme dei reali positivi, si ottiene, per esempio:

$$0^2=0; \quad 0^{\frac{1}{2}}=\sqrt{0}=0; \quad 0^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{0^2}=0; \dots$$

Se x è negativo, non otteniamo il corrispondente valore di y ; risulta infatti:

$$0^{-1} = \frac{1}{0}; \quad 0^{-2} = \frac{1}{0^2} = \frac{1}{0}; \quad \dots$$

e sappiamo che la divisione perde significato quando il divisore vale zero. Inoltre, è privo di significato il simbolo

$$0^0.$$

Ci sono dunque infiniti valori reali di x per cui **non esiste** il corrispondente y . Possiamo tuttavia definire la funzione

$$y = 0^x$$

scegliendo come dominio A l'insieme dei reali positivi e mantenendo come codominio l'insieme dei numeri reali, anche se sappiamo che si otterrà sempre

$$0^x = 0.$$

Fissiamo un valore negativo per la base dell'esponenziale, per esempio $a = -2$.

Se x è scelto nell'insieme degli interi, si ha

$$(-2)^2 = 4; \quad (-2)^3 = -8; \quad (-2)^{-2} = \frac{1}{(-2)^2} = \frac{1}{4}; \quad (-2)^{-3} = \frac{1}{(-2)^3} = -\frac{1}{8}; \quad \dots$$

Si ottengono, cioè, valori della potenza y che appartengono sempre all'insieme dei reali. Ma se l'esponente x è scelto nell'insieme dei razionali, risulta, in alcuni casi:

$$\begin{aligned} (-2)^{\frac{1}{3}} &= \sqrt[3]{-2} \approx -1,26; & (-2)^{\frac{4}{5}} &= \sqrt[5]{(-2)^4} = \sqrt[5]{16} \approx 1,74; \\ (-2)^{-\frac{5}{3}} &= \frac{1}{\sqrt[3]{(-2)^5}} = \frac{1}{\sqrt[3]{-32}} \approx -0,32; \quad \dots \end{aligned}$$

ma in altri casi

$$\underbrace{(-2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-2}}_{\text{numero complesso}}; \quad \underbrace{(-2)^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{\sqrt{-8}}}_{\text{numero complesso}}; \quad \underbrace{(-2)^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{-8}}_{\text{numero complesso}}$$

Questi ultimi esempi mostrano che se x è una frazione ridotta ai minimi termini con denominatore pari, la corrispondente potenza non è un numero reale, ma un numero complesso.

Ci sono dunque infiniti valori razionali di x a cui non corrisponde un valore di y nell'insieme dei numeri reali. Perciò, se fissiamo come base dell'esponenziale un numero negativo e vogliamo scegliere come dominio A l'insieme dei numeri reali, siamo obbligati a scegliere come codominio B l'insieme dei numeri complessi. Lo schema di fig. 19 visualizza queste osservazioni.

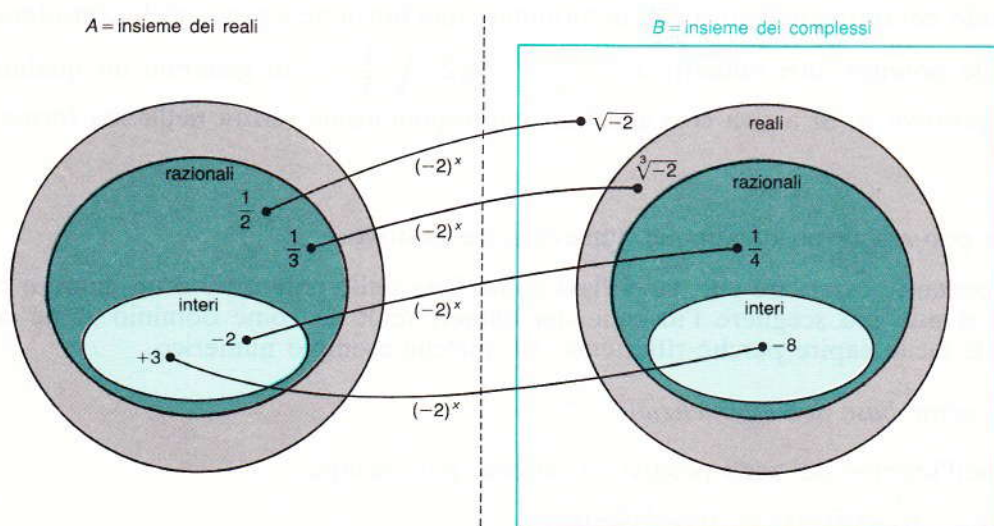


Fig. 19

È anche importante osservare che, nel caso in cui la base a dell'esponenziale è un numero negativo, la funzione non viene rappresentata sul piano cartesiano, dato che sull'asse delle y "non trovano posto" i numeri complessi.

Possiamo invece tracciare il grafico di qualunque funzione esponenziale che abbia come base a un numero reale positivo: si ottiene sempre una curva esponenziale; ce ne occuperemo nel prossimo paragrafo.

4. La curva esponenziale

Abbiamo visto come la funzione esponenziale si possa esprimere, in generale, nella forma

$$y = a^x,$$

dove a è un numero reale positivo e x ed y possono variare nell'insieme dei numeri reali. È interessante tracciare il grafico di funzioni esponenziali con basi maggiori o minori di 1 ed osservare le caratteristiche che presentano questi grafici (figg. 20 e 21).

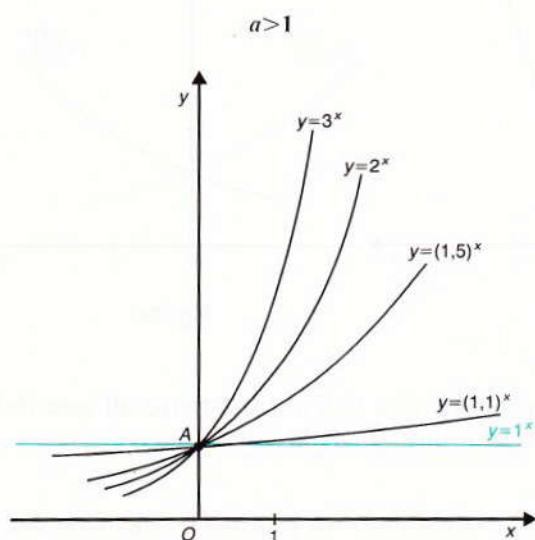


Fig. 20. Tutte le curve passano per uno stesso punto: $A(0,1)$.

Al crescere di x cresce anche y , cioè tutte le curve sono crescenti; più grande è la base e più rapida è la crescita.

Assegnando alla x valori positivi sempre più grandi, si ottengono valori positivi di y sempre più grandi.

Assegnando alla x valori negativi sempre più piccoli, si ottengono valori positivi di y sempre più piccoli.

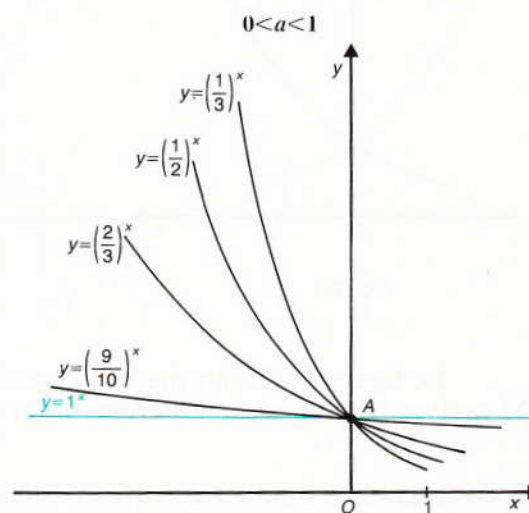


Fig. 21. Tutte le curve passano per uno stesso punto: $A(0,1)$.

Al crescere di x decresce la y , cioè tutte le curve sono decrescenti; più piccola è la base e più rapida è la decrescita.

Assegnando alla x valori negativi sempre più piccoli, si ottengono valori positivi di y sempre più grandi.

Assegnando alla x valori positivi sempre più grandi, si ottengono valori positivi di y sempre più piccoli.

Viene spontaneo di chiedersi se, ad un certo punto, queste curve incontrano l'asse delle x . Riflettiamo: anche se si prova a tracciare un grafico molto preciso, non si riesce ad indicare punti come $P(-15, 2^{-15})$ o come $Q(20, (\frac{1}{2})^{20})$ in modo che si distacchino dall'asse delle x , dato che risulta

$$2^{-15} \cong 0,00003 \quad \text{e} \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{20} \cong 0,0000009.$$

Ma il pensiero è più penetrante di qualunque matita: è chiaro che numeri del tipo

$$2^{-10}, \quad \text{o} \quad 3^{-100}, \quad \text{o} \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{200}, \dots$$

sono piccolissimi, ma più grandi di zero. E quindi la curva

$$y=a^x$$

non incontra l'asse delle x . Per qualunque base a reale positiva e per qualunque valore reale di x , risulta sempre

$$a^x > 0.$$

È anche interessante confrontare i grafici di funzioni esponenziali che hanno le basi reciproche (figg. 22, 23, 24).

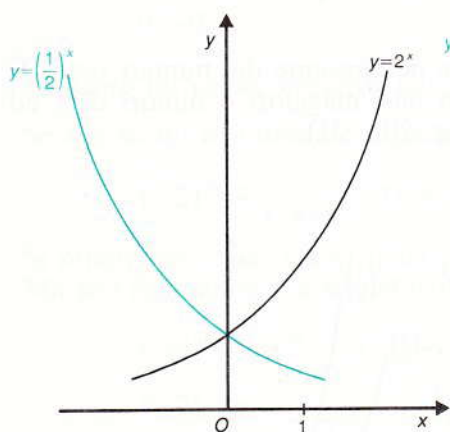


Fig. 22

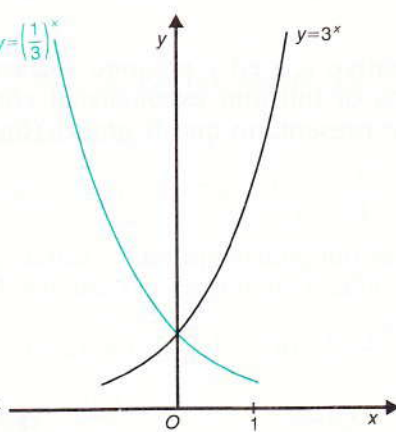


Fig. 23

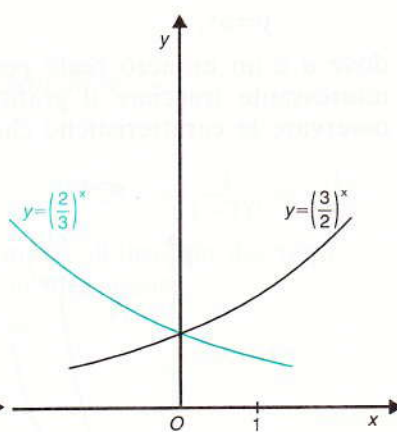


Fig. 24

Le figure mostrano che una curva è sempre simmetrica dell'altra rispetto all'asse delle y . Si capisce perché, se consideriamo, per esempio, un punto P della curva

$$y=2^x$$

e ne costruiamo il simmetrico rispetto all'asse delle y : otteniamo un punto P' (fig. 25), che si trova sulla curva

$$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x.$$

Del resto, questa simmetria rispetto all'asse delle y si poteva facilmente prevedere, osservando che risulta

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1^x}{2^x} = \frac{1}{2^x} = 2^{-x}$$

e

$$y=2^{-x}$$

è, appunto, una curva che si ottiene da

$$y=2^x$$

cambiando segno all'ascissa x e lasciando inalterata l'ordinata y .

Considerazioni analoghe valgono per tutte le coppie di curve esponenziali del tipo

$$y=a^x \quad \text{e} \quad y=\frac{1}{a^x}=a^{-x}.$$

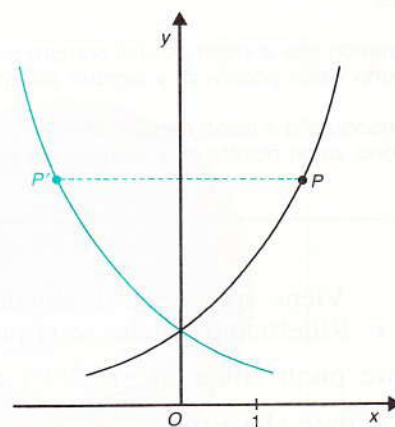


Fig. 25

5. L'inversa della funzione esponenziale: la funzione logaritmica

Il decadimento radioattivo, di cui abbiamo parlato nel paragrafo 2, è uno dei tanti fenomeni che conduce a considerare due tipi di problemi sulla legge esponenziale.

I) Dato un valore x dell'esponente, determinare il valore y della potenza, dato da

$$y = a^x.$$

II) Dato un valore x della potenza, risalire al valore y dell'esponente, in modo che risulti

$$x = a^y, \quad \text{ossia} \quad y = \log_a x.$$

Abbiamo visto che si passa da un problema all'altro, scambiando la grandezza assegnata con quella da ricavare, ossia scambiando la x con la y .

Successivamente, nel paragrafo 3, abbiamo osservato che la nozione intuitiva di "legge fisica" conduce, in alcuni casi, ad ambiguità, che si chiariscono solo basandosi su un più rigoroso concetto di funzione.

Abbiamo così introdotto la funzione esponenziale, precisando che:

- 1) il dominio A è l'insieme dei numeri reali;
- 2) il codominio B è l'insieme dei numeri reali;
- 3) la legge che ad ogni valore x di A fa corrispondere un solo y di B è data da

$$y = a^x.$$

Il grafico di una funzione esponenziale è riportato nella fig. 26. Abbiamo disegnato in colore il semiasse positivo dell'asse delle y per sottolineare il fatto che i valori di y , dati da

$$y = a^x$$

sono sempre positivi. Questo ci dice che se, inversamente, vogliamo risalire dalle potenze agli esponenti, dobbiamo scegliere i valori delle potenze nell'insieme dei reali positivi.

Siamo ora in grado di introdurre **la funzione logaritmica** nel modo seguente:

- 1) il dominio A è l'insieme dei reali positivi;
- 2) il codominio B è l'insieme dei reali;
- 3) ad ogni x di A corrisponde un solo y in B , tale che risulti

$$x = a^y, \quad \text{ossia} \quad y = \log_a x.$$

Risulta chiaro che, per passare dalla funzione esponenziale alla funzione logaritmica, "si inverte la legge di corrispondenza" (fig. 27); risulta cioè che **funzione esponenziale e funzione logaritmica sono l'una l'inversa dell'altra**.

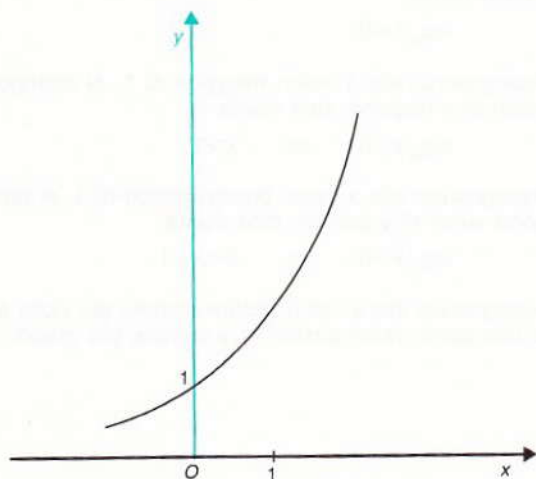


Fig. 26

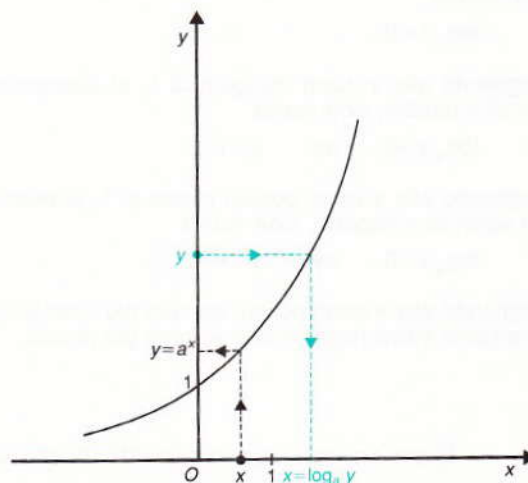


Fig. 27

6. La curva logaritmica

Abbiamo visto come la funzione logaritmica si possa esprimere in generale nella forma

$$y = \log_a x,$$

dove a è un qualunque numero reale positivo, e dove x deve essere scelto nell'insieme dei numeri reali positivi e y varia nell'insieme dei reali.

È interessante tracciare il grafico di funzioni logaritmiche con basi differenti. Si osservano alcune caratteristiche comuni alle varie curve (figg. 28 e 29).

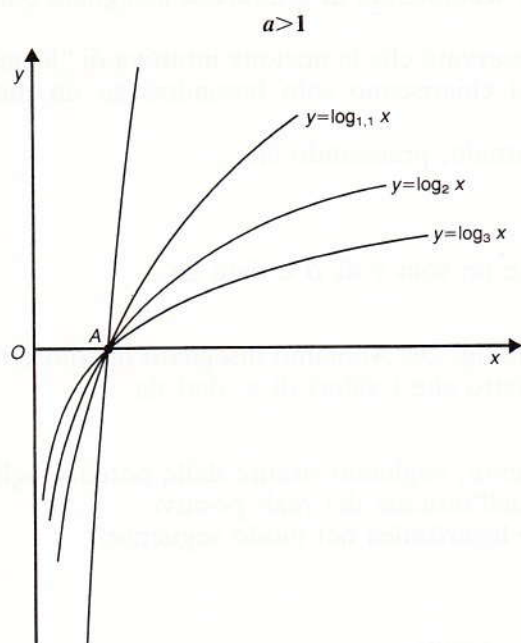


Fig. 28. La curva "occupa" solo il semipiano $x > 0$, dato che la funzione è definita solo se $x > 0$.

Assegnando alla x valori sempre più vicini a 0 la curva tende ad "adagiarsi" sull'asse delle y .

Tutte le curve passano per lo stesso punto: $A(1,0)$. Perciò risulta:

$$\log_a 1 = 0.$$

Assegnando alla x valori maggiori di 1, si ottengono valori di y positivi, cioè risulta

$$\log_a x > 0 \quad \text{se} \quad x > 1.$$

Assegnando alla x valori positivi minori di 1, si ottengono valori di y negativi, cioè risulta

$$\log_a x < 0 \quad \text{se} \quad 0 < x < 1.$$

Assegnando alla x valori positivi sempre più vicini a 0, si ottengono valori negativi di y sempre più piccoli.

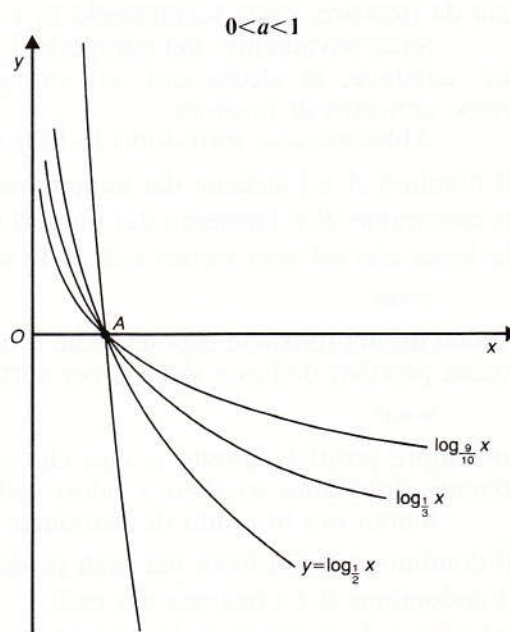


Fig. 29. La curva "occupa" solo il semipiano $x > 0$, dato che la funzione è definita solo se $x > 0$.

Assegnando alla x valori sempre più vicini a 0 la curva tende ad "adagiarsi" sull'asse delle y .

Tutte le curve passano per lo stesso punto: $A(1,0)$. Perciò risulta:

$$\log_a 1 = 0.$$

Assegnando alla x valori maggiori di 1, si ottengono valori di y negativi, cioè risulta

$$\log_a x < 0 \quad \text{se} \quad x > 1.$$

Assegnando alla x valori positivi minori di 1, si ottengono valori di y positivi, cioè risulta

$$\log_a x > 0 \quad \text{se} \quad 0 < x < 1.$$

Assegnando alla x valori positivi sempre più vicini a 0, si ottengono valori positivi di y sempre più grandi.

Ecco ancora due confronti interessanti.

I) Confronto di funzioni logaritmiche che hanno le basi reciproche. Si ottengono grafici come quelli riportati nelle figg. 30, 31, 32. In tutti i casi una curva è simmetrica dell'altra rispetto all'asse delle x .

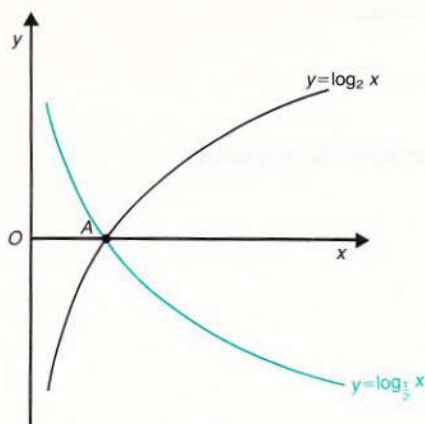


Fig. 30

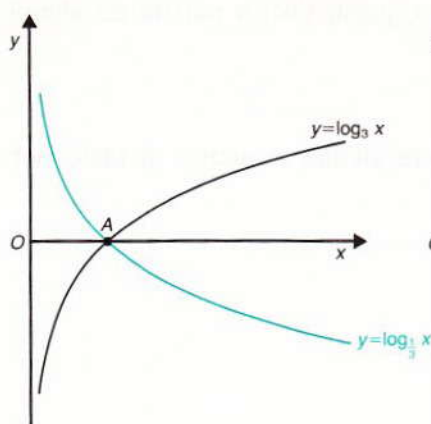


Fig. 31

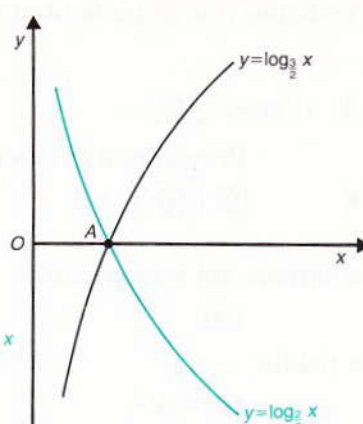


Fig. 32

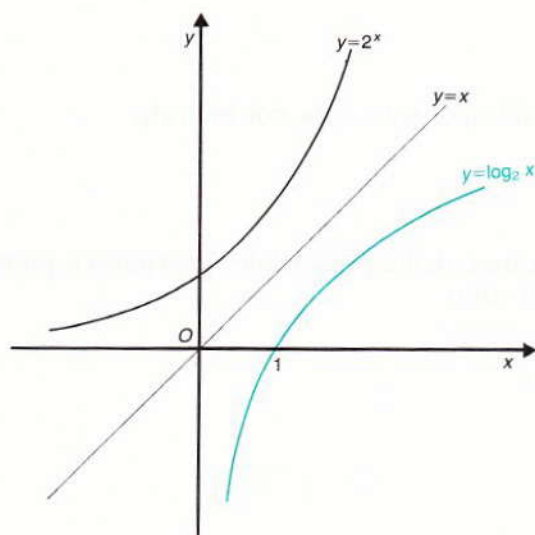


Fig. 33

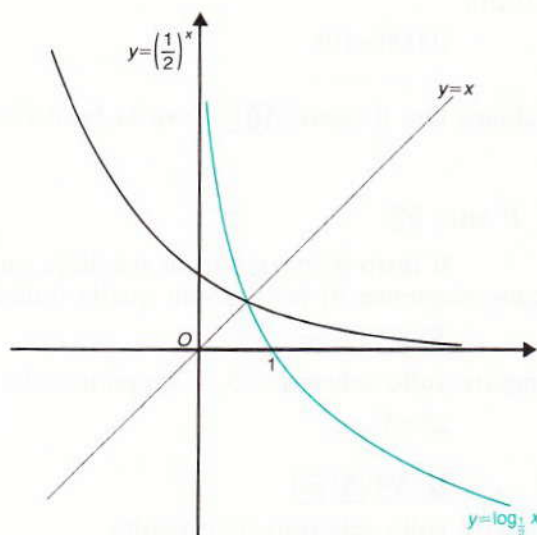


Fig. 34

II) Confronto fra una funzione logaritmica e la funzione esponenziale di uguale base. Si ottengono coppie di curve come quelle presentate nelle figg. 33 e 34. Le curve sono simmetriche rispetto alla bisettrice del I e III quadrante, dato che si passa dall'esponenziale alla logaritmica "scambiando la x con la y ".

7. Esponenziale e logaritmo con il calcolatore tascabile. Due basi privilegiate

Finora sappiamo calcolare il logaritmo di un numero solo da un punto di vista grafico, cioè basandoci sulla curva logaritmica. Ma è chiaro che questo procedimento risulta poco agevole e alquanto impreciso.

È immediato, invece, determinare il logaritmo di un numero con almeno sei cifre dopo la virgola, se si dispone di un calcolatore tascabile per uso scientifico.

Osservando la tastiera di un calcolatore tascabile è immediato scoprire dei tasti legati all'esponenziale e al logaritmo; troviamo infatti:

10^x , y^x , e^x , LOG , LN .

Vediamo ora come si usano questi tasti a partire da alcuni esempi:

A) Il tasto 10^x .

Proviamo a premere alcune sequenze di tasti, per esempio le seguenti:

- $2 \quad 10^x$

si ottiene sul visualizzatore

100

e risulta

$$100 = 10^2.$$

- $4 \quad 10^x$

si ottiene sul visualizzatore

10000

e risulta

$$10000 = 10^4.$$

.....

È chiaro che il tasto 10^x eleva la base fissa 10 all'esponente x da noi indicato

B) Il tasto y^x .

Il tasto y^x permette di scegliere anche la base dell'esponentiale. Proviamo a premere alcune sequenze di tasti, come quelle indicate qui sotto

- $5 \quad y^x \quad 2 \quad =$

compare sullo schermo 25, e sappiamo che risulta

$$25 = 5^2.$$

- $2 \quad y^x \quad 5 \quad =$

compare sullo schermo 32 e risulta

$$32 = 2^5.$$

.....

Si capisce che, valendosi del tasto y^x , si sceglie prima la base della potenza e poi l'esponente da assegnare alla base; premendo infine il tasto $=$, si ottiene il valore della potenza richiesta.

C) Il tasto e^x .

Meno evidente risulta l'uso del tasto e^x . Per averne un'idea, premiamo qualche sequenza di tasti come quelle indicate qui sotto

- $1 \quad e^x$;

compare sul visualizzatore

2.7182818.

- $2 \quad e^x$;

compare

7.3890561

e risulta

$$7.3890561 = (2.7182818)^2.$$

- $\boxed{0} \boxed{e^x}$;

compare

1.

Evidentemente il tasto $\boxed{e^x}$ consente di calcolare le potenze che hanno per base questo “strano” numero contrassegnato con la lettera “e”; si ha:

$$e^0=1$$

$$e^1=e=2,7182818$$

$$e^2=(2,7182818)^2$$

Conosceremo meglio questo numero nella Parte seconda, paragrafo 2; scopriremo che e – il numero di Nepero – è un numero irrazionale, di cui il calcolatore fornisce le prime sette cifre dopo la virgola. Capiremo anche perché questo numero è così importante da ... aver diritto ad un tasto apposito sul calcolatore.

D) Il tasto $\boxed{\text{LOG}}$.

“log” è, ovviamente, un’abbreviazione di “logaritmo”. Si capisce che questo tasto serve per calcolare il logaritmo di un numero; ma in quale base? È immediato scoprirlo premendo la sequenza di tasti indicata qui sotto:

- $\boxed{1} \boxed{0} \boxed{\text{LOG}}$;

si ottiene sul visualizzatore 1. Per capire il significato della sequenza ora indicata, riflettiamo che, se si scrive

$$y=\log_a x,$$

risulta

$$x=a^y;$$

in particolare, se si ha

$$1=\log_a 10,$$

vuol dire che risulta

$$a^1=10,$$

cioè

$$a=10.$$

Concludiamo così che il tasto $\boxed{\text{LOG}}$ permette di calcolare i logaritmi in base 10 o **logaritmi decimali**: basta impostare prima il numero scelto e poi premere il tasto $\boxed{\text{LOG}}$. In molti calcolatori il tasto $\boxed{\text{LOG}}$ è associato al tasto $\boxed{10^x}$; in tal caso si capisce subito che il tasto permette di calcolare i logaritmi decimali. Spesso si usa indicare con il simbolo

$$\log x$$

il logaritmo decimale di un numero; in questo testo seguiremo tale convenzione.

Siamo ora in grado di determinare il logaritmo decimale di vari numeri. Anche senza usare il calcolatore è facile scrivere che:

$$\begin{array}{lll} \log 100=2, & \text{dato che si ha} & 100=10^2, \\ \log 1000=3, & \text{dato che si ha} & 1000=10^3, \\ \log 0,1=-1, & \text{dato che si ha} & 0,1=10^{-1}, \\ \log 0,01=-2, & \text{dato che si ha} & 0,01=10^{-2}. \end{array}$$

Invece, occorre il calcolatore per conoscere i logaritmi dei numeri che non sono potenze di 10 ad esponente intero; ecco qualche esempio:

$$\begin{array}{lll} \log 2 \cong 0,30103 & , & \text{cioè} & 2 \cong 10^{0,30103} \\ \log 158 \cong 2,1986571 & , & \text{cioè} & 158 \cong 10^{2,1986571} \\ \log 0,5 \cong -0,30103 & , & \text{cioè} & 0,5 \cong 10^{-0,30103} \\ \log 0,07 \cong -1,154902 & , & \text{cioè} & 0,07 \cong 10^{-1,154902} \end{array}$$

E) Il tasto **LN**.

Si riesce a capire l'uso del tasto **ln** solo se in precedenza si sono individuate le potenze in base e . Se, infatti, premiamo la sequenza

2 **.** **7** **1** **8** **2** **1** **8** **LN**,

cioè le prime cifre del numero e , seguite dal tasto **LN**, sul visualizzatore compare 1.

Questo risultato suggerisce che il tasto serve per calcolare i logaritmi in base e . Infatti "ln" è l'abbreviazione di "logaritmo naturale", come spesso viene chiamato il logaritmo in base e . L'argomento verrà sviluppato nella Parte seconda, paragrafo 4.

Continuando ad osservare la tastiera del calcolatore, non troviamo però la possibilità di calcolare il logaritmo in basi diverse da 10 ed e .

Perché solo queste due basi sono "privilegiate"? E come si calcola, allora, il logaritmo in un'altra base, per esempio nella base $\frac{1}{2}$, come è richiesto nei problemi di datazione? Nei prossimi due paragrafi troveremo la risposta a queste domande.

8. Proprietà dei logaritmi decimali

L'importanza dei logaritmi in base 10 è legata al sistema di numerazione che comunemente usiamo: il **sistema posizionale in base 10**. Sistema posizionale vuol dire che, quando scriviamo un numero, le cifre hanno un significato diverso a seconda della **posizione** che occupano. Un esempio chiarirà meglio l'idea: quando scriviamo

2222,

la cifra 2 non ha sempre lo stesso significato. Se, infatti, leggiamo il numero da sinistra verso destra, il primo 2 indica 2 migliaia, il secondo 2 centinaia, il terzo 2 decine e l'ultimo 2 unità. Si ha dunque:

$$2222 = 2000 + 200 + 20 + 2,$$

ossia

$$2222 = 2 \cdot 1000 + 2 \cdot 100 + 2 \cdot 10 + 2,$$

o ancora

$$2222 = 2 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^0.$$

Questo è il significato della **base 10**: quando si legge il numero, ogni cifra deve essere moltiplicata per un'appropriata potenza di 10.

Se, poi, proviamo a svolgere qualche semplice calcolo, possiamo vedere "come giocano le potenze di 10" nelle varie operazioni; capiremo così perché i logaritmi decimali hanno avuto tanta importanza nello sviluppo della scienza moderna.

A) Moltiplicazioni

Eseguiamo qualche moltiplicazione; si ha:

$$100 \cdot 1000 = 10^2 \cdot 10^3 = 10^{2+3},$$

$$200 \cdot 3000 = 2 \cdot 100 \cdot 3 \cdot 1000 = 2 \cdot 10^2 \cdot 3 \cdot 10^3 = 6 \cdot 10^{2+3},$$

$$210 \cdot 3000 = (2 \cdot 100 + 1 \cdot 10)(3 \cdot 1000) = (2 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^1)(3 \cdot 10^3) = 6 \cdot 10^{2+3} + 3 \cdot 10^{1+3}.$$

Appare chiaro che la moltiplicazione di due numeri porta ad aggiungere gli esponenti delle relative potenze di 10. Perciò, se introduciamo i logaritmi in base 10, "trasformiamo" una moltiplicazione in un'addizione.

Vediamo meglio di che cosa si tratta, introducendo i logaritmi decimali nelle moltiplicazioni che abbiamo svolto prima.

Al posto di $100=10^2$, scriviamo $2=\log 100$,
 » $1000=10^3$, » $3=\log 1000$,
 » $100 \cdot 1000=10^{2+3}$, » $2+3=\log (100 \cdot 1000)$.

Così, invece di scrivere

$$\log (100 \cdot 1000)=2+3,$$

possiamo scrivere

$$\log (100 \cdot 1000)=\log 100+\log 1000. \quad (1)$$

Abbiamo ottenuto un'uguaglianza molto lontana da quelle che abitualmente ci propone l'algebra; esaminiamola più attentamente, fermandoci su alcuni punti.

I) Abitualmente in algebra, quando si scrive

$$abc1000,$$

si intende indicare in modo abbreviato la moltiplicazione fra il numero 1000 e i numeri rappresentati dalle lettere a, b, c . Ora, invece, con il simbolo

$$\log 1000$$

non si indica una moltiplicazione, ma si esprime in modo abbreviato la frase

«logaritmo decimale del numero 1000»

ossia

«esponente da assegnare alla base 10 per ottenere come potenza il numero 1000».

Bisogna dunque prestare particolare attenzione: quando si incontra il simbolo “log”, occorre ricordarne sempre il significato.

II) Le parentesi sono indispensabili nell'espressione

$$\log (100 \cdot 1000)=\log 100+\log 1000. \quad (1)$$

Infatti, secondo il Sistema Operativo Algebrico (S.O.A.), più operazioni indicate in un'espressione vanno svolte seguendo l'ordine indicato qui sotto:

- 1°) calcolo di logaritmi ed elevazioni a potenza,
- 2°) moltiplicazioni e divisioni,
- 3°) addizioni e sottrazioni.

Perciò, “se si dimenticano le parentesi” nell'espressione (1), cioè se si scrive:

$$\log 100 \cdot 1000,$$

si intende che si debbono svolgere le operazioni secondo il S.O.A., ossia:

1°) calcolare

$$\log 100=2;$$

2°) eseguire la moltiplicazione

$$\log 100 \cdot 1000=2 \cdot 1000=2000.$$

Invece, nell'espressione (1), le parentesi stanno ad indicare che si vuole alterare l'ordine stabilito dal S.O.A. e si intende svolgere i calcoli nel modo seguente:

1°) la moltiplicazione

$$100 \cdot 1000=100\,000$$

2°) la ricerca del logaritmo.

Ricordiamo dunque che **quando si vuole alterare l'ordine stabilito dal S.O.A., si deve far uso delle parentesi**.

Finora ci siamo occupati di una moltiplicazione molto particolare, dato che i numeri interessati erano potenze di 10 ad esponente intero. Ma è facile estendere i risultati ottenuti alla moltiplicazione fra due qualunque numeri positivi: basta ricordare (vedi paragrafo precedente) che qualunque numero positivo può essere espresso sotto forma di una potenza di 10; va-

lendosi del calcolatore tascabile. Si ha, per esempio:

$$\begin{array}{llll} \log 200 \cong 2,3 & \text{cioè} & 200 \cong 10^{2,3} & \\ \log 3000 \cong 3,5 & \text{cioè} & 3000 \cong 10^{3,5} & \end{array} > \text{perciò} \quad 200 \cdot 3000 \cong 10^{2,3+3,5}$$

Risulta dunque

$$\log (200 \cdot 3000) \cong 2,3 + 3,5,$$

ossia

$$\log (200 \cdot 3000) = \log 200 + \log 3000.$$

Siamo ora in grado di individuare un procedimento generale; dati due numeri reali positivi a e b , di cui i logaritmi decimali sono n ed m , si può scrivere:

$$\begin{array}{llll} \log a = m & \text{cioè} & a = 10^m & \\ \log b = n & \text{cioè} & b = 10^n & \end{array} > \text{perciò} \quad a \cdot b = 10^{m+n}.$$

Risulta dunque

$$\log (ab) = m + n,$$

ossia

$$\log (ab) = \log a + \log b.$$

Si conclude che **per determinare il logaritmo di un prodotto, basta addizionare i logaritmi dei singoli fattori.**

B) Divisione

Seguiamo ora un procedimento analogo al precedente per la divisione fra due numeri. Cominciamo ancora una volta con due esempi numerici: il 1° da esaminare senza il calcolatore, il 2° da svolgere valendosi del calcolatore.

$$\begin{array}{llll} 1^\circ) & 10\,000 = 10^4 & \text{cioè} & \log 10\,000 = 4 \\ & 1000 = 10^3 & \text{cioè} & \log 1000 = 3 \\ & 10\,000 : 1000 = 10^{4-3} & \text{cioè} & \log (10\,000 : 1000) = 4 - 3. \end{array}$$

Risulta dunque:

$$\log (10\,000 : 1000) = \log 10\,000 - \log 1000.$$

$$\begin{array}{llll} 2^\circ) & \log 5734 \cong 3,8 & \text{cioè} & 5734 \cong 10^{3,8} \\ & \log 123 \cong 2,1 & \text{cioè} & 123 \cong 10^{2,1} \end{array} > \text{perciò} \quad 5734 : 123 \cong 10^{3,8-2,1}$$

Scriviamo dunque

$$\log (5734 : 123) \cong 3,8 - 2,1,$$

ossia

$$\log (5734 : 123) = \log 5734 - \log 123.$$

In generale possiamo procedere così: dati due qualunque numeri reali positivi a e b , di cui i logaritmi decimali sono m ed n , si ha:

$$\begin{array}{llll} \log a = m, & \text{cioè} & a = 10^m & \\ \log b = n, & \text{cioè} & b = 10^n & \end{array} > \text{perciò} \quad a : b = 10^{m-n}.$$

Risulta dunque:

$$\log (a : b) = m - n,$$

ossia

$$\log (a : b) = \log a - \log b.$$

Si conclude che **per calcolare il logaritmo di un quoziente, basta calcolare la differenza fra il logaritmo del dividendo e il logaritmo del divisore.**

C) Elevazione a potenza

Cominciamo, come nel caso della divisione, da due esempi numerici, per arrivare ad un procedimento generale:

$$1^{\circ}) \quad 1000=10^3, \quad \text{cioè} \quad \log 1000=3$$

perciò

$$(1000)^2=(10^3)^2=10^{2 \cdot 3}, \quad \text{cioè} \quad \log (1000)^2=2 \cdot 3.$$

Risulta dunque

$$\log (1000)^2=2 \log 1000.$$

$$2^{\circ}) \quad \log 123 \cong 2,1, \quad \text{cioè} \quad 123 \cong 10^{2,1},$$

perciò

$$(123)^4 \cong (10^{2,1})^4 = 10^{2,1 \cdot 4}, \quad \text{cioè} \quad \log (123)^4 \cong 4 \cdot 2,1.$$

Risulta dunque

$$\log (123)^4 = 4 \cdot \log 123.$$

In generale, dato un qualunque numero reale positivo a , di cui m è il logaritmo decimale, possiamo scrivere

$$\log a = m, \quad \text{cioè} \quad a = 10^m,$$

perciò

$$a^p = (10^m)^p = 10^{p \cdot m}, \quad \text{cioè} \quad \log (a^p) = p \cdot m,$$

ossia

$$\log a^p = p \log a.$$

Si conclude che **per determinare il logaritmo di una potenza, basta moltiplicare l'esponente per il logaritmo della base.**

Questa proprietà vale per qualunque esponente p , perciò si ha, in particolare:

$$\log \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n} \log a,$$

dato che risulta

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}.$$

Riassumiamo le proprietà che abbiamo trovato, relativamente ai logaritmi decimali.

$$A) \log(ab) = \log a + \log b;$$

$$B) \log(a:b) = \log a - \log b;$$

$$C) \log(a^p) = p \log a.$$

Si capisce ora l'importanza della scoperta dei logaritmi in un'epoca – la fine del 1500 – in cui le ricerche scientifiche, specialmente in astronomia, richiedevano di eseguire “a mano” moltissimi calcoli con numeri con un elevato numero di cifre. I logaritmi rendevano tutti i calcoli molto più semplici, dato che moltiplicazioni e divisioni “si trasformavano” in addizioni e sottrazioni, e potenze e radici “si trasformavano” in moltiplicazioni e divisioni.

Ecco un esempio che fa capire come si eseguono i calcoli per mezzo dei logaritmi. Pensiamo di dover determinare “a mano” il risultato R dell'espressione seguente:

$$R = \frac{\sqrt[3]{(8,41)^2 \cdot 279,78}}{\sqrt[4]{(47,51)^3}}$$

Sembra davvero un'impresa impossibile! Ma, se calcoliamo il $\log R$, abbiamo

$$\begin{aligned} \log R &= \frac{1}{3} [2 \log 8,41 + \log 279,78] - \frac{3}{4} \log 47,51 = \\ &= \frac{2}{3} \log 8,41 + \frac{1}{3} \log 279,78 - \frac{3}{4} \log 47,51 \cong \end{aligned}$$

$$\cong \frac{2}{3} \cdot 0,92 + \frac{1}{3} \cdot 2,45 - \frac{3}{4} \cdot 1,68 \cong 0,17.$$

Ora i calcoli da eseguire sono molto più semplici; si ottiene:

$$\log R \cong 0,13$$

e perciò

$$R \cong 10^{0,148} \cong 1,7.$$

9. Dai logaritmi decimali ai logaritmi in un'altra base

Le proprietà dei logaritmi decimali che abbiamo trovato nel paragrafo precedente permettono di determinare il logaritmo di un numero in una base qualunque, a partire dai logaritmi in base 10.

Vediamo come si procede, cominciando da un esempio numerico. Si vuole determinare il valore m del $\log_3 14$. Questo vuol dire che si vuole esprimere il numero 14 sotto forma di potenza di 3, in modo che risulti:

$$14 = 3^m. \quad (1)$$

Ora, abbiamo visto che con il calcolatore si possono determinare solo i logaritmi decimali; conviene perciò scrivere sotto altra forma l'uguaglianza (1), che vogliamo stabilire. Invece di scrivere

$$14 = 3^m,$$

scriviamo

$$\log 14 = \log (3^m).$$

Adesso, valendoci della proprietà C stabilita nel paragrafo precedente, possiamo scrivere:

$$\log 14 = m \log 3;$$

così si determina facilmente il numero m cercato. Si ha:

$$m = \frac{\log 14}{\log 3} \quad \text{ossia} \quad \log_3 14 = \frac{\log 14}{\log 3}.$$

In generale, per calcolare il numero m , tale che

$$m = \log_c a,$$

si deve esprimere il numero a sotto forma di una potenza del numero c , in modo che risulti:

$$a = c^m. \quad (2)$$

Poiché sappiamo calcolare solo i logaritmi decimali, conviene considerare, invece della (2), l'uguaglianza seguente:

$$\log a = \log (c^m),$$

ossia

$$\log a = m \log c.$$

Si ricava così:

$$m = \frac{\log a}{\log c}$$

e, quindi, risulta:

$$\log_c a = \frac{\log a}{\log c}.$$

Si capisce allora che, per determinare i logaritmi in base $\frac{1}{2}$, come è richiesto dai problemi di datazione, si scriverà:

$$\log_{\frac{1}{2}} a = \frac{\log a}{\log \left(\frac{1}{2}\right)} \cong \frac{\log a}{-0,3}$$

dato che risulta $\log \left(\frac{1}{2}\right) \cong 0,3$.

In definitiva, basta dividere per un numero fisso ($-0,3$) il logaritmo decimale di un numero.

Il risultato ora ottenuto conduce ad estendere ai logaritmi in base qualunque le proprietà A,B,C stabilite nel paragrafo precedente per i logaritmi decimali. Infatti, dato che risulta

$$\log_c a = \frac{\log a}{\log c},$$

ponendo

$$n = \frac{1}{\log c},$$

possiamo scrivere:

$$\log_c a = n \log a.$$

Così, considerando la proprietà A del paragrafo precedente, possiamo scrivere:

$$\log_c (ab) = n \log (ab)$$

e dato che risulta

$$\log (ab) = \log a + \log b,$$

si ha pure

$$n \log (ab) = n \log a + n \log b,$$

ossia

$$\log_c (ab) = \log_c a + \log_c b.$$

In modo analogo possiamo procedere per le proprietà B e C stabilite nel paragrafo precedente; si ottengono le seguenti proprietà, valide qualunque sia il valore reale positivo attribuito alle lettere a, b, c :

$$\log_c a = \frac{\log a}{\log c};$$

$$\log_c (ab) = \log_c a + \log_c b;$$

$$\log_c (a:b) = \log_c a - \log_c b;$$

$$\log_c (a^p) = p \log_c a.$$

10. Cambiamento di base e trasformazioni della curva logaritmica

È interessante vedere come il cambiamento di base trasforma una curva logaritmica. Cominciamo perciò col tracciare (fig. 35) il grafico della funzione

$$y = \log x.$$

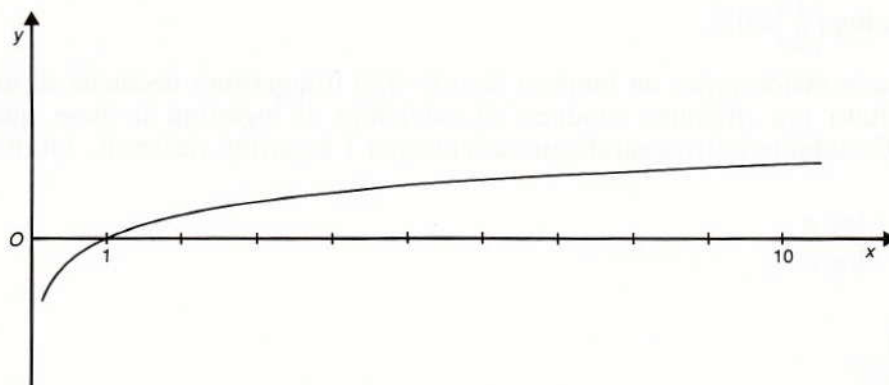


Fig. 35

Per passare, per esempio, dal $\log x$ al $\log_3 x$, si deve eseguire il calcolo seguente:

$$\log_3 x = \frac{\log x}{\log 3} \cong \frac{\log x}{0,5} = 2 \log x.$$

Quindi si passa da

$$y = \log x$$

a

$$y' = 2 \log x',$$

raddoppiando le ordinate e lasciando fisse le ascisse. Si opera dunque sulla curva logaritmica in base 10 la trasformazione descritta dalle equazioni seguenti:

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = 2y. \end{cases}$$

Si tratta di uno stiramento in direzione dell'asse delle ordinate (vedi cap. 1, Parte terza, paragrafo 1), che fa passare dalla curva in nero alla curva in colore di fig. 36.

Analogamente si ha

$$\log_2 x = \frac{\log x}{\log 2} \cong \frac{\log x}{0,3} \cong 3,3 \log x;$$

così la curva

$$y' = \log_2 x', \quad \text{cioè} \quad y' = 3,3 \log x',$$

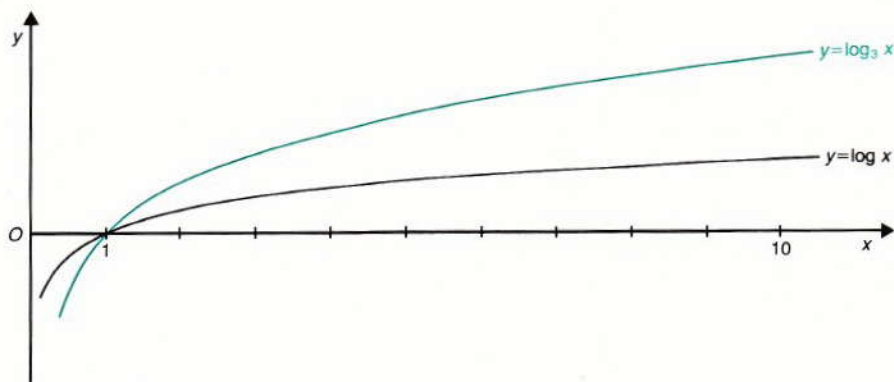


Fig. 36

si ottiene, a partire dalla

$$y = \log x$$

con una trasformazione descritta dalle seguenti equazioni

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = 3,3 x. \end{cases}$$

La trasformazione è ancora uno stiramento nella direzione dell'asse delle y .

In generale, risulta

$$\log_c x = \frac{\log x}{\log c}$$

e, ponendo

$$n = \frac{1}{\log c},$$

si può scrivere:

$$\log x = n \log x.$$

Si capisce così che si passa dalla

$$y = \log x$$

alla

$$y' = \log_c x' \quad \text{ossia} \quad y' = n \log x'$$

con una trasformazione descritta dalle equazioni seguenti

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = ny. \end{cases}$$

(1)

Si tratta sempre di una particolare trasformazione affine (vedi cap. 1, Parte terza, paragrafo 1): è uno stiramento nella direzione dell'asse delle y , se risulta $n > 0$.

Le curve di fig. 37 rappresentano, appunto, tante funzioni logaritmiche del tipo

$$y = \log_c x,$$

con la base $c > 1$; così si ha $\log c > 0$ (vedi paragrafo 6 di questo capitolo) e, quindi, risulta positivo il coefficiente n nelle (1).

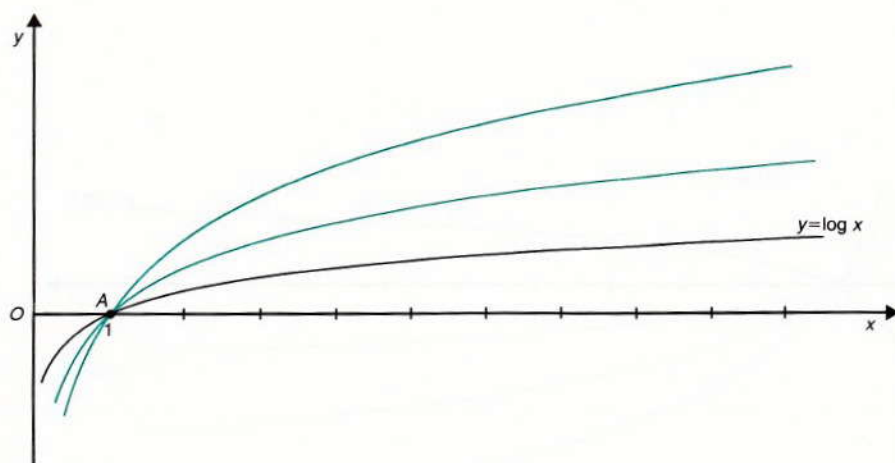


Fig. 37

Invece, in fig. 38 abbiamo disegnato una curva del tipo $y = \log_c x$, scegliendo come base un numero positivo più piccolo di 1, il numero $c = 0,3$; si ottiene così:

$$\log c \cong -0,5 \quad \text{e} \quad n = \frac{1}{\log c} \cong -2.$$

In tal caso le equazioni (1) diventano

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = -2y \end{cases}$$

e rappresentano una trasformazione che è composta da uno stiramento lungo l'asse delle y , che raddoppia le ordinate, e da una simmetria rispetto all'asse delle x , che cambia segno alle ordinate (vedi cap. 1, Parte terza, paragrafo 3).

In fig. 39 abbiamo poi disegnato tante curve logaritmiche con basi c positive e minori di 1: sono tutte ottenute dalla

$$y = \log x$$

per mezzo di una trasformazione del tipo (1) con $n > 0$; la trasformazione è sempre composta da uno stiramento lungo l'asse delle y e da una simmetria rispetto all'asse delle x .

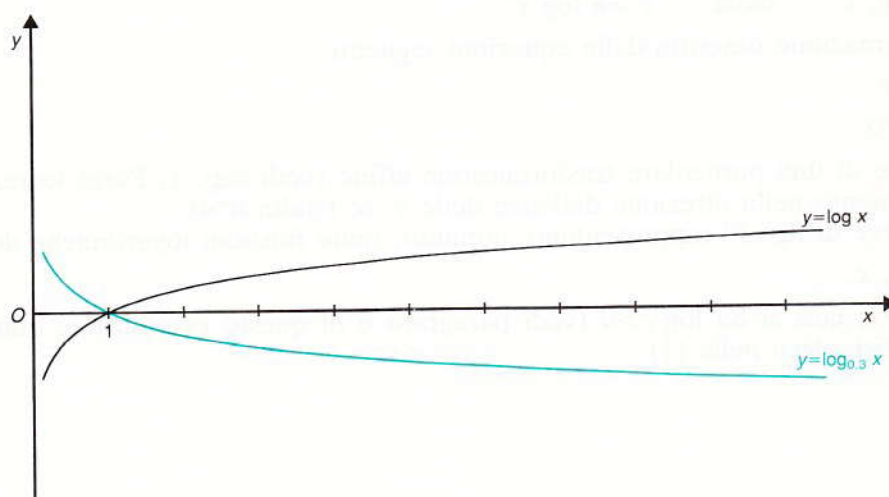


Fig. 38

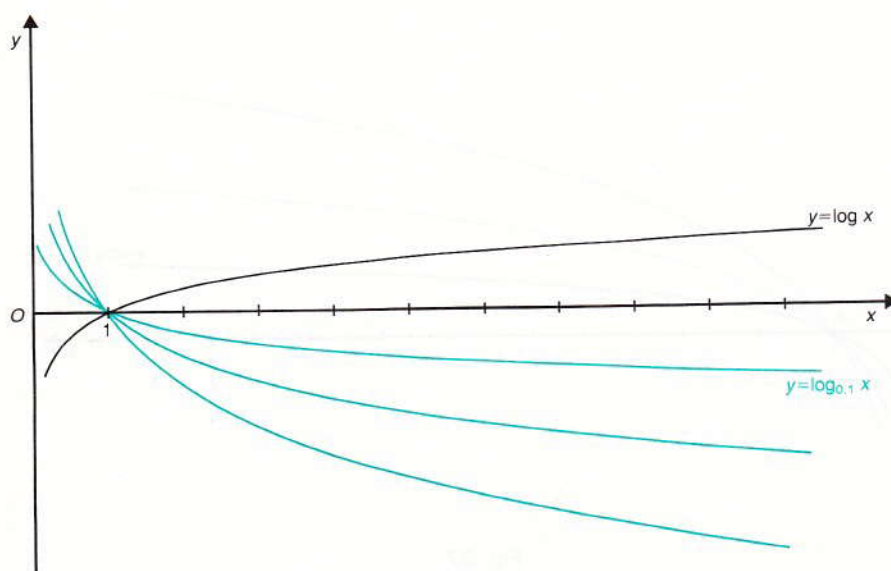


Fig. 39

3. Parte seconda

Esponenziale e logaritmo in base e

1. Un altro fenomeno regolato dalla legge esponenziale: la crescita di un capitale con interesse composto
2. Dall'interesse composto annuo all'interesse composto continuo. Il numero e
3. Da un processo di crescita continua alla funzione esponenziale in base e
4. La funzione esponenziale in base e . La sua inversa, il logaritmo naturale
5. Leggi di crescita e decrescita esponenziale e loro grafico
6. Alla scoperta di fenomeni regolati da una legge esponenziale. La scala semilogaritmica

1. Un altro fenomeno regolato dalla legge esponenziale: la crescita di un capitale con interesse composto

Cominciamo con un esempio numerico, seguendo l'aumento di un capitale di 1 milione, depositato in banca all'interesse annuo del $10\% = 0,1$, cioè al tasso del dieci per cento. Si ha, esprimendo il capitale C sempre in milioni:

$$\text{fine 1° anno: } C = 1 + 0,1 \cdot 1 = 1 + 0,1$$

$$\text{fine 2° anno: } C = (1 + 0,1) + 0,1(1 + 0,1) = (1 + 0,1)(1 + 0,1) = (1 + 0,1)^2$$

$$\text{fine 3° anno: } C = (1 + 0,1)^2 + 0,1(1 + 0,1)^2 = (1 + 0,1)^2(1 + 0,1) = (1 + 0,1)^3.$$

Si intuisce una legge generale: alla fine dell' n -mo anno si avrà un capitale C dato da

$$C = (1 + 0,1)^n.$$

È chiaro che se si deposita in banca un capitale iniziale di 5 milioni, si avrà:

$$\text{fine 1° anno: } C = 5 + 0,1 \cdot 5 = 5(1 + 0,1)$$

$$\text{fine 2° anno: } C = 5(1 + 0,1) + 0,1 \cdot 5(1 + 0,1) = 5(1 + 0,1)(1 + 0,1) = 5(1 + 0,1)^2$$

$$\text{fine 3° anno: } C = 5(1 + 0,1)^2 + 0,1 \cdot 5(1 + 0,1)^2 = 5(1 + 0,1)^2(1 + 0,1) = 5(1 + 0,1)^3.$$

Alla fine dell' n -mo anno si ha dunque un capitale C , dato da

$$C = 5 \cdot (1 + 0,1)^n. \quad (1)$$

Siamo ora in grado di risolvere dei problemi finanziari; eccone due.

1°) Quale sarà, nell'ultimo caso esaminato, il capitale dopo 20 anni?

È chiaro che, per risolvere il problema, basta calcolare

$$C = 5 \cdot (1 + 0,1)^{20}.$$

Si ha

$$C = 5 \cdot (1,1)^{20} \cong 5 \cdot 6,73 \cong 33,6 \text{ milioni.}$$

2°) Quanti anni occorrono per raddoppiare il capitale? Per risolvere il problema, si deve determinare il numero n nella (1), in modo che il capitale C sia $5 \cdot 2$; deve perciò risultare:

$$5 \cdot 2 = 5 \cdot (1 + 0,1)^n,$$

ossia

$$2 = (1,1)^n.$$

Si ottiene dunque:

$$n = \log_{1,1} 2 = \frac{\log 2}{\log 1,1} \cong \frac{0,30}{0,04} \cong 7 \text{ anni}$$

È chiaro che una legge economica è tanto più interessante quanto più è generale; cioè valida per qualunque tasso di interesse e per qualunque capitale iniziale. Indichiamo dunque con A il capitale iniziale e con r il tasso di interesse. Risulta:

$$\text{fine 1° anno: } C = A + r \cdot A = A(1 + r)$$

$$\text{fine 2° anno: } C = A(1 + r) + r \cdot A(1 + r) = A(1 + r)(1 + r) = A(1 + r)^2$$

$$\text{fine 3° anno: } C = A(1 + r)^2 + r \cdot A(1 + r)^2 = A(1 + r)^2(1 + r) = A(1 + r)^3.$$

Dopo n anni, si ha dunque un capitale C , dato da

$$C = A(1 + r)^n.$$

Possiamo ora trovare anche la regola generale per determinare il numero n di anni necessari a raddoppiare il capitale. Infatti il numero n di anni richiesto deve essere tale che risulti

$$2A = A(1 + r)^n,$$

cioè

$$2 = (1 + r)^n.$$

Si ha dunque:

$$n = \log_{(1+r)} 2 = \frac{\log 2}{\log (1+r)},$$

ossia

$$n = \frac{\log 2}{\log (1+r)}. \quad (2)$$

Quest'ultima formula, in cui non compare A , mostra che il tempo necessario per raddoppiare il capitale dipende esclusivamente dall'interesse r e non dal capitale iniziale A . Si ha, per esempio:

se $r=5\%=0,05$ $n=14$ anni

» $r=10\%=0,1$ $n=7$ anni

» $r=20\%=0,2$ $n=4$ anni

» $r=40\%=0,4$ $n=2$ anni

...

» $r=100\%=1$ $n=1$ anno.

Leggendo questi dati, si osserva che al crescere di r diminuisce ovviamente n , ma r ed n non sono inversamente proporzionali, dato che non si mantiene costante il loro prodotto. Risulta invece, per la (2)

$$n \log (1+r) = \log 2,$$

ossia

$$n \log (1+r) = 0,3.$$

2. Dall'interesse composto annuo all'interesse composto continuo. Il numero e

Esaminiamo ora la crescita del capitale da un punto di vista grafico. Fissiamo sempre uguale ad 1 milione il capitale iniziale ed immaginiamo che la banca pratichi lo straordinario interesse del 100%.

Seguendo il capitale C al passare del tempo t , osserviamo uno strano fenomeno di "crescita a salti": il capitale mantiene il valore

$$C=1$$

finché non finisce il 1° anno (fig. 1); alla fine del 1° anno il capitale "salta" al valore

$$C=2$$

e rimane costante finché non finisce il 2° anno (fig. 2).

Alla fine del 2° anno il capitale "salta" di nuovo al valore

$$C=4=2^2;$$

alla fine del 3° anno il capitale assume il valore

$$C=8=2^3;$$

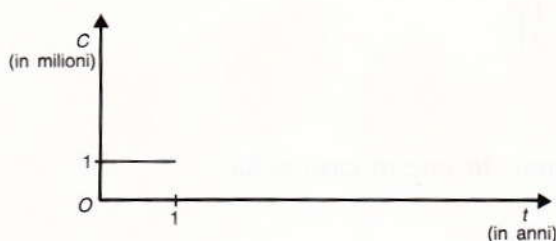


Fig. 1

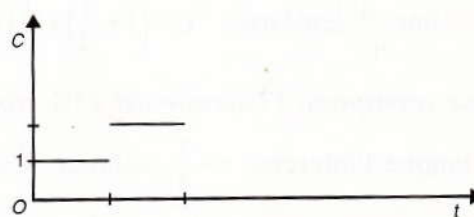


Fig. 2

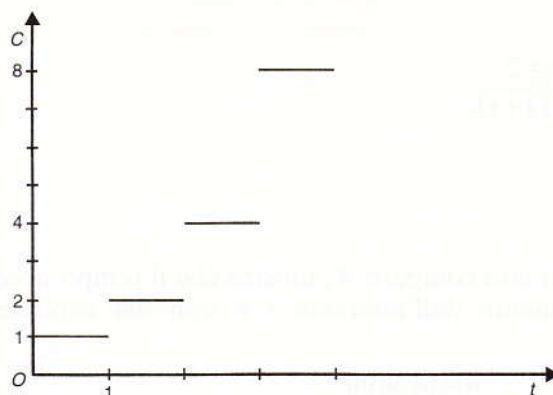


Fig. 3

... e così via. La rappresentazione grafica di questo fenomeno (fig. 3) è molto singolare.

La figura mostra che siamo di fronte ad un fenomeno discontinuo, ma di un tipo diverso dalla riproduzione dei batteri o dalla fissione, che conducevano ad un “grafico a punti” (Parte prima, paragrafo 1). Ora esiste il capitale C per valori reali positivi e negativi del tempo t (attribuendo ai valori negativi del tempo il significato di “passato”), ma la crescita del capitale avviene “a scatti”, ogni volta che la variabile t assume un valore intero.

Possiamo dunque descrivere il fenomeno mediante una funzione che viene precisata, assegnando:

- 1) come dominio A l'insieme dei numeri reali;
- 2) come codominio B l'insieme dei numeri reali;
- 3) la legge che ad ogni valore di t scelto in A fa corrispondere in B un valore di C è espressa dalla formula seguente:

$$C = 2^{\text{int}(t)},$$

dove con il simbolo $\text{int}(t)$ si intende “la parte intera di t ”, cioè il numero che si ottiene privando t delle cifre dopo la virgola.

Questo fenomeno di “raddoppiamento a scatti”, pur essendo lontano dalla realtà, permette di avvicinarsi in modo semplice ai processi di **crescita continua**.

Vediamo come si può ragionare. Immaginiamo che la banca non solo pratici lo straordinario interesse del 100%, ma sia anche disposta a “frazionare” l'interesse, considerando un interesse semestrale, trimestrale,...

Immaginiamo dunque di depositare in questa banca un capitale di 1 milione e valutiamo il capitale C che si ottiene **alla fine del 1° anno** in diverse situazioni.

a) *Viene corrisposto l'interesse del 100% annuo*

Abbiamo visto che alla fine del 1° anno si ha un capitale C , dato da

$$C = 1 + 1 = 2 \text{ milioni.}$$

b) *Viene corrisposto l'interesse del 50% semestrale*

Allora l'interesse annuo $r = 100\% = 1$ viene frazionato in un interesse $r = 50\% = \frac{1}{2}$ valutato 2 volte l'anno. In questo caso si ha:

$$\text{fine 1° semestre: } C = 1 + \frac{1}{2},$$

$$\text{fine 2° semestre: } C = \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2}\right) = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2.$$

c) *Viene corrisposto l'interesse del 25% trimestrale*

Si ha dunque l'interesse $r = \frac{1}{4}$, valutato 4 volte nell'anno. In questo caso si ha:

$$\text{fine 1° trimestre: } C = 1 + \frac{1}{4};$$

$$\text{fine 2° trimestre: } C = \left(1 + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{4}\right) = \left(1 + \frac{1}{4}\right)^2$$

$$\text{fine 3° trimestre: } C = \left(1 + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{4}\right)^2 = \left(1 + \frac{1}{4}\right)^3$$

$$\text{fine 4° trimestre: } C = \left(1 + \frac{1}{4}\right)^3 + \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{4}\right)^3 = \left(1 + \frac{1}{4}\right)^4$$

Riuniamo i risultati ottenuti in un unico schema:

| interesse | n. di volte n | capitale alla fine del 1° anno C |
|---------------|--------------------|---|
| 1 | 1 | $1+1=2$ |
| $\frac{1}{2}$ | 2 | $\left(1+\frac{1}{2}\right)^2=2,25$ |
| $\frac{1}{4}$ | 4 | $\left(1+\frac{1}{4}\right)^4 \approx 2,44$ |

Si intuisce una legge generale: se la banca corrisponde n volte l'anno un interesse $r = \frac{1}{n}$, si ha, alla fine del 1° anno, un capitale C , dato da

$$C = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Lo schema precedente mostra, inoltre, che al crescere di n cresce anche C e che ciò si verifica anche se l'interesse r diventa sempre più piccolo.

Che cosa succede aumentando sempre di più n ? Certamente l'interesse r diventa molto piccolo, ma questo piccolissimo interesse viene dato moltissime volte l'anno. Ci si chiede: C diventerà sempre più grande, infinitamente grande?

Per capire meglio la situazione esaminiamo qualche altro esempio numerico. Si ha:

| | | | | |
|-----|------------|--|------------------|----------------------|
| per | $n=6$ | $C = \left(1 + \frac{1}{6}\right)^6$ | $\approx 2,5216$ | interesse bimestrale |
| » | $n=12$ | $C = \left(1 + \frac{1}{12}\right)^{12}$ | $\approx 2,6130$ | » mensile |
| » | $n=365$ | $C = \left(1 + \frac{1}{365}\right)^{365}$ | $\approx 2,7146$ | » giornaliero |
| » | $n=8760$ | $C = \left(1 + \frac{1}{8760}\right)^{8760}$ | $\approx 2,7181$ | » orario |
| » | $n=525600$ | $C = \left(1 + \frac{1}{525600}\right)^{525600}$ | $\approx 2,7189$ | » ogni minuto |

Si osserva che C si mantiene sempre più piccolo di 3, anche se continua a crescere all'aumentare di n . E infatti si può dimostrare¹ che, anche se n diventa molto grande, risulta sempre

$$2 < C < 3.$$

Tuttavia, quando n aumenta sempre di più, consentendo al capitale di crescere ogni giorno, ogni ora, ogni minuto, ..., il valore di C non si avvicina a 3, ma ad un numero irrazionale, di cui abbiamo finora trovato dei valori approssimati.

È questo numero che si è indicato con il simbolo convenzionale " e " e si è chiamato "numero di Nepero". Risulta dunque che:

– se n diventa sempre più grande, l'espressione $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ si avvicina sempre di più al numero e , ossia

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow e$$

con $e \approx 2,7182818$.

¹ Per la dimostrazione v. esercizio 76, cap. 3, Parte terza.

Ora, dire che n diventa sempre più grande, significa che si attribuisce un interesse $r = \frac{1}{n}$ sempre più piccolo; ma questo piccolissimo interesse r viene dato, nel corso dell'anno, un numero n di volte sempre più grande. Gli "scatti di crescita" diventano così molto piccoli, ma molto frequenti, tanto frequenti che non riusciamo a distinguerli... Si intuisce che, se il capitale cresce in modo continuo, si ha, alla fine del 1° anno,

$$C=e \quad \text{con} \quad e=2,7182818\dots$$

3. Da un processo di crescita continua alla funzione esponenziale in base e

Nel paragrafo precedente abbiamo seguito un capitale iniziale di 1 milione, depositato in banca in una particolare situazione: viene corrisposto un tasso annuo di interesse composto

$$r=100\%=1$$

e, durante il 1° anno, questo tasso di interesse è frazionato, assegnando n volte un interesse

$$r=\frac{1}{n}.$$

Questo vuol dire che viene corrisposto un interesse

$$r=\frac{1}{n}$$

relativamente ad ogni periodo di tempo lungo proprio $\frac{1}{n}$ di anno. In questa situazione, alla fine del 1° anno, si accumula un capitale C , dato da

$$C=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n. \quad (1)$$

Si è visto poi che, se in questo particolare regime di capitalizzazione, si considerano valori di n sempre più grandi, si ha che:

$$C=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \rightarrow e.$$

Si è così arrivati ad intuire che, quando l'interesse è calcolato in modo continuo, si ha:

$$C=e,$$

alla fine del 1° anno.

Questo metodo – ci chiediamo – permette di determinare anche quanto vale il capitale C dopo i primi 6 mesi, dopo i primi 2 mesi, ...?

Per rispondere a questa domanda si può ragionare così: si è concordato di corrispondere un interesse $r=\frac{1}{n}$, relativamente ad ogni periodo di tempo lungo $\frac{1}{n}$ di anno. Perciò in un semestre, che equivale a $\frac{1}{2}$ di anno, verrà corrisposto un interesse $r=\frac{1}{2}=0,5$. E sarà questo interesse

$$r=0,5$$

ad essere frazionato m volte durante il semestre. Così, alla fine di questo periodo, si avrà un capitale C , dato da

$$C=\left(1+\frac{0,5}{m}\right)^m. \quad (2)$$

Se, anche in questo caso, vogliamo arrivare ad una situazione di crescita continua, dobbiamo far diventare m molto grande. E ora, come prevedere a quale valore si avvicina C al crescere di

m ? Possiamo procedere così: confrontiamo la (1) con la (2), cioè:

$$(1) \quad C = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad (2) \quad C = \left(1 + \frac{0,5}{m}\right)^m.$$

Si osserva che le due espressioni non sono molto differenti, dato che risulta

$$1 + \frac{0,5}{m} = 1 + \frac{1}{n}$$

purché si scelga

$$\frac{0,5}{m} = \frac{1}{n}$$

ossia

$$m = 0,5n.$$

Così, invece della (2), possiamo scrivere

$$C = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{0,5n} = \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]^{0,5} \quad (2')$$

Ora è chiaro che, quando m assume valori sempre più grandi, anche n assume valori sempre più grandi e l'espressione

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

si avvicinerà sempre più al valore e . E così l'espressione

$$\left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]^{0,5}$$

si avvicinerà sempre di più al valore

$$e^{0,5}.$$

Queste considerazioni portano a concludere che: se m diventa sempre più grande, si ha

$$C = \left(1 + \frac{0,5}{m}\right)^m \rightarrow e^{0,5}.$$

Si intuisce che se il capitale cresce in modo continuo

$$\text{dopo un tempo } t=0,5, \quad \text{si ha } C=e^{0,5}.$$

È facile ora ripetere questo ragionamento per determinare il capitale alla fine del 1° trimestre: ci si basa sul fatto che 1 trimestre equivale ad $\frac{1}{4}$ di anno e, quindi, viene corrisposto un interesse $r = \frac{1}{4} = 0,25$, da frazionare m volte. Si ottiene un capitale C , dato da:

$$C = \left(1 + \frac{0,25}{m}\right)^m \quad (3)$$

e, se m diventa sempre più grande,

$$C \rightarrow e^{0,25}.$$

Se poi il capitale cresce con continuità, si prevede che

$$\text{dopo un tempo } t=0,25, \quad \text{si ha } C=e^{0,25}.$$

Si comincia a vedere più chiaramente come si può descrivere un processo di crescita continua:

$$\text{per } t=1, \quad C = \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m \rightarrow e, \quad \text{se } m \text{ diventa sempre più grande}$$

$$\gg \quad t=0,5 \quad C = \left(1 + \frac{0,5}{m}\right)^m \rightarrow e^{0,5}, \quad \gg$$

$$\gg \quad t=0,25 \quad C = \left(1 + \frac{0,25}{m}\right)^m \rightarrow e^{0,25}, \quad \gg$$

.....

Per un qualunque valore t del tempo si ha che:

$$C = \left(1 + \frac{t}{m}\right)^m \rightarrow e^t \text{ se } m \text{ diventa sempre più grande.}$$

Basandosi su quest'ultimo risultato, si capisce che un capitale di 1 milione cresce, al passare del tempo t , secondo la legge

$$C = e^t,$$

se viene depositato ad un tasso di interesse continuo

$$r = 100\% = 1.$$

4. La funzione esponenziale in base e . La sua inversa, il logaritmo naturale

Le considerazioni svolte nel paragrafo precedente conducono a capire come la funzione esponenziale in base e sia fondamentale per descrivere fenomeni di crescita continua.

Ricordando gli argomenti presentati nei paragrafi 3,4,5 della Parte prima, a proposito della funzione esponenziale in una base qualunque, si può concludere che la funzione esponenziale in base e risulta definita nel modo seguente:

- 1) il dominio A è l'insieme dei numeri reali;
- 2) il codominio B è l'insieme dei numeri reali;
- 3) ad ogni elemento x di A corrisponde un elemento y di B , dato da

$$y = e^x.$$

Si tratta di una funzione, che, dietro una semplice formula, "nasconde" concetti certamente non immediati: la base e è un numero irrazionale e l'esponente x può assumere anche valori irrazionali.

Non è difficile avere un'idea del grafico di questa funzione, ricordando che risulta

$$2 < e < 3,$$

e che risulta quindi, per ogni valore reale di x ,

$$2^x < e^x < 3^x.$$

Il grafico della

$$y = e^x$$

resta dunque compreso fra le curve esponenziali d'equazione

$$y = 2^x \quad \text{e} \quad y = 3^x;$$

l'abbiamo tracciato, approssimativamente, in fig. 4.

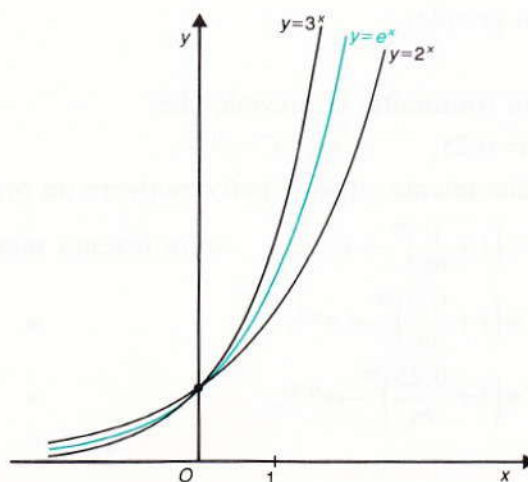


Fig. 4

La funzione

$$y=e^x$$

ha, come tutte le altre funzioni esponenziali, un'inversa: è la funzione

$$y=\log_e x,$$

che abitualmente si scrive nella forma

$$y=\ln x.$$

Il simbolo “ln” è l'abbreviazione di “logaritmo naturale”; il termine “naturale” è forse legato al fatto che i primi logaritmi introdotti da Nepero erano molto vicini ai logaritmi in base e . La funzione è definita nel modo seguente:

- 1) il dominio A è l'insieme dei reali positivi;
- 2) il codominio B è l'insieme dei reali;
- 3) ad ogni x , scelto in A , corrisponde, nell'insieme B , un valore y , tale che risulta

$$x=e^y \quad \text{ossia} \quad y=\ln x.$$

Nella fig. 5 sono disegnate sia la curva esponenziale che la logaritmica in base e . Le due curve sono simmetriche rispetto alla bisettrice del I e III quadrante.

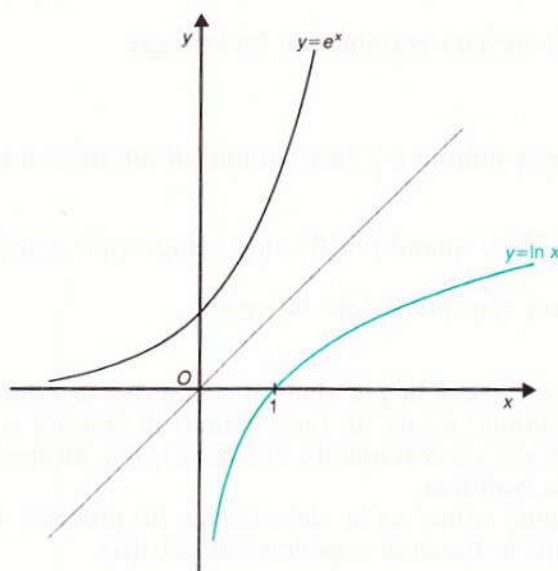


Fig. 5

5. Leggi di crescita e decrescita esponenziale e loro grafico

Nel paragrafo 3 è stata descritta una situazione di crescita continua molto particolare: un capitale di 1 milione viene depositato in banca all'interesse annuo

$$r=100\%=1$$

e questo interesse viene frazionato m volte durante un anno. In tal caso risulta che:

– per qualunque valore del tempo t ,
$$C=\left(1+\frac{t}{m}\right)^m;$$

– quando m diventa sempre più grande,
$$C=\left(1+\frac{t}{m}\right)^m \rightarrow e^t.$$

Così, se l'interesse 1 viene “infinitamente frazionato”, fino a produrre una crescita continua, il capitale C cresce, al trascorrere del tempo t , secondo la legge:

$$C=e^t.$$

Esaminiamo ora delle situazioni di crescita più generali.

- 1) Il capitale iniziale depositato è sempre di 1 milione, ma l'interesse annuo è r , invece che 1. Ora, frazionando m volte l'interesse r , si ha
– alla fine del 1° anno

$$C = \left(1 + \frac{r}{m}\right)^m \rightarrow e^r, \text{ quando } m \text{ diventa sempre più grande;}$$

- relativamente a qualunque valore t del tempo

$$C = \left(1 + \frac{rt}{m}\right)^m \rightarrow e^{rt}, \text{ quando } m \text{ diventa sempre più grande.}$$

Se poi si arriva ad una situazione di crescita continua, il capitale C è regolato dalla legge seguente

$$C = e^{rt}.$$

- 2) L'interesse annuale è del 100%, ma il capitale iniziale è di A milioni. Ora, per qualunque valore t del tempo, si ha (vedi paragrafo 1)

$$C = A \left(1 + \frac{t}{m}\right)^m \rightarrow Ae^t, \text{ quando } m \text{ diventa sempre più grande.}$$

Quando poi si arriva alla crescita continua, si ha la legge

$$C = Ae^t.$$

- 3) Il capitale iniziale è di A milioni e il tasso annuo di interesse è r . Ora si ha, per qualunque valore t del tempo:

$$C = A \left(1 + \frac{rt}{m}\right)^m \rightarrow Ae^{rt}, \text{ quando } m \text{ diventa sempre più grande.}$$

Così, se la crescita diventa continua, si ha la legge:

$$C = Ae^{rt}.$$

È chiaro che quest'ultima legge è la più generale: descrive la crescita continua di un capitale che inizialmente vale A milioni ed ha un tasso annuo di crescita r .

Il fenomeno descritto è certamente artificioso, ma fornisce un'utile schematizzazione di un processo di crescita continua.

Si capisce dunque come nella descrizione di processi di crescita continua siano particolarmente importanti le funzioni esponenziali del tipo

$$y = Ae^{rx} \tag{1}$$

dove A indica il valore che assume y , quando x vale 0; r indica il tasso di crescita della y , corrispondente ad un aumento unitario della x .

È facile ora ottenere il grafico di funzioni del tipo (1). Vediamo come si procede, a partire da alcuni casi particolari.

- 1) Si passa dal grafico di

$$y = e^x \tag{2}$$

ottenuto nel precedente paragrafo 4, al grafico di

$$y' = Ae^{x'} \tag{3}$$

con una trasformazione descritta dalle equazioni

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = Ay. \end{cases}$$

Si tratta di una particolare trasformazione affine (vedi Cap. 1, Parte terza, paragrafo 1): è uno stiramento nella direzione dell'asse delle y , se risulta

$$A > 1;$$

è una contrazione nella stessa direzione, se si ha:

$$0 < A < 1.$$

Le figg. 6 e 7 rappresentano alcune curve del tipo (3) nei due casi.

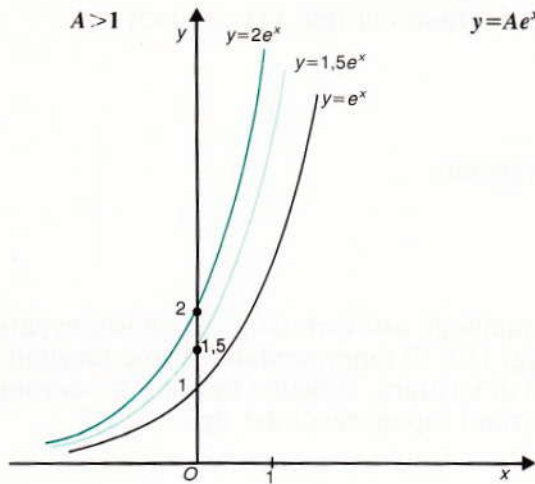


Fig. 6

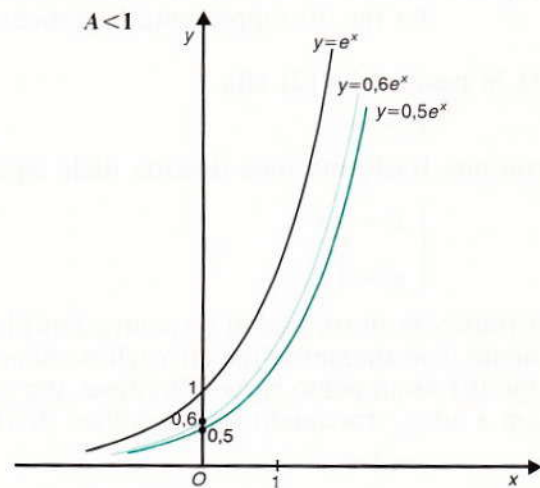


Fig. 7

2) Si passa dalla (2) alla

$$y' = e^{rx'}, \quad (4)$$

con una trasformazione descritta dalle equazioni seguenti:

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{r}x \\ y' = y; \end{cases} \quad (5)$$

si tratta ancora di una trasformazione affine: è uno stiramento lungo l'asse delle x , se risulta

$$0 < r < 1,$$

una contrazione nella stessa direzione, se si ha

$$1 < r.$$

Le figg. 8 e 9 rappresentano dei grafici di funzioni del tipo (4) nei due casi.

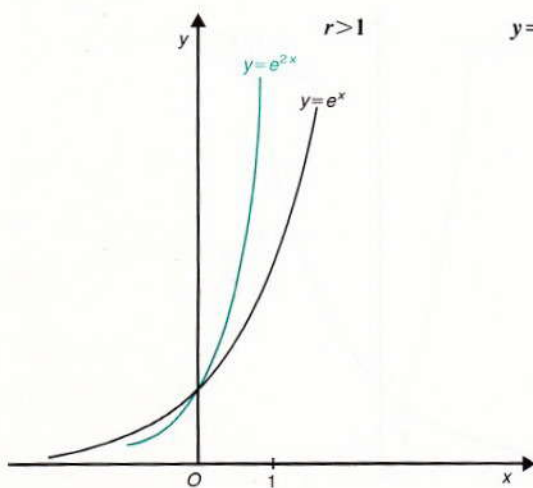


Fig. 8

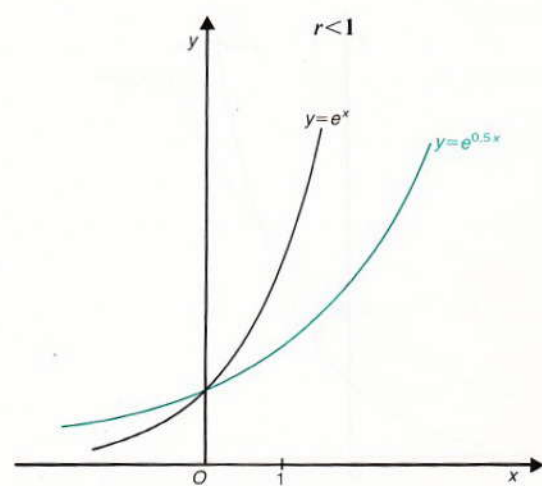


Fig. 9

Se poi una funzione del tipo (4) descrive un fenomeno di decrescita continua, risulta $r < 0$.

Per ottenere allora il grafico, bisogna ricordare che, in tale caso, la trasformazione affine (5) è composta di uno stiramento (o contrazione) nella direzione dell'asse delle x e di una simmetria rispetto all'asse delle y (vedi Cap. 1, Parte terza, paragrafo 3).

La fig. 10 rappresenta il grafico di alcune funzioni del tipo (4) con $r < 0$.

3) Si passa dalla (2) alla

$$y' = Ae^{rx}, \quad (6)$$

con una trasformazione descritta dalle equazioni seguenti:

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{r}x \\ y' = Ay; \end{cases}$$

si tratta ora di stiramenti (o contrazioni) lungo entrambi gli assi cartesiani, composti, eventualmente, con simmetrie rispetto agli stessi assi. Le figg. 11 e 12 rappresentano alcune funzioni del tipo (6) su un piano cartesiano dove, per semplicità di scrittura, abbiamo indicato le coordinate con x ed y , tracciando così il grafico di alcune funzioni esponenziali del tipo

$$y = Ae^x. \quad (1)$$

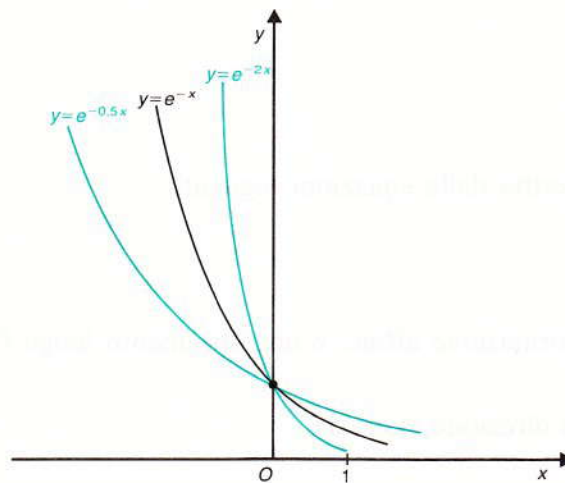


Fig. 10

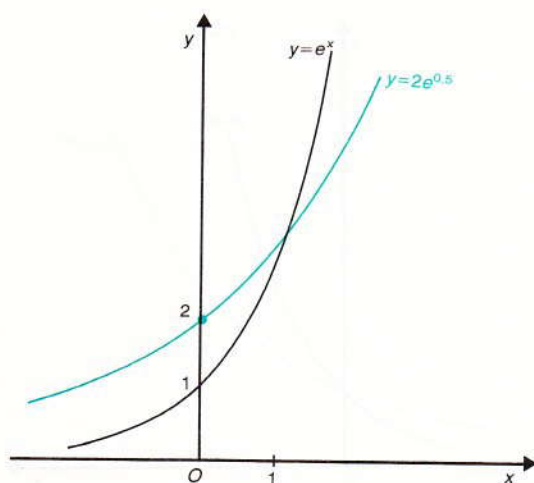


Fig. 11

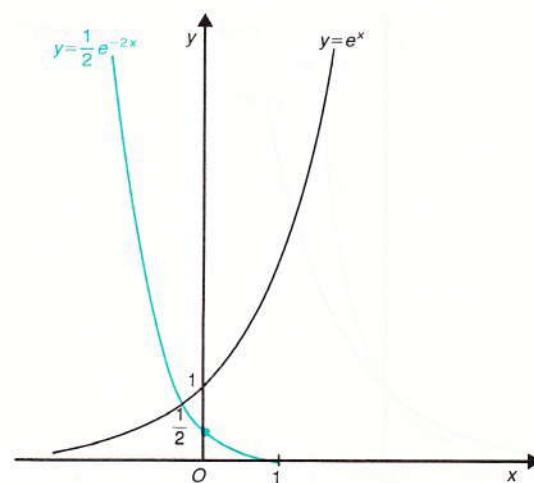


Fig. 12

6. Alla scoperta di fenomeni regolati da una legge esponenziale. La scala semilogaritmica

Cominciamo con l'esaminare un problema attuale: la crescita della popolazione mondiale. I seguenti dati approssimativi si riferiscono, appunto, alla popolazione mondiale, valutata ogni 10 anni, a partire dal 1900.

Riportiamo questi dati su un grafico (fig. 13). Se si interpreta la crescita della popolazione come un fenomeno continuo, si è condotti a raccordare i "punti sperimentali" con una linea continua sempre crescente, come quella di fig. 14; si ottiene una curva che "somiglia" ad un'esponenziale.

| anni | popolazione p (in miliardi) |
|------|----------------------------------|
| 1900 | 1 |
| 1910 | 1,2 |
| 1920 | 1,5 |
| 1930 | 1,8 |
| 1940 | 2,3 |
| 1950 | 2,7 |
| 1960 | 3,4 |
| 1970 | 4,2 |
| 1980 | 4,8 |

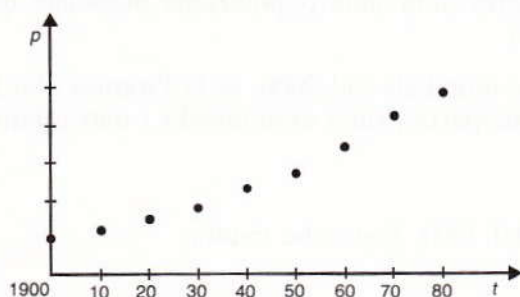


Fig. 13

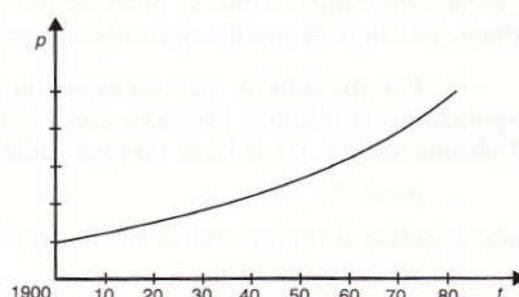


Fig. 14

Ci si chiede: come si può verificare se il grafico ottenuto è vicino ad una curva esponenziale?

Un metodo, molto usato nelle applicazioni, consiste nel tracciare un nuovo grafico nel modo seguente: si riporta sempre sull'asse delle ascisse il tempo, ma si riportano sull'asse delle ordinate i valori dei logaritmi (per esempio in base e) della popolazione. Ci si vale così di una scala logaritmica per le ordinate, mentre si lascia inalterata la scala sull'asse delle ascisse; si introduce dunque una **scala semilogaritmica**.

Abbiamo proprio seguito questo procedimento per tracciare il grafico di fig. 15, dove sono rappresentati i dati riportati nella tabella a fianco della figura.

| X =tempo valutato in anni, a partire dal 1900 | $y=\ln p$ |
|--|-----------|
| 0 | 0 |
| 10 | 0,18 |
| 20 | 0,41 |
| 30 | 0,59 |
| 40 | 0,83 |
| 50 | 0,99 |
| 60 | 1,22 |
| 70 | 1,44 |
| 80 | 1,57 |

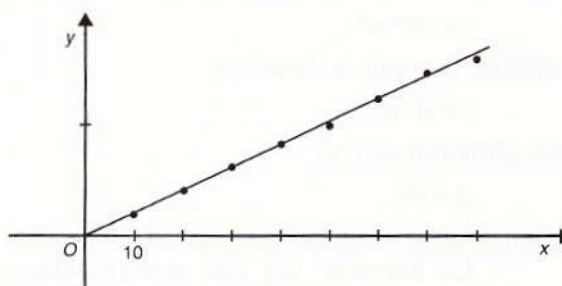


Fig. 15

Ci si accorge che si ottiene, approssimativamente, una retta. Nel Cap. 6 è presentato un metodo – il metodo dei minimi quadrati – che consente di individuare la retta che meglio “racconta” dei punti sperimentali. Qui ci limitiamo a calcolare, per varie coppie di dati a disposizione, il valore del rapporto $\frac{y}{x}$; risulta

$$\frac{y}{x} \cong 0,02.$$

Si ha quindi

$$y \cong 0,02x,$$

ossia

$$\ln p \cong 0,02 x,$$

da cui

$$p \cong e^{0,02x}.$$

Concludiamo che la crescita della popolazione mondiale in questo secolo può essere approssimativamente descritta da una legge esponenziale. Il tasso di incremento annuo è

$$r = 0,02 = 2\%.$$

È facile ora capire come si procede per dare delle previsioni sulla popolazione mondiale nel futuro, del tipo di quelle riportate spesso sui giornali

Per prevedere, per esempio, la popolazione mondiale nel 2000, si fa l'ipotesi che la popolazione continui a crescere con la stessa legge scoperta prima esaminando i dati relativi all'ultimo secolo. Ci si basa dunque sulla legge

$$p = e^{0,02x}$$

dove x indica il tempo, misurato in anni, a partire dal 1900. Dato che risulta:

$$2000 = 1900 + 100,$$

si ha

$$x = 100;$$

quindi si calcola

$$p = e^{0,02 \cdot 100} = e^2 \cong 7,4 \text{ miliardi!}$$

Questo primo esempio dà un'idea dell'efficacia della scala semilogaritmica e suggerisce delle considerazioni di carattere generale.

Se dei dati sperimentali, presentati nella forma di tante coppie (x, y) , sembrano legati da una legge esponenziale, conviene tracciare un grafico nel modo seguente: si riportano sull'asse delle ascisse i dati x e sull'asse delle ordinate i logaritmi delle y .

Se il grafico così ottenuto si avvicina ad una retta, come quella di fig. 16, possiamo dire che i dati sono legati da una legge esponenziale. Infatti la retta ha un'equazione del tipo

$$\ln y = mx + n$$

e questa si può scrivere nella forma

$$y = e^{(mx+n)}. \quad (1)$$

Eseguendo le operazioni indicate nella (1), si ha:

$$y = e^{mx} \cdot e^n;$$

si ottiene dunque la funzione

$$y = A \cdot e^{mx},$$

dove abbiamo scritto

$$A = e^n. \quad (2)$$

La funzione si traduce nel grafico di fig. 17.

La formula (2) può essere interpretata basandosi sulle considerazioni svolte nel paragrafo precedente. Diremo dunque che:

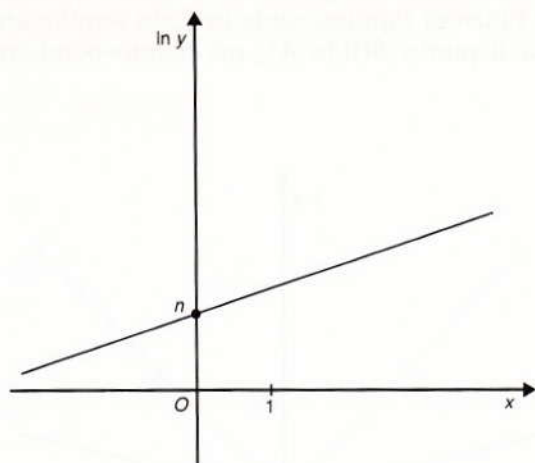


Fig. 16

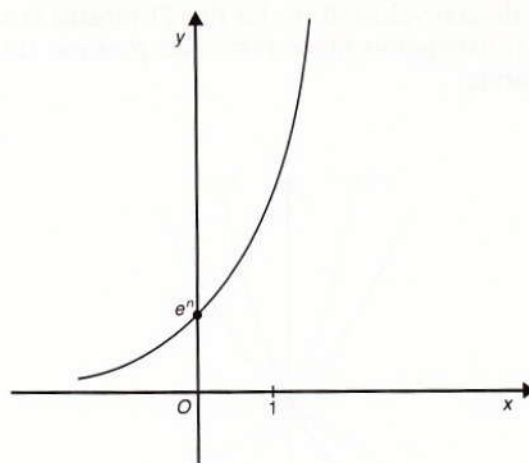


Fig. 17

- A indica il valore che assume la grandezza y , quando la grandezza x vale 0 ; infatti per $x=0$, si ha $y=Ae^0=A \cdot 1=A$.
- m indica il tasso di crescita (o decrescita) della grandezza y , in corrispondenza ad un aumento unitario della grandezza x .

La fig. 18 mostra i grafici di varie funzioni del tipo (2) con uguale valore di m e diversi valori del coefficiente A , mentre la fig. 19 mostra le stesse funzioni rappresentate in scala semilogaritmica: si ottengono tante rette parallele che hanno pendenza m ed intersecano l'asse delle ordinate nel punto B di coordinate $B(0, \ln A)$.

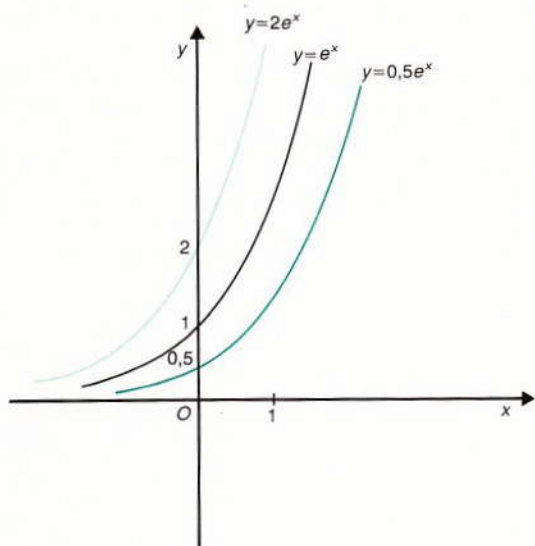


Fig. 18

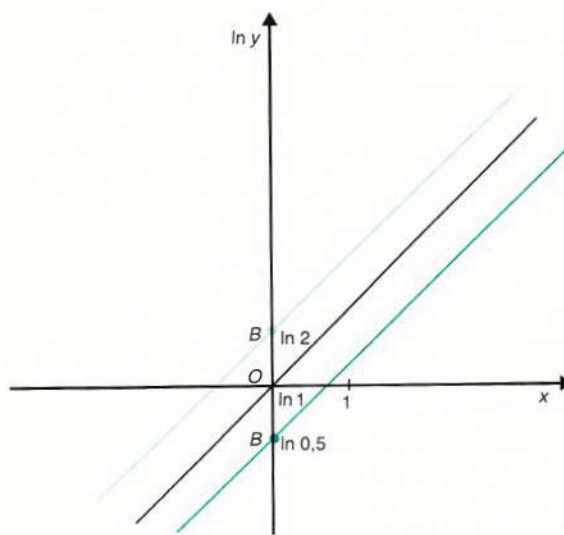


Fig. 19

La fig. 20 mostra invece i grafici di varie funzioni del tipo (2) con uguale coefficiente A e diversi valori di m . La fig. 21 mostra le stesse funzioni rappresentate in scala semilogaritmica: si ottengono tante rette che passano tutte per il punto $B(0, \ln A)$, ma hanno pendenza m variabile.

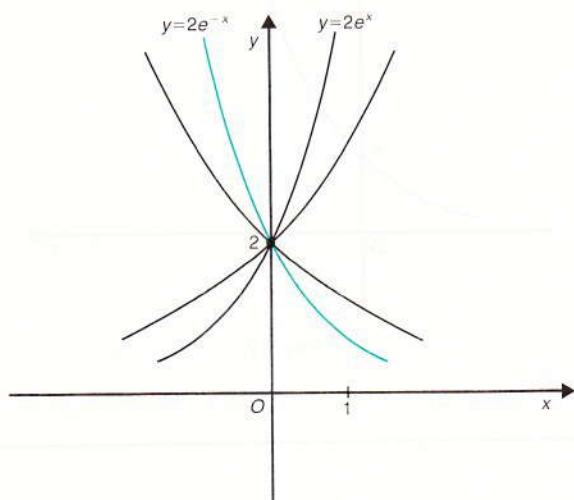


Fig. 20

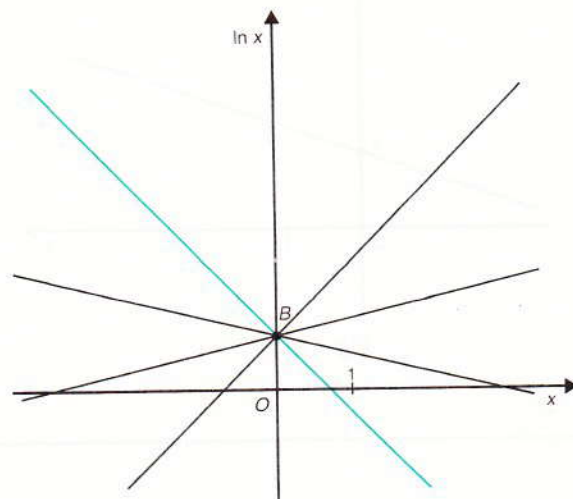


Fig. 21

3. Parte terza

Progressioni

1. Progressioni aritmetiche
2. Progressioni geometriche
3. Applicazioni della formula che dà la somma di progressioni geometriche illimitate di ragione minore di 1
4. Media aritmetica e media geometrica

Abbiamo accennato alle progressioni aritmetiche e a quelle geometriche nell'Introduzione storica, e si è visto che è stato proprio il confronto fra questi due tipi di successioni numeriche a dare origine alla nozione di logaritmo. Questa Parte terza è dedicata alle progressioni, un argomento che è, di per sé, interessante.

1. Progressioni aritmetiche

Ecco alcuni esempi di progressioni aritmetiche

- a) 0 1 2 3 4 ...
 b) 0 2 4 6 8 ...
 c) 1 2,5 4 5,5 7 ...

Progressione aritmetica è una successione di numeri tali che è costante la differenza fra un numero e il precedente.

La differenza costante prende il nome di *ragione*.

Consideriamo ora le progressioni indicate.

Il caso a) rappresenta la successione dei numeri naturali; la differenza fra un numero e il precedente è sempre uguale a 1.

Il caso b) rappresenta la successione dei numeri pari. Ora, la differenza fra un numero e il precedente è 2; ogni termine si ottiene quindi dal precedente aggiungendo 2.

Nel caso c) la ragione è 1,5; ogni termine si ottiene dal precedente aggiungendo 1,5.

In generale, se indichiamo con a il 1° termine e con d (differenza) la ragione, possiamo scrivere una progressione aritmetica in questa forma

$$a \quad a+d \quad a+2d \quad a+3d \dots a+(n-1)d \dots \quad (1)$$

Da questa scrittura risulta che l' n -mo termine (cioè quello che si trova al posto n) si ottiene dal 1° aggiungendo a questo la ragione ripetuta $(n-1)$ volte.

Indicando con $a_1^{(1)}$ il 1° termine e con a_n l' n -mo, si ha

$$a_n = a_1 + (n-1)d.$$

Per esempio, il 5° numero dispari sarà

$$a_5 = 1 + (5-1)2 = 9;$$

il 100-mo numero dispari sarà

$$a_{100} = 1 + (100-1)2 = 199.$$

È facile rendersi conto che le progressioni aritmetiche godono di alcune **proprietà**.

1) *Un qualunque termine di una progressione aritmetica è la media aritmetica fra i termini che lo comprendono.*

Ad esempio, nella progressione b) si ha

$$6 = \frac{4+8}{2}, \quad 8 = \frac{6+10}{2};$$

nella progressione c) si ha

$$5,5 = \frac{4+7}{2}, \quad 7 = \frac{5,5+8,5}{2}.$$

In generale, se a, b, c sono tre termini consecutivi, per la definizione di progressione aritmetica deve aversi

$$b-a=c-b$$

da cui risulta appunto

$$b = \frac{a+c}{2}.$$

⁽¹⁾ a_1 si legge "a con 1" e così a_n si legge "a con n".

2) È costante la somma di termini equidistanti da due termini fissi. Ad esempio, nella progressione b), prendendo come termini estremi i numeri 2 e 12, si hanno i seguenti risultati

$$2+12=14 \quad 4+10=14 \quad 6+8=14$$

In generale, basta tener presente la progressione scritta nella forma (1) per accorgersi che la somma di termini equidistanti da a e da $a+(n-1)d$ risulta sempre uguale a

$$2a+(n-1)d$$

L'ultima proprietà che abbiamo scoperto conduce ad una regola per calcolare la somma S_n di un numero qualunque n di termini consecutivi di una progressione aritmetica. Convienne, allo scopo, indicare i termini nel modo più generale:

$$a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4 \dots a_n \dots$$

dove il numero scritto in basso indica il posto che occupa un dato termine. Si ha:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n$$

o anche

$$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_3 + a_2 + a_1.$$

Addizionando membro a membro si ha:

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \dots + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1).$$

Ora, per la proprietà dei termini equidistanti da due termini fissi, tutte le somme parziali sono uguali a

$$a_1 + a_n;$$

risulta quindi

$$2S_n = n(a_1 + a_n)$$

da cui

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

Un esempio: la somma dei primi n numeri naturali sarà

$$S_n = \frac{n}{2}(1+n);$$

se i numeri sono 100 si ha

$$S_{100} = \frac{100}{2}(1+100) = 5050;$$

se i numeri sono 1000, si ha:

$$S_{1000} = \frac{1000}{2}(1+1000) = 500500.$$

2. Progressioni geometriche

Ecco degli esempi di progressioni geometriche:

a) $1 \quad 2 \quad 4 \quad 8 \quad \dots$

b) $\frac{1}{2} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{8} \quad \frac{1}{16} \quad \dots$

c) $5 \quad 15 \quad 45 \quad 135 \quad \dots$

Progressione geometrica è una successione di numeri tali che è costante il rapporto fra un numero e il precedente.

Il rapporto costante si chiama *ragione*; si suole indicare con q , quoziente.

I termini della progressione a), dove $q=2$, si possono scrivere così:

$$1$$

$$2=1 \cdot 2$$

$$4=(1 \cdot 2) \cdot 2=1 \cdot 2^2$$

$$8=(1 \cdot 2^2) \cdot 2=1 \cdot 2^3$$

$$\dots\dots$$

I termini della b), in cui $q=\frac{1}{2}$, così:

$$1$$

$$\frac{1}{2}=1 \cdot \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{4}=\left(1 \cdot \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{2}=1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\frac{1}{8}=\left[1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2\right] \cdot \frac{1}{2}=1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

$$\dots\dots$$

E i termini della c), in cui $q=3$, così:

$$5$$

$$15=5 \cdot 3$$

$$45=5 \cdot 3^2$$

$$135=5 \cdot 3^3$$

$$\dots\dots$$

In generale, una progressione geometrica che ha il primo termine uguale ad a e la ragione q , si scriverà:

$$a \quad aq \quad aq^2 \quad aq^3 \dots aq^{n-1} \dots$$

L' n -mo termine si ottiene moltiplicando il 1° per q^{n-1} ; indicando con a_1 il primo termine, e con a_n l' n -mo, si ha:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Per esempio il 10-mo termine della progressione c) sarà

$$a_{10}=5 \cdot 3^9.$$

Vediamo ora quale legame passa fra un termine di una progressione geometrica e i termini che lo comprendono.

Consideriamo tre termini consecutivi, a , b , c ; per la definizione di progressione geometrica deve risultare:

$$\frac{b}{a} = \frac{c}{b},$$

ossia deve essere

$$b^2 = a \cdot c$$

cioè

$$b = \sqrt{a \cdot c}.$$

Si scopre che in una progressione geometrica ogni termine è uguale alla radice quadrata, presa in valore assoluto, del prodotto dei termini che lo comprendono, cioè è uguale alla media geometrica dei termini che lo comprendono.

Calcoliamo ora la somma di n termini di una progressione geometrica, e cioè:

$$S_n = a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1}.$$

Conviene, assieme a questa espressione, considerare l'espressione che si ottiene moltiplicando i due membri per q , ossia:

$$qS_n = aq + aq^2 + aq^3 + \dots + aq^n.$$

Sottraendo dalla 1^a la 2^a e semplificando si ha:

$$S_n - qS_n = a - aq^n$$

ossia

$$(1 - q)S_n = a(1 - q^n)$$

da cui:

$$S_n = a \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

Osservazioni

Se q è maggiore di 1, al crescere di n S_n cresce molto rapidamente. Per esempio se

$$a=1, \quad q=2$$

si ha

$$S_2 = 1 \cdot \frac{1-2^2}{1-2} = 3$$

$$S_3 = 1 \cdot \frac{1-2^3}{1-2} = 7$$

$$S_4 = 1 \cdot \frac{1-2^4}{1-2} = 15$$

.....

$$S_{15} = 1 \cdot \frac{1-2^{15}}{1-2} = 32.767$$

.....

$$S_{21} = 1 \cdot \frac{1-2^{21}}{1-2} = 2.097.151$$

Se q è minore di 1, al crescere di n , S_n aumenta ma sempre più lentamente. Per esempio se

$$a=1, \quad q=\frac{1}{2}$$

si ha

$$S_2 = 1 \cdot \frac{1 - \frac{1}{2^2}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2} = 1,5$$

$$S_3 = 1 \cdot \frac{1 - \frac{1}{2^3}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 - \frac{1}{2^2} = 1,75$$

.....

$$S_6 = \frac{1 - \frac{1}{2^6}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 - \frac{1}{2^5} = 1,96875$$

.....

$$S_{21} = 2 - \frac{1}{2^{20}} = 1,99999$$

Ci si accorge che le somme

$$S_1 \quad S_2 \quad S_3 \dots$$

si distaccano fra loro sempre di meno, e “sembrano” tendere al numero 2. Di questo fatto ci si può rendere conto attraverso un esame della formula generale

$$S_n = a \frac{1-q^n}{1-q}.$$

Se infatti n è molto grande e $q < 1$, q^n ha un valore così piccolo che, al limite, si può trascurare; accade cioè che, quando n è molto grande,

$$S_n \text{ tende al valore } \frac{a}{1-q}$$

Si scrive anche:

$$S_n \rightarrow S \text{ con } S = \frac{a}{1-q}.$$

Nel caso precedente in cui $a=1$ e $q=\frac{1}{2}$,

$$S = \frac{1}{1-\frac{1}{2}}$$

ossia $S=2$

3. Applicazioni della formula che dà la somma di progressioni geometriche illimitate di ragione minore di 1

A) *Un'applicazione in aritmetica: la frazione generatrice di un numero periodico*

È interessante osservare che un numero periodico si può scrivere come somma di infiniti termini di una progressione geometrica; di qui la regola per trovare la frazione generatrice. Ecco qualche esempio.

- $0,(2) = 0,222\dots = 0,2 + 0,02 + 0,002 = \dots = \frac{2}{10} + \frac{2}{100} + \frac{2}{1000} + \dots$

Si ha una progressione geometrica in cui il 1° termine a_1 è $\frac{2}{10}$ e la ragione $q = \frac{2}{10}$. Applicando la formula

$$S = \frac{a}{1-q}$$

si ottiene

$$0,(2) = \frac{\frac{2}{10}}{1-\frac{2}{10}} = \frac{2}{9}.$$

- $4,(71) = 4 + 0,(71) = 4 + \frac{71}{100} + \frac{71}{10.000} + \dots$

La progressione ha

$$a_1 = \frac{71}{100}, \quad q = \frac{1}{100};$$

quindi

$$4,(71) = 4 + \frac{\frac{71}{100}}{1 - \frac{1}{100}} = 4 + \frac{71}{99} = \frac{4 \cdot 99 + 71}{99} = \frac{467}{99}.$$

• $1,3(2) = 1,322... = 1,3 + 0,02 + 0,002 + ... = 1,3 + \frac{2}{100} + \frac{2}{1000} + ...$

Si ha

$$a_1 = \frac{2}{100}, \quad q = \frac{1}{10};$$

quindi:

$$1,3(2) = 1,3 + \frac{\frac{2}{100}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{13}{10} + \frac{2}{90} = \frac{13 \cdot 9 + 2}{90} = \frac{119}{90}.$$

Si ottengono così delle regole per “risalire” dal numero periodico alla frazione generatrice.

B) Un'applicazione nella tecnica: il funzionamento di un altoparlante in una sala

Sappiamo che, dall'altoparlante, esce amplificata la voce di chi parla al microfono. Se l'amplificazione è di 10 volte, accade che una voce d'intensità V , diventerà uguale a $10V$. Ora, se si parla in una sala, per il fenomeno dell'eco, una parte di questo suono amplificato, per esempio $\frac{1}{30}$, torna indietro perché respinto dalla parete; precisamente tornerà al microfono $\frac{1}{30}$ di $10V$, ossia $\frac{1}{3}V$. Questo $\frac{1}{3}V$ viene a sua volta amplificato dal microfono, e quindi dall'altoparlante uscirà un'intensità pari a $10 \cdot \frac{1}{3}V$; di questo valore, $\frac{1}{30}$ torna indietro, e il processo continua.

Ecco come si può schematizzare il fenomeno: dall'altoparlante esce

| | |
|---|----------------------------------|
| $10V$ | inizialmente |
| $10 \cdot \frac{1}{3}V$ | dopo la 1ª riflessione del suono |
| $10 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 V$ | » » 2ª » » » |
| $10 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 V$ | » » 3ª » » » |
| ... | |

Si tratta di una progressione geometrica di cui il 1° termine è 10 e la ragione è $\frac{1}{3}$. Calcoliamo la somma, tenendo presente che la ragione è minore di 1, e quindi si può applicare la formula

$$S = \frac{a}{1-q}.$$

Si ha:

$$S = \frac{10}{1 - \frac{1}{3}} V = \frac{10}{\frac{2}{3}} V = 10 \cdot \frac{3}{2} V = 15V.$$

Si scopre così che, per effetto dell'eco, l'amplificazione non è di 10 volte ma di 15 volte.

4. Media aritmetica e media geometrica

Nel paragrafo 1 abbiamo visto che ogni termine di una progressione aritmetica è la media aritmetica dei numeri che lo comprendono. Per esempio, nella progressione

$$1 \quad 3 \quad 5 \quad 7 \quad 9 \quad 11 \quad 13 \quad 15 \dots$$

risulta che

$$9 = \frac{7+11}{2} = \frac{18}{2}.$$

Non occorre però precisare che si tratta dei 2 numeri che lo comprendono; risulta infatti che 9 è media aritmetica fra un certo numero di termini che lo precedono e lo stesso numero di termini che lo seguono. Si ha, per esempio:

$$9 = \frac{3+5+7+11+13+15}{6} = \frac{54}{6}.$$

Nel paragrafo 2 abbiamo visto che ogni termine di una progressione geometrica è la media geometrica dei termini che lo comprendono. Per esempio, nella progressione

$$1 \quad 2 \quad 4 \quad 8 \quad 16 \quad 32 \quad 64 \dots$$

risulta che

$$8 = \sqrt{4 \cdot 16} = \sqrt{64}.$$

Anche per le progressioni geometriche, non occorre limitarsi a 2 soli termini; basta scegliere lo stesso numero di termini a sinistra e a destra del numero 8. Si ha, prendendo in tutto 6 termini:

$$8 = \sqrt[6]{(1 \cdot 64) \cdot (2 \cdot 32) \cdot (4 \cdot 16)} = \sqrt[6]{64^3} = \sqrt[6]{64}.$$

Allontaniamoci ora dalle progressioni per studiare più attentamente i due tipi di medie: aritmetica e geometrica. È interessante calcolare media aritmetica e media geometrica – indichiamole con m_a e m_g – relativamente alla stessa coppia di numeri; ecco qualche esempio:

- numeri: 2 e 8

$$\begin{aligned} m_a &= \frac{2+8}{2} = 5 \\ m_g &= \sqrt{2 \cdot 8} = 4 \end{aligned} \quad m_a > m_g.$$

- numeri: 3 e 5

$$\begin{aligned} m_a &= \frac{3+5}{2} = 4 \\ m_g &= \sqrt{3 \cdot 5} = \sqrt{15} \approx 3,87 \end{aligned} \quad m_a > m_g$$

- numeri: 2,48 e 3,52

$$\begin{aligned} m_a &= \frac{2,48+3,52}{2} = \frac{6}{2} = 3 \\ m_g &= \sqrt{2,48 \cdot 3,52} = \sqrt{8,7296} \approx 2,95 \end{aligned} \quad m_a > m_g$$

Ci si chiede: risulta sempre

$$m_a > m_g?$$

Per avere una dimostrazione generale occorre passare dai numeri alle lettere. Siano a, b due numeri (positivi); vogliamo dimostrare che

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}. \quad (1)$$

Osserviamo subito che se si ha

$$b=a,$$

risulta

$$\frac{2a}{2} = \sqrt{a^2},$$

cioè, nella (1) vale il segno d'uguaglianza. Supposto allora $a \neq b$, dimostriamo che

$$\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$$

ossia che

$$a+b > 2\sqrt{ab}. \quad (2)$$

Eleviamo i due membri al quadrato; si ha

$$(a+b)^2 > 4ab$$

ossia

$$a^2 + b^2 + 2ab > 4ab$$

o anche

$$a^2 + b^2 - 2ab > 0.$$

Ora, questa disuguaglianza è valida perché il 1° membro, e cioè

$$(a-b)^2,$$

è sempre positivo.

La validità della disuguaglianza

$$(a+b)^2 > 4ab$$

ossia

$$a+b > 2\sqrt{ab}$$

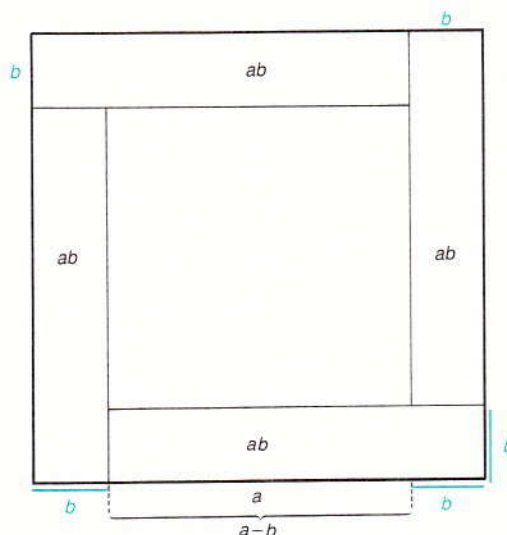


Fig. 1

risulta anche, in modo chiaro, dall'interpretazione geometrica illustrata in fig. 1: fissati due segmenti a, b (per esempio $a > b$), il disegno mostra che i 4 rettangoli di area $a \cdot b$ non "riempiono" il quadrato di area $(a+b)^2$; rimane, al centro, un quadrato di lato $(a-b)$ e quindi di area $(a-b)^2$.

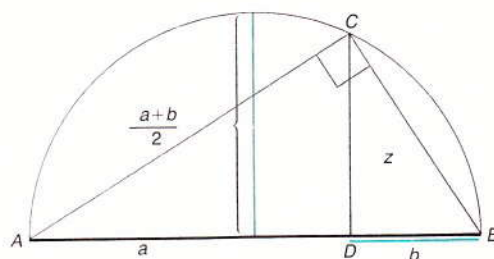


Fig. 2

Un altro modo, sempre suggerito dalla geometria, per "vedere" che risulta

$$\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab} \quad (1)$$

si basa su un teorema di Euclide. Riferiamoci alla fig. 2: il diametro del semicerchio è la somma di due segmenti lunghi a e b ; il raggio del semicerchio è quindi lungo

$$\frac{a+b}{2}.$$

Il segmento $CD = z$ è, per il teorema di Euclide applicato al triangolo rettangolo ABC , tale che

$$z^2 = a \cdot b.$$

Quindi, essendo $z < r$, vale la (1).