CAPITOLO NONO

EQUAZIONI, DISEQUAZIONI E SISTEMI DI 1° GRADO

Attività

Da un problema a un'equazione di 1° grado

Già alla scuola media si affrontano vari problemi che conducono a risolvere equazioni di 1° grado. Ecco un esempio su cui lavorare per riprendere l'argomento.

Tradurre un problema di carattere economico in un'equazione

Si esamina il bilancio di una piccola fabbrica di automobili, trovando, per esempio, le seguenti entrate ed uscite (in milioni di lire):

Entrate		Uscite	
Contributo dello Stato	8000	Salari	20000
Interesse sul capitale	4000	Costi d'impianto	2000
Ricavo per ogni auto	12	Costo del materiale e dell'energia per produrre un'auto	3
		Costo del collaudo e del trasporto di ogni auto	0,7
		Percentuale data al venditore, per ogni auto	0,3

Ecco un problema legato a questo bilancio: sapere quante automobili bisogna vendere ogni anno per chiudere il bilancio in parità, cioè per avere le entrate uguali alle uscite.

Conviene tradurre il problema in simboli, ragionando così:

- *si fissa l'attenzione sul numero da determinare, che è il numero di automobili da vendere in un anno;*
- *si indica questo numero sconosciuto, o meglio* incognito, *con la lettera* x;
- *si valutano le entrate totali, tenendo presente che:*
  1. *il contributo annuale dello Stato* (8000) *e gli interessi* (4000) *sono dati fissi, che non dipendono dal numero* x;
  2. *il ricavo totale dipende invece dal numero* x *e si ha che:*
     - *per* 1 *auto il ricavo è* 12 *milioni*
     - *per* 2 " " 12·2 "
     - *per* x " " 12·x "

- *si trova in definitiva che le entrate totali* E *sono date da:*

  E=............+............+............x

Procedendo in modo analogo, si calcolano le uscite totali U, *date da:*

U=............+............+............x+............x+............x

Ora, per avere il bilancio in parità, deve essere:

E=........

cioè:

$$8000+4000+12x=20\,000+2000+0,3x+3x+0,7x$$

Si ha così un'uguaglianza fra due espressioni che presentano delle caratteristiche particolari:

- compare, oltre ai numeri, la lettera x;
- la lettera x compare solo al 1° grado;
- l'uguaglianza diventa vera solo quando si sostituisce al posto della lettera x un particolare numero.

Questa uguaglianza è *un'equazione di 1° grado nell'incognita* x.

L'espressione a sinistra del simbolo «=» prende il nome di *primo membro dell'equazione*; l'altra espressione è il *secondo membro dell'equazione.*

Risolvere un'equazione di 1° grado

Risolvere l'equazione:

$$8000+4000+12x=20\,000+2000+0,3x+3x+0,7x$$

vuol dire trovare il numero che, sostituito a x, rende l'uguaglianza vera. Questo numero è la *soluzione dell'equazione.*

Ecco come si può procedere per risolvere l'equazione assegnata.

1. *Si dispongono al primo membro tutti i monomi che presentano la lettera* x, *considerando le uscite come «entrate negative»; si ha:*

   8000+4000+12x–0,3x–....x–....x=20 000+2000

2. *Si dispongono al secondo membro tutti i* termini noti, *cioè i monomi che non presentano la lettera* x, *considerando le entrate come «uscite negative»; si ha:*

   12x–0,3x–3x–0,7x=20 000+2000–............–............

3. *Si sommano i monomi simili e si ha:*

   ....x=............

4. *Si ottiene la soluzione, data da:*

   $x=\dfrac{............}{............}=1250$

Verificare se la soluzione ottenuta è corretta

Alla fine dei calcoli precedenti si è ottenuta la soluzione:

$$x=1250$$

Si conclude dunque che bisogna produrre ogni anno 1250 automobili per chiudere il bilancio in parità.

Per essere certi di aver trovato proprio il numero cercato conviene eseguire *la verifica dell'equazione*:

- *si sostituisce* 1250 *a* x *nel primo membro e si svolgono i calcoli; si ottiene:*

  primo membro=8000+4000+12·...........=**27 000**

- *si sostituisce 1250 a x nel secondo membro e si svolgono i calcoli; si ottiene:*

secondo membro=20 000+2000+0,3·..........+3·.........+0,7·...........=**27 000**

I due membri sono uguali e dunque 1250 è proprio la soluzione cercata. In altre parole, sostituendo 1250 a x si ottiene che il primo membro risulta uguale al secondo.

Esaminare un problema senza soluzioni

Il bilancio di una ditta di automobili si può trovare in una situazione diversa, dovuta, per esempio, ad una crisi economica: le spese sono aumentate, ma il governo ha bloccato il contributo annuale dato alla ditta ed il prezzo delle autovetture. Ecco un esempio numerico:

Entrate		Uscite	
Contributo dello Stato	8000	Salari	20000
Interesse sul capitale	4000	Costi d'impianto	2000
Ricavo per ogni auto	12	Costo del materiale e dell'energia per produrre un'auto	9
		Costo del collaudo e del trasporto di ogni auto	2,5
		Percentuale data al venditore, per ogni auto	0,5

Nella nuova situazione, il numero x di automobili che darebbe il bilancio in parità è la soluzione della seguente equazione:

.................................=.................................

cioè:

$$12\,000+12x=22\,000+12x \qquad (1)$$

da cui:

$0x=10\,000$ ossia $\mathbf{0=10\,000}$

L'ultima uguaglianza ottenuta non può mai essere vera; l'equazione in questo caso non ha soluzione, cioè è *impossibile*.

Questo vuol dire che il bilancio non potrà mai essere in parità e questo è evidente esaminando l'equazione (1): per ogni auto prodotta, si ha parità fra entrate ed uscite (12), mentre sono diverse le entrate e le uscite fisse (12 000 e 22 000).

Esaminare un problema con infinite soluzioni

Nel caso precedente per arrivare al bilancio in parità bisognerebbe cambiare qualcosa, per esempio aumentare le entrate fisse fino a raggiungere la cifra di 22 000 milioni. In tal caso si avrebbe la seguente uguaglianza:

........................=........................

ossia:

$0\cdot x=0$ cioè $\mathbf{0=0}$

che è sempre vera per qualunque valore di x.

Questo vuol dire che il bilancio chiuderà sempre in parità, qualunque sia il numero x di automobili prodotte.

In questo caso l'equazione non determina una sola soluzione e perciò prende il nome di equazione *indeterminata*.

1

Come si risolve un'equazione di 1° grado

Come si riconosce un'equazione di 1° grado

Un'equazione di 1° grado è un'uguaglianza fra due espressioni che presentano le seguenti caratteristiche:

- nelle espressioni compare, oltre ai numeri, la sola lettera x;
- la lettera x compare solo al 1° grado;
- l'uguaglianza diventa vera solo quando si sostituisce alla lettera x un particolare numero.

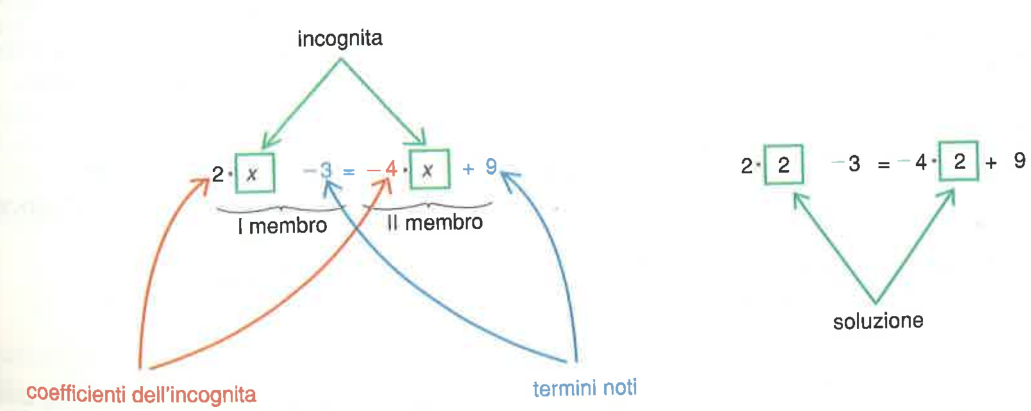
Ecco qualche esempio:

$2x-3=-4x+9 \qquad 3x=6 \qquad x=4$

Per descrivere un'equazione, si dice che (fig. 1):

- la lettera x è *l'incognita*;
- il coefficiente di un monomio in cui compare la lettera x è *il coefficiente dell'incognita*;
- i monomi in cui non compare la lettera x sono *i termini noti*;
- coefficienti dell'incognita e termini noti prendono anche il nome di *coefficienti dell'equazione*;
- l'espressione a sinistra del simbolo «=» è il *primo membro* dell'equazione;
- l'espressione a destra del simbolo «=» è il *secondo membro* dell'equazione.
- il numero che, sostituito a x, rende vera l'uguaglianza è la *soluzione* dell'equazione.

Figura 1
Come si descrive un'equazione di 1° grado



Così, per esempio, nell'equazione:

$2x-3=-4x+9$

si ha che (fig. 1):

- l'incognita è x;
- il primo membro è $2x-3$, dove 2 è il coefficiente dell'incognita e -3 il termine noto;
- il secondo membro è $-4x+9$, che presenta -4 come coefficiente dell'incognita e 9 come termine noto;
- la soluzione è 2, dato che risulta:

$2 \cdot 2-3=-4 \cdot 2+9$

Non è necessario indicare l'incognita con la lettera x; si può scegliere anche un'altra lettera dell'alfabeto; per esempio, le stesse equazioni indicate prima possono essere scritte nella forma seguente:

$2y-3=-4y+9 \qquad 3z=6 \qquad n=4$

Equazioni equivalenti

La più semplice equazione di 1° grado che si può scrivere è indicata per ultima negli esempi precedenti; è:

$x=4$

Questa equazione infatti indica direttamente la soluzione 4, dato che l'uguaglianza è vera solo se al posto della lettera x si scrive il numero 4.
Per individuare i coefficienti dell'incognita e i termini noti di questa equazione, bisogna leggerla nel modo seguente:

$1 \cdot x+0=0 \cdot x+4$

Così si trova che:

- al primo membro il coefficiente dell'incognita è 1 e il termine noto è 0;
- al secondo membro, invece, il coefficiente dell'incognita è 0 e il termine noto è 4 (la soluzione).

Da questa equazione si può passare ad una più complicata procedendo in due modi:

1. si aggiunge uno stesso monomio ai due membri; così si ha, per esempio:

$x+3=4+3 \qquad x+(-4)=4+(-4)$

$x+2x=4+2x \qquad x+(-3x)=4+(-3x)$

2. si moltiplicano i due membri per uno stesso numero, ottenendo, per esempio:

$3x=3 \cdot 4 \qquad (-2)x=(-2) \cdot 4$

$\frac{1}{4} \cdot x=\frac{1}{4} \cdot 4 \qquad -\frac{3}{2} \cdot x=-\frac{3}{2} \cdot 4$

Tutte le equazioni ottenute con questi due procedimenti presentano la stessa caratteristica: l'uguaglianza diventa vera solo sostituendo il numero 4 alla lettera x. In altre parole, tutte le equazioni hanno la stessa soluzione 4; in questo caso si dice che le equazioni sono fra loro *equivalenti*.

I ragionamenti seguiti hanno carattere generale e conducono alle seguenti conclusioni:

- *si dicono equivalenti due equazioni di 1° grado che hanno la stessa soluzione;*
- *aggiungendo uno stesso monomio ai due membri di un'equazione si ottiene un'equazione equivalente;*
- *moltiplicando per uno stesso numero i due membri di un'equazione si ottiene un'equazione equivalente.*

Risolvere un'equazione di 1° grado

Passare da un'equazione ad un'altra equivalente non ha molto senso nei casi precedenti: perché complicare un'equazione che fornisce direttamente la soluzione?
Le equazioni equivalenti sono invece fondamentali nel procedimento inverso, cioè per passare da un'equazione complicata ad un'equazione che indica direttamente la soluzione.
Ecco due esempi:

$x-2=3$ è equivalente a $x-2+\mathbf{2}=3+\mathbf{2}$ cioè $x=5$

$\frac{1}{3}x=2$ è equivalente a $\mathbf{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot x=\mathbf{3} \cdot 2$ cioè $x=6$

Questi esempi suggeriscono *il metodo per risolvere un'equazione di 1° grado: passare dall'equazione assegnata ad un'equazione equivalente che presenta le seguenti caratteristiche:*

- *al* primo *membro il coefficiente dell'incognita è 1 e il termine noto è 0;*
- *al* secondo *membro il coefficiente dell'incognita è 0 e il termine noto è la soluzione.*

Due esempi di equazione da risolvere

Conviene subito mettere in pratica il procedimento lavorando su due esempi.

I. Per risolvere l'equazione:

$\frac{1}{4}x+3=5$

si può seguire un procedimento organizzato in più passi successivi nel modo seguente:

1. Per avere un'equazione che presenta al primo membro 0 come termine noto, bisogna aggiungere al primo membro -3 (che è l'opposto di 3).
Ma, per ottenere un'equazione equivalente, bisogna aggiungere -3 anche al secondo membro. Ecco allora l'equazione equivalente ottenuta:

$\frac{1}{4} \cdot x+3+(-3)=5+(-3)$

cioè $\frac{1}{4} \cdot x=2$

2. Per avere un'equazione che presenta al primo membro 1 come coefficiente dell'incognita, bisogna moltiplicare il primo membro per 4 (cioè per il reciproco di $\frac{1}{4}$);
ma per avere un'equazione equivalente bisogna moltiplicare per 4 anche il secondo membro.
Si ottiene così l'equazione equivalente:

$4 \cdot \frac{1}{4} \cdot x=4 \cdot 2$ cioè $x=8$

La soluzione dell'equazione è dunque:

$x=8$

II. Risolvere l'equazione:

$8x+3=5x-9$

1. Per avere un'equazione equivalente che presenta al secondo membro 0 come coefficiente dell'incognita, bisogna aggiungere ai due membri il monomio $-5x$ (che è l'opposto di $5x$); così si ha:

$8x-5x+3=5x-5x-9$ cioè $3x+3=-9$

2. Per avere un'equazione equivalente che presenta al primo membro 0 come termine noto bisogna aggiungere ai due membri il monomio -3 (che è l'opposto di 3); perciò si ha:

$3x+3-3=-9-3$ cioè $3x=-12$

3. Per avere un'equazione equivalente che ha al primo membro 1 come coefficiente della x bisogna moltiplicare i due membri per il numero $\frac{1}{3}$ (che è il reciproco di 3); così si ha:

$\frac{1}{3} \cdot 3x=\frac{1}{3} \cdot (-12)$ cioè $x=-4$

In definitiva l'equazione assegnata ha la soluzione:

$x=-4$

Verificare se la soluzione di un'equazione è corretta

Dopo aver risolto un'equazione è sempre opportuno verificare se la soluzione ottenuta è corretta; per questo si procede così:

- si scrive la soluzione trovata al posto della x nei due membri;
- se il primo membro risulta uguale al secondo membro, la soluzione è esatta.

Nell'ultima equazione risolta, che era:

$8x+3=5x-9$

sostituendo -4 a x, si trova:

primo membro $=8(-4)+3=-29$

secondo membro $=5(-4)-9=-29$

Perciò la soluzione -4 è esatta.

Verifiche

Conoscenze

① Come si riconosce un'equazione di 1° grado?

② Spiegare il significato dei seguenti termini, relativi ad un'equazione di 1° grado:
- incognita e soluzione;
- coefficiente dell'incognita e termine noto;
- primo membro e secondo membro.

③ Come si riconoscono due equazioni equivalenti?

④ Data un'equazione, come se ne può ottenere un'altra equivalente?

⑤ Quali caratteristiche presenta un'equazione che fornisce direttamente la sua soluzione?

⑥ Qual è il procedimento per risolvere un'equazione di 1° grado?

Comprensione

① Spiegare perché ***è errata*** le seguente affermazione:

- Per risolvere l'equazione:

$-2x=0$

aggiungo ai due membri 2, così ottengo la soluzione:

$x=2$

② Spiegare perché ***è errata*** le seguente affermazione:

- Per risolvere l'equazione:

$\frac{1}{3}x=0$

moltiplico i due membri per 3, così ottengo la soluzione:

$x=3$

③ Spiegare perché tutte le equazioni seguenti hanno la soluzione $x=0$.

$2x=0 \quad \frac{1}{3}x=0 \quad -\frac{2}{3}x=0$

④ Fra le equazioni seguenti scegliere quelle che hanno soluzione $x=0$ e quelle che hanno soluzione $x=1$ motivando la scelta.

$-3x=0 \quad -3x=-3 \quad \frac{3}{4}x=0 \quad \frac{3}{4}x=\frac{3}{4}$

Applicazioni

① Fra le uguaglianze seguenti scegliere quelle che sono equazioni di 1° grado, motivando la scelta.

$4\cdot 8+6=5\cdot 8-2 \quad 4\cdot x+6=5\cdot x-2$

$3x^2-4=2x+3 \quad 3x-4=2x+3$

② Fra le equazioni seguenti scegliere le tre che sono equivalenti, motivando la scelta:

$4x=8 \quad x=8-4 \quad x=\frac{8}{4} \quad -4x=8 \quad -4x=-8$

③ Scrivere almeno tre equazioni equivalenti all'equazione:

$x=0$

④ Scrivere almeno tre equazioni equivalenti all'equazione:

$x=1$

⑤ Scrivere almeno tre equazioni equivalenti all'equazione:

$x=-1$

⑥ Risolvere le equazioni seguenti, verificando che la soluzione ottenuta è esatta.

$\frac{1}{2}x=0 \quad \frac{1}{2}x=-1 \quad \frac{1}{2}x=\frac{1}{2}$

$3x-4=2x \quad 3x-4=5x+6$

$-\frac{3}{4}x+\frac{5}{4}=-\frac{1}{4}x-1$

Collegamento con i capitoli precedenti

① Come si valuta il grado di una lettera, il grado di un monomio e il grado di un polinomio?
(*Vedere il capitolo 6, paragrafo 3*)

② Spiegare perché un numero può essere sempre considerato un monomio.
(*Vedere il capitolo 6, paragrafo 3*)

③ Spiegare perché l'equazione:

$x=4$

si può leggere:

$1\cdot x+0=0\cdot x+4$.
(*Vedere il capitolo 6, paragrafo 3*)

④ Spiegare che cosa vuol dire la frase: «il monomio $-5x$ è l'opposto di $5x$».
(*Vedere il capitolo 6, paragrafo 7*)

⑤ Spiegare che cosa vuol dire la frase: «-3 è l'opposto di 3».
(*Vedere il capitolo 1, paragrafo 3*)

⑥ Spiegare che cosa vuol dire la frase: «$\frac{1}{4}$ è il reciproco di 4».
(*Vedere il capitolo 1, paragrafo 3*)

⑦ Spiegare perché nel paragrafo non si parla mai di «dividere i due membri per lo stesso numero».
(*Vedere il capitolo 1, paragrafo 3*)

⑧ Spiegare perché nel paragrafo non si parla mai di «sottrarre ai due membri lo stesso monomio».
(*Vedere il capitolo 6, paragrafo 7*)

2 Equazioni impossibili e indeterminate

Forma di un'equazione di 1° grado

Un'equazione di 1° grado nell'incognita x – si è detto nel paragrafo precedente – è un'uguaglianza fra due espressioni che presentano le seguenti caratteristiche:

- nelle espressioni compare la lettera x al 1° grado;
- l'uguaglianza diventa vera solo quando si sostituisce a x un numero, detto soluzione.

Queste caratteristiche possono essere meglio precisate dicendo che *un'equazione di 1° grado si presenta nella forma seguente:*

$$px+q=cx+d$$

dove:

- la lettera x indica l'incognita;
- le lettere p e c indicano dei numeri, che sono i coefficienti dell'incognita;
- le lettere q e d indicano dei numeri, che sono i termini noti.

Per esempio, si ottiene l'equazione:

$2x-3=-4x+9$

fissando $p=2 \quad q=-3 \quad c=-4 \quad d=9$

Si ottiene invece l'equazione:

$x=4$ ossia $1\cdot x+0=0\cdot x+4$

fissando $p=1 \quad q=0 \quad c=0 \quad d=4$

Soluzione di un'equazione di 1° grado

Per determinare la soluzione, si procede nel modo seguente: si passa dall'equazione assegnata ad un'equazione equivalente che presenta le seguenti caratteristiche:

- al primo membro il coefficiente dell'incognita è 1 e il termine noto è 0;
- al secondo membro il coefficiente dell'incognita è 0 e il termine noto è la soluzione.

Per ottenere un'equazione equivalente con le caratteristiche indicate si hanno a disposizione due procedimenti:

- addizionare ai due membri uno stesso monomio;
- moltiplicare i due membri per uno stesso numero.

A partire dall'equazione:

$$px+q=cx+d$$

si procede allora nel modo seguente:

1. Per avere al secondo membro 0 come coefficiente dell'incognita, si aggiunge ai due membri il monomio $-cx$ (che è l'opposto di cx); si ha:

   $px-cx+q=cx-cx+d$ cioè $(p-c)x+q=d$

2. Per avere al primo membro 0 come termine noto, si aggiunge ai due membri il monomio $-q$ (che è l'opposto di q); si ha:

   $(p-c)x+q-q=d-q$ cioè $(p-c)x=d-q$

In definitiva, *un'equazione di 1° grado può sempre ridursi alla forma:*

$$ax=b$$

dove:

- la lettera a indica il risultato dell'operazione $p-c$, cioè si ha $a=p-c$;
- la lettera b indica il risultato dell'operazione $d-q$, cioè si ha $b=d-q$.

Si individua infine la soluzione moltiplicando i due membri per il reciproco di a; si ottiene:

$$\frac{1}{a}\cdot ax=\frac{1}{a}\cdot b$$

e quindi *la soluzione è*:

$$x=\frac{b}{a}$$

Le equazioni che, con il procedimento indicato, forniscono una ben determinata soluzione, sono anche dette *equazioni risolubili*.
Ma, nella risoluzione di un'equazione di 1° grado, si possono presentare anche due casi particolari.

Equazioni impossibili

Una prima situazione è la seguente: si parte da un'equazione che presenta, nei due membri, coefficienti dell'incognita uguali e termini noti diversi. L'equazione è dunque del tipo:

$$px+q=px+d$$

che si riduce alla forma:

$$\mathbf{0}\cdot \boldsymbol{x}=\boldsymbol{b} \quad \text{ossia} \quad 0=b$$

Si arriva così ad un'uguaglianza che è sempre falsa; perciò non si può trovare il numero che, sostituito a x, rende l'uguaglianza vera. In questi casi si dice che *l'equazione è impossibile*, cioè *non ha soluzione.*

Equazioni indeterminate

L'altra situazione da segnalare si trova quando sono uguali, oltre ai coefficienti dell'incognita, anche i termini noti.
L'equazione si presenta dunque nella forma:

$$px+q=px+q$$

che può ridursi alla forma:

$$\mathbf{0}\cdot \boldsymbol{x}=\mathbf{0} \quad \text{ossia} \quad 0=0$$

Si arriva dunque ad un'uguaglianza che rimane sempre vera, quando si sostituisce a x un numero qualunque.
In questo caso si dice che *l'equazione è indeterminata, perché non determina una soluzione.*

Moltiplicando per 0 i due membri di un'equazione si ottiene sempre un'equazione indeterminata

Ecco un esempio. È data l'equazione:

$$x=3$$

Si moltiplicano i due membri per 0; in tal caso si ottiene:

$$0\cdot x=0\cdot 3 \quad \text{cioè} \quad \mathbf{0=0}$$

Così, partendo da un'equazione che ha come soluzione 3, si ottiene un'equazione indeterminata.
Si conclude dunque che:

- *moltiplicando i due membri di un'equazione per 0, non si ottiene un'equazione equivalente;*
- *si ottiene un'equazione equivalente, moltiplicando i due membri di una data equazione per uno stesso numero, che però deve essere diverso da 0.*

V e r i f i c h e

Conoscenze

① In quale forma si presenta un'equazione di 1° grado?
② In quale forma può ridursi un'equazione di 1° grado?
③ Che cosa significa il termine «equazione risolubile»?
④ Che cosa significa il termine «equazione impossibile»?
⑤ Che cosa significa il termine «equazione indeterminata»?

Comprensione

① Portare almeno due esempi di equazione risolubile.
② Portare almeno due esempi di equazione impossibile.
③ Portare almeno due esempi di equazione indeterminata.
④ Spiegare perché, moltiplicando per 0 i due membri di una data equazione, non si ottiene un'equazione equivalente.

Applicazioni

① Esaminare le seguenti equazioni:

$-5x+2=5x$ $\qquad -5x+2=-5x$

$-5x+2=2$ $\qquad -5x+2=-5x+2$

e risolvere i seguenti quesiti:
- indicare l'equazione impossibile;
- indicare l'equazione indeterminata;
- indicare le equazioni risolubili;
- determinare la soluzione di ogni equazione risolubile.

Risolvere equazioni di 1° grado

«Trasportare» monomi da un membro all'altro di un'equazione

Attività 1

Risolvere l'equazione:

$$-3x-8=6x+1$$

e verificare che la soluzione ottenuta è esatta.

L'equazione è di 1° grado perché si presenta nella forma:

$$px+q=cx+d \qquad (1)$$

con $\quad p=.......\quad q=.......\quad c=.......\quad d=.......$

Il procedimento per risolvere l'equazione si basa sui seguenti passi:

- *Per avere al secondo membro 0 come coefficiente dell'incognita, si aggiunge ai due membri il monomio .... che è l'opposto di ....*
- *Per avere al secondo membro 0 come termine noto, si aggiunge ai due membri 8, che è l'opposto di ....*
- *Si ottiene la seguente equazione, equivalente a quella data:*

$$-9x=9$$

- *Per avere al primo membro 1 come coefficiente dell'incognita, si moltiplicano i due membri per ...., che è il reciproco di –9; si ha:*

$$(.......)(-9x)=(.......)(9)$$

La soluzione dell'equazione è dunque:

$$x=-1$$

Per verificare se la soluzione è esatta, si sostituisce a x il numero .... e si verifica se ....

Nel caso assegnato si ottiene:

primo membro: $\qquad -3(.......)-8=-5$

secondo membro: $\qquad 6(.......)+1=-5$

e quindi la soluzione è ....

Il procedimento per risolvere un'equazione è basato dunque su poche regole da applicare, ma risulta in molti casi piuttosto lungo; può tuttavia diventare più rapido con un'osservazione suggerita dai primi due passi seguiti.

- Quando si aggiunge $-6x$ ai due membri si ha che:

  $-3x-8=6x+1$ diventa $-3x-6x-8=1$

Così viene «trasportato» al primo membro il monomio $-6x$, opposto del monomio $6x$, che compariva prima al secondo membro.

Si trova dunque l'equazione equivalente:

$-9x-8=1$

- Quando si aggiunge 8 ai due membri, si ha che:

  $9x-8=1$ diventa $-9x=1+8$

  Ora si trova «trasportato» al secondo membro il monomio 8, opposto di -8 che prima compariva al primo membro.

L'effetto delle operazioni eseguite può dunque essere sintetizzato nel modo seguente: *si può trasportare un monomio da un membro all'altro di un'equazione, dopo averne cambiato il segno.*

Risolvere rapidamente un'equazione

Attività 2

Risolvere l'equazione seguente:

$$7x+15-3x=12+5x-3-8x+9x$$

Il procedimento per risolvere l'equazione si può condurre rapidamente nel modo seguente:

- *Prima di tutto bisogna scrivere l'equazione nella forma:*

  $$px+q=cx+d \qquad (1)$$

  Per questo occorre addizionare i termini simili al primo ed al secondo membro; si ottiene l'equazione:

  $4x+15=6x+9$

- *Si trasporta il monomio* 6x *al primo membro ed il monomio* 15 *al secondo membro, ottenendo l'equazione:*

  ....–.......=–.......+....... ossia $-2x=-6$

- *Si moltiplicano i due membri per il reciproco di* -2*, ottenendo:*

  $$\left(-\frac{1}{2}\right)(\ldots\ldots)=\left(-\frac{1}{2}\right)(\ldots\ldots)$$

  Si trova così la soluzione:

  $x=3$

Attività 3

Verificare che è impossibile l'equazione seguente:

$$3+\frac{1}{2}x+\frac{7}{3}=2x-\frac{3}{2}x+\frac{1}{4}$$

Attività 4

Verificare che è indeterminata l'equazione seguente:

$$3-\frac{1}{2}x+2x-\frac{7}{4}=\frac{3}{2}x+\frac{5}{4}$$

Le equazioni e il segno «=»

L'origine del segno «=»

Il termine equazione viene dal latino *aequatio* e cioè dall'aggettivo *aequalis*, che significa *uguale*; il termine ricorda che il primo membro è uguale al secondo.

Lo sviluppo dell'algebra è tutto basato sulla scrittura di due membri uguali; si scrive per esempio:

$$5+2=7 \quad -3x+1=1-3x \quad 2x=x+x \qquad (1)$$

Ma si scrive anche:

$$-3x+1=4 \quad 2x=x+1 \quad 4x=8 \qquad (2)$$

Si osserva subito che fra le uguaglianze (1) e (2) c'è una differenza sostanziale:

- tutte le uguaglianze (1) sono sempre vere e perciò sono scritte per asserire una verità;
- le uguaglianze (2), invece, diventano vere solo quando si sostituisce a x un particolare numero, che deve essere trovato; in questi casi dunque si scrive un'uguaglianza per ricercare un numero. Per esempio l'uguaglianza:

  $4x=8$

  dovrebbe essere letta nel modo seguente: «Qual è il numero che, moltiplicato per 4, dà come risultato 8?».

Il segno «=» viene dunque adoperato in due modi diversi:

I. per asserire un'uguaglianza sempre vera;

II. per ricercare un numero che rende vera un'uguaglianza.

Senza dubbio il secondo modo è meno chiaro, proprio perché nasconde una domanda, un problema da risolvere.

Ma, ci si chiede, qual è l'origine di questo segno così particolare?

È in un testo inglese di algebra del 1557 che compare per la prima volta il segno «=». Il testo è scritto dal matematico inglese Robert Recorde (fig. 1), che commenta l'introduzione del segno «=» con queste parole: «Indico l'uguaglianza con una coppia di parallele, due segmenti "gemelli", e cioè della stessa lunghezza, perché due cose non possono essere più uguali di queste».

Recorde aveva anche scritto un libro di aritmetica nel 1542, ma in quest'opera non si trova il segno «=», che compare invece nel suo successivo trattato di algebra, proprio a proposito delle equazioni.

Recorde sente dunque il bisogno di un simbolismo breve ed espressivo per stimolare il lettore alla ricerca dell'incognita, e cioè per risolvere un problema. Il segno «=» nasce dunque strettamente collegato con le equazioni e solo in un secondo tempo lo stesso simbolo verrà usato per asserire una verità.

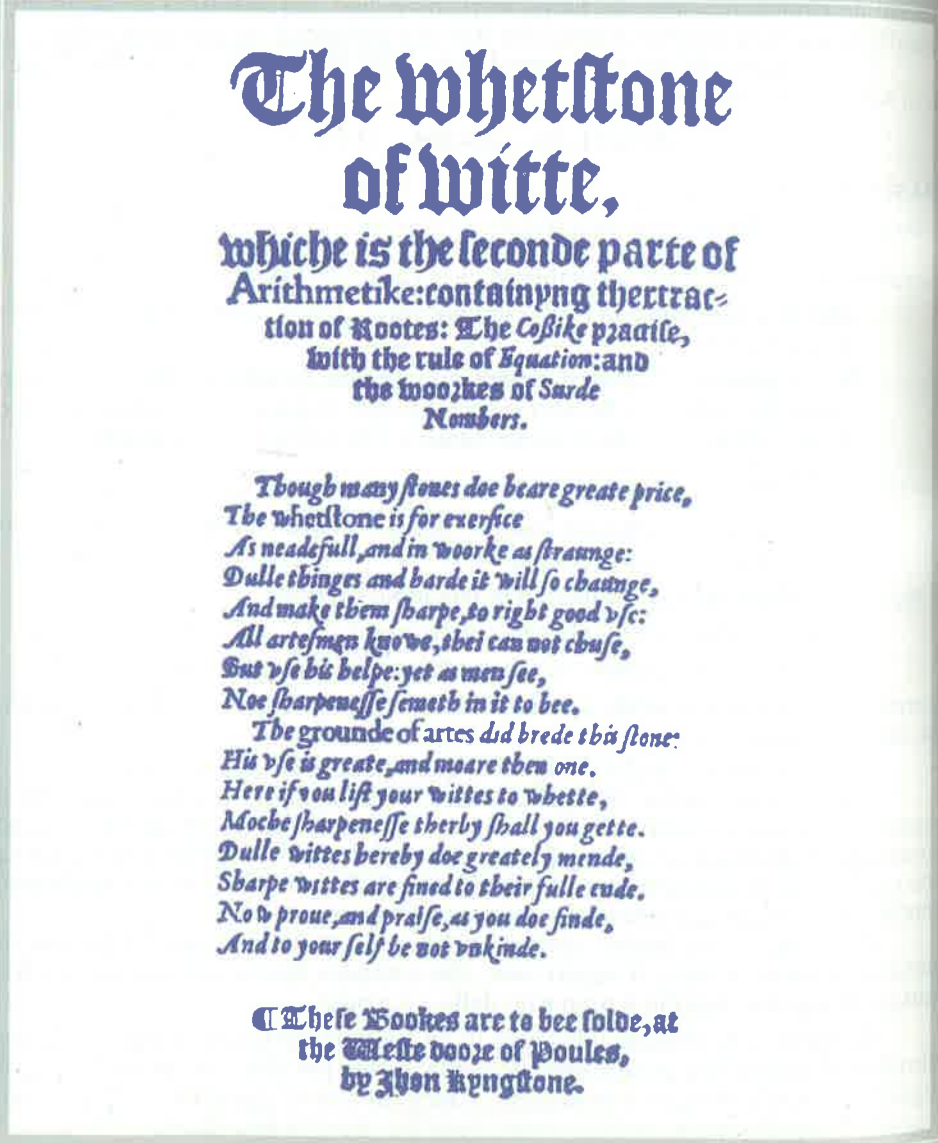
Il concetto di «uguale» nelle lingue primitive

L'utilizzazione dello stesso segno «=» con significati diversi è diventata caratteristica del simbolismo matematico; d'altra parte, l'uso dello stesso vocabolo «uguale» in situazioni diverse è caratteristico di molte lingue evolute, ma non si trova ovunque.

Ecco un esempio che illustra quest'affermazione.
Nella lingua africana haussa si trova che:

- un dato vocabolo significa «uguale» quando si deve indicare il risultato di un'addizione;
- un altro vocabolo significa «uguale», quando si deve indicare il risultato di una sottrazione;
- un altro vocabolo ancora viene usato per indicare l'uguaglianza fra due triangoli.

Così, in questa, come in molte altre lingue cosiddette primitive, che sono ancora oggi largamente diffuse, non c'è un solo vocabolo che significa «uguale»; si trovano invece tante parole diverse, ciascuna legata ad una particolare situazione.


The whetſtone
of witte,
whiche is the ſeconde parte of
Arithmetike: containyng thextrac-
tion of Rootes: The Coßike practiſe,
with the rule of Equation: and
the woorkes of Surde
Nombers.

Though many ſtones doe beare greate price,
The whetſtone is for exerſice
As neadefull, and in woorke as ſtraunge:
Dulle thinges and harde it will ſo chaunge,
And make them ſharpe, to right good vſe:
All artesmen knowe, thei can not chuſe,
But vſe his helpe: yet as men ſee,
Noe ſharpeneſſe ſemeth in it to bee.
The grounde of artes did brede this ſtone:
His vſe is greate, and moare then one.
Here if you liſt your wittes to whette,
Moche ſharpeneſſe therby ſhall you gette.
Dulle wittes hereby doe greately mende,
Sharpe wittes are fined to their fulle ende.
Now proue, and praiſe, as you doe finde,
And to your ſelf be not vnkinde.

These Bookes are to bee ſolde, at
the Weſte doore of Poules,
by Jhon Kyngſtone.

Figura 1
Il frontespizio del libro di Robert Recorde dove viene introdotto per la prima volta il segno «=»

3 Equazioni e identità, predicati e quantificatori

Equazioni e identità

Nello sviluppo dell'algebra si trovano spesso delle uguaglianze fra termini letterali; ma queste uguaglianze non hanno sempre lo stesso significato. Ecco due esempi.

I. Si scrive:

$$x+2x=15 \qquad (1)$$

per dire: «Ricerca il numero che, aggiunto al suo doppio, dà come risultato 15».
L'uguaglianza (1) diventa vera solo quando si sostituisce a x un particolare numero, in questo caso 5, altrimenti è falsa.
Un'uguaglianza di questo tipo è detta *equazione* e il numero che la rende vera è *la soluzione dell'equazione*.

II. La formula:

$$x+2x=3x \qquad (2)$$

si potrebbe leggere in modo analogo e cioè: «Ricerca il numero che, aggiunto al suo doppio, dà come risultato il suo triplo».
Ma si nota subito che questa uguaglianza è vera per qualunque numero, perciò prende il nome di *identità*.
L'identità (2) si può allora leggere nel modo seguente: «Qualunque numero, aggiunto al suo doppio, dà come risultato il suo triplo».
Questa distinzione fra equazioni e identità sembra chiara nella sostanza, ma non è altrettanto chiara nella forma, perché la stessa scrittura esprime due situazioni profondamente diverse:

- ***equazione***, *cioè uguaglianza fra termini letterali, che è vera solo quando si sostituisce alla lettera un particolare numero;*
- ***identità***, *cioè uguaglianza fra termini letterali, che è sempre vera.*

La logica matematica può aiutare a chiarire meglio l'argomento. Ecco come si può ragionare.

Proposizioni e predicati

Le formule possono essere raggruppate in due categorie:

A. Formule in cui compaiono solo numeri, per esempio:

$$5+2\cdot5=15 \qquad 4+2\cdot4=15$$
$$5+2\cdot5=3\cdot5 \qquad 9+2\cdot9=3\cdot9$$

B. Formule in cui compaiono anche delle lettere, per esempio:

$$x+2x=15$$
$$x+2x=3x$$

Le formule di tipo (A) esprimono con un linguaggio sintetico delle *proposizioni*, cioè delle frasi che sono sicuramente vere o false; per esempio la formula:

$$5+2\cdot5=15$$

esprime una proposizione *vera*, che potrebbe essere espressa con la frase:
«5, addizionato al suo doppio, dà come risultato il numero 15».

Analogamente si trova che la formula:

$$4+2\cdot4=15$$

esprime una proposizione *falsa*.

Infine esprimono proposizioni vere le formule seguenti:

$$5+2\cdot 5=3\cdot 5 \quad \text{e} \quad 9+2\cdot 9=3\cdot 9$$

Le formule di tipo (B) sono diverse: contengono una lettera, che è come una scatola vuota; per decidere se una di queste ultime formule è vera o falsa bisogna sostituire al posto della lettera un numero.
Per esempio, la formula:

$$x+2x=15$$

potrebbe essere espressa con la frase: «Un numero addizionato con il suo doppio dà come risultato 15».
Questa frase diventa:

- una proposizione *vera* se al posto di x si sostituisce 5;
- una proposizione *falsa* se al posto di x si sostituisce 4.

E così la formula:

$$x+2x=3x$$

potrebbe essere espressa con la frase: «Un numero addizionato con il suo doppio dà come risultato il suo triplo».
Questa frase diventa sempre una proposizione vera, quando si sostituisce a x un qualunque numero.
Le formule del tipo (B) prendono anche il nome di *predicati*. Il nome è collegato alla frase corrispondente alla formula: si tratta di una frase in cui è precisato il predicato, mentre resta generico il soggetto.

Il quantificatore universale

Un predicato diventa dunque una proposizione quando al posto della lettera si sostituisce un numero.
In un predicato si possono allora sostituire vari numeri al posto della lettera ed esaminare le proposizioni ottenute.
Per esempio, nel caso di:

$$x+2x=3x$$

si trova che sono vere tutte le proposizioni ottenute sostituendo alla lettera un numero; più brevemente si dice che:
- per qualunque numero x è vero che:

$$x+2x=3x$$

oppure:
- tutti i numeri rendono vero che:

$$x+2x=3x$$

Queste frasi vengono sintetizzate introducendo il simbolo «$\forall$», che prende il nome di *quantificatore universale*.

Il simbolo è una lettera A rovesciata e probabilmente è legato alla parola inglese *All*, che significa «tutti».

Così le due frasi precedenti vengono sintetizzate scrivendo:

$$\forall x\ (x+2x=3x) \qquad (3)$$

Questa scrittura (come le due frasi corrispondenti) manca però di un'informazione: in quale insieme numerico si scelgono i numeri da sostituire a x.

Se, per esempio, si pensa di lavorare con i numeri razionali, bisogna scrivere nella (3):

$$x\in Q$$

cioè:

«x appartenente all'insieme dei razionali»

Si fa quindi uso del simbolo di appartenenza ad un insieme, che si indica con «$\in$».

Si scrive dunque:

$$\forall x\in Q\ \ (x+2x=3x)$$

che si legge:
- tutti i numeri razionali rendono vero che:

$$x+2x=3x$$

oppure:
- per qualunque numero x appartenente all'insieme dei razionali è vero che:

$$x+2x=3x$$

Il quantificatore esistenziale

Analoghe considerazioni si possono ripetere a partire dal predicato:

$$x+2x=15$$

In questo caso però, quando si sostituiscono dei numeri al posto della lettera, si trova una situazione diversa:
- *è vera* la proposizione ottenuta scrivendo il numero 5 al posto della lettera x, cioè:

$$5+2\cdot 5=15$$

- *sono false* tutte le proposizioni ottenute sostituendo a x altri numeri, come per esempio:

$$0+2\cdot 0=15 \qquad 1+2\cdot 1=15 \qquad 4{,}5+2\cdot 4{,}5=15$$

La situazione viene allora descritta da una delle seguenti frasi:
- si trova un numero razionale che rende vera:

$$x+2x=15$$

oppure:
- esiste un numero razionale che rende vera:

$$x+2x=15$$

Queste frasi vengono sintetizzate introducendo il simbolo «$\exists$», che prende il nome di *quantificatore esistenziale*.
Il simbolo è una lettera E rovesciata, legata alla parola «Esiste».
Introducendo il quantificatore esistenziale, le due frasi si scrivono nella forma seguente:

$$\exists x\in Q \qquad (x+2x=15)$$

Il ruolo dei quantificatori

I quantificatori non portano a scoprire quali sono i numeri che, sostituiti alla lettera, rendono un'uguaglianza vera; dicono però *quanti* sono questi numeri. Così si ha la possibilità di scrivere le equazioni in modo diverso dalle identità.
Ecco altri due esempi.

$$\forall x\in Q\ \ (3x-x+2=2x+2)$$

è un'identità

$$\exists x\in Q\ \ (3x-x+2=x-2)$$

è un'equazione

Verifiche

Conoscenze

1. Come si distingue un'identità da un'equazione?
2. Come si riconosce un predicato?
3. Leggere le formule seguenti e spiegarne il significato.

$\forall x\in Q\ \ (x+2x=3x)$ $\qquad$ $\exists x\in Q\ \ (x+2x=15)$

$\forall x\in Q\ \ (2x-2x=0)$ $\qquad$ $\exists x\in Q\ \ (2x+4=0)$

Comprensione

1. Portare qualche esempio di identità.
2. Portare qualche esempio di equazione.
3. Spiegare quale ruolo hanno i quantificatori.
4. Scoprire l'errore nelle seguenti formule:

$\exists x\in Q\ \ (x+4=4+x)$ $\qquad$ $\forall x\in Q\ \ (x+4=4)$

5. Modificare le formule precedenti in modo da renderle corrette.
6. Scoprire l'errore nelle seguenti formule:

$\exists x\in Z\ \ (2x=1)$ $\qquad$ $\forall x\in Z\ \left(4:x=4\,\dfrac{1}{x}\right)$

$\forall x\in N\ \ [4-x=4+(-x)]$ $\qquad$ $\exists x\in N\ \ (4+x=0)$

7. Modificare le formule precedenti in modo da renderle corrette.

Applicazioni

1. Fra le uguaglianze seguenti scegliere le equazioni e le identità, motivando la scelta.

$x-x=0$ $\qquad$ $x+x=0$

$\dfrac{3}{4}x=\dfrac{3}{4}$ $\qquad$ $\dfrac{3}{4}x=\dfrac{1}{4}\cdot 3x$

2. Riscrivere le uguaglianze precedenti completandole con i corretti quantificatori.

Collegamento con i capitoli precedenti

1. Come si riconosce una proposizione?
(Vedere il capitolo 6, paragrafo 2)

I quantificatori e la negazione

Equazioni impossibili esaminate mediante i quantificatori

Nel paragrafo precedente si è visto come i quantificatori permettano di esprimere con chiarezza il significato di una formula. Ecco gli esempi già trattati.

- Quando si scrive:

$\exists x \in Q \ \ (x+2x=15)$

si ha *un'equazione*, che ha la soluzione 5; si ha cioè un predicato che diventa una proposizione vera solo quando si sostituisce alla lettera il numero 5.

- Quando si scrive:

$\forall x \in Q \ \ (x+2x=3x)$

si ha *un'identità*; si ha cioè un predicato che diventa una proposizione vera quando si sostituisce alla lettera un qualunque numero razionale. In questo caso l'identità può anche essere considerata un'equazione indeterminata.

Rimangono da esaminare *le equazioni impossibili*, per esempio:

$x-x=2$

Questa uguaglianza può essere descritta con una delle frasi seguenti:

«non esiste un numero razionale che rende vera $x-x=2$» (I)

oppure:

«per qualunque numero razionale non è vero che $x-x=2$» (II)

In queste due frasi è presente la negazione, che viene espressa abitualmente con il simbolo «~» (cfr. il capitolo 7, paragrafo 2).

- La frase (I) può essere allora sintetizzata nel modo seguente:

$\sim\exists x \in Q \ \ (x-x=2)$

- La frase (II) diventa invece:

$\forall x \in Q \ \ [\sim(x-x=2)]$

Quantificatori e negazione

Le precedenti considerazioni portano a scoprire un'importante proprietà dei quantificatori: la negazione consente di trasformare una frase che contiene il quantificatore esistenziale in una frase che contiene il quantificatore universale.

Ecco altre situazioni che conducono a riflettere sul collegamento fra negazione e quantificatori.

La formula:

$\exists x \in Q \ \ (x+2x=15)$

significa che:

«esiste un numero razionale che rende vera $x+2x=15$»

La stessa situazione potrebbe anche essere descritta dicendo che:

«*non* è vero che per qualunque razionale *non* è vera $x+2x=15$»

Questa seconda frase è certamente più complicata della prima, ma descrive correttamente la situazione e può essere sintetizzata scrivendo:

$\sim\forall x \in Q \ \ [\sim(x+2x=15)]$

Ecco un'altra formula da esaminare:

$\forall x \in Q \ \ (x+2x=3x)$

che si legge:

«qualunque razionale rende vera $x+2x=3x$»

La stessa situazione potrebbe essere descritta dicendo che:

«*non* esiste un razionale per cui *non* è vero che $x+2x=3x$»

e scrivendo:

$\sim\exists x \in Q \ \ [\sim(x+2x=3x)]$

Lo schema seguente riassume i risultati raggiunti:

$\exists x \in Q \ \ (x+2x=15)$	equivale a	$\sim\forall x \in Q \ \ [\sim(x+2x=15)]$
$\forall x \in Q \ \ (x+2x=3x)$	equivale a	$\sim\exists x \in Q \ \ [\sim(x+2x=3x)]$

Si può dunque concludere che *la negazione permette di sostituire il quantificatore universale con quello esistenziale e viceversa.*

4

Equazioni di 1° grado con coefficienti letterali

Da un problema ad un'equazione con coefficienti numerici

Nella scheda «Attività» all'inizio di questo capitolo si è esaminato un problema economico che conduce a scrivere un'equazione di 1° grado in un'incognita. Ecco di che cosa si tratta.

Si esamina il bilancio di una ditta di automobili, trovando in un dato anno le seguenti entrate ed uscite (in milioni di lire) descritte nella tabella A.

Il problema legato a questo bilancio è: sapere quante automobili bisogna vendere ogni anno per chiudere il bilancio in parità, cioè per avere le entrate uguali alle uscite.

Per trovare la risposta si traduce il problema in simboli, per esempio nel modo seguente:

- si fissa l'attenzione sul numero da determinare, che è il numero di automobili da vendere in un anno;
- si indica questo numero incognito, con la lettera x;
- si valutano le entrate totali, tenendo presente che:
  a. il contributo annuale dello Stato (8000) e gli interessi (4000) sono dati fissi;
  b. il ricavo totale dipende invece dal numero x e si ha che: vendendo x automobili si ricavano $12 \cdot x$ milioni.

Si trova in definitiva che le entrate totali E sono date da:

$$E=8000+4000+12x$$

Tabella A

Entrate		Uscite	
Contributo dello Stato	8000	Salari	20000
Interesse sul capitale	4000	Costi d'impianto	2000
Ricavo per ogni auto	12	Costo del materiale e dell'energia per produrre un'auto	3
		Costo del collaudo e del trasporto di ogni auto	0,7
		Percentuale data al venditore, per ogni auto	0,3

Procedendo in modo analogo, si calcolano le uscite totali U, date da:

$$U=20\,000+2000+3x+0{,}7x+0{,}3x$$

Ora, per poter avere il bilancio in parità, deve essere:

$$E=U$$

cioè:

$$8000+4000+12x=20\,000+2000+3x+0{,}7x+0{,}3x$$

Per risolvere l'equazione assegnata, si può procedere così:

1. Si «trasportano» tutti i monomi in x al primo membro e tutti i termini noti al secondo membro, scrivendo:
$$12x-0{,}3x-3x-0{,}7x=20\,000+2000-8000-4000$$
2. Si addizionano i monomi simili, ottenendo:
$$8x=10\,000$$
3. Si dividono i due membri per 8, che è il coefficiente di x, ottenendo il richiesto numero di automobili, dato da:
$$x=1250$$

Svantaggi dei coefficienti numerici

Si osserva subito che il procedimento seguito per arrivare a scrivere e risolvere l'equazione è abbastanza lungo e viene utilizzato solo per l'anno esaminato; se l'anno successivo cambia qualcuno dei dati numerici, bisogna ripetere l'intero procedimento.

Un'equazione con i coefficienti letterali

Ecco allora come si può ragionare per avere un procedimento più efficiente: fra le entrate e le uscite si trovano sempre le stesse voci, che però possono assumere ogni anno un diverso valore numerico; conviene allora indicare ciascuna voce con una lettera, per esempio come è mostrato nella tabella B.

Così, per determinare il numero x di automobili che porta il bilancio in parità, si arriva a scrivere la seguente equazione:

$$S+I+Rx=P+C+Mx+Tx+Vx$$

In questa equazione si trovano delle lettere con un preciso significato:

- la lettera x indica l'incognita da determinare;
- le altre lettere assumono un valore fisso ogni anno, ma possono cambiare da un anno all'altro; queste lettere, che nell'equazione rappresentano i coefficienti, prendono ora il nome di *coefficienti letterali*.

Risolvere un'equazione con i coefficienti letterali

Con queste indicazioni si può risolvere l'equazione, riproducendo il procedimento di risoluzione seguito nel caso dei coefficienti numerici; ecco che cosa si ottiene.

1. «Trasportando» al primo membro tutti i monomi in x e al secondo i termini noti, si ha:
$$Rx-Vx-Mx-Tx=P+C-S-I$$
2. Raccogliendo al primo membro il fattore comune x, si individua il coefficiente della x; si scrive:
$$(R-V-M-T)x=P+C-S-I$$

Tabella B

Entrate		Uscite	
Contributo dello Stato	S	Salari (o paghe)	P
Interesse sul capitale	I	Costi d'impianto	C
Ricavo per ogni auto	R	Costo del materiale e dell'energia per produrre un'auto	M
		Costo del collaudo e del trasporto di ogni auto	T
		Percentuale data al venditore, per ogni auto	V

3. Dividendo i due membri per l'espressione che rappresenta il coefficiente di x, si ottiene la soluzione richiesta, data da:

$$x = \frac{P+C-S-I}{R-V-M-T}$$

Questa soluzione dell'equazione può essere utilizzata ogni anno, senza dover più ripetere il procedimento; basta sostituire alle lettere i numeri. Per esempio, per l'anno esaminato all'inizio, si ottiene:

$$x= \frac{20\,000+2000-8000-4\,000}{12-0{,}3-3-0{,}7} =1250$$

Scoprire problemi indeterminati o impossibili

L'equazione con coefficienti letterali offre un'altra notevole opportunità: prevedere i problemi impossibili e quelli indeterminati. Infatti, osservando l'equazione:

$$(R-V-M-T)x=P+C-S-I$$

si può subito dire che l'equazione diventa indeterminata se entrambi i suoi coefficienti valgono 0 e cioè risulta:

$$R-V-M-T=0 \quad e \quad P+C-S-I=0$$

ossia:

$$R=V+M+T \quad e \quad P+C=S+I$$

Questo risultato si interpreta facilmente dal punto di vista economico:

- la condizione

  $$P+C=S+I$$

  significa che le entrate fisse (P+C) sono uguali alle uscite fisse (S+I);
- la condizione

  $$R=V+M+T$$

  significa che, per ogni automobile venduta, il ricavo (R) è uguale al costo totale di produzione (V+M+T);
- quando si realizzano entrambe le condizioni, il bilancio è sempre in parità, indipendentemente dal numero di automobili vendute.

L'equazione diventa invece impossibile se vale 0 solo il coefficiente della x e cioè si ha:

$$R-V-M-T=0 \quad e \quad P+C-S-I\neq 0$$

ossia:

$$R=V+M+T \quad e \quad P+C\neq S+I$$

In questo caso infatti si ha che:

- per ogni auto venduta, il ricavo (R) è uguale al costo totale di produzione (V+M+T);

ma:

- le entrate fisse (P+C) non compensano le uscite fisse (S+I) e perciò il bilancio non sarà mai in parità.

I vantaggi dei coefficienti letterali

L'esempio trattato mostra alcuni notevoli vantaggi offerti dalle equazioni con coefficienti letterali:

- si può avere una formula che dà la soluzione di tutti i problemi di uno stesso tipo, evitando di ripetere più volte gli stessi calcoli;
- si possono scoprire problemi indeterminati o impossibili, conoscendo così in modo più approfondito la natura di un problema.

Incognita e coefficienti in un'equazione letterale

Nel paragrafo 1 di questo capitolo si era detto che, in un'equazione, non si deve necessariamente indicare l'incognita con la lettera x, ma si può anche usare un'altra lettera; così, per esempio, l'equazione

$$3x+6=0$$

può anche essere scritta in uno dei seguenti modi:

$$3y+6=0 \quad 3m+6=0 \quad 3a+6=0$$

In tutti i casi nella formula è presente un'unica lettera, che abitualmente indica appunto l'incognita.
Ma le formule non sono altrettanto chiare quando anche i coefficienti di un'equazione sono rappresentati da lettere; per esempio, scrivendo:

$$am+b=0$$

non si precisa quale lettera indica l'incognita.

In questi casi si deve precisare la formula, dicendo, per esempio:
«Risolvere l'equazione $am+b=0$ rispetto all'incognita m».

Così risulta chiarito che la lettera m rappresenta l'incognita, mentre a e b indicano i coefficienti e quindi la soluzione è data da:

$$m = -\frac{b}{a}$$

Ma si potrebbe anche dire:
«Risolvere l'equazione $am+b=0$ rispetto all'incognita a».
In tal caso la soluzione sarebbe:

$$a = -\frac{b}{m}$$

In conclusione, quando si scrive un'equazione con coefficienti letterali, si hanno due alternative:

- indicare l'incognita con x e i coefficienti con altre lettere dell'alfabeto;
- usare liberamente le lettere, ma indicare esplicitamente quale lettera indica l'incognita.

Verifiche

Conoscenze

① Che cosa vuol dire che un'equazione ha i coefficienti letterali?

② Indicare il procedimento da seguire per risolvere un'equazione di 1° grado con coefficienti letterali.

③ In un'equazione di 1° grado con i coefficienti letterali come si distingue l'incognita dai coefficienti?

Comprensione

① «Inventare» un'equazione di 1° grado con coefficienti letterali.

② Risolvere l'equazione scritta prima.

③ Esaminare l'equazione «inventata» e prevedere i casi in cui risulta impossibile o indeterminata.

④ Esaminare l'equazione:

$$2x=2x+a$$

Indicare i casi in cui l'equazione è impossibile.
Indicare il caso in cui l'equazione è indeterminata. L'equazione può essere risolubile per qualche valore del coefficiente a?

⑤ Esaminare l'equazione:

$$ax=ax+2$$

L'equazione può essere indeterminata?
L'equazione può essere risolubile?

Applicazioni

① Esaminare la seguente equazione:

$$ax+a+1=0$$

in cui x è l'incognita.
Indicare il caso in cui l'equazione è impossibile.
L'equazione può essere indeterminata?
Risolvere l'equazione rispetto all'incognita x.

② È data la seguente equazione:

$$am-b=m$$

Se m indica l'incognita, in quali casi l'equazione è impossibile e in quali è indeterminata?
Risolvere l'equazione rispetto all'incognita m.
Se a indica l'incognita, in quali casi l'equazione è impossibile e in quali è indeterminata?
Risolvere l'equazione rispetto all'incognita a.

Collegamento con i paragrafi precedenti

① Che cosa si intende con il termine «coefficienti di un'equazione di 1° grado»? *(Vedere il paragrafo 1)*

② In un'equazione di 1° grado come si distinguono i termini noti dai coefficienti dell'incognita? *(Vedere il paragrafo 1)*

③ Come si riconosce un'equazione di 1° grado impossibile? *(Vedere il paragrafo 2)*

④ Come si riconosce un'equazione di 1° grado indeterminata? *(Vedere il paragrafo 2)*

Le equazioni di 1° grado e il moto rettilineo uniforme

Problemi legati alla legge del moto a velocità costante

In fisica si studia il movimento di un corpo che percorre una traiettoria rettilinea con velocità costante v, allontanandosi dal punto di partenza O; in tal caso, la distanza s del corpo dal punto O varia al variare del tempo t secondo la legge:

$$s=vt$$

Se, invece, il corpo parte da un punto A, diverso da O, si può indicare con q la distanza AO e si trova la legge (fig. 1):

$$s=vt+q$$

che è anche detta *legge del moto uniforme*.

In questa legge compaiono quattro lettere che indicano diverse grandezze fisiche e cioè:

s indica la distanza del corpo dal punto O;
v indica la velocità del corpo;
t indica il tempo che trascorre;
q indica la distanza del punto di partenza A da O.

A partire da questa legge si possono allora creare vari problemi; ecco degli esempi.

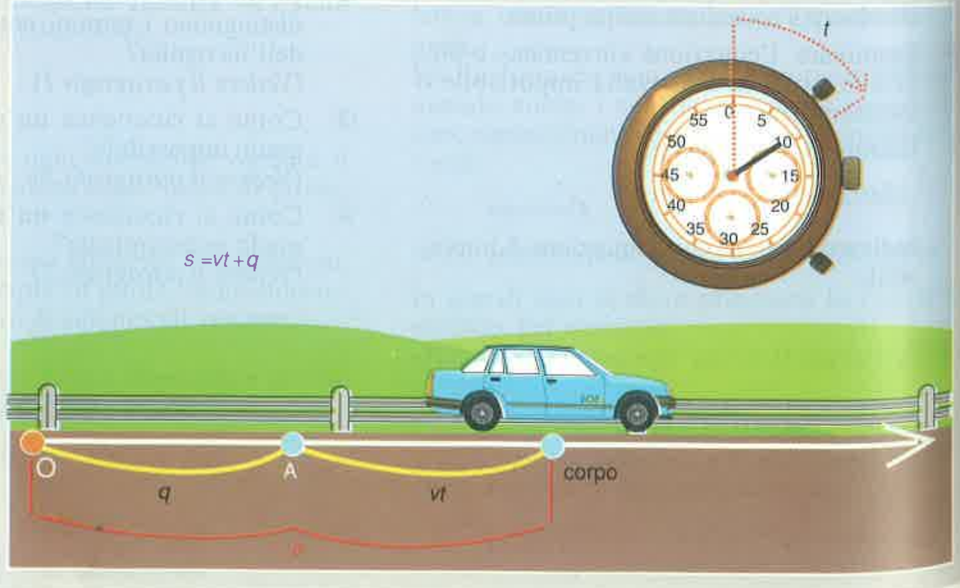


Figura 1
Un corpo che si muove di moto rettilineo uniforme a partire da A

1. Un corpo parte dal punto A che dista 2 metri da O e si muove con velocità costante di 5 metri al secondo; dove si trova il corpo dopo 3 secondi?

La risposta è immediata; sono infatti dati:
- la distanza di A da O, che è di 2 m, cioè q=2;
- la velocità di 5 metri al secondo, cioè v=5;
- il tempo trascorso (3 secondi), cioè t=3.

Basta allora sostituire i numeri alle lettere e si trova subito:

$$s=5\cdot 3+2 \quad \text{e cioè} \quad s=17 \text{ m}$$

2. Un corpo parte da un punto A che dista 10 metri da O e, dopo 5 secondi, si trova ad una distanza di 50 metri da O; qual è la velocità del corpo?

La risposta non è altrettanto immediata e si può procedere in due modi:

I. Si risolve solo il problema assegnato, osservando che sono dati:
- la distanza di A da O, che è di 10 m, cioè q=10;
- il tempo trascorso (5 secondi), cioè t=5;
- la distanza da O, che è di 50 m, cioè s=50.

Sostituendo i numeri alle lettere si trova la formula:

$$50=5v+10$$

che è un'equazione di 1° grado nell'incognita v. Risolvendola si trova:

$$5v=50-10 \quad \text{cioè} \quad 5v=40 \quad \text{e quindi} \quad v=\frac{40}{5}=8$$

Si trova in conclusione:

$$v=8 \text{ metri al secondo}$$

II. Si risolvono tutti i problemi dello stesso tipo, e questo è certamente più conveniente; ora si osserva che sono dati i valori di s, t e q e bisogna ricavare v, perciò si deve risolvere l'equazione:

$$s=vt+q$$

rispetto all'incognita q. Si ottiene:

$$vt=s-q \quad \text{e quindi} \quad v=\frac{s-q}{t}$$

Si osserva subito che l'equazione è *indeterminata* nei casi seguenti:

$$s-q=0 \quad \text{e} \quad t=0 \qquad \text{cioè} \qquad s=q \quad \text{e} \quad t=0$$

Questo risultato si interpreta facilmente dal punto di vista fisico:

t=0 indica l'istante in cui si comincia a contare il tempo;
$s=q$ significa che il corpo si trova in A, a distanza q da O.

Queste due sole condizioni non permettono di determinare la velocità v: quando si comincia a contare il tempo, il corpo si trova sempre nella posizione di partenza A, qualunque sia la sua successiva velocità.

L'equazione è invece *impossibile* se si assegnano i seguenti dati:

$$s-q\neq 0 \quad \text{e} \quad t=0 \qquad \text{cioè} \qquad s\neq q \quad \text{e} \quad t=0$$

Anche questo è un risultato facilmente comprensibile: non si può trovare alcun valore della velocità che modifichi la posizione del corpo al tempo t=0.

Si può inoltre ritrovare subito il risultato ottenuto prima, dato da:

$$v=\frac{50-10}{5}=8$$

3. Un corpo parte da un punto A, che dista 20 metri da O e si muove alla velocità di 10 metri al secondo; dopo quanto tempo si trova a 50 metri da O?
In questo problema l'incognita è il tempo t, perciò si è condotti a risolvere un'equazione del tipo:

$$s=vt+q$$

rispetto all'incognita t; si ha:

$$vt=s-q \quad \text{e quindi} \quad t=\frac{s-q}{v}$$

L'equazione risulta *indeterminata* se sono dati:

$$s-q=0 \quad \text{e} \quad v=0 \quad \text{cioè} \quad s=q \quad \text{e} \quad v=0$$

Questo risultato è facile da interpretare:
$v=0$ significa che il corpo sta fermo;
$s=q$ significa che il corpo si trova in A, a distanza q da O.
Queste due condizioni si verificano sempre: se il corpo sta fermo, rimane sempre nel punto A, qualunque sia il tempo trascorso; perciò in questo modo non si può determinare il valore del tempo.
L'equazione è invece *impossibile* se sono dati:

$$s-q\neq 0 \quad \text{e} \quad v=0 \quad \text{cioè} \quad s\neq q \quad \text{e} \quad v=0$$

Infatti, se il corpo sta fermo, non si può trovare in nessun istante in una posizione diversa da A.
Si può infine risolvere il problema numerico assegnato, trovando:

$$t=\frac{50-20}{10} \quad \text{cioè} \quad t=3 \text{ secondi}$$

4. Un corpo, che si muove alla velocità di 5 metri al secondo, si trova dopo 12 secondi alla distanza di 100 metri da O; qual è la posizione iniziale del corpo?
In questo caso si deve trovare la posizione iniziale del corpo, cioè la distanza q; perciò si deve risolvere l'equazione:

$$s=vt+q$$

rispetto all'incognita q. Si trova subito:

$$q=s-vt$$

Si nota inoltre che il coefficiente dell'incognita vale sempre 1 e perciò l'equazione ha sempre una soluzione.
Esaminando infine il caso numerico assegnato, si trova:

$$q=100-12\cdot 5 \quad \text{cioè} \quad q=40 \text{ metri}$$

Incognita e coefficienti nei problemi esaminati

I problemi esaminati suggeriscono un'osservazione; nella legge:

$$s=vt+q$$

compaiono quattro lettere (s, v, t, q) e perciò si possono creare quattro tipi di problemi, scegliendo una delle lettere come incognita e considerando le altre come coefficienti fissi. I quattro tipi di problemi sono dunque i seguenti:

1. Fissato il valore di q, t e v, ricavare s;
2. Fissato il valore di s, t e q, ricavare v;
3. Fissato il valore di s, v e q, ricavare t;
4. Fissato il valore di s, t e v, ricavare q.

Dalla geometria analitica ai sistemi di 1° grado

Le coordinate del punto d'intersezione di due rette

Attività 1

Sono date due rette r e s che hanno le equazioni seguenti:

$$(r)\ y=x-4 \qquad (s)\ y=-2x+5$$

- Determinare le coordinate di alcuni punti di queste due rette completando le tabelle seguenti:

Tabella A

x	$y=x-4$
0	−4
1	
2	
3	−1

Tabella B

x	$y=-2x+5$
0	5
1	
2	
3	−1

- Qual è l'unica coppia di numeri che compare in entrambe le tabelle?
In fig. 1 (pagina seguente) sono rappresentate, sullo stesso riferimento cartesiano, le due rette r e s; le due rette si incontrano in un punto P, che è detto *punto di intersezione delle due rette*.
- Spiegare perché si può affermare con certezza che il punto d'intersezione P ha le coordinate seguenti:

$$P(3; -1)$$

Un sistema di due equazioni in due incognite

Dal punto di vista algebrico, un'uguaglianza come la seguente:

$$y=x-4$$

è *un'equazione di 1° grado nelle due incognite* x *e* y.
La soluzione di questa equazione non può essere un unico numero: *una soluzione è una coppia di numeri da sostituire a* x *e* y *in modo da ottenere un'uguaglianza vera.*

Però l'equazione non determina una sola soluzione: le coppie di numeri che la risolvono sono molte, alcune delle quali sono proprio quelle elencate nella tabella A di fig. 1.

Anche l'uguaglianza:

$$y=-2x+5$$

è un'equazione di 1° grado in due incognite, che ha molte soluzioni; alcune fra queste sono elencate nella tabella B di fig. 1.

Osservando le due tabelle, si nota che c'è un'unica coppia di numeri che compare in entrambe; è la coppia:

$$(3; -1)$$

Questa coppia è soluzione di entrambe le equazioni: sostituendo a x il primo numero (3) e a y il secondo numero (–1) le due equazioni diventano due uguaglianze vere.

Più precisamente si dice anche che la coppia (3; –1) è la soluzione del seguente *sistema di equazioni*:

$$\begin{cases} y=x-4 \\ y=-2x+5 \end{cases}$$

In questa scrittura è essenziale la parentesi graffa che collega le due equazioni; questa parentesi ricorda infatti che, per risolvere il sistema, le due equazioni debbono diventare entrambe due uguaglianze vere.

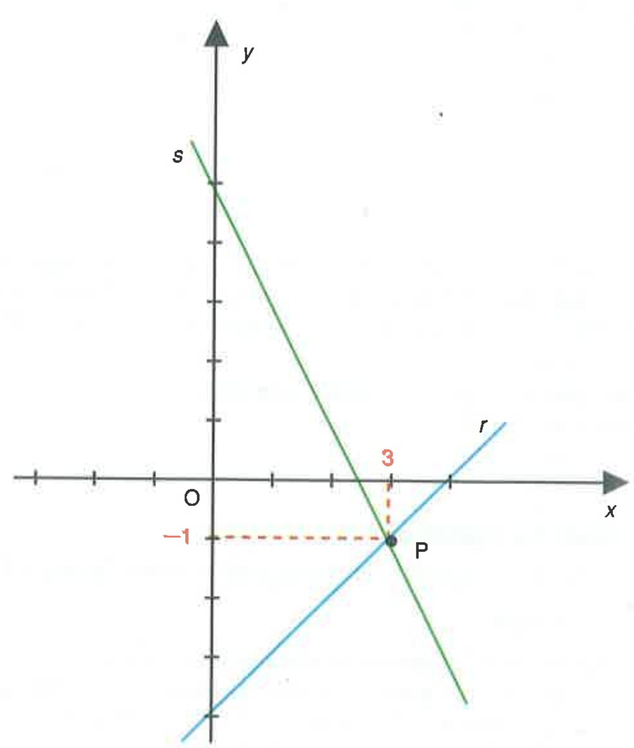
La soluzione del sistema è stata trovata per tentativi; non si tratta certo del procedimento più rapido e generale.

Ecco allora come si può ragionare per trovare più rapidamente la soluzione del sistema.

Figura 1
Il punto d'intersezione di due rette

Tabella A	
x	$y=x-4$
0	–4
1	–3
3	–1

Tabella B	
x	$y=-2x+5$
0	5
1	3
3	–1



Attività 2

Si ricorda che:

- le due equazioni rappresentano due rette;
- la soluzione del sistema indica il loro punto d'intersezione;
- questo punto d'intersezione deve avere un'unica ordinata y. Dovrà dunque risultare:

$$x-4=-2x+5$$

Si è così ottenuta un'equazione di 1° grado, che contiene la sola incognita x e permette quindi di ricavare l'ascissa x del punto d'intersezione; si ha:

.... = ...

da cui:

$$x=3$$

L'ordinata del punto si può ricavare dall'equazione della retta r; si ha:

$y=$ ....–4= ....

Lo stesso valore dell'ordinata si otterrebbe ovviamente a partire dall'equazione della retta s; si ha infatti

$y=-2\cdot$........+5= ....

In definitiva si ottiene la soluzione:

$$\begin{cases} x=3 \\ y=-1 \end{cases}$$

che si scrive anche: (3; –1).

Esaminare un sistema impossibile

Attività 3

Disegnare sullo stesso riferimento cartesiano le due rette s e t che hanno le seguenti equazioni:

$$(s)\ y=-2x+5 \qquad (t)\ y=-2x$$

Quale caratteristica presentano le due rette?

Ripetere il procedimento seguito prima per risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} y=-2x+5 \\ y=-2x \end{cases}$$

Si trova la soluzione del sistema?

Collegare il risultato dei calcoli con il grafico dato dalla geometria analitica, completando la seguente tabella:

Dalla geometria analitica	Dai calcoli
Le due rette sono	Il sistema non ha ....
perciò non esiste	cioè il sistema è *impossibile*

Scrivere qualche altro esempio di sistema impossibile.

Esaminare un sistema indeterminato

Nel caso delle equazioni di 1° grado, si sono trovate equazioni impossibili ed equazioni indeterminate. Ora si è appena trovato un sistema impossibile, ma è facile anche scrivere un *sistema indeterminato*; basta scrivere, per esempio:

$$\begin{cases} y=-2x+5 \\ y=-2x+5 \end{cases}$$

Attività 4

Che cosa significa questo sistema dal punto di vista della geometria analitica?

Che cosa si ottiene risolvendo il sistema?

Scrivere qualche altro esempio di sistema indeterminato.

Esaminare un sistema di tre equazioni in due incognite

Attività 5

Disegnare, su uno stesso piano cartesiano, le tre rette che hanno le tre equazioni seguenti:

$(r)\ y=x-4 \qquad (s)\ y=-2x+5 \qquad (t)\ y=7x-4$

Le tre rette passano per uno stesso punto?

Esaminare il seguente sistema:

$$\begin{cases} y=x-4 \\ y=-2x+5 \\ y=7x-4 \end{cases}$$

C'è una coppia di numeri che trasforma le tre equazioni in tre uguaglianze vere?

Esaminare un sistema compatibile di tre equazioni in due incognite

Attività 6

Disegnare, su uno stesso piano cartesiano, le tre rette che hanno le tre equazioni seguenti:

$(r)\ y=x-4 \qquad (s)\ y=-2x-4 \qquad (t)\ y=7x-4$

Le tre rette passano per uno stesso punto?

Esaminare il seguente sistema:

$$\begin{cases} y=x-4 \\ y=-2x-4 \\ y=7x-4 \end{cases}$$

C'è una coppia di numeri che trasforma le tre equazioni in tre uguaglianze vere?

La geometria analitica suggerisce alcune considerazioni sui sistemi di tre equazioni in due incognite:

- tre rette scelte a caso generalmente non passano per uno stesso punto; questo fa capire che un sistema di tre equazioni in due incognite generalmente non ha soluzione, cioè è *incompatibile*;
- si possono scegliere tre rette che passano per uno stesso punto; in questo caso particolare il sistema ha soluzione, cioè è *compatibile*.

5 Risolvere un sistema di due equazioni e due incognite con il metodo di sostituzione

Equazioni di 1° grado in due incognite

Nel paragrafo 1 sono state esaminate delle equazioni di 1° grado in cui compariva una sola incognita, abitualmente indicata con la lettera x. Ma queste non sono le sole equazioni di 1° grado che si possono scrivere: molti problemi si traducono in *equazioni di 1° grado in due incognite*, cioè uguaglianze fra due espressioni che presentano le seguenti caratteristiche:

- vi compaiono due lettere (di solito x e y);
- le due lettere compaiono al 1° grado.

Ecco due esempi:

$y=2x \qquad y=-3x+5$

Le soluzioni di un'equazione in due incognite

La soluzione di una di queste equazioni non può essere ovviamente un solo numero: *la soluzione di un'equazione in due incognite è una coppia di numeri da sostituire a* x *e* y *in modo da ottenere un'uguaglianza vera.*

Però un'equazione non determina un'unica soluzione; per esempio, le coppie di numeri che risolvono l'equazione $y=2x$ sono molte, alcune delle quali sono elencate nella tabella A.

Anche l'uguaglianza $y=-3x+5$ è un'equazione di 1° grado in due incognite che ha molte soluzioni; alcune fra queste soluzioni sono elencate nella tabella B.

Un sistema di due equazioni e la sua soluzione

Osservando le due tabelle A e B, si nota che compare in entrambe la coppia (1; 2).

Questa coppia presenta un'importante caratteristica: è soluzione di entrambe le equazioni, cioè, sostituendo a x il primo numero (1) e a y il secondo numero (2) le due equazioni diventano due uguaglianze vere.

Più precisamente si dice che *la coppia* (1; 2) *è la soluzione del seguente sistema di equazioni:*

$$\begin{cases} y=2x \\ y=-3x+5 \end{cases}$$

Nella precedente formula tutti i simboli sono importanti; in particolare, la parentesi graffa ricorda che le due equazioni sono collegate

Tabella A

x	$y=2x$
0	0
1	2
2	4

Tabella B

x	$y=-3x+5$
0	5
1	2
2	−1

strettamente e debbono essere risolte insieme.
In conclusione, *la soluzione di un sistema di due equazioni in due incognite è una coppia di numeri caratterizzata dalla seguente proprietà: sostituendo il primo numero a x ed il secondo numero a y, le due equazioni diventano due uguaglianze vere.*

Risolvere un sistema col metodo di sostituzione

La soluzione del sistema è stata trovata per tentativi; non si tratta certo del procedimento più rapido. Ecco allora come si può ragionare per risolvere rapidamente un sistema.
La prima equazione, e cioè $y=2x$, afferma che l'incognita y deve essere il doppio di x, perciò, nella seconda equazione, si può *sostituire* $2x$ al posto di y; il sistema diventa allora:

$$\begin{cases} y=2x \\ 2x=-3x+5 \end{cases}$$

In questo modo la seconda equazione è diventata un'equazione di 1° grado che contiene la sola incognita x e può essere risolta; si ha:

$$\begin{cases} y=2x \\ 5x=5 \end{cases} \quad \text{e quindi} \quad \begin{cases} y=2x \\ x=1 \end{cases}$$

Infine, sostituendo nella prima equazione 1 a x, si ottiene la soluzione del sistema, data da:

$$\begin{cases} y=2 \\ x=1 \end{cases} \quad \text{che si scrive anche } (1;\ 2)$$

Questo metodo per risolvere un sistema è detto *metodo di sostituzione*: si basa sul ricavare una delle due incognite da un'equazione e sostituire l'espressione ottenuta nell'altra.
Ecco un altro esempio di sistema risolto con questo metodo:

$$\begin{cases} 4x+3y=-1 \\ x+2y-1=0 \end{cases}$$

In questo caso conviene ricavare x dalla seconda equazione e sostituire l'espressione ottenuta nella prima; si ha:

$$\begin{cases} 4x+3y=-1 \\ x=-2y+1 \end{cases} \quad \text{da cui} \quad \begin{cases} 4(-2y+1)+3y=-1 \\ x=-2y+1 \end{cases}$$

Svolgendo i calcoli indicati si ottiene:

$$\begin{cases} -8y+4+3y=-1 \\ x=-2y+1 \end{cases} \quad \text{ossia} \quad \begin{cases} -5y=-5 \\ x=-2y+1 \end{cases}$$

$$\text{e quindi} \quad \begin{cases} y=1 \\ x=-2\cdot 1+1 \end{cases}$$

Si ottiene infine la soluzione:

$$\begin{cases} y=1 \\ x=-1 \end{cases} \quad \text{cioè} \quad (1;\ -1)$$

Verifiche

Conoscenze

① Come si riconosce un'equazione di 1° grado in due incognite?

② Spiegare il significato del termine «soluzione di un'equazione di 1° grado in due incognite».

③ Spiegare il significato del termine «soluzione di un sistema di 1° grado in due incognite».

Comprensione

① Portare qualche esempio di equazione di 1° grado in due incognite, indicandone almeno quattro soluzioni.

② Spiegare perché un'equazione di 1° grado in due incognite non ha una sola soluzione.

Applicazioni

① Scrivere alcune soluzioni delle equazioni seguenti:

$x=3y \qquad x=y-6$

② Risolvere con il metodo di sostituzione il sistema seguente:

$$\begin{cases} x=3y \\ x=y-6 \end{cases}$$

③ Risolvere con il metodo di sostituzione il sistema seguente:

$$\begin{cases} 2x+3y=-14 \\ 3x+y=7 \end{cases}$$

Vocabolario

① Fra le frasi seguenti indicare quelle *errate*:

«Il sistema $\begin{cases} 2x=2 \\ y=x+3 \end{cases}$ ha la soluzione $x=1$»

«Il sistema $\begin{cases} 2x=2 \\ y=x+3 \end{cases}$ ha la soluzione (1; 4)»

«L'equazione $y=x+5$ ha la soluzione 5»

«L'equazione $y=x+5$ ha molte soluzioni, fra le quali c'è la coppia (0; 5)»

6 Dal metodo di sostituzione alla regola di Cramer

Come si riconosce un sistema di 1° grado

Nel paragrafo precedente si è lavorato solo su qualche particolare sistema di equazioni; più in generale, si può dire che un sistema di 1° grado è costituito da più equazioni di 1° grado, in cui compaiono più incognite.

Fra i sistemi di 1° grado i più semplici da risolvere sono quelli in cui compaiono due equazioni e due incognite, abitualmente indicate con le lettere x e y. Questi sistemi possono essere sempre scritti nella forma seguente:

$$\begin{cases} ax+by=h \\ cx+dy=k \end{cases}$$

dove le lettere a, b, c, d indicano *i coefficienti delle incognite*, mentre le lettere h, k indicano *i termini noti*.

Ecco un esempio:

$$\begin{cases} 6x+9y=19 \\ 9x+3y=11 \end{cases}$$

Tuttavia, un sistema scritto in quest'ultima forma non mostra una rapida via di soluzione con il metodo di sostituzione. Conviene allora esaminare attentamente questo caso, affiancando i calcoli svolti con i coefficienti numerici agli analoghi calcoli basati sui coefficienti letterali (a, b, c, d, h, k).

Ecco come si procede.

1. Si ricava un'incognita (per esempio x) da una delle equazioni (per esempio dalla prima) e si scrive l'espressione ottenuta al posto di x nell'altra equazione; si ha:

sistema $\begin{cases} 6x+9y=19 \\ 9x+3y=11 \end{cases}$	**sistema** $\begin{cases} ax+by=h \\ cx+dy=k \end{cases}$
$\begin{cases} 6x=19-9y \\ 9x+3y=11 \end{cases}$	$\begin{cases} ax=h-by \\ cx+dy=k \end{cases}$
$\begin{cases} x=\frac{19}{6}-\frac{9}{6}y \\ 9x+3y=11 \end{cases}$	$\begin{cases} x=\frac{h}{a}-\frac{b}{a}y \\ cx+dy=k \end{cases}$
$\begin{cases} x=\frac{19}{6}-\frac{9}{6}y \\ 9\ \frac{19}{6}-\frac{9}{6}y\ +3y=11 \end{cases}$	$\begin{cases} x=\frac{h}{a}-\frac{b}{a}y \\ c\ \frac{h}{a}-\frac{b}{a}y\ +dy=k \end{cases}$

2. Si risolve la seconda equazione, che presenta la sola incognita y, e si ha:

$\begin{cases} x=\frac{19}{6}-\frac{9}{6}y \\ y=\frac{5}{3} \end{cases}$	$\begin{cases} x=\frac{h}{a}-\frac{b}{a}y \\ y=\frac{ak-ch}{ad-cb}=\frac{m}{n} \end{cases}$

3. Si sostituisce il valore di y nella prima equazione per ricavare anche il valore di x. Nei calcoli da svolgere con i coefficienti letterali conviene indicare con m e n i termini della frazione che dà il valore di y. Si ottiene quindi:

$$\begin{cases} x=\dfrac{19}{6}-\dfrac{9}{6}\cdot\dfrac{5}{3} \\ y=\dfrac{5}{3} \end{cases} \qquad \begin{cases} x=\dfrac{h}{a}-\dfrac{b}{a}\cdot\dfrac{m}{n} \\ y=\dfrac{ak-ch}{ad-cb}=\dfrac{m}{n} \end{cases}$$

4. Svolgendo i calcoli, si ottiene finalmente:

$$\begin{cases} x=\dfrac{2}{3} \\ y=\dfrac{5}{3} \end{cases} \qquad \begin{cases} x=\dfrac{dh-bk}{ad-cb} \\ y=\dfrac{ak-ch}{ad-cb} \end{cases}$$

La regola di Cramer

Alla fine dei calcoli, si osserva che il procedimento non offre difficoltà concettuali, ma risulta alquanto lungo e pesante.
Converrebbe allora ricordare i risultati ottenuti nel caso dei coefficienti letterali, in modo da non dover ripetere ogni volta gli stessi calcoli.
Per questo Gabriel Cramer, matematico svizzero del Settecento, ha proposto una scrittura che rende facilmente memorizzabili i risultati ottenuti nel caso letterale. Ecco di che si tratta.
Si scrivono i coefficienti delle incognite in una tabella come la seguente:

$$\begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix}$$

Questa tabella prende il nome di *matrice dei coefficienti.*

A questa matrice si associa un numero, chiamato *determinante della matrice*, definito nel modo seguente:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad-bc$$

Il determinante si trova dunque nel modo seguente (fig. 1):

- si calcola il prodotto *ad*, moltiplicando termini che si trovano sulla *diagonale principale;*
- si calcola il prodotto *bc*, moltiplicando termini che si trovano sulla *diagonale secondaria;*
- si calcola la differenza *ad–bc.*

Analogamente, si può scrivere:

$$\begin{vmatrix} h & b \\ k & d \end{vmatrix} = dh-bk$$

$$\begin{vmatrix} a & h \\ c & k \end{vmatrix} = ak-ch$$

In questo modo, *la soluzione del sistema:*

$$\begin{cases} ax+by=h \\ cx+dy=k \end{cases}$$

si può scrivere nella forma seguente:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} h & b \\ k & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} \qquad y=\frac{\begin{vmatrix} a & h \\ c & k \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$$

Questa soluzione si può ricordare facilmente con le seguenti osservazioni (fig. 2):

- in entrambe le espressioni il denominatore è il determinante della matrice dei coefficienti;
- nell'espressione che fornisce *x*, il numeratore è il determinante della matrice ottenuta, a partire da quella dei coefficienti, scrivendo i termini noti al posto della prima colonna;
- nell'espressione che fornisce *y*, il numeratore è il determinante della matrice ottenuta, a partire da quella dei coefficienti, scrivendo i termini noti al posto della seconda colonna.

Questa regola prende appunto il nome di *regola di Cramer.*

Un esempio di applicazione della regola di Cramer

Ecco un esempio che conduce ad impadronirsi della regola di Cramer per risolvere rapidamente dei sistemi di 1° grado di due equazioni in due incognite.

Risolvere il sistema:

$$\begin{cases} 10x+4y=3 \\ 5x-20y=-4 \end{cases}$$

- Si calcola il determinante dei coefficienti, che vale:

$$\begin{vmatrix} 10 & 4 \\ 5 & -20 \end{vmatrix} =10(-20)-5\cdot4=-200-20=-220$$

- Per ottenere il valore di *x*, si calcola il seguente determinante:

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -4 & -20 \end{vmatrix} =3(-20)-(-4)\cdot4=-60+16=-44$$

Si trova quindi:

$$x=\frac{-44}{-220}=\frac{1}{5}=0{,}2$$

- Per calcolare il valore di *y*, si calcola invece il seguente determinante:

$$\begin{vmatrix} 10 & 3 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} =10\cdot(-4)-3\cdot5=-40-15=-55$$

Così si trova:

$$y=\frac{-55}{-220}=\frac{1}{4}=0{,}25$$

Figura 1
Come si calcola il determinante di una matrice

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad-bc \qquad \begin{vmatrix} h & b \\ k & d \end{vmatrix} = dh-bk \qquad \begin{vmatrix} a & h \\ c & k \end{vmatrix} = ak-ch$$

diagonale principale
diagonale secondaria

Figura 2
La soluzione di un sistema

$$\begin{cases} ax+by=h \\ cx+dy=k \end{cases}$$

$$x=\frac{\begin{vmatrix} h & b \\ k & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} \qquad y=\frac{\begin{vmatrix} a & h \\ c & k \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$$

In definitiva la soluzione del sistema è

$$\left(\frac{1}{5};\ \frac{1}{4}\right) \qquad \text{ossia} \qquad (0{,}2;\ 0{,}25)$$

La regola di Cramer e i sistemi indeterminati

Ecco un secondo esempio di sistema da risolvere:

$$\begin{cases} 2x+3y=4 \\ 4x+6y=8 \end{cases}$$

Si osserva subito che la seconda equazione è ottenuta dalla prima moltiplicandone i due membri per 2, perciò le due equazioni sono fra loro equivalenti; questo vuol dire che il sistema è in realtà costituito dalla sola equazione:

$$2x+3y=4$$

riscritta due volte.
Si tratta allora di *un sistema indeterminato*, dato che una sola equazione in due incognite non determina una soluzione.
Che cosa succede ora applicando la regola di Cramer?

- Calcolando il determinante dei coefficienti, si trova:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 2\cdot6-4\cdot3=12-12=0$$

- Calcolando poi gli altri due determinanti, si trova:

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 8 & 6 \end{vmatrix} = 4\cdot6-3\cdot8=24-24=0$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = 2\cdot8-4\cdot4=16-16=0$$

Si trova dunque che tutti e tre i determinanti valgono 0.
Questo stesso risultato caratterizza, più in generale, i sistemi formati da due equazioni equivalenti.

La regola di Cramer e i sistemi impossibili

Ecco un ultimo esempio di sistema su cui riflettere:

$$\begin{cases} 2x+3y=4 \\ 4x+6y=12 \end{cases}$$

Le due equazioni non sono equivalenti, perché la seconda equazione è ottenuta dalla prima, in questo modo:

- il primo membro è stato moltiplicato per 2;
- il secondo membro è stato moltiplicato per 3.

Tuttavia, calcolando il determinante dei coefficienti, si trova ancora:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 2\cdot6-4\cdot3=12-12=0$$

Però, calcolando gli altri due determinanti, si trova:

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 12 & 6 \end{vmatrix} = 4\cdot6-3\cdot12=24-36=-12$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 12 \end{vmatrix} = 2\cdot12-4\cdot4=24-16=8$$

In questo caso allora, per calcolare il valore di x e y, si dovrebbero eseguire le operazioni seguenti:

$$x=\frac{-12}{0} \qquad y=\frac{8}{0}$$

operazioni prive di significato, dato che non si può eseguire la divisione per 0.
Non si può dunque trovare la soluzione del sistema, cioè *il sistema è impossibile*.

Sistemi risolubili

Le considerazioni precedenti possono essere sintetizzate nel modo seguente:

- *Un sistema indeterminato* non riesce a determinare una sola soluzione, perché è formato da una sola equazione ripetuta due volte; in questo caso *i tre determinanti presenti nella regola di Cramer valgono tutti 0*.
- Se poi *il solo determinante dei coefficienti è 0*, le due espressioni che forniscono x e y perdono significato, dato che non si può eseguire la divisione per 0; in questo caso non si può trovare la soluzione del sistema, cioè il *sistema è impossibile*.
- Se invece *il determinante dei coefficienti non vale 0*, si trova una sola soluzione, fornita rapidamente dalla regola di Cramer; in questo caso il sistema si dice *risolubile*.

Converrà allora controllare la risolubilità di un sistema prima di iniziare a risolverlo, tenendo presente che *un sistema è risolubile solo se risulta*:

$$ad-bc\neq0$$

Verifiche

Conoscenze

① In che modo si riconosce un sistema di 1° grado?

② In quale forma si scrive abitualmente un sistema di 1° grado in due equazioni e due incognite?

③ Illustrare la regola di Cramer per risolvere un sistema di 1° grado in due equazioni e due incognite.

④ Che cosa significa il termine «sistema indeterminato»? Quali risultati dà la regola di Cramer nel caso dei sistemi indeterminati?

⑤ Che cosa si conclude se il determinante dei coefficienti vale 0?

⑥ Come si verifica se un sistema è o non è risolubile?

Comprensione

① Si può risolvere un sistema senza ricordare la regola di Cramer?

② Come si può verificare se la soluzione di un sistema è esatta?

③ Esaminare il seguente sistema:

$$\begin{cases} x=y \\ x+y=4 \end{cases}$$

e trovare l'errore nella seguente affermazione:
Il sistema non è risolubile, perché determinante dei coefficienti è:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1-1=0$$

④ Risolvere il sistema precedente in due modi:
- applicando correttamente la regola di Cramer;
- con il metodo di sostituzione.

Con quale metodo i calcoli sono più rapidi?

⑤ È dato il seguente sistema, formato da due equazioni equivalenti:

$$\begin{cases} ax+by=h \\ max+mby=mh \end{cases}$$

Verificare che i tre determinanti presenti nella regola di Cramer valgono tutti zero.

⑥ Del sistema:

$$\begin{cases} ax+by=h \\ cx+dy=k \end{cases}$$

si sa soltanto che i tre determinanti della regola di Cramer valgono zero; verificare che il sistema è indeterminato completando il ragionamento impostato qui sotto.

- Se il determinante dei coefficienti vale 0, si ha:

$ad-bc=0$ cioè $ad=bc$

Questo vuol dire che risulta:

$$\frac{c}{a}=\frac{d}{b}=m$$

cioè:

$c=ma$ e $d=mb$

- Se vale 0 anche un secondo determinante si ha, per esempio:

$dh-bk=0$ cioè ....

Questo vuol dire che risulta:

$$\frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots}=\frac{d}{b}=m$$

cioè anche:

$k=mh$

Perciò le due equazioni del sistema assegnato sono ....

Applicazioni

① Risolvere il seguente sistema con il metodo che si ritiene più opportuno.

$$\begin{cases} x-4y=4 \\ x=5y \end{cases}$$

Verificare che la soluzione ottenuta è esatta.

② Risolvere il seguente sistema con il metodo che si ritiene più opportuno.

$$\begin{cases} 20x-13y=-11 \\ 4x+3y=9 \end{cases}$$

Verificare che la soluzione ottenuta è esatta.

③ Fra i sistemi seguenti individuare quello risolubile, motivando la scelta.

$$\begin{cases} 12x-8y=4 \\ 3x-2y=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 12x-8y=0 \\ 3x-2y=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-2y=0 \\ 3x-2y=1 \end{cases}$$

7 Sistemi con più di due equazioni

Sistemi di più equazioni in più incognite

Molti problemi di carattere fisico, biologico o economico si traducono in sistemi di più equazioni in più incognite (vedi anche le schede alle pp. 414-422). Ecco un primo esempio :

$$\begin{cases} 8x-6y+z=-1 \\ 6x-8y-z=-13 \\ x-3y+5z=22 \end{cases}$$

Applicare il metodo di sostituzione

Per risolvere questo sistema, si può applicare ancora il metodo di sostituzione; nel caso assegnato conviene procedere nel modo seguente:

- Si ricava z dalla I equazione e si sostituisce l'espressione ottenuta nella II e nella III equazione; si ha:

$$\begin{cases} z=-1-8x+6y \\ 6x-8y-(-1-8x+6y)=-13 \\ x-3y+5(-1-8x+6y)=22 \end{cases}$$

da cui:

$$\begin{cases} z=-8x+6y-1 \\ 14x-14y=-14 \\ -39x+27y=27 \end{cases} \quad \text{ossia} \quad \begin{cases} z=-8x+6y-1 \\ x-y=-1 \\ -13x+9y=9 \end{cases}$$

- Questa prima sostituzione ha condotto a scrivere, all'interno del sistema di 3 equazioni, un sistema di due equazioni in due incognite, formato dalla II e III equazione. Questo sistema può essere risolto per sostituzione, ricavando x dalla II equazione e sostituendo l'espressione ottenuta nella III; si ottiene:

$$\begin{cases} z=-8x+6y-1 \\ x=y-1 \\ -13(y-1)+9y=9 \end{cases}$$

da cui:

$$\begin{cases} z=-8x+6y-1 \\ x=y-1 \\ -4y=-4 \end{cases}$$

- Si è dunque arrivati a scrivere una delle equazioni – l'ultima – in modo che presenti una sola incognita (y); così, risolvendo quest'equazione, si può ricavare il valore di y.

Sostituendo il valore ottenuto nella II equazione si ricava x e, infine, sostituendo i due valori ottenuti nella I equazione si ricava z; si ha:

$$\begin{cases} z=-8\cdot 0+6\cdot 1-1=5 \\ x=1-1=0 \\ y=1 \end{cases}$$

Svolgendo i calcoli si ottiene:

$$\begin{cases} z=5 \\ x=0 \\ y=1 \end{cases} \quad \text{ossia} \quad (0;\ 1;\ 5)$$

Il procedimento seguito suggerisce un'osservazione: le successive sostituzioni non possono essere eseguite a caso; ma debbono essere ordinate con lo scopo di riscrivere il sistema di tre equazioni in modo che presenti, successivamente:

I. due equazioni in due incognite;
II. un'equazione in una sola incognita.

Un sistema impossibile

Ecco un altro sistema da risolvere:

$$\begin{cases} x-y-z=2 \\ 2x+y-z=1 \\ 4x-y-3z=3 \end{cases}$$

Procedendo per sostituzione, si ricava z dalla I equazione e si sostituisce l'espressione ottenuta nella II e nella III equazione; si ha:

$$\begin{cases} z=x-y-2 \\ 2x+y-(x-y-2)=1 \\ 4x-y-3(x-y-2)=3 \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} z=x-y-2 \\ x+2y=-1 \\ x+2y=-3 \end{cases}$$

Successivamente, si ricava x dalla II equazione e si sostituisce nella III; si ottiene:

$$\begin{cases} z=x-y-2 \\ x=-1-2y \\ -1-2y+2y=-3 \end{cases} \quad \text{da cui} \quad \begin{cases} z=x-y-2 \\ x=-1-2y \\ -1=-3 \end{cases}$$

Si osserva subito che l'ultima equazione ottenuta non ha soluzioni, perciò anche il sistema assegnato non può avere soluzione; in questo caso si ha dunque *un sistema impossibile*.

Un sistema indeterminato

Ecco un ultimo sistema ottenuto, a partire da quello precedente, modificando solo il termine noto dell'ultima equazione.

$$\begin{cases} x-y-z=2 \\ 2x+y-z=1 \\ 4x-y-3z=5 \end{cases}$$

In questo caso, il procedimento di sostituzione porta ai seguenti risultati:

$$\begin{cases} z=x-y-2 \\ x+2y=-1 \\ x+2y=-1 \end{cases} \quad \text{da cui} \quad \begin{cases} z=x-y-2 \\ x=-1-2y \\ -1=-1 \end{cases}$$

In questo caso l'ultima equazione è indeterminata, cioè non riesce a determinare un solo valore di y.

Questo vuol dire che si può scegliere il valore di y come si vuole e, quindi, completare la risoluzione del sistema; si avranno allora, ad esempio, le soluzioni seguenti:

$$\begin{cases} z=-3 \\ x=-1 \\ y=0 \end{cases} \quad \begin{cases} z=-6 \\ x=-3 \\ y=1 \end{cases} \quad \begin{cases} z=0 \\ x=1 \\ y=-1 \end{cases}$$

Così ci si rende conto che il sistema ha infinite soluzioni, cioè è un *sistema indeterminato*.

Caratteristiche dei sistemi con più di due equazioni

Le considerazioni seguite prima possono essere ripetute a partire da un qualunque sistema che presenta più equazioni e più incognite; si arriva così ad individuare alcune caratteristiche fondamentali dei sistemi di equazioni:

I. Un sistema può essere sempre risolto con il metodo di sostituzione;
II. Il metodo di sostituzione ha lo scopo di riscrivere il sistema in modo che presenti, alla fine, un'equazione in una sola incognita;
III. Si hanno i seguenti casi possibili:
   A. l'equazione finale ha una sola soluzione e quindi anche il sistema ha una sola soluzione;
   B. l'equazione finale è impossibile e anche il sistema è impossibile, cioè non ha soluzione;
   C. l'equazione finale è indeterminata e anche il sistema è indeterminato, cioè ha infinite soluzioni.

Verifiche

Conoscenze

① Spiegare il significato dei termini seguenti:
   a. sistema risolubile;
   b. sistema impossibile;
   c. sistema indeterminato.

Comprensione

① Spiegare come si riconosce un sistema risolubile, impossibile o indeterminato.

Applicazioni

① Esaminare i seguenti sistemi e determinarne la soluzione, se ciò è possibile.

$$\begin{cases} x-3y+5z=22 \\ 8x-6y+z=-1 \\ 6x-8y-z=-13 \end{cases} \qquad \begin{cases} x-3y+5z=22 \\ 8x-6y+z=-1 \\ 3x-3y+2z=8 \end{cases}$$

② Verificare che i seguenti sistemi sono indeterminati ed indicarne qualche soluzione.

$$\begin{cases} x-3y+5z=22 \\ 8x-6y+z=-1 \\ 3x-3y+2z=7 \end{cases} \qquad \begin{cases} x-3y+5z=22 \\ 4x-6y+7z=29 \\ 3x-3y+2z=7 \end{cases}$$

8

Sistemi equivalenti. Il metodo di addizione

Il più semplice sistema di tre equazioni in tre incognite ha, per esempio, la forma seguente:

$$\begin{cases} x=1 \\ y=3 \\ z=2 \end{cases}$$

Questo sistema infatti indica direttamente la soluzione, che è la terna di numeri (1; 3; 2): le tre equazioni diventano tre uguaglianze vere, sostituendo 1 a x, 3 a y e 2 a z.

Sistemi equivalenti

Da questo sistema semplice è possibile passare ad un sistema più complicato con tre procedimenti.

I. Un procedimento caratteristico dei sistemi, che consiste nei seguenti passi:
- si addizionano membro a membro alcune delle equazioni del sistema, per esempio tutte e tre le equazioni date, ottenendo la seguente equazione in tre incognite:

$$x+y+z=1+3+2 \quad \text{ossia} \quad x+y+z=6$$

- si sostituisce l'equazione ottenuta al posto di una delle equazioni del sistema; si ha per esempio:

$$\begin{cases} x+y+z=6 \\ y=3 \\ z=2 \end{cases}$$

oppure $\begin{cases} x=1 \\ x+y+z=6 \\ z=2 \end{cases}$

II. Il procedimento già seguito per le equazioni, e cioè sostituire ad ogni equazione un'equazione equivalente; ecco due sistemi ottenuti in questo modo:

$$\begin{cases} 2x=2 \\ -y=-3 \\ z+3=2+3 \end{cases} \qquad \begin{cases} -2x+1=-2+1 \\ -\dfrac{1}{3}y=-1 \\ \dfrac{1}{2}z=1 \end{cases}$$

III. Si applicano più volte i procedimenti (I) e (II). Ecco un esempio di sistema ottenuto con quest'ultimo procedimento:

$$\begin{cases} 2x-y=2-3 \\ 2x-y+z+3=2-3+2+3 \\ -y+z+3=-3+2+3 \end{cases} \quad \text{da cui} \quad \begin{cases} 2x-y=-1 \\ 2x-y+z=1 \\ z-y=-1 \end{cases}$$

I sistemi ottenuti con i tre procedimenti ora descritti presentano un'importante caratteristica: hanno sempre la stessa soluzione (1; 3; 2), cioè *sono equivalenti*.

I ragionamenti seguiti hanno carattere generale e conducono alle seguenti conclusioni:
- *si dicono* equivalenti *due sistemi di 1° grado che hanno la stessa soluzione;*
- *quando si sostituisce ad ogni equazione del sistema un'equazione equivalente, si ottiene un sistema equivalente;*
- *quando si addizionano membro a membro più equazioni si ottiene un'altra equazione, che può essere sostituita ad una delle equazioni del sistema, generando un sistema equivalente a quello dato.*

Il metodo di addizione

Le proprietà precedenti conducono ad un metodo che è molto utile per semplificare ed abbreviare i calcoli nella risoluzione di un sistema.

Ecco come si può ragionare, a partire dal sistema che è stato risolto per sostituzione nel paragrafo precedente:

$$\begin{cases} 8x-6y+z=-1 & \text{(I)} \\ 6x-8y-z=-13 & \text{(II)} \\ x-3y+5z=22 & \text{(III)} \end{cases}$$

A. Si osserva che nella I e II equazione compaiono due monomi opposti nell'incognita z; si capisce perciò che addizionando I e II equazione si otterrà un'equazione senza l'incognita z. Si ottiene infatti:

$$8x-6y+z+6x-8y-z=-1-13 \qquad \text{(I)+(II)}$$

cioè:

$$14x-14y=-14$$

Questa equazione può anche essere scritta in forma più semplice moltiplicando i due membri per $\frac{1}{14}$; si ha:

$$x-y=-1$$

L'equazione ottenuta può essere scritta, per esempio, al posto della II equazione, ottenendo il seguente sistema equivalente a quello dato:

$$\begin{cases} 8x-6y+z=-1 & \text{(I)} \\ x-y=-1 & \text{(II)} \\ x-3y+5z=22 & \text{(III)} \end{cases}$$

B. Non si nota un'altra coppia di equazioni in cui compaiono monomi opposti, però si può creare una tale coppia, per esempio moltiplicando la II equazione per −8; si ottiene il sistema equivalente:

$$\begin{cases} 8x-6y+z=-1 & \text{(I)} \\ -8x+8y=8 & \text{(II)} \\ x-3y+5z=22 & \text{(III)} \end{cases}$$

Addizionando la I e la II equazione si ottiene la seguente equazione:

$$8x-6y+z-8x+8y=-1+8 \qquad \text{(I)+(II)}$$

cioè:

$$2y+z=7$$

che può essere sostituita alla prima equazione, ottenendo il seguente sistema ancora equivalente a quello dato:

$$\begin{cases} 2y+z=7 & \text{(I)} \\ x-y=-1 & \text{(II)} \\ x-3y+5z=22 & \text{(III)} \end{cases}$$

Ora si può risolvere facilmente il sistema per sostituzione:
- si ricava z dalla prima equazione e x dalla seconda;
- si sostituiscono le corrispondenti espressioni nella III equazione, che presenta così la sola incognita y e può essere immediatamente risolta.

Ecco che cosa si ottiene:

$$\begin{cases} z=7-2y \\ x=y-1 \\ y-1-3y+5(7-2y)=22 \end{cases}$$

da cui $\begin{cases} z=7-2y \\ x=y-1 \\ -12y+34=22 \end{cases}$

Si ricava infine:

$$\begin{cases} z=7-2\cdot 1=5 \\ x=1-1=0 \\ y=1 \end{cases} \quad \text{e quindi} \quad \begin{cases} x=0 \\ y=1 \\ z=5 \end{cases}$$

Questo metodo, detto *metodo di addizione*, diventa indispensabile quando si debbono risolvere dei sistemi con molte equazioni, ma richiede una certa «intuizione numerica» per individuare le addizioni più adatte da eseguire.

Verifiche

Conoscenze

① Come si riconoscono due sistemi equivalenti?

② In quali modi si può ottenere un sistema equivalente ad un sistema assegnato?

③ In che cosa consiste il metodo di addizione?

Comprensione

① Scrivere almeno tre sistemi che hanno la soluzione (2; 3; 7).

② Si può usare il metodo di addizione per risolvere i sistemi di due equazioni in due incognite?

Applicazioni

① Risolvere il seguente sistema con il metodo di addizione.

$$\begin{cases} 3x+2y+4z=13 & \text{(I)} \\ 3x-2y-4z=5 & \text{(II)} \\ -3x-2y+4z=-13 & \text{(III)} \end{cases}$$

Verificare che la soluzione ottenuta è corretta.
Addizionare (I) e (II) equazione.
Addizionare (II) e (III) equazione.

② Scrivere almeno due sistemi equivalenti a quello precedente.

Attività

Risolvere sistemi di 1° grado

Nei paragrafi 5, 6 e 8 sono stati presentati tre diversi metodi per risolvere un sistema di 1° grado:

I. il metodo di sostituzione;
II. la regola di Cramer;
III. il metodo di addizione.

Questa «Attività» è destinata appunto ad applicare e confrontare questi tre metodi per risolvere dei sistemi.

Il metodo di sostituzione per risolvere un sistema di due equazioni

Attività 1

Risolvere il sistema assegnato con il metodo di sostituzione e verificare che la soluzione ottenuta è esatta.

$$\begin{cases} 3x+5y=24 \\ y=-5x-4 \end{cases}$$

Completare lo svolgimento seguente:

$$\begin{cases} 3x+5\,\boxed{}=24 \\ y=\boxed{-5x-4} \end{cases} \quad \text{da cui} \quad \begin{cases} \text{....................}=24 \\ y=-5x-4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{..........}=\text{..........} \\ y=-5x-4 \end{cases} \quad \text{e quindi} \quad \begin{cases} x=\square \\ y=-5\,\square\,-4 \end{cases}$$

Si ottiene infine:

$$\begin{cases} x=-2 \\ y=6 \end{cases} \quad \text{cioè} \quad (-2;\, 6)$$

Per verificare che la soluzione ottenuta è esatta, si procede così:

- *si sostituisce –2 a x e 6 a y nelle due equazioni;*
- *si controlla che le due uguaglianze ottenute siano vere.*

In questo caso si ottiene:

$$\begin{cases} 3\,\square+5\,\square=24 \\ \square=-5\,\square-4 \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} 24=24 \\ 6=6 \end{cases}$$

Si conclude dunque che la soluzione ottenuta è esatta.

Il metodo di Cramer

Attività 2

Risolvere lo stesso sistema con il metodo di Cramer.

$$\begin{cases} 3x+5y=24 \\ y=-5x-4 \end{cases}$$

Completare lo svolgimento impostato qui sotto.

Per applicare la regola di Cramer si deve scrivere il sistema nella forma seguente:

$$\begin{cases} ax+by=h \\ cx+dy=k \end{cases}$$

In questo caso, la prima equazione è già scritta nella forma adatta, mentre la seconda equazione va riscritta «trasportando» il monomio ...... al primo membro; si ottiene:

$$\begin{cases} 3x+5y=24 \\ 5x+y=-4 \end{cases}$$

Il determinante dei coefficienti è:

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} =\dots\cdot\dots-\dots\cdot\dots=-22$$

Il sistema è quindi risolubile, dato che ....

Per ottenere il valore di x *si calcola il determinante:*

$$\begin{vmatrix} \dots & 5 \\ \dots & 1 \end{vmatrix} =\dots\cdot\dots-\dots\cdot\dots=44$$

Si ha quindi:

$$x=\frac{\text{.............}}{\text{.............}}=-2$$

Per ottenere il valore di y *si calcola invece il determinante:*

$$\begin{vmatrix} 3 & \dots \\ 5 & \dots \end{vmatrix} =\dots\cdot\dots-\dots\cdot\dots=-132$$

Si ha quindi:

$$y=\frac{\text{.............}}{\text{.............}}=6$$

Si ottiene di nuovo la soluzione:

$$\begin{cases} x=-2 \\ y=6 \end{cases} \quad \text{cioè} \quad (-2;\, 6)$$

Il metodo di addizione per risolvere un sistema di due equazioni

Attività 3

Risolvere ancora lo stesso sistema con il metodo di addizione.

$$\begin{cases} 3x+5y=24 \\ y=-5x-4 \end{cases}$$

Completare lo svolgimento impostato qui sotto.

Per applicare il metodo di addizione, occorre partire ancora una volta dal sistema scritto nella forma seguente:

$$\begin{cases} 3x+5y=24 \\ 5x+y=-4 \end{cases}$$

Si può creare nelle due equazioni una coppia di monomi opposti, moltiplicando la II equazione per –5; si ottiene il sistema equivalente:

$$\begin{cases} 3x+5y=24 \\ -......x-......y=...... \end{cases}$$

Si addizionano le due equazioni, ottenendo:

$3x+5y-......x-........y=24+........$ cioè $-22x=44$

Si sostituisce l'equazione ottenuta, per esempio al posto della II equazione, ottenendo il sistema:

$$\begin{cases} 3x+5y=24 \\ .... \end{cases}$$

Si risolve la II equazione, ricavando x; *il valore ottenuto viene sostituito nella I equazione, ottenendo:*

$$\begin{cases} 3\boxed{}+5y=24 \\ x=\boxed{-2} \end{cases} \quad \text{e quindi} \quad \begin{cases} ...y=... \\ x=-2 \end{cases}$$

da cui si ottiene ancora una volta la soluzione (–2; 6).

Il metodo di sostituzione per svolgere un sistema di tre equazioni

Attività 4

Risolvere con il metodo di sostituzione il sistema seguente e verificare che la soluzione ottenuta è esatta.

$$\begin{cases} 2x+y-z=0 & \text{(I)} \\ 2x-y+3z=14 & \text{(II)} \\ x+y+z=9 & \text{(III)} \end{cases}$$

Completare lo svolgimento impostato qui sotto.

Si ricava z *dalla I equazione e si sostituisce nelle altre due; si ha:*

$$\begin{cases} z=\boxed{2x+y} & \text{(I)} \\ 2x-y+3\boxed{}=14 & \text{(II)} \\ x+y+\boxed{}=9 & \text{(III)} \end{cases} \quad \text{ossia} \quad \begin{cases} z=2x+y & \text{(I)} \\ 8x+2y=14 & \text{(II)} \\ 3x+2y=9 & \text{(III)} \end{cases}$$

Le ultime due equazioni costituiscono un sistema di due equazioni in due incognite, che può essere risolto per sostituzione, ricavando y *dalla II equazione e sostituendolo nell'ultima; si ottiene:*

$$\begin{cases} z=2x+y & \text{(I)} \\ y=\boxed{7-4x} & \text{(II)} \\ 3x+2\boxed{}=9 & \text{(III)} \end{cases} \quad \text{ossia} \quad \begin{cases} z=2x+y & \text{(I)} \\ y=7-4x & \text{(II)} \\ -5x+14=9 & \text{(III)} \end{cases}$$

Si risolve l'ultima equazione, che presenta la sola incognita x; *si ottiene:*

$$\begin{cases} z=2\cdot 1+3=5 \\ y=7-4\cdot 1=3 \\ x=1 \end{cases} \quad \text{cioè} \quad (1;\ 3;\ 5)$$

Per verificare che la soluzione ottenuta è esatta, si procede così:

- *si sostituisce* 1 *a* x, 3 *a* y *e* 5 *a* z *nelle tre equazioni;*
- *si controlla che le tre uguaglianze ottenute siano vere.*

In questo caso si ottiene:

$$\begin{cases} 2\cdot 1+3-5=0 \\ 2\cdot 1-3+3\cdot 5=14 \\ 1+3+5=9 \end{cases} \quad \text{e cioè} \quad \begin{cases} 0=0 \\ 14=14 \\ 9=9 \end{cases}$$

Si conclude dunque che la soluzione (1; 3; 5) *è esatta.*

Il metodo di addizione per risolvere un sistema di tre equazioni

Attività 5

Risolvere lo stesso sistema con il metodo di addizione.

$$\begin{cases} 2x+y-z=0 & \text{(I)} \\ 2x-y+3z=14 & \text{(II)} \\ x+y+z=9 & \text{(III)} \end{cases}$$

Completare lo svolgimento impostato qui sotto.

Si addizionano le prime due equazioni, che presentano i monomi in y *opposti; si ottiene:*

.... = ... cioè .... x+........ z= ....

L'equazione può essere scritta in forma più semplice moltiplicando i due membri per ....; si ottiene:

$2x+z=7$

Si sostituisce l'equazione ottenuta, per esempio al posto della II equazione, ottenendo il seguente sistema equivalente a quello dato:

$$\begin{cases} 2x+y-z=0 & \text{(I)} \\ 2x+z=7 & \text{(II)} \\ x+y+z=9 & \text{(III)} \end{cases}$$

Si addizionano ancora le prime due equazioni che ora presentano i due monomi in z *opposti; si ottiene l'equazione:*

.... = ...

da sostituire alla I equazione, in modo da ottenere il sistema:

$$\begin{cases} 4x+y=7 & \text{(I)} \\ 2x+z=7 & \text{(II)} \\ x+y+z=9 & \text{(III)} \end{cases}$$

In questo modo il sistema si risolve più rapidamente per sostituzione:

- *si ricava .... dalla I equazione;*
- *si ricava .... dalla II equazione;*
- *si sostituiscono le due espressioni nella III equazione.*

Si ottiene ancora una volta la soluzione (1; 3; 5).

I sistemi di 1° grado nell'economia

L'economia si vale largamente di metodi matematici e, fra questi, ha senz'altro una notevole importanza la risoluzione dei sistemi di 1° grado. Questa scheda presenta due esempi di applicazione dei sistemi di equazioni all'economia.

A. La legge della domanda e dell'offerta

Le indagini di mercato

Spesso si legge sui quotidiani che le grandi industrie organizzano delle *indagini di mercato* per prevedere le vendite di un dato prodotto e pianificare opportunamente la produzione. La maggior parte delle ricerche in questo settore ha due scopi:

I. chiarire le relazioni fra il prezzo di un prodotto e la quantità di quel prodotto che le industrie immettono sul mercato, quantità che viene chiamata *offerta*;

II. chiarire le relazioni fra il prezzo di un prodotto e la quantità di quel prodotto che i consumatori acquistano, quantità che viene chiamata *domanda*.

Un esempio di indagine di mercato

Ecco un esempio di indagine di mercato: studiare come varia la domanda e l'offerta di un personal computer al variare del prezzo.

I dati ricavati dall'indagine sono indicati nella tabella A, dove:

- la lettera p indica il prezzo, valutato in milioni di lire;
- la lettera d indica la domanda, cioè il numero di calcolatori venduti a quel prezzo;
- la lettera s indica l'offerta (dall'inglese *supply*); in questo caso l'offerta è il numero di calcolatori che le industrie produttrici immettono sul mercato a quel prezzo.

Tabella A

p (in milioni)	d (in migliaia)	s (in migliaia)
1	1,9	2
1,2	1,7	2,3

Questi dati diventano più espressivi se riportati su un piano cartesiano; si ottengono due grafici come quelli delle figure 1 e 2.

Nel grafico di fig. 1 sull'asse delle ascisse è riportato il prezzo e sull'asse delle ordinate la domanda; si ottengono così i punti:

$$Q(1;\,1{,}9) \quad e \quad R(1{,}2;\,1{,}7)$$

Congiungendo questi due punti con una retta si ottiene una legge che regola l'offerta d al variare del prezzo p; la legge è (fig. 1):

$$d=-p+2{,}9 \qquad (1)$$

Il grafico visualizza un risultato facile da capire: il numero di calcolatori acquistati dai consumatori diminuisce all'aumentare del prezzo.

Analogamente, a partire dalla fig. 2, si può ottenere la legge:

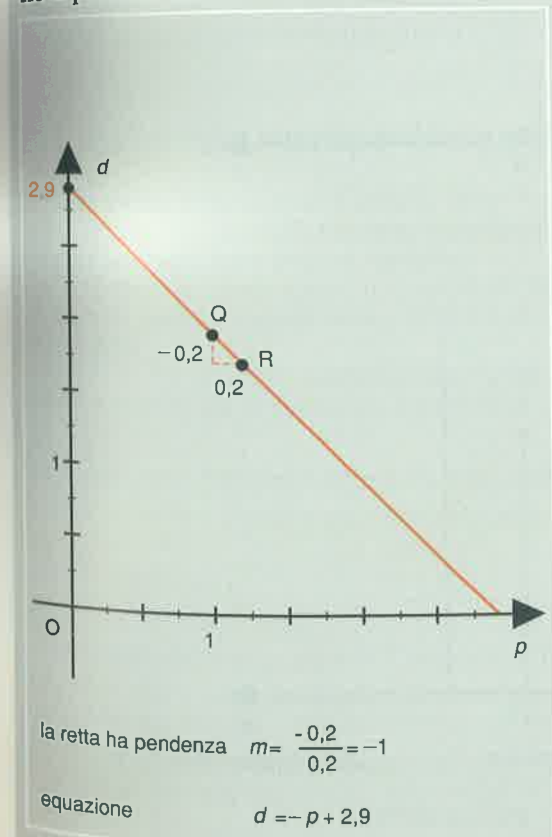
$$s=1{,}5p+0{,}5 \qquad (2)$$

che, insieme al grafico corrispondente, mostra una chiara situazione: il numero di calcolatori che le industrie immettono sul mercato aumenta all'aumentare del prezzo di vendita.

La legge della domanda e dell'offerta

Tracciando le due rette su uno stesso piano cartesiano (fig. 3), si osserva che le due rette si incontrano in un punto A che individua una particolare situazione: la quantità s immessa sul mercato coincide con la quantità d acquistata dai consumatori.

La legge della domanda e dell'offerta afferma che solo in questa situazione il prezzo della merce si mantiene stabile.



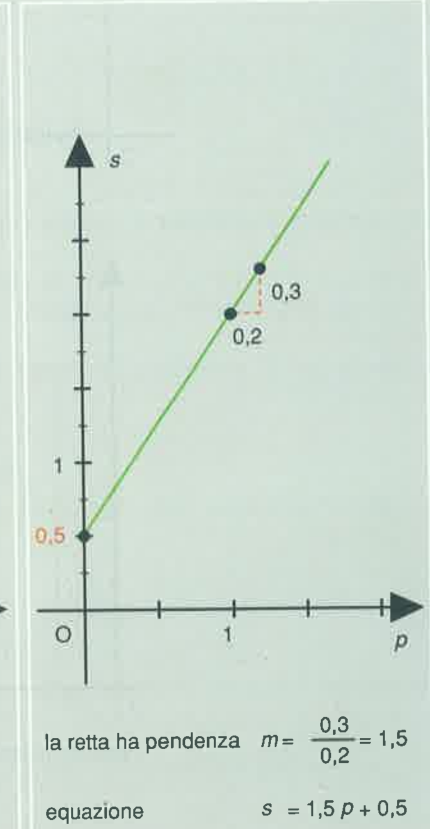


Figura 1 (a sinistra) **Grafico che rappresenta la domanda *d* al variare del prezzo *p***

Figura 2 (a destra) **Grafico che rappresenta l'offerta *s* al variare del prezzo *p***

Si può capire meglio il senso di questa legge indicando con *a* l'ascissa del punto A ed esaminando la fig. 4; si trovano le seguenti situazioni:

- *Il prezzo è minore del valore* a

In questo caso la domanda supera l'offerta e il prezzo tenderà ad aumentare per la seguente ragione: si trovano dei consumatori disposti a pagare un prezzo superiore per avere la merce che è presente in quantità insufficiente sul mercato.

- *Il prezzo è maggiore del valore* a

In questo caso l'offerta supera la domanda e il prezzo tenderà a diminuire per la seguente ragione: si trovano dei produttori disposti a vendere ad un prezzo inferiore, pur di liberarsi della merce che è stata prodotta in quantità eccessiva ed ingombra i magazzini.

- *Il prezzo è* a

In questo caso l'offerta è proprio uguale alla domanda e quindi il prezzo non tende né ad aumentare né a diminuire, cioè rimane stabile e perciò prende anche il nome di *prezzo di equilibrio*.

Figura 3
In A la domanda è uguale all'offerta

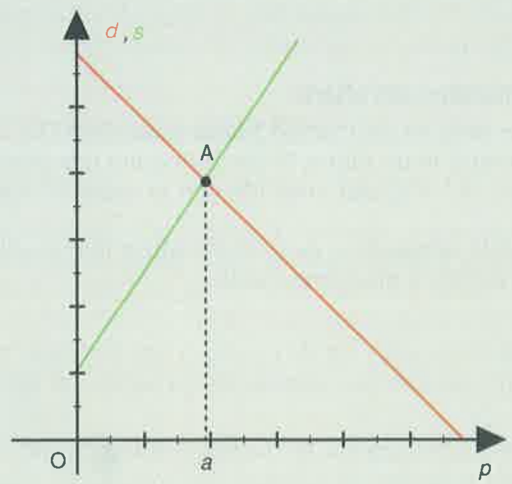


Figura 4
Il prezzo di equilibrio

Il prezzo di equilibrio si determina risolvendo un sistema

Si capisce dunque l'importanza di determinare, in base alle ricerche di mercato, il prezzo di equilibrio di una data merce.

Nel caso esaminato questo prezzo si ottiene risolvendo il seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} d=-p+2{,}9 \\ s=1{,}5p+0{,}5 \\ d=s \end{cases}$$

Risolvendo il sistema con il metodo di sostituzione, si ha:

$$\begin{cases} d=-p+2{,}9 \\ s=1{,}5p+0{,}5 \\ -p+2{,}9=1{,}5p+0{,}5 \end{cases} \quad \text{da cui} \quad \begin{cases} d=-p+2{,}9 \\ s=1{,}5p+0{,}5 \\ -2{,}5p=-2{,}4 \end{cases}$$

Si ottiene in definitiva:

$$\begin{cases} d=1{,}94 \\ s=1{,}94 \\ p=0{,}96 \end{cases}$$

In base ai dati rilevati, si può dunque concludere che il prezzo di equilibrio è di 960 000 lire; a questo prezzo si prevede che i produttori immetteranno sul mercato 1940 calcolatori, che saranno tutti acquistati dai consumatori.

I prezzi stabiliti dalla legge della domanda e dell'offerta

Le considerazioni esposte a proposito del prezzo dei calcolatori si possono ripetere a partire da qualsiasi altra merce e indicano un meccanismo di formazione dei prezzi chiaro, ma senza dubbio incompleto perché non considera un fatto importante: molte merci non solo sono vendute direttamente ai consumatori, ma servono anche per produrre altre merci.

B. L'analisi delle interdipendenze settoriali

L'economista statunitense di origine russa Wassily Leontief, in una sua opera del 1941, è riuscito ad analizzare con metodo matematico la struttura economica di una nazione (gli Stati Uniti d'America).

Il metodo punta soprattutto ad analizzare la produzione a livello nazionale di tutte le merci, tenendo conto del fatto che molte merci servono per produrre altre merci.

È facile capire il metodo proposto da Leontief, basandosi su un modello molto semplificato di economia nazionale.

Un modello semplificato di economia nazionale

L'economia di un paese può essere divisa, in prima approssimazione, in tre grandi settori:

- agricoltura;
- industria;
- servizi (scuole, ospedali, poste, trasporti, etc.).

Accurate rilevazioni statistiche rilevano, per ogni settore, le necessità del paese, trovando, per esempio, che occorrono:

460 miliardi di prodotti agricoli;
530 miliardi di prodotti industriali;
310 miliardi per i servizi.

Ma si deve anche analizzare ciò che viene consumato per produrre; in particolare si trova che, per ogni miliardo prodotto, in agricoltura vengono consumati:

0,2 miliardi di prodotti agricoli (sementi, etc.);
0,3 miliardi di prodotti industriali (trattori, concimi, etc.);
0,1 miliardi di servizi (trasporti, etc.).

E così, per ogni miliardo di prodotto industriale, vengono consumati:

0,1 miliardi di prodotti agricoli (fibre, oli, etc.);
0,35 miliardi di prodotti industriali (macchine, carburanti, etc.);
0,45 miliardi di servizi (trasporti, etc.).

E infine, per ogni miliardo prodotto nei servizi, vengono consumati:

0,2 miliardi di prodotti industriali (macchine, carburanti, etc.);
0,4 miliardi di servizi (trasporti, etc.).

La situazione appare molto complicata e diventa difficile pianificare i livelli produttivi nei tre settori, anche se questa pianificazione può essere basata su un principio molto semplice:

prodotti=consumi

Dal modello ad un sistema di equazioni

La situazione diventa più chiara ragionando nel modo seguente:

- si indica con x la quantità di prodotti agricoli da produrre (valutata in miliardi di lire);
- si indica con y la quantità di prodotti industriali da produrre (valutata in miliardi di lire);
- si indica con z la quantità di servizi da produrre (valutata in miliardi di lire).

Così si analizza la produzione del settore agricolo scrivendo:

$$\text{consumi}=0{,}2x+0{,}1y+460 \qquad \text{prodotti}=x$$

e quindi:

$$0{,}2x+0{,}1y+460=x$$

Analogamente, per la produzione del settore industriale, si scrive:

$$0{,}3x+0{,}35y+0{,}2z+530=y$$

E, infine, per i servizi si trova:

$$0{,}1x+0{,}45y+0{,}4z+310=z$$

Le quantità x, y, z debbono verificare contemporaneamente le tre equazioni ora scritte; perciò, per trovare quanto si deve produrre in ogni settore, si deve risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} 0{,}2x+0{,}1y+460=x \\ 0{,}3x+0{,}35y+0{,}2z+530=y \\ 0{,}1x+0{,}45y+0{,}4z+310=z \end{cases}$$

Risoluzione del sistema

Il sistema ottenuto è di 1° grado e presenta tre incognite (x, y, z) ed altrettante equazioni; si risolverà per esempio con il metodo di addizione.

Ecco come conviene procedere.

- Si ordina ogni equazione del sistema, ottenendo:

$$\begin{cases} -0{,}8x+0{,}1y=-460 \\ 0{,}3x-0{,}65y+0{,}2z=-530 \\ 0{,}1x+0{,}45y-0{,}6z=-310 \end{cases}$$

- Si osserva che la prima equazione presenta solo le incognite x e y, mentre nella seconda e terza equazione potrebbero comparire monomi in z opposti moltiplicando la seconda equazione per 3; si ha dunque il seguente sistema equivalente a quello dato:

$$\begin{cases} -0{,}8x+0{,}1y=-460 & \text{(I)} \\ 0{,}9x-1{,}95y+0{,}6z=-1590 & \text{(II)} \\ 0{,}1x+0{,}45y-0{,}6z=-310 & \text{(III)} \end{cases}$$

- Si addizionano la seconda e terza equazione, ottenendo:

$$0{,}9x-1{,}95y+0{,}6z+0{,}1x+0{,}45y-0{,}6z=-1590-310 \qquad \text{(II)+(III)}$$

e cioè: $\quad x-1{,}5y=-1900$

- Sostituendo l'equazione ora ottenuta alla seconda equazione, si ottiene il seguente sistema, equivalente a quello dato:

$$\begin{cases} -0{,}8x+0{,}1y=-460 & \text{(I)} \\ x-1{,}5y=-1900 & \text{(II)} \\ 0{,}1x+0{,}45y-0{,}6z=-310 & \text{(III)} \end{cases}$$

- Si ripete il procedimento di addizione, sommando la seconda equazione moltiplicata per 0,8 alla prima equazione; si ha:

$$-0{,}8x+0{,}1y+0{,}8x-1{,}2y=-460-1520 \qquad \text{(I)+(II}\cdot 0{,}8)$$

cioè: $\quad -1{,}1y=-1980$

- Si arriva così al seguente sistema, rapidamente risolubile:

$$\begin{cases} -1{,}1y=-1980 \\ x-1{,}5y=-1900 \\ 0{,}1x+0{,}45y-0{,}6z=-310 \end{cases} \quad \text{da cui} \quad \begin{cases} y=1800 \\ x=1{,}5\cdot 1800-1900 \\ 0{,}1\cdot 800+0{,}45\cdot 1800-0{,}6z=-310 \end{cases}$$

Si trova in definitiva la soluzione seguente:

$$\begin{cases} x=800 \\ y=1800 \\ z=2000 \end{cases}$$

E questa soluzione stabilisce i livelli produttivi a livello nazionale:

- prodotti agricoli per 800 miliardi di lire;
- prodotti industriali per 1800 miliardi di lire;
- servizi per 2000 miliardi di lire.

Che cosa vuol dire analisi delle interdipendenze settoriali

L'esempio, anche se molto semplice, permette di intuire la potenza del metodo: si stabiliscono i livelli produttivi di un'intera nazione considerando il fatto che ogni merce può essere consumata direttamente, ma può anche essere utilizzata nella produzione di tutte le altre merci.

Questo spiega il nome di *analisi delle interdipendenze settoriali*, cioè delle dipendenze reciproche fra i vari settori economici.

Si tratta di un metodo che conduce facilmente a sistemi con centinaia di equazioni in altrettante incognite e, quindi, a calcoli che possono essere svolti solo da un potente calcolatore.

I sistemi di 1° grado nella fisica

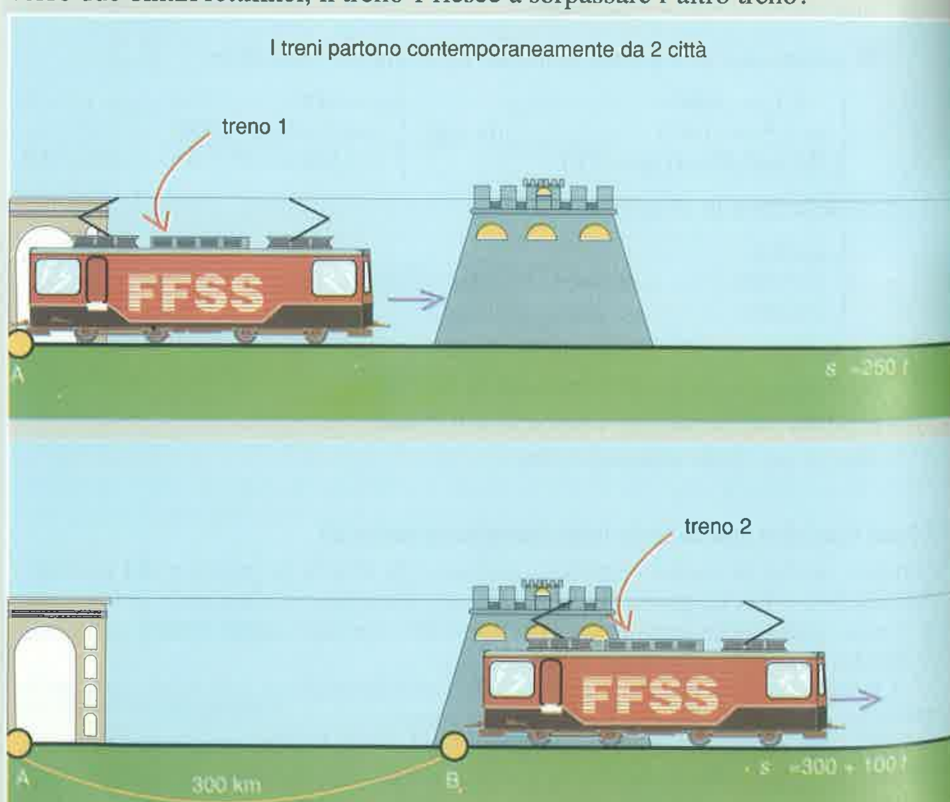
I problemi di fisica che conducono a risolvere dei sistemi di equazioni sono numerosi; in questa scheda sarà esaminato uno di questi problemi che si presta bene ad essere esaminato da diversi punti di vista.

Stabilire dove e quando si incontrano due corpi in moto

Si osservano due corpi che si muovono su una traiettoria rettilinea con due diverse velocità, entrambe costanti, dopo essere partiti contemporaneamente da due diverse posizioni iniziali; si chiede quando e dove si incontreranno i due corpi.

In fig. 1 è visualizzato il problema: i due corpi sono due treni (1 e 2), che partono contemporaneamente da due città (A e B) e percorrono nello stesso verso due binari rettilinei; il treno 1 riesce a sorpassare l'altro treno?

Figura 1
Quando e dove si incontrano due corpi in moto



Un esempio numerico

Si può cominciare a risolvere il problema in un particolare caso numerico, come quello seguente:

- il treno 1 parte da A ed ha la velocità w=250 km/h;
- il treno 2, che parte da B, ha la velocità v=100 km/h;
- la distanza fra le due città è q=300 km.

Si può allora ragionare così:

- si decide di misurare tutte le distanze a partire da A, perciò la lettera s indicherà sempre la distanza di un treno dalla città A;
- il treno 1 si allontana da A secondo la legge:

$$s=250t$$

- il treno 2, che parte da B, si allontana da A secondo la legge:

$$s=300+100t$$

- i due treni si incontrano quando si trovano alla stessa distanza da A.

Si è dunque condotti a risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} s=300+100t \\ s=250t \end{cases}$$

Risolvendo il sistema per sostituzione si ottiene:

$$\begin{cases} 250t=300+100t \\ s=250t \end{cases} \quad \text{da cui} \quad \begin{cases} 150t=300 \\ s=250t \end{cases}$$

Si ottiene in definitiva:

$$\begin{cases} t=2 \\ s=500 \end{cases}$$

Si conclude che i due treni si sorpassano dopo 2 ore, alla distanza di 500 km dalla città A.

La risoluzione con i coefficienti letterali

Conviene ora risolvere il problema utilizzando i coefficienti letterali; si ottiene così la soluzione di tutti i problemi dello stesso tipo.

In questo caso il sistema da risolvere è:

$$\begin{cases} s=q+vt \\ s=wt \end{cases}$$

che, risolto con il metodo di sostituzione, fornisce:

$$\begin{cases} wt=q+vt \\ s=wt \end{cases} \quad \text{e quindi} \quad \begin{cases} (w-v)t=q \\ s=wt \end{cases}$$

da cui si ricava infine:

$$\begin{cases} t=\dfrac{q}{w-v} \\ s=\dfrac{wq}{w-v} \end{cases}$$

In questo modo si possono risolvere immediatamente tutti i casi particolari; per esempio, nel caso numerico precedente, si ottiene:

$$\begin{cases} t=\dfrac{300}{250-100}=2 \\ s=\dfrac{250\cdot 300}{250-100}=500 \end{cases}$$

Problemi indeterminati e impossibili

La risoluzione effettuata permette anche di individuare i problemi indeterminati: sono quelli in cui si assegnano i seguenti coefficienti:

$$w-v=0 \quad \text{e} \quad q=0 \qquad \text{ossia} \qquad w=v \quad \text{e} \quad q=0$$

In questo caso infatti il sistema si riduce alla forma seguente:

$$\begin{cases} s=wt \\ s=wt \end{cases}$$

si tratta cioè della stessa equazione ripetuta due volte e, perciò, non si determina una sola soluzione.

L'interpretazione fisica di questo risultato è molto chiara: i due treni partono dalla stessa città e viaggiano con la stessa velocità, perciò procederanno sempre affiancati.

I problemi sono invece impossibili, se si assegnano i seguenti coefficienti:

$$w-v=0 \quad \text{e} \quad q\neq 0 \qquad \text{ossia} \qquad w=v \quad \text{e} \quad q\neq 0$$

in questi casi il sistema diventa:

$$\begin{cases} s=wt+q \\ s=wt \end{cases}$$

e non si può trovare la soluzione.

Dal punto di vista fisico, i due treni partono da due città diverse, ma procedono alla stessa velocità: è impossibile dunque che uno sorpassi l'altro.

La visualizzazione con la geometria analitica

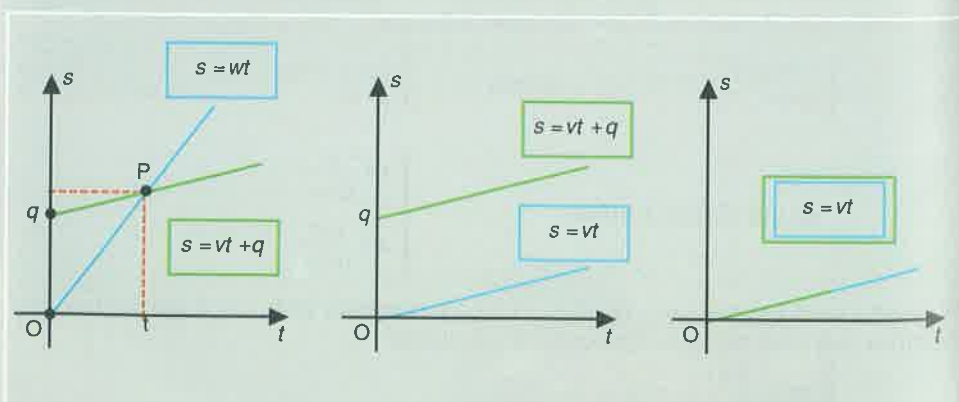
I problemi di incontro possono essere ben visualizzati con la geometria analitica (vedi anche la scheda «Il grafico di una retta nella fisica», p. 353): basta tracciare sullo stesso piano cartesiano le due rette che rappresentano le leggi:

$$s=vt+q \qquad s=wt$$

Si avranno allora i seguenti casi (fig. 2):

- Le due rette si incontrano in un punto P (fig. 2*a*); in tal caso le coordinate di P indicano il tempo t e la distanza s a cui avviene l'incontro.
- Le due rette sono parallele perché risulta $w=v$ e $q\neq 0$ e perciò i due corpi non si incontrano (fig. 2*b*).
- Le due rette sono un'unica retta ripetuta due volte perché risulta $w=v$ e $q=0$ e perciò non è determinato un solo punto d'incontro (fig. 2*c*).

Figura 2
Visualizzare il problema di incontro con la geometria analitica



2*a* I due corpi si incontrano — 2*b* I due corpi non si incontrano — 2*c* I due corpi rimangono sempre affiancati

Dal grafico di una retta al segno di un binomio di 1° grado

Un primo esempio numerico

In fig. 1 è rappresentata la retta r che ha equazione:

$$y=x-3$$

La retta incontra l'asse delle x nel punto A, che presenta le seguenti caratteristiche:

- ha l'ordinata $y=0$, dato che si trova sull'asse delle x;
- ha le coordinate x e y legate dall'equazione $y=x-3$, dato che si trova anche sulla retta r.

L'ascissa x del punto A si trova allora risolvendo l'equazione:

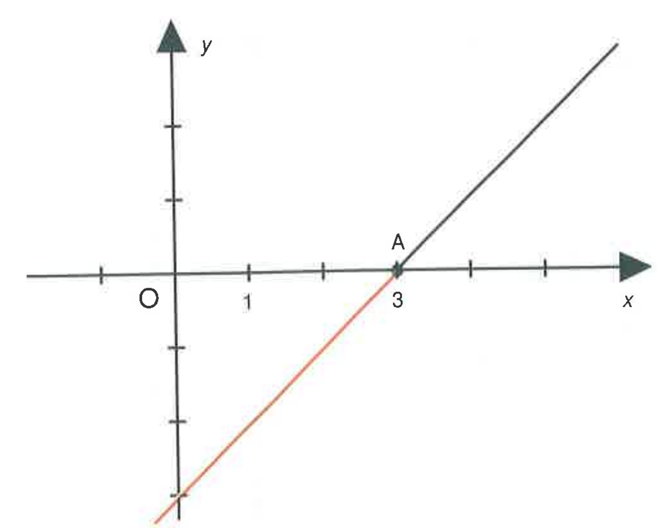
$$x-3=0 \qquad \text{da cui si ottiene} \qquad x=3$$

C'è dunque un unico punto della retta che ha l'ordinata $y=0$: è il punto:

$$A(3;\ 0)$$

Si nota invece che sono molti i punti della retta che hanno l'ordinata y positiva: sono tutti i punti che si trovano al disopra dell'asse delle x e formano la semiretta disegnata in nero in fig. 1.

Figura 1
La retta $y=x-3$



Questi punti presentano tutti una stessa caratteristica (fig. 2): hanno l'ascissa x che si mantiene «a destra» del valore 3; si ha dunque:

$y>0$ per $x>3$ ossia $x-3>0$ per $x>3$

Analogamente si trova che sono molti i punti con l'ordinata y negativa: sono tutti i punti che si trovano al disotto dell'asse delle x e formano la semiretta colorata in rosso di fig. 2.

Questi punti hanno l'ascissa x «a sinistra» di 3, perciò risulta:

$y<0$ per $x<3$ ovvero $x-3<0$ per $x<3$

Quindi, esaminando il grafico della retta d'equazione:

$y=x-3$

si può determinare il segno del binomio scritto al secondo membro; si ottiene:

$x-3=0$ per $x=3$ $x-3>0$ per $x>3$ $x-3<0$ per $x<3$

Un secondo esempio numerico

Suggerisce analoghe considerazioni il grafico della retta s d'equazione:

$y=-x+3$

Si trova in questo caso che la retta incontra l'asse delle x ancora nel punto d'ascissa 3, ma ora risulta (fig. 3):

$-x+3=0$ per $x=3$ $-x+3>0$ per $x<3$ $-x+3<0$ per $x>3$

Le figure 2 e 3 evidenziano analogie e differenze fra i due casi esaminati: le due rette incontrano l'asse delle x nello stesso punto A, ma hanno pendenza opposta:
- nel primo caso la pendenza è positiva e quindi un punto P che percorre la semiretta Ar «sale» dalla quota 0 verso quote positive;
- nel secondo caso la pendenza è negativa e quindi un punto P che percorre la semiretta As «scende» dalla quota 0 verso quote negative.

Confrontare il segno di due binomi

Attività 1

Tracciare il grafico delle rette che hanno le seguenti equazioni:

$y=2x-8$ $y=-2x+8$

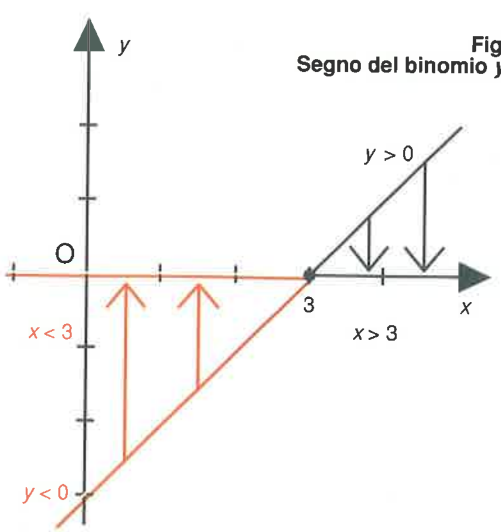


Figura 2
Segno del binomio $y=x-3$

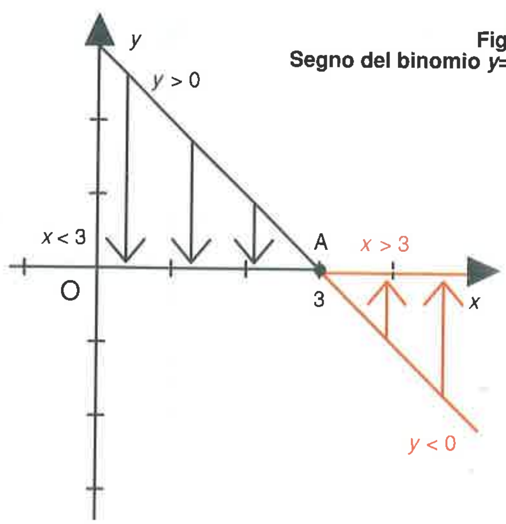


Figura 3
Segno del binomio $y=-x+3$

Determinare le coordinate del punto d'intersezione di ciascuna retta con l'asse delle x. Valersi dei grafici delle rette per studiare come varia il segno dei binomi:

$2x-8$ $-2x+8$

Attività 2

Esaminare il segno dei seguenti binomi:

$4x+3$ e $-4x-3$

basandosi sul grafico delle rette d'equazione:

$y=4x+3$ e $y=-4x-3$

Il segno di un binomio di 1° grado

I casi particolari esaminati suggeriscono delle conclusioni di carattere generale relativamente ad un binomio di 1° grado del tipo:

$ax+b$

dove a e b indicano due coefficienti numerici.

Il risultato y del binomio varia al variare del numero che si sostituisce a x e la geometria analitica permette di visualizzare con un grafico la formula:

$y=ax+b$

Il grafico che si ottiene è sempre una retta e si ha che:
- la retta incontra l'asse delle x in un solo punto A di ordinata 0;
- la retta ha pendenza positiva se il coefficiente a è positivo;
- la retta ha pendenza negativa se il coefficiente a è negativo.

Il grafico suggerisce quindi le seguenti conclusioni (fig. 4):

I. C'è un solo numero che, sostituito a x, dà $y=0$; questo numero si trova risolvendo l'equazione:

$ax+b=0$

II. Ci sono molti numeri che, sostituiti a x, rendono $y>0$ e molti altri che, sostituiti a x, danno $y<0$. Questi numeri si possono individuare a partire dal grafico della retta; in generale, indicato con A(k; 0) il punto d'intersezione con l'asse delle x, si ottengono i risultati illustrati in fig. 4.

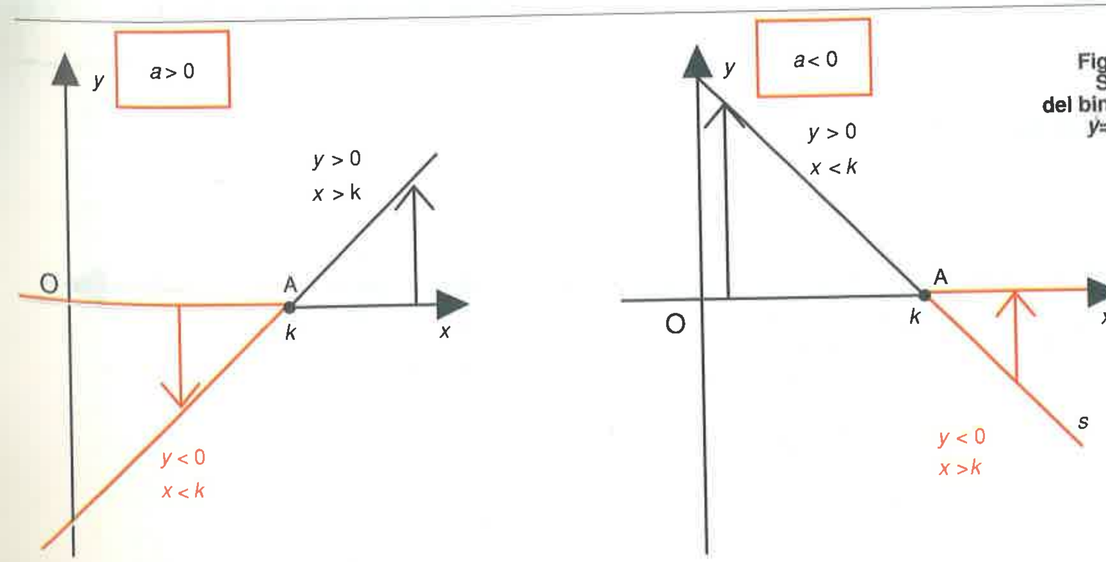


Figura 4
Segno del binomio $y=ax+b$

9

Disuguaglianze e disequazioni di 1° grado in un'incognita

Le disuguaglianze e le loro proprietà

La fig. 1 ricorda una notevole proprietà dei numeri razionali: tutti i razionali «sono disposti ordinatamente sulla retta» e perciò, scelti due qualunque numeri, si può sempre dire che uno precede l'altro.
Questo permette di scrivere delle proposizioni, collegando due numeri razionali con i simboli «<» e «>», detti simboli di disuguaglianza (cfr. il terzo capitolo, paragrafo 3); ecco un esempio:

$$2>1$$

che si legge:

«2 maggiore di 1»

oppure:

«2 segue 1»

La fig. 1 permette di verificare facilmente che la disuguaglianza è vera.

A partire da questa disuguaglianza vera se ne possono costruire molte altre vere nei seguenti due modi:

I. Si aggiunge ai due membri lo stesso numero. Per esempio dalla disuguaglianza vera:

$$2>1$$

si possono ottenere le seguenti disuguaglianze (fig. 1):

$2+3>1+3$ cioè $5>4$ che è *vera*

$2+(-2)>1+(-2)$ cioè $0>-1$ che è *vera*

II. Si moltiplicano i due membri per lo stesso numero *positivo*. Per esempio dalla disuguaglianza vera:

$$2>1$$

si possono ottenere le seguenti disuguaglianze, illustrate anche in fig. 1:

$2\cdot 3>1\cdot 3$ cioè $6>3$ che è *vera*

$2\cdot \frac{1}{2}>1\cdot \frac{1}{2}$ cioè $1>\frac{1}{2}$ che è *vera*

Particolare attenzione bisogna invece prestare a quello che si ottiene moltiplicando i due membri di una disuguaglianza vera per lo stesso numero negativo; ecco qualche esempio su cui riflettere (fig. 2):

$2>1$ *vera*	$2(-1)>1(-1)$	$-2>-1$ *falsa*
$-\frac{1}{2}<0$ *vera*	$-\frac{1}{2}\cdot(-2)<0\cdot(-2)$	$1<0$ *falsa*
$-4<-2$ *vera*	$-\frac{1}{2}\cdot(-4)<-\frac{1}{2}\cdot(-2)$	$2<1$ *falsa*
$2>-4$ *vera*	$2(-1)>4(-1)$	$-2>4$ *falsa*

Gli esempi suggeriscono un'osservazione: dalle disuguaglianze false se ne possono ricavare altrettante vere cambiando il segno di disuguaglianza; si ha cioè (fig. 2):

$2>1$ *vera*	$2(-1)<1(-1)$	$-2<-1$ *vera*
$-\frac{1}{2}<0$ *vera*	$-\frac{1}{2}\cdot(-2)>0\cdot(-2)$	$1>0$ *vera*
$-4<-2$ *vera*	$-\frac{1}{2}\cdot(-4)>-\frac{1}{2}\cdot(-2)$	$2>1$ *vera*
$2>-4$ *vera*	$2(-1)<4(-1)$	$-2<4$ *vera*

Si può dunque concludere che, *a partire da una disuguaglianza vera, si può ottenere un'altra disuguaglianza vera in uno dei modi seguenti:*

I. *Addizionando ai due membri lo stesso numero;*
II. *Moltiplicando i due membri per uno stesso numero positivo;*
III. *Moltiplicando i due membri per uno stesso numero negativo e cambiando il segno di disuguaglianza.*

Disequazioni di primo grado

I segni di disuguaglianza possono essere anche utilizzati per scrivere delle formule che contengono lettere e numeri; ecco due esempi particolarmente semplici:

$x>2 \quad , x<-3$

Queste formule diventano delle disuguaglianze solo quando si sostituiscono alla lettera x dei numeri.
Ecco qualche disuguaglianza che si può ottenere dalle due precedenti formule:

$x>2$	$x<-3$
$3>2$ *vera*	$-4<-3$ *vera*
$5>2$ *vera*	$-6<-3$ *vera*
$0>2$ *falsa*	$1<-3$ *falsa*
$-3>2$ *falsa*	$0<-3$ *falsa*

Figura 1
Alcune disuguaglianze vere

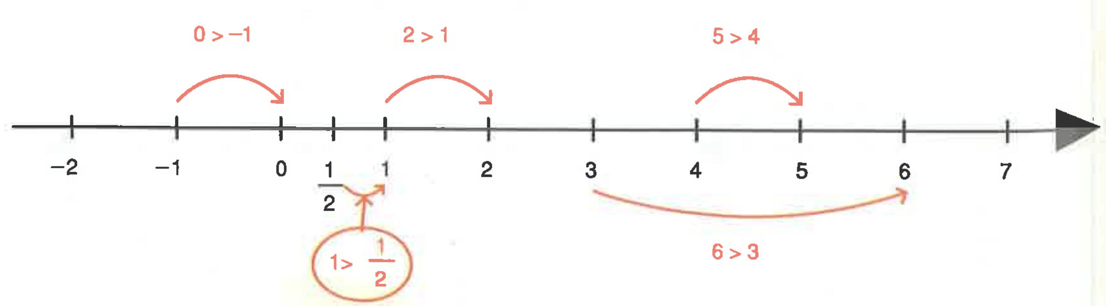
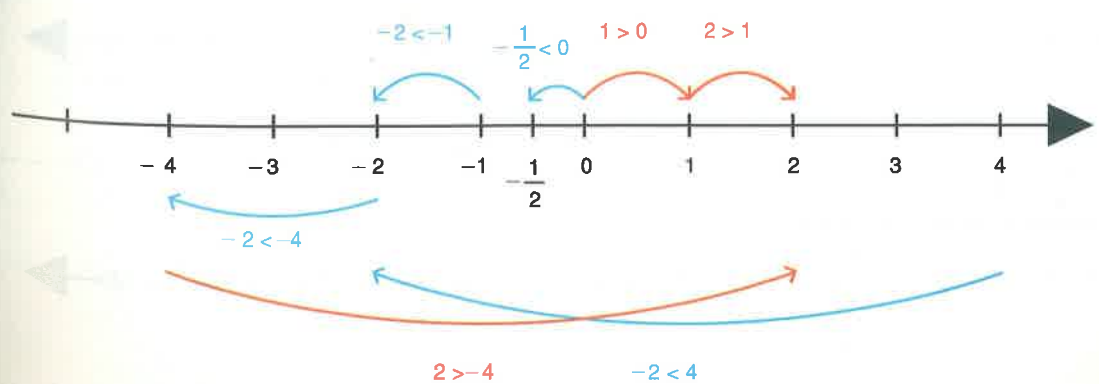


Figura 2
Alcune disuguaglianze vere



La fig. 3 visualizza la caratteristica fondamentale della formula:

$x>2$

- si trovano infiniti numeri, che, sostituiti a x, trasformano la formula in una disuguaglianza vera; sono tutti i numeri che seguono 2 e perciò formano la semiretta «a destra» del numero 2;
- gli altri numeri, sostituiti a x, trasformano la formula in una disuguaglianza falsa.

Analogamente (fig. 4), si trova che la formula:

$x<-3$

diventa una disuguaglianza vera solo quando si sostituiscono a x i numeri che precedono -3 e perciò si trovano sulla semiretta «a sinistra» del numero -3.
Le due formule:

$x>2$ $\qquad$ $x<-3$

prendono anche il nome di *disequazioni di 1° grado.*
Si dice inoltre che:

- tutti i numeri razionali che seguono 2 sono *le soluzioni* della disequazione $x>2$;
- tutti i numeri razionali che precedono -3 sono *le soluzioni* della disequazione $x<-3$.

Disequazioni equivalenti

Da disequazioni semplici come quelle indicate prima si può passare ad altre più complicate procedendo nei tre modi suggeriti dalle proprietà delle disuguaglianze:

I. *Si aggiunge uno stesso monomio ai due membri.*

Così per esempio da:

$x>2$

si possono ottenere le disequazioni seguenti:

$x+3>2+3$	cioè	$x+3>5$
$x+(-4)>2+(-4)$	cioè	$x-4>-2$
$x+2x>2+2x$	cioè	$3x>2x+2$

II. *Si moltiplicano i due membri per uno stesso numero positivo.*

Così per esempio da:

$x>2$

si possono ottenere le disequazioni seguenti:

$3x>3\cdot 2$	cioè	$3x>6$
$\frac{1}{2}\cdot x>\frac{1}{2}\cdot 2$	cioè	$\frac{1}{2}x>1$

III. *Si moltiplicano i due membri per uno stesso numero negativo e si cambia il segno di disuguaglianza.*

Così per esempio da:

$x>2$

si possono avere le seguenti disequazioni:

$-3x<-3\cdot 2$	cioè	$-3x<-6$
$-\frac{1}{2}\cdot x<-\frac{1}{2}\cdot 2$	cioè	$-\frac{1}{2}x<-1$

Tutte le disequazioni ottenute con questi tre procedimenti presentano la stessa caratteristica: la disequazione diventa una disuguaglianza vera solo sostituendo al posto della lettera x tutti i numeri che seguono 2; in altre parole le disequazioni hanno le stesse soluzioni, ossia sono fra loro *equivalenti.*

Figura 3
Le soluzioni della disequazione $x>2$

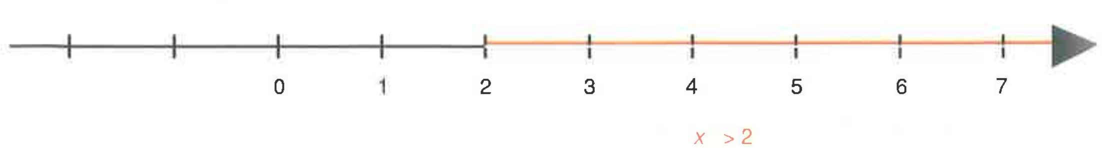
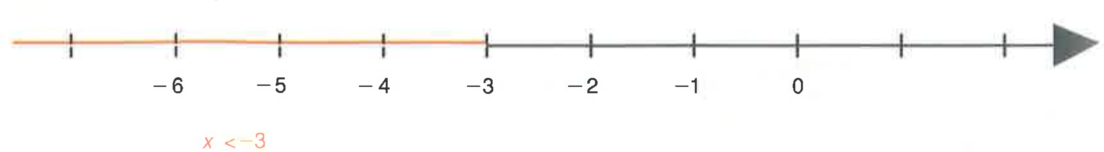


Figura 4
Le soluzioni della disequazione $x<-3$



Verifiche

Conoscenze

① In quali modi si può ottenere, a partire da una disuguaglianza vera, un'altra disuguaglianza vera?

② In quali modi si può ottenere, a partire da una disequazione, un'altra disequazione equivalente?

③ Che cosa si intende con il termine «soluzioni di una disequazione»?

Comprensione

① Fra le seguenti formule distinguere:
- le disuguaglianze vere;
- le disuguaglianze false;
- le disequazioni.

Motivare la scelta.

$x>-1$	$-2>-1$	$2>-1$
$x<2$	$0<2$	$\frac{5}{2}<2$

② Scrivere almeno due disuguaglianze vere e due disuguaglianze false.

③ Scrivere almeno due disequazioni, indicandone sulla retta le corrispondenti soluzioni.

Applicazioni

① Fra le seguenti disuguaglianze scegliere quelle vere e quelle false, motivando la scelta.

$1>-2$	$-1>2$	$-1>-2$
$-1<2$	$1>2$	$1<-2$

② Fra le seguenti disequazioni scegliere le coppie di disequazioni equivalenti, motivando la scelta.

$x>-2$	$-x>2$	$-x<-2$
$-x<2$	$x>2$	$x<-2$

③ Rappresentare sulla retta le soluzioni delle disequazioni precedenti.

Collegamento con i capitoli o con i paragrafi precedenti

① Come si distingue un'equazione da una disequazione di 1° grado?

(*Vedere i paragrafi 1 e 2 di questo capitolo*)

② Una disequazione è un predicato o una proposizione?

(*Vedere il paragrafo 3 di questo capitolo*)

③ Una disuguaglianza è un predicato o una proposizione?

(*Vedere il paragrafo 3 di questo capitolo*)

④ Spiegare la differenza fra le due seguenti formule:

$x>3$ $\qquad$ $x\geq 3$

(*Vedere il capitolo 3, paragrafo 3*)

⑤ Spiegare la differenza fra le due seguenti formule:

$x<-1$ $\qquad$ $x\leq -1$

(*Vedere il capitolo 3, paragrafo 3*)

10

Come si risolve una disequazione di 1° grado in un'incognita

Risolvere una disequazione di 1° grado

Nel paragrafo precedente si è trovato il modo di passare da una disequazione ad un'altra disequazione equivalente, ma più complicata; ma lo scopo delle disequazioni equivalenti non è certo quello di «inventare» disequazioni complicate.
Le disequazioni equivalenti sono invece fondamentali nel procedimento inverso, cioè per passare da una disequazione complicata ad un'altra che indica direttamente le sue soluzioni. Ecco due esempi:

$x-2>3$ è equivalente a

$x-2\mathbf{+2}>3\mathbf{+2}$ cioè $\mathbf{x>5}$

$-\frac{1}{3}x<2$ è equivalente a

$\mathbf{-3}\cdot\left(-\frac{1}{3}x\right)>\mathbf{-3}\cdot 2$ cioè $\mathbf{x>-6}$

Questi esempi richiamano delle considerazioni svolte a proposito delle equazioni di 1° grado (cfr. i paragrafi 1 e 2 di questo capitolo) e conducono alle seguenti conclusioni di carattere generale:

- *una disequazione di 1° grado si presenta generalmente nella forma:*

  $px+q>cx+d$ oppure $px+q<cx+d$
- *per risolvere una disequazione di 1° grado si passa ad una disequazione equivalente che presenti le seguenti caratteristiche:*
- *al primo membro il coefficiente dell'incognita è 1 e il termine noto è 0;*
- *al secondo membro il coefficiente dell'incognita è 0.*

Due esempi di disequazioni da risolvere

Conviene subito mettere in pratica il procedimento indicato prima lavorando sul seguente esempio. Risolvere la disequazione:

$$\frac{1}{4}x+3>5$$

Si può applicare il seguente procedimento organizzato in più passi successivi:

- Per avere al primo membro 0 come termine noto, bisogna aggiungere ai due membri -3; si ha:

$$\frac{1}{4}x+3+(-3)>5+(-3) \quad \text{cioè} \quad \frac{1}{4}x>2$$

- Per avere 1 come coefficiente dell'incognita al primo membro, bisogna moltiplicare per 4 i due membri; si ottiene così:

$$4\cdot\frac{1}{4}x>4\cdot 2 \quad \text{cioè} \quad \mathbf{x>8}$$

Le soluzioni della disequazione sono dunque tutti i numeri che seguono 8.

Ecco un altro esempio. Risolvere la disequazione:

$$-8x+3<-5x+9$$

- Per avere al secondo membro 0 come coefficiente dell'incognita, bisogna aggiungere ai due membri il monomio $5x$ (che è l'opposto di $-5x$) e si ha:

$$-8x+5x+3<-5x+5x+9 \quad \text{cioè} \quad -3x+3<9$$

- Per avere al primo membro 0 come termine noto bisogna aggiungere ai due membri -3 e si ha:

$$-3x+3-3<9-3 \quad \text{cioè} \quad -3x<6$$

- Per avere al primo membro 1 come coefficiente della x bisogna moltiplicare i due membri per il numero negativo $-\frac{1}{3}$ e cambiare il segno di disuguaglianza; si ottiene così:

$$-\frac{1}{3}\cdot(-3x)>-\frac{1}{3}\cdot 6 \quad \text{cioè} \quad \mathbf{x>-2}$$

In definitiva la disequazione assegnata ha come soluzioni i numeri che seguono -2.

V e r i f i c h e

Conoscenze

① In quale forma si presenta una disequazione di 1° grado?

② Come si risolve una disequazione di 1° grado?

Comprensione

① Una disequazione di 1°grado può avere una sola soluzione?

② La disequazione:

$-2x<0$

diventa una disuguaglianza vera sostituendo a x il numero 2, che precede 4; si ha infatti che:

$-2\cdot 2<0$ cioè $-4<0$ è *vera*

La disequazione assegnata ha come soluzioni tutti i numeri che precedono 4?

Applicazioni

① Risolvere le seguenti disequazioni:

$4x+3>-2x$ $\quad -4x<4x+12$

② Risolvere le seguenti disequazioni:

$\frac{1}{2}x+1>-\frac{1}{2}$ $\quad \frac{1}{2}x+1>-\frac{1}{2}x$

③ Risolvere le seguenti disequazioni:

$2x>-2$ $\quad 2x>0$ $\quad 2x>2$

④ Risolvere le seguenti disequazioni:

$-4x<-4$ $\quad -4x<0$ $\quad -4x<4$

Collegamento con i paragrafi precedenti

① Le equazioni:

$4x=-8$ e $-4x=8$

sono equivalenti?
(*Vedere i paragrafi 1 e 2*)

② Le disequazioni:

$4x>-8$ e $-4x>8$

sono equivalenti?
(*Vedere il paragrafo 8*)

③ Quali sono le analogie fra il metodo per risolvere le equazioni e quello per risolvere le disequazioni?
(*Vedere i paragrafi 1, 2 e 8*)

④ Qual è la principale diversità fra il metodo per risolvere le equazioni e quello per risolvere le disequazioni?
(*Vedere i paragrafi 1, 2 e 8*)

⑤ Spiegare perché sono impossibili le seguenti disequazioni:

$3x>3x+1$ $\quad 4x+3<4x$
(*Vedere il paragrafo 2*)

⑥ Spiegare perché sono indeterminate le seguenti disequazioni:

$3x<3x+1$ $\quad 4x+3>4x$
(*Vedere il paragrafo 2*)

Risolvere disequazioni di 1° grado in un'incognita

«Trasportare» monomi da un membro all'altro di una disequazione

Attività 1

Risolvere la disequazione:

$$-3x-8<6x+1$$

Indicare le soluzioni ottenute sulla retta.

La disequazione è di 1° grado perché si presenta nella forma:

$$px+q<cx+d$$

con $p=\dots\dots$ $q=\dots\dots$ $c=\dots\dots$ $d=\dots\dots$

Il procedimento per risolvere la disequazione si basa sui seguenti passi:

- *Per avere al secondo membro 0 come coefficiente dell'incognita, si aggiunge ai due membri il monomio –6x, che è .... di ....*
- *Per avere al primo membro 0 come termine noto, si aggiunge ai due membri 8, che è .... di ....*
- *Si ottiene la seguente disequazione, equivalente a quella data:*

$$-9x<9$$

- *Per avere al primo membro 1 come coefficiente dell'incognita, si moltiplicano i due membri per il numero negativo ...... , che è il reciproco di –9; dopo aver cambiato il segno di disuguaglianza si ha:*

$$(\dots\dots)(-9x)>(\dots\dots)(9) \quad \text{ossia} \quad x>-1$$

Le soluzioni della disequazione sono dunque tutti i numeri che seguono –1 e, dunque, occupano la semiretta «a destra» del numero 1.

Il procedimento per risolvere una disequazione è basato dunque su poche regole, che sono strettamente legate a quelle da seguire per risolvere un'equazione di 1° grado. In particolare, si può ripetere l'osservazione esposta nella scheda «Risolvere equazioni di 1° grado», p. 379, e cioè:

- Quando si aggiunge $-6x$ ai due membri si ha che:

$$-3x-x-8<6x+1 \quad \text{diventa} \quad -3x-6x-8<1$$

Così viene «trasportato» al primo membro il monomio $-6x$, opposto del monomio $6x$, che compariva prima al secondo membro.

- Si trova dunque la disequazione equivalente:

$$-9x-8<1$$

- Quando si aggiunge 8 ai due membri, si ha che:

$$9x-8<1 \quad \text{diventa} \quad -9x<1+8$$

Ora si trova «trasportato» al secondo membro il monomio 8, opposto di –8 che prima compariva al primo membro.

L'effetto delle operazioni eseguite può dunque essere sintetizzato nel modo seguente: *si può trasportare un monomio da un membro all'altro di una disequazione, dopo averne cambiato il segno.*

Risolvere rapidamente una disequazione

Attività 2

Risolvere la disequazione:

$$7x+15-3x>12+5x-3-8x+9x$$

Il procedimento per risolvere la disequazione si può condurre rapidamente nel modo seguente:

- *Prima di tutto bisogna scrivere la disequazione nella forma:*

$$px+q>cx+d$$

Per questo occorre addizionare i termini simili al primo ed al secondo membro; si ottiene la disequazione:

$$4x+15>6x+9$$

- *Si trasporta il monomio 6x al primo membro ed il monomio 15 al secondo membro, ottenendo la disequazione:*

$$\dots\dots-\dots\dots>-\dots\dots+\dots\dots \quad \text{ossia} \quad -2x>-6$$

- *Si moltiplicano i due membri per il reciproco di –2, ottenendo:*

$$\left(-\frac{1}{2}\right)(\dots\dots\dots)<\left(-\frac{1}{2}\right)(\dots\dots\dots) \quad \text{cioè} \quad x<3$$

Le soluzioni sono dunque tutti i numeri che .... 3 e perciò si trovano sulla retta .... del numero 3.

Attività 3

Ripetere il procedimento seguito prima per risolvere la seguente disequazione:

$$\frac{4}{5}x+\frac{1}{2}-\frac{1}{10}x>2x-\frac{3}{2}x-\frac{2}{5}$$

Verificare che le soluzioni sono:

$$x>-\frac{9}{2}$$

Rappresentare le soluzioni sulla retta.

Disequazioni e sistemi di disequazioni in due incognite. La programmazione lineare

Disequazioni di 1° grado in due incognite

Nei paragrafi 8 e 9 sono state esaminate delle disequazioni di 1° grado in cui compariva una sola incognita, abitualmente indicata con la lettera x. Ma queste non sono le sole disequazioni di 1° grado che si possono scrivere: molti problemi si traducono in *disequazioni di 1° grado in due incognite*. Ecco un primo esempio:

$$y>x$$

Questa disequazione avrà come soluzioni tutte le coppie di numeri $(x; y)$ che presentano la seguente caratteristica: il secondo numero è più grande del primo.

È la geometria analitica che permette di visualizzare queste soluzioni; ecco come si può ragionare.

Si disegna sul piano cartesiano la retta r d'equazione:

$$y=x$$

Si fissa un'ascissa, per esempio 3, e si osservano i punti seguenti (fig. 1):

- il punto P(3; 3), che ha l'ordinata uguale all'ascissa e appartiene a r;
- i punti A(3; 4), B(3; 5), etc., che hanno l'ordinata maggiore dell'ascissa e si trovano nel semipiano al disopra della retta r.

Queste osservazioni si possono ripetere a partire da altre ascisse e portano a concludere (fig. 2) che *la disequazione:*

$$y>x$$

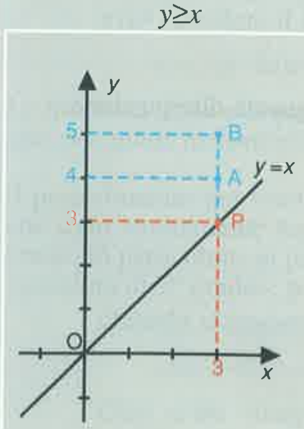
caratterizza il semipiano al disopra della retta d'equazione:

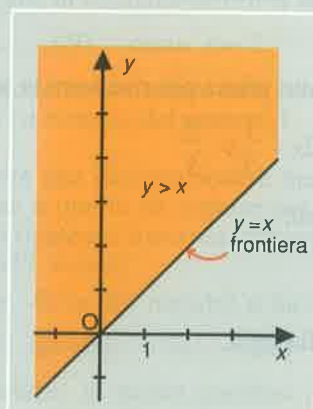
$$y=x$$

che è la frontiera *del semipiano.*

Scrivendo invece la disequazione:

$$y\geq x$$





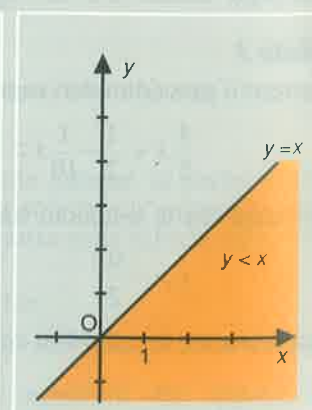


Figura 1 (a sinistra)
I punti che hanno ordinata maggiore dell'ascissa

Figura 2 (al centro)
La disequazione *y>x* caratterizza un semipiano

Figura 3 (a destra)
Il semipiano caratterizzato da *y<x*

si indicano i punti che si trovano nel semipiano al disopra di r e anche quelli che si trovano su r.

Analogamente si ha che (fig. 3) *la disequazione:*

$$y<x$$

caratterizza il semipiano al disotto della retta d'equazione:

$$y=x$$

Mentre la disequazione:

$$y\leq x$$

caratterizza i punti che si trovano su r o nel semipiano al disotto della retta r.

In fig. 4 si trova la rappresentazione grafica delle soluzioni di qualche altra disequazione in due incognite.

Particolare attenzione merita una disequazione come (fig. 5):

$$x<2$$

che, in questo contesto, deve essere letta:

per qualunque y, $x<2$

e, dunque, indica il semipiano «a sinistra» della retta d'equazione:

$$x=2$$

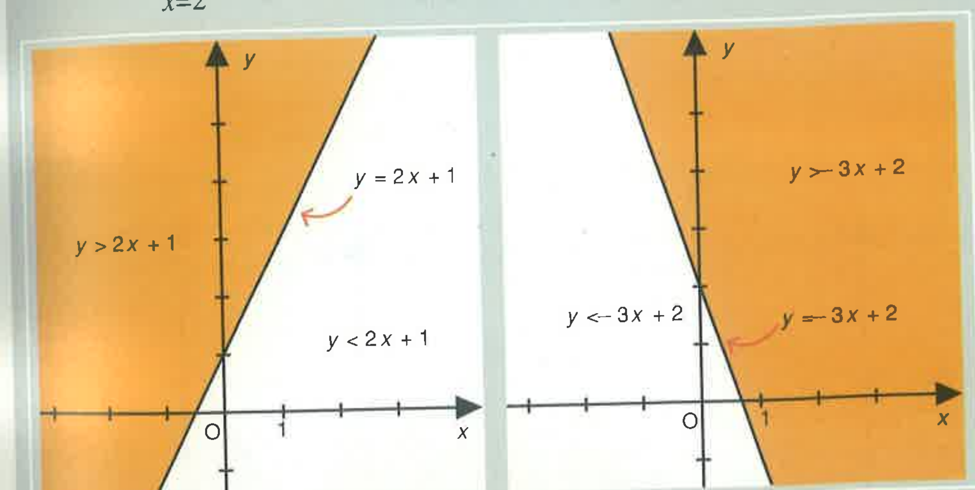


Figura 4
Altre disequazioni in due incognite

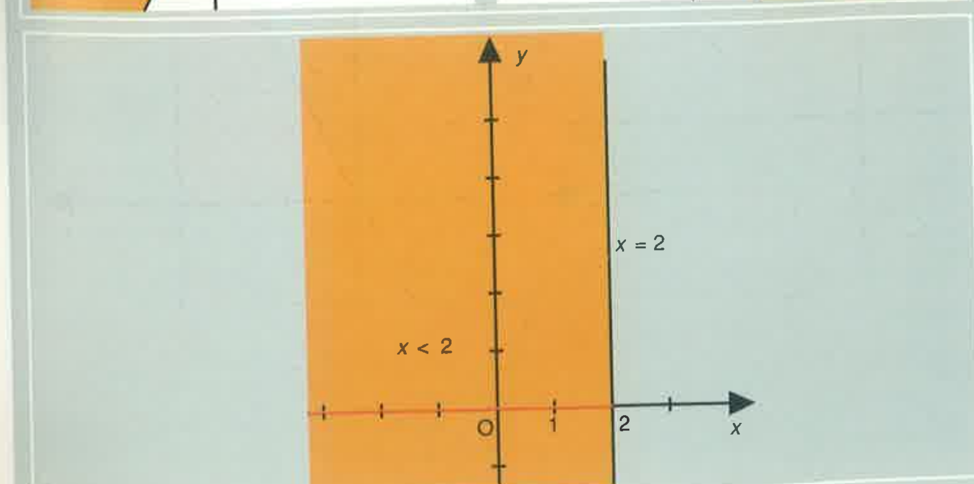


Figura 5
La disequazione *x<2* nel piano

Analogamente (fig. 6):

$$y>1$$

si legge:

per qualunque x, $y>1$

e indica il semipiano «al disopra» della retta d'equazione:

$$y=1$$

In fig. 6 la zona è stata individuata non più col colore, ma con qualche trattino al disopra della retta, simbologia che agevola la trattazione dei sistemi di disequazioni.

Sistemi di disequazioni in due incognite

Se più disequazioni devono essere verificate simultaneamente, si ha un sistema di disequazioni in due incognite. Ecco un primo esempio:

$$\begin{cases} y\leq 2x \\ x\leq 5 \\ y\geq 0 \end{cases}$$

Interpretato sul piano cartesiano questo sistema indica una zona di piano delimitata dalle tre rette seguenti (fig. 7):

(a) $y=2x$ (b) $x=5$ (c) l'asse delle x

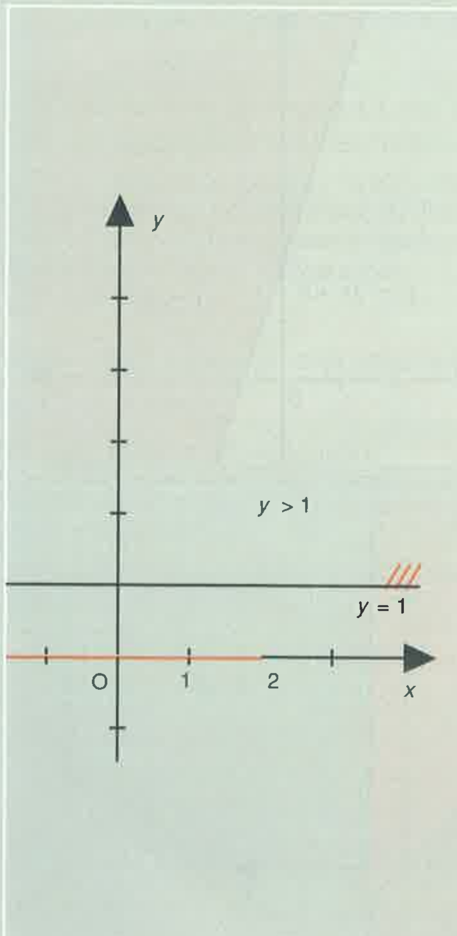


Figura 6 (a sinistra) **La disequazione $y>1$ nel piano**

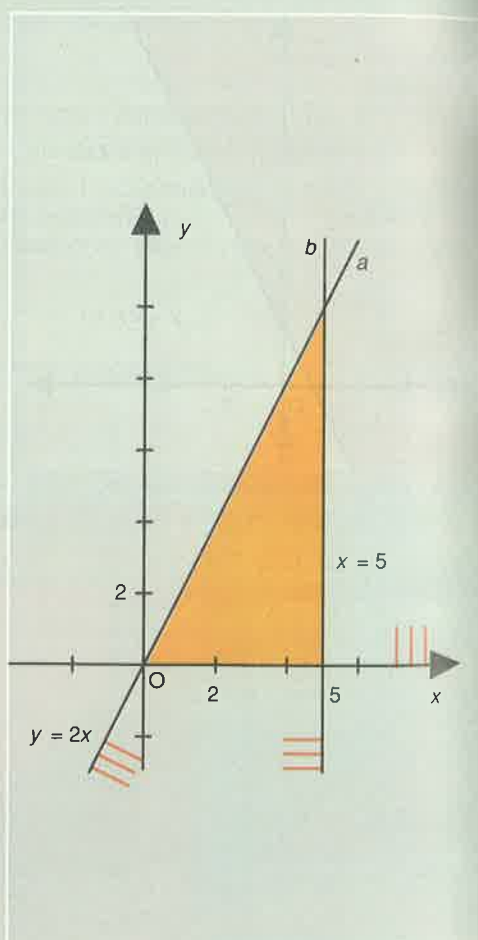


Figura 7 (a destra) **Il sistema** $\begin{cases} y\leq 2x \\ x\leq 5 \\ y\geq 0 \end{cases}$

Nella zona si trovano i punti che presentano simultaneamente queste caratteristiche:
- si trovano sotto la retta (a);
- si trovano a sinistra della retta (b);
- si trovano al disopra dell'asse delle x.

Le condizioni indicate dal sistema individuano dunque la zona triangolare colorata in giallo in fig. 7.

Analogamente, la zona colorata in giallo di fig. 8 è descritta dal seguente sistema di disequazioni:

$$\begin{cases} y\leq 3x+2 \\ y\geq 3x-4 \\ y\leq -x+7 \\ y\geq -x+3 \end{cases}$$

ed ha la frontiera costituita dalle seguenti quattro rette:

(a) $y=3x+2$ (b) $y=3x-4$ (c) $y=-x+7$ (d) $y=-x+3$

Un problema di programmazione economica

La determinazione di una zona di piano che risponde ad un sistema di disequazioni è un valido strumento per risolvere dei problemi di programmazione economica. Ecco un esempio.

Una ditta produce calcolatori tascabili di due tipi:

A. calcolatori elementari;

B. calcolatori scientifici.

Per soddisfare le richieste della clientela l'industria sa che deve produrre ogni giorno:
- almeno 200 calcolatori di tipo A, ma non più di 1000;
- non più di 500 calcolatori di tipo B.

Ma la ditta non ha la possibilità di produrre, in tutto, più di 1200 calcolatori al giorno.

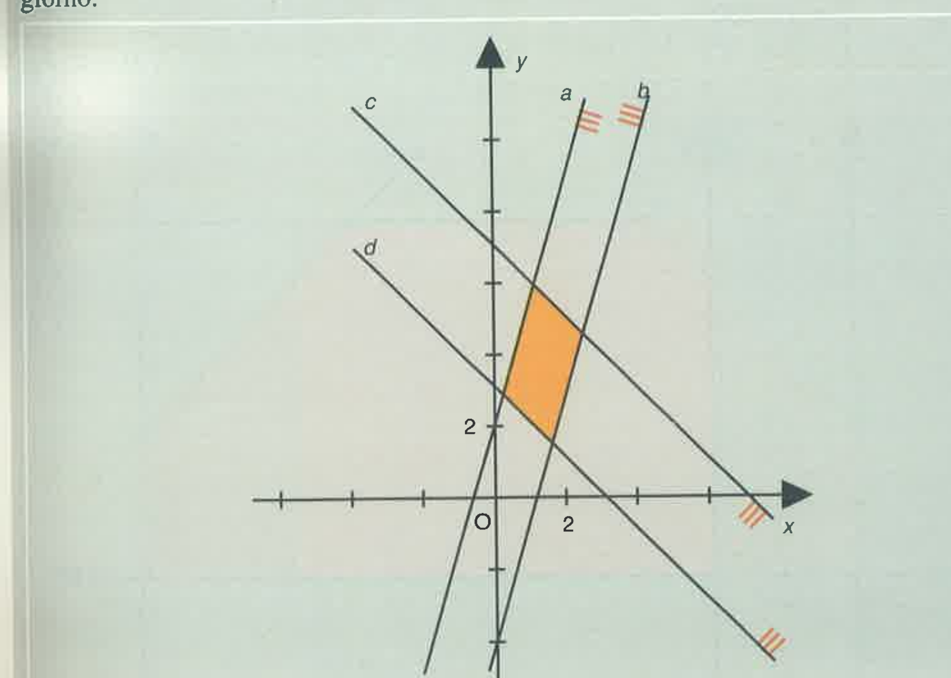


Figura 8 **Il sistema** $\begin{cases} y\leq 3x+2 \\ y\geq 3x-4 \\ y\leq -x+7 \\ y\geq -x+3 \end{cases}$

Infine si sa che:

- per ogni calcolatore di tipo A si ricavano 4000 lire;
- per ogni calcolatore di tipo B si ricavano 10 000 lire.

Qual è il ricavo massimo che l'industria può realizzare?

Come si traduce il problema in formule

Pur non tenendo conto di altri fattori come le paghe degli operai, le tasse, etc., il problema è assai complicato perché i dati sono molti e collegati fra loro.

Ecco allora come si può tradurre il problema in formule.

- Si indica con x il numero di calcolatori di tipo A e con y il numero di calcolatori di tipo B.
- Si traducono le condizioni assegnate in formule nel modo seguente:

Condizione	Formula
Si debbono produrre almeno 200 calcolatori di tipo A	$x\geq 200$
Si debbono produrre non più di 1000 calcolatori di tipo A	$x\leq 1000$
Si debbono produrre non più di 500 calcolatori di tipo B	$y\leq 500$
Non può produrre, in tutto, più di 1200 calcolatori	$x+y\leq 1200$

Si tiene inoltre presente che il numero di calcolatori di tipo B è certamente positivo e quindi dovrà essere anche:

$$y\geq 0$$

Si ottiene dunque il seguente sistema di disequazioni:

$$\begin{cases} x\geq 200 \\ x\leq 1000 \\ y\leq 500 \\ x+y\leq 1200 \\ y\geq 0 \end{cases}$$

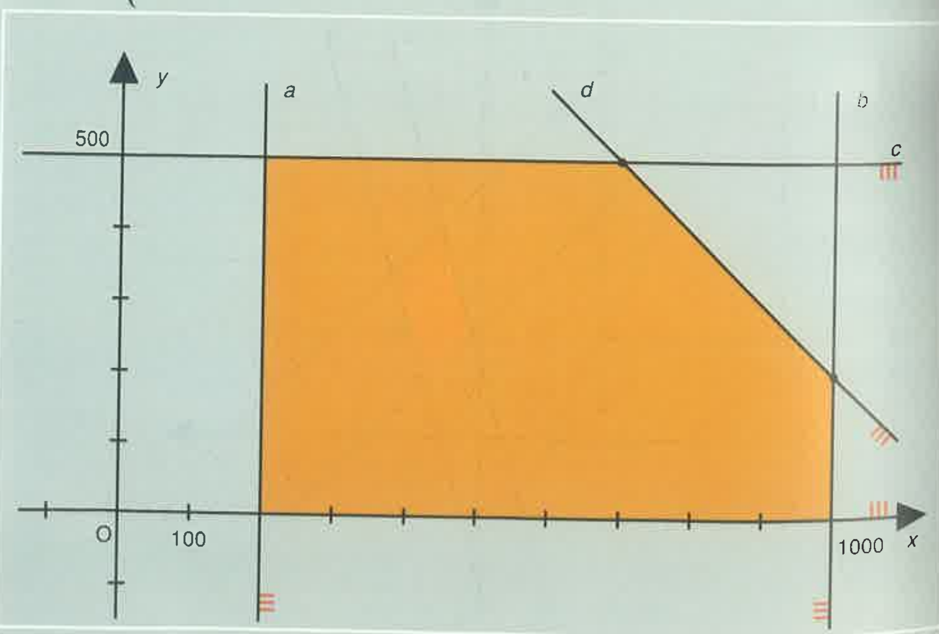


Figura 9
La zona del piano che visualizza il sistema

$$\begin{cases} x\geq 200 \\ x\leq 1000 \\ y\leq 500 \\ x+y\leq 1200 \\ y\geq 0 \end{cases}$$

Il sistema ottenuto descrive una zona di piano che ha per frontiera le rette con le equazioni seguenti:

(*a*) $x=200$
(*b*) $x=1000$
(*c*) $y=500$
(*d*) $x+y=1200$ cioè $y=-x+1200$
(*e*) $y=0$

Dopo aver disegnato le rette (fig. 9), si può facilmente individuare la zona descritta dalle disequazioni, zona che è detta anche *zona di produzione*.

Come massimizzare il ricavo

Finora si è tradotta in disequazioni solo una parte del problema; manca ancora la parte economica, basata sul fatto che:

- per ogni calcolatore di tipo A si ricavano 4000 lire;
- per ogni calcolatore di tipo B si ricavano 10 000 lire.

Sulla base di queste informazioni si può solo dire che, dopo aver venduto x calcolatori di tipo A e y di tipo B, si ha un ricavo R dato da:

$$R=4000x+10\,000y$$

Questa espressione, detta anche *funzione obiettivo*, descrive il ricavo R che si vuole *ottimizzare*, cioè rendere il migliore possibile.

Si può rappresentare graficamente anche questa funzione obiettivo ricavando y dalla formula, che diventa:

$$y=-0{,}4x+0{,}0001R$$

Ora si può ragionare così:

- se risulta $R=0$, si ha:

$$y=-0{,}4x$$

equazione che ha come grafico la retta r di fig. 10;
- quando il ricavo R assume un valore positivo, la retta sale spostandosi parallelamente a se stessa, entra nella zona di produzione attraverso il punto A e ne esce dal punto D;
- il ricavo è massimo proprio quando la retta passa per D.

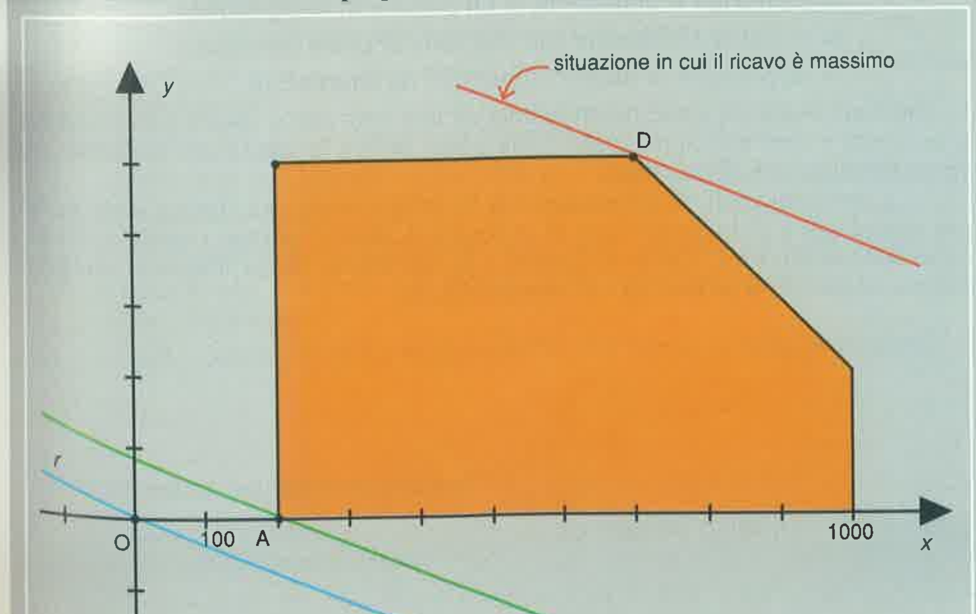


Figura 10
Come si determina il ricavo massimo

Calcolare il ricavo massimo

Per calcolare il ricavo massimo bisogna prima di tutto calcolare le coordinate del punto D, che è il punto d'intersezione delle seguenti rette:

$$(c)\ y=500$$

$$(d)\ y=-x+1200$$

Si conosce dunque l'ordinata (500) di D; per ricavare l'ascissa basta risolvere l'equazione:

$$500=-x+1200$$

da cui:

$$x=700$$

Avendo ottenuto:

$$x=700 \quad \text{e} \quad y=500$$

si trova subito

$$R=4000\cdot 700+10\,000\cdot 500$$

cioè:

$$R=7\,800\,000$$

Questo è dunque il massimo guadagno che l'industria può realizzare nelle condizioni indicate.

La programmazione lineare

Questo metodo, basato su equazioni e disequazioni di 1° grado visualizzate con rette del piano cartesiano, prende il nome di *programmazione lineare* ed è legato al nome del matematico americano G.B. Dantzig, che l'ha proposto per la prima volta nel 1947.

Il metodo parte da un lungo discorso, in cui i dati, le condizioni, i vincoli sono tanti da non poter essere ricordati e procede così:

- si traducono le condizioni in un sistema di disequazioni;
- si visualizza il sistema con una zona di piano cartesiano;
- si rappresenta la funzione obiettivo da ottimizzare.

La funzione obiettivo viene rappresentata da una retta che si sposta parallelamente a se stessa e che, sovrapponendosi alla zona, indica la situazione richiesta, che viene chiamata *soluzione ottima*.

I problemi reali da affrontare con la programmazione lineare sono molto più complicati e richiedono l'uso di potenti calcolatori, perché i dati e le condizioni sono moltissimi. Tuttavia l'analisi e la risoluzione del problema si svolgono sempre seguendo il procedimento esposto finora.

Che cosa bisogna sapere

Come si riconosce un'equazione di 1° grado in un'incognita

Un'equazione di 1° grado è un'uguaglianza fra due espressioni, che presentano le seguenti caratteristiche:

- nelle espressioni compare, oltre ai numeri, una sola lettera;
- la lettera compare solo al 1° grado;
- l'uguaglianza diventa vera solo quando si sostituisce al posto della lettera un particolare numero, detto soluzione dell'equazione;
- l'uguaglianza si può scrivere nella forma:

$$px+q=cx+d$$

Esempio: $2x-3=-x+9$, che ha soluzione $x=4$ perché $2\cdot 4-3=-4+9$

I vocaboli che si usano parlando di equazioni

- La lettera che compare nell'equazione è *l'incognita*.
- Il coefficiente di un monomio in cui compare la lettera è il *coefficiente dell'incognita*.
- I monomi in cui non compare la lettera sono *i termini noti*.
- I coefficienti dell'incognita e i termini noti sono i *coefficienti dell'equazione*.
- L'espressione a sinistra del simbolo «=» è il *primo membro* dell'equazione.
- L'espressione a destra del simbolo «=» è il *secondo membro dell'equazione*.
- Il numero che, sostituito alla lettera, rende vera l'uguaglianza è la *soluzione* dell'equazione.
- Le *equazioni equivalenti* sono equazioni che hanno la stessa soluzione.

Come si ottengono equazioni equivalenti

- Aggiungendo uno stesso monomio ai due membri di un'equazione si ottiene un'equazione equivalente.
- Moltiplicando per uno stesso numero diverso da 0 i due membri di un'equazione si ottiene un'equazione equivalente.

Come si risolve un'equazione di 1° grado

Si passa dall'equazione assegnata ad un'equazione equivalente che presenta le seguenti caratteristiche:

- al primo membro il coefficiente dell'incognita è 1 e il termine noto è 0;
- al secondo membro il coefficiente dell'incognita è 0 e il termine noto è la soluzione.

Esempio: $2x-3=-x+9$ diventa:

$2x+x-3=-x+9+x$ cioè $3x-3=9$

$3x-3+3=9+3$ cioè $3x=12$

$\frac{1}{3}\cdot 3x=\frac{1}{3}\cdot 12$ cioè $x=4$

Come si può scrivere un'equazione di 1° grado

Un'equazione di 1° grado si può sempre scrivere nella forma:

$$ax=b$$

Equazione impossibile

È un'equazione che non ha soluzione, perché l'uguaglianza è sempre falsa; si può scrivere nella forma:

$$0\cdot x=b$$

Equazione indeterminata

È un'equazione che non determina una soluzione, perché l'uguaglianza è sempre vera; si può scrivere nella forma:

$$0\cdot x=0$$

Equazioni a coefficienti letterali

Nel caso di equazioni in cui anche i coefficienti sono lettere, bisogna segnalare chiaramente quale lettera indica l'incognita.

Esempio: risolvere $am+b=0$ rispetto all'incognita m

Equazione in due incognite

È un'uguaglianza fra due espressioni che presentano le seguenti caratteristiche:

- vi compaiono due lettere (spesso x e y);
- le due lettere compaiono al 1° grado;
- l'uguaglianza diventa vera quando si sostituiscono al posto di x e y particolari coppie di numeri.

Esempio: $3x+4y=30$

Soluzione di un'equazione in due incognite

È una *coppia di numeri* da sostituire a x e y in modo da ottenere un'uguaglianza vera. Un'equazione in due incognite non determina una sola soluzione.

Esempio:

$3x+4y=30$ ha le soluzioni $(0; 7{,}5)$ $(10; 0)$ $(6; 3)$

$x-2y=0$ ha le soluzioni $(0; 0)$ $(2; 1)$ $(6; 3)$

Sistema di due equazioni in due incognite

Due equazioni in due incognite che debbono essere risolte simultaneamente costituiscono un sistema.

Esempio: $\begin{cases} x-2y=0 \\ 3x+4y=30 \end{cases}$

Soluzione di un sistema

La soluzione di un sistema è *una coppia di numeri* caratterizzata dalla seguente proprietà: sostituendo il primo numero a x ed il secondo numero a y, le due equazioni diventano due uguaglianze vere.

Esempio: $\begin{cases} x-2y=0 \\ 3x+4y=30 \end{cases}$ ha la soluzione $(6; 3)$ perché $\begin{cases} 6-2\cdot 3=0 \\ 3\cdot 6+4\cdot 3=30 \end{cases}$

Risolvere un sistema per sostituzione

Si ricava una delle incognite da un'equazione e si sostituisce l'espressione ottenuta nell'altra, in modo da ottenere un'equazione in una sola incognita, che già si sa risolvere.

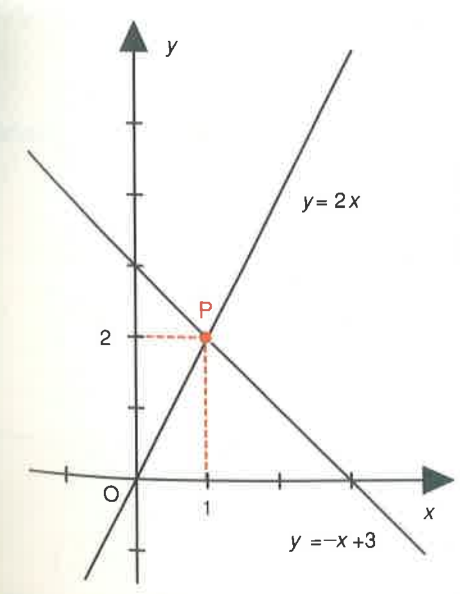
Esempio:

$\begin{cases} x-2y=0 \\ 3x+4y=30 \end{cases}$ $\begin{cases} x=2y \\ 3\cdot 2y+4y=30 \end{cases}$ $\begin{cases} x=2y \\ 10y=30 \end{cases}$ $\begin{cases} x=6 \\ y=3 \end{cases}$

Intersezione fra due rette e sistemi di equazioni in due incognite

Le coordinate del punto d'intersezione di due rette d'equazione assegnata si trovano risolvendo il sistema formato dalle due equazioni (fig. 1).

Figura 1
Intersezione fra due rette



$\begin{cases} y=2x \\ y=-x+3 \end{cases}$ ha soluzione $\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$

Segno di un binomio di 1° grado

Studiare il segno di un binomio del tipo:

$$ax+b$$

vuol dire determinare per quali valori di x risulta:

$$ax+b>0$$

$$ax+b=0$$

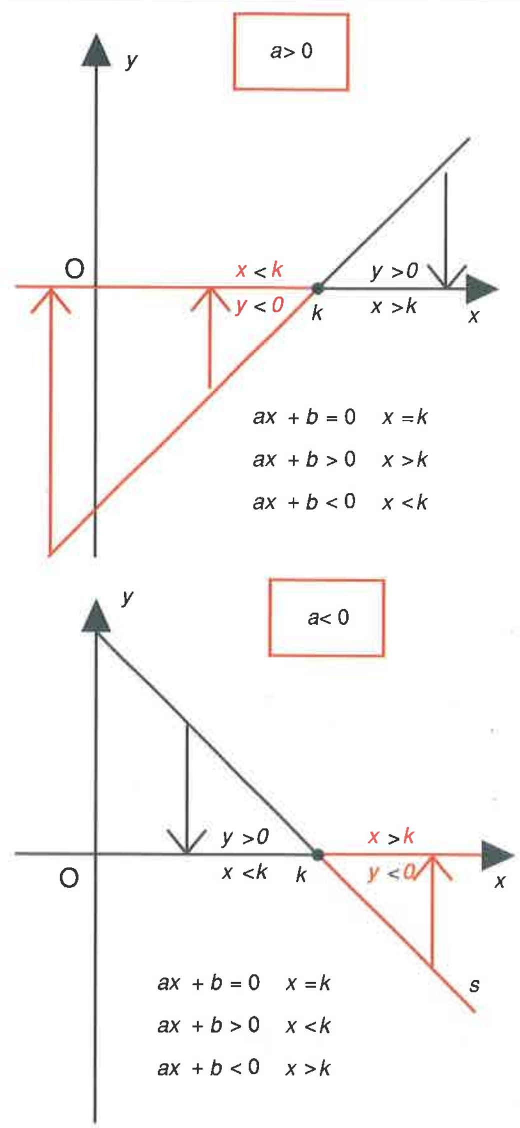
$$ax+b<0$$

Indicando con y il valore che assume il binomio, il problema può essere risolto con l'aiuto della geometria analitica, come è mostrato in fig. 2.

Come si riconosce una disequazione di 1° grado in un'incognita

Una disequazione di 1° grado è costruita collegando con i segni di disuguaglianza due espressioni, che presentano le seguenti caratteristiche:

Figura 2
Segno di un binomio di primo grado
y=ax+b



- nelle espressioni compare, oltre ai numeri, una sola lettera;
- la lettera compare solo al 1° grado;
- la disuguaglianza si può scrivere nella forma:

$px+q>cx+d$ oppure $px+q<cx+d$

Esempi: $-2x+6>0$ $\quad 3x-5<-7x+15$ $\quad x>2$

Soluzioni di una disequazione

Le soluzioni della disequazione sono tutti i numeri che, sostituiti alla lettera, fanno diventare la disequazione una disuguaglianza vera.

Esempio: $x>2$ ha come soluzioni tutti i numeri rappresentati sulla semiretta colorata di fig. 3, perché risulta:

$\frac{5}{2}>2 \qquad 3>2 \qquad 4>2$ e così via

Disequazioni equivalenti

Le disequazioni che hanno le stesse soluzioni si dicono equivalenti.

Come si ottengono disequazioni equivalenti

Si ottengono disequazioni equivalenti utilizzando gli stessi criteri validi per le equazioni equivalenti; va tenuta però presente un'importante differenza: moltiplicando per uno stesso numero *negativo* i due membri di una disequazione si ottiene una disequazione equivalente *solo cambiando il segno di disuguaglianza.*

Esempi: $x>2$ è equivalente a:

$\frac{1}{2}x>2\cdot\frac{1}{2}$ cioè $\frac{1}{2}x>1$

$-3x<2\cdot(-3)$ cioè $-3x<-6$

$x+3>2+3$ cioè $x+3>5$

Risolvere una disequazione di 1° grado

Per risolvere una disequazione di 1° grado si passa ad una disequazione equivalente che presenti le seguenti caratteristiche:

- al primo membro il coefficiente dell'incognita è 1 e il termine noto è 0;
- al secondo membro il coefficiente dell'incognita è 0.

Esempio: $-2x+6>0$ diventa: $-2x+6-6>0-6$ cioè $-2x>-6$

e quindi $-\frac{1}{2}(-2x)<-\frac{1}{2}(-6)$ cioè $x<3$

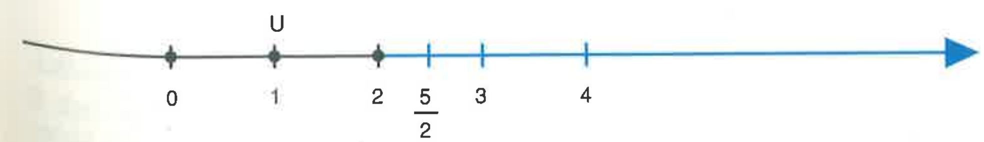


Figura 3
Le soluzioni della disequazione
x>2

Attività finali

Che cosa bisogna saper fare

Questo capitolo propone le nozioni fondamentali per risolvere equazioni, disequazioni e sistemi; queste nozioni integrano quelle esposte nel capitolo 6 e presentano dunque le stesse caratteristiche: non basta conoscere le varie nozioni, bisogna anche saperle applicare, scegliendo in ogni caso il procedimento adatto.
Gli esercizi si possono dividere in questo caso in tre categorie:

I. esercizi sulle equazioni;
II. esercizi sui sistemi;
III. esercizi sulle disequazioni.

All'interno di queste categorie si trovano poi esercizi di due tipi:

A. esercizi di calcolo (per esempio risoluzione di un'equazione);
B. risoluzione di problemi che richiedono di applicare i calcoli.

I. Esercizi sulle equazioni

A. Esercizi di calcolo

Attività 1. Risolvere un'equazione con coefficienti numerici
Risolvere la seguente equazione:

$$5x-3=-2x+4$$

Verificare che la soluzione è esatta.

- *Si aggiunge ai due membri il monomio ...., ottenendo ....*
- *Si aggiunge ai due membri il numero ...., ottenendo ....*
- *Si moltiplicano i due membri per ...., ottenendo ....*

La soluzione è:

$$x=\boxed{}$$

Verifica:

$$5\boxed{}-3=-2\boxed{}+4 \text{ cioè } \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Perciò la soluzione è ....

Attività 2. Risolvere un'equazione con coefficienti letterali
Esaminare la seguente equazione a coefficienti letterali:

$$kx-k=-x+2$$

Stabilire:

- in quale caso l'equazione è impossibile;
- qual è la soluzione dell'equazione;
- qual è la soluzione per $k=1$.

Si scrive l'equazione in modo da individuarne i coefficienti e cioè:

$$(\ldots\ldots\ldots\ldots)x=\ldots\ldots\ldots$$

- *Il coefficiente dell'incognita è ....*
- *Il termine noto è ....*
- *L'equazione è impossibile se* ....=0, *cioè per* k=–1

La soluzione dell'equazione è:

$$x=\frac{\ldots\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots\ldots}$$

La soluzione per k=1 *si ottiene sostituendo .... al posto di .... nell'espressione precedente; si ottiene:*

$$x=\frac{\ldots\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots\ldots}$$

B. Problemi che conducono a risolvere equazioni di 1° grado

Attività 3. Un problema economico
Il prezzo di vendita di una macchina fotografica è 350 000 lire e il negoziante afferma di aver scontato il prezzo del 30%. Quanto costava la macchina fotografica prima dello sconto?

- *Si indica con* x *il prezzo prima dello sconto:*
- *Lo sconto è:*

$$\frac{30}{100}\ldots\ldots\ldots$$

- *Il prezzo scontato sarà allora dato da:*

$$x-\ldots\ldots\ldots$$

- *Si arriva all'equazione:*

$$\ldots\ldots\ldots\ldots=350\,000$$

- *Risolvendo l'equazione si trova:*

$$x=500\,000$$

che è il prezzo di vendita cercato.

Attività 4. Un problema di geometria
È dato un segmento AB lungo 7; determinare sul segmento AB un punto C in modo che il quadrato costruito su AC ed il triangolo equilatero costruito su CB abbiano lo stesso perimetro.

Il problema si può affrontare procedendo ordinatamente per passi successivi nel modo seguente:

1. Si visualizza il problema con dei disegni
   Si comincia con qualche disegno che visualizzi il problema (fig. 1):
   - *il punto C può inizialmente essere sovrapposto ad A (fig. 1a); in tal caso si può costruire solo il triangolo su CB, figura che ha il perimetro p, dato da:*

     $p=$..............

   - *il punto C «scorre» sul segmento (figure 1b, 1c);*
   - *il punto C è andato a sovrapporsi su B (fig. 1d); così si può costruire solo il quadrato su AC, figura che ha perimetro:*

     $p'=$..............

2. Si sceglie l'incognita
   Le figure fanno capire che si può «fermare» il punto C mentre scorre su AB, fissando la distanza AC; perciò si sceglie come incognita x la distanza AC. La fig. 1 mostra inoltre che x può assumere solo valori positivi e più piccoli di 7; sarà dunque:

   $0 \leq x \leq 7$

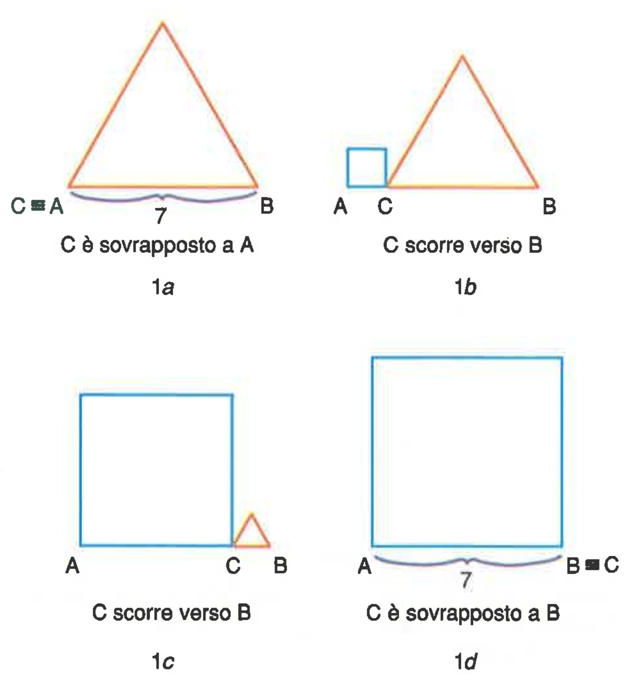
   e, in particolare:

   $x=0$ quando C coincide con A

   $x=7$ quando C coincide con B

3. Si traduce il problema in un'equazione
   Avendo indicato con x la lunghezza di AC, si possono esprimere per mezzo di x anche i perimetri delle due figure; si ha che:

Figura 1
Visualizzare il problema con dei disegni



- *il quadrato di lato AC ha perimetro 4x;*
- *il segmento CB è lungo 7–x;*
- *il triangolo equilatero di lato CB ha perimetro 3(7–x).*

I due perimetri sono uguali, come richiesto dal problema, se risulta:

$4x=3(7-x)$

In questo modo il problema è stato tradotto in un'equazione di 1° grado nell'incognita x.

4. Si risolve l'equazione $4x=3(7-x)$
   Si ottiene:

   $4x=$.........–......x da cui ....$x=$........

   e quindi:

   $x=3$

5. Si controlla che la soluzione ottenuta sia esatta
   Si è così trovata la posizione di C richiesta dal problema: C deve trovarsi a distanza 3 da A. È immediato verificare che, in questo caso, le due figure hanno lo stesso perimetro, lungo 12.

Il procedimento per risolvere un problema di geometria

I problemi di geometria possono essere risolti con un procedimento analogo a quello precedente; si tratta di percorrere ordinatamente le seguenti tappe:

1. visualizzare il problema con opportuni disegni;
2. scegliere l'incognita x, precisando le limitazioni che deve rispettare;
3. tradurre il problema in un'equazione che leghi i dati all'incognita;
4. risolvere l'equazione;
5. controllare che la soluzione ottenuta sia esatta.

Attività 5. Un problema di geometria che conduce ad un'equazione letterale

Risolvere il problema precedente indicando con b la lunghezza del segmento AB.

In questo caso si arriva ad un'equazione con coefficienti letterali; la soluzione è:

$$x=\frac{3}{7}b$$

II. Esercizi sui sistemi

A. Esercizi di calcolo

Attività 6. Risolvere un sistema

Risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} x+y=5 \\ x-y=3 \end{cases}$$

Verificare che la soluzione ottenuta è esatta.

In questo caso si procede rapidamente sia con il metodo di sostituzione che con quello di addizione.

- *Col metodo di sostituzione si ottiene:*

$$\begin{cases} \boxed{}+y=5 \\ x=\boxed{} \end{cases} \quad \text{da cui} \begin{cases} \ldots\ldots\ldots\ldots=5 \\ x=\ldots\ldots\ldots \end{cases} \quad \text{e infine} \quad \begin{cases} y=1 \\ x=4 \end{cases}$$

È immediato verificare che la soluzione ottenuta è esatta, dato che risulta:

$$\begin{cases} 4+1=5 \\ 4-1=3 \end{cases}$$

- *Col metodo di addizione si può calcolare:*

I equazione + II equazione: ....

I equazione + II equazione·(−1): ....

Così si ha il seguente sistema equivalente a quello dato:

$$\begin{cases} 2x=8 \\ 2y=2 \end{cases}$$

da cui si può ricavare subito la soluzione.

B. Problemi che conducono a risolvere sistemi di 1° grado

Attività 7. Un problema di geometria analitica

Date le due rette r e s che hanno le seguenti equazioni:

(r) $y=2x-4$ (s) $y=-x+5$

determinare:

- il punto P d'intersezione delle due rette;
- il punto d'intersezione di ciascuna retta con l'asse delle x.

Visualizzare i risultati ottenuti, tracciando il grafico delle due rette.

Attività 8. Un problema di fisica

In fig. 2 è rappresentato un autocarro che pesa 5000 kg, fermo su un viadotto lungo 100 m, a 20 metri da uno dei pilastri. Quali forze sostengono l'autocarro? Completare il procedimento seguente.

Per sostenere il peso dell'autocarro, che agisce in direzione verticale verso il basso, i due pilastri A *e* B *esercitano due forze verticali rivolte verso l'alto; indicando con* x *e* y *l'intensità incognita di queste due forze (misurata in kg), dovrà dunque risultare:*

$x+y=5000$

Questa equazione non basta per determinare le due incognite x *e* y*; occorre un'altra equazione, che si può ricavare esaminando meglio il problema: l'autocarro è più vicino al pilastro* A*, che deve dunque sopportare lo sforzo maggiore; se* A *crollasse, il viadotto diventerebbe una leva che ruota intorno al fulcro* B.
Per mantenere in equilibrio questa leva, che ha i bracci:

AB lungo 100 m e CB lungo 80 m

il pilastro A *deve esercitare una forza* x *(la potenza della leva), legata al peso dell'autocarro (la resistenza) dalla legge di equilibrio della leva; si ha dunque:*

$100x=80\cdot5000$ cioè $100x=400\,000$

I due pilastri dovranno dunque esercitare due forze x *e* y *che si ottengono risolvendo il seguente sistema:*

$$\begin{cases} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Risolvendo il sistema si ottiene:

$$\begin{cases} x=4000 \\ y=1000 \end{cases}$$

III. Esercizi sulle disequazioni

A. Esercizi di calcolo

Attività 9. Risolvere una disequazione

Risolvere la seguente disequazione:

$$-\frac{1}{3}x+2<\frac{5}{3}x-6$$

- *Si aggiunge ai due membri il monomio* −............, *ottenendo:*

$-\frac{1}{3}x-\cdots\cdots+2<-6$ ossia ....<-6

- *Si aggiunge ai due membri* −............., *ottenendo:*

..................$<-6-$.......... ossia ....$<$..............

- *Si moltiplicano i due membri per* −......... *e quindi si cambia il segno di disuguaglianza, ottenendo infine:*

$x>4$

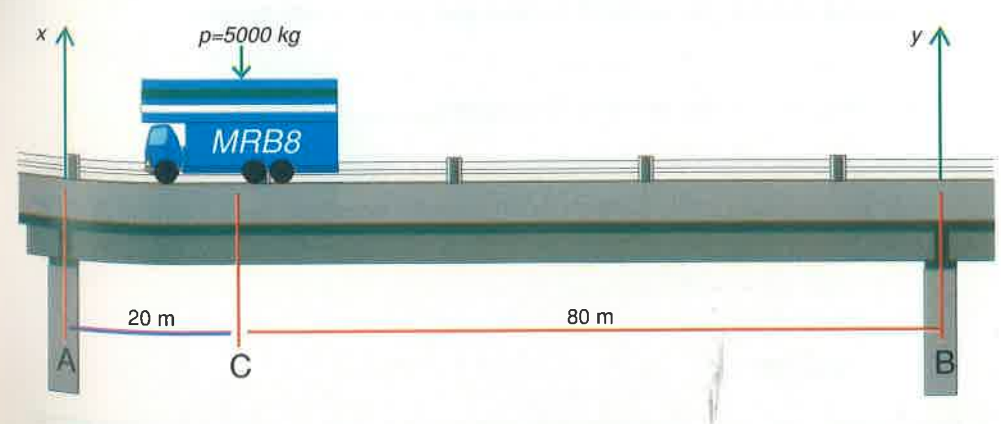


Figura 2
Le forze che sostengono l'autocarro fermo sul viadotto

Attività 10. Studiare il segno di un binomio
Studiare il segno del binomio:

$$y=-2x+8$$

- *Si traccia il grafico della retta corrispondente.*
- *Si determina il punto d'intersezione della retta con l'asse delle* x*; si ha:*

A(4; 0)

- *Si trova quindi:*

$-2x+8=0$ per x.........

$-2x+8>0$ per x.........

$-2x+8<0$ per x.........

B. Problemi che conducono a disequazioni di 1° grado

Attività 11
Di un'auto sono in vendita allo stesso prezzo due modelli:
- a benzina, che ha un costo di utilizzo di circa 300 lire ogni kilometro e paga il bollo annuale di circa 200 000 lire;
- a gasolio, che ha un costo di utilizzo di circa 140 lire ogni kilometro e paga il bollo annuale di circa 1 200 000 lire.

Quale dei due modelli conviene comprare?

L'auto a gasolio ha un costo di consumo minore, ma paga una tassa annuale maggiore. Si capisce che conviene solo se si percorrono molti kilometri; ma quanti kilometri esattamente?
Indicando con x *il numero di kilometri cercato si ha:*
- costo annuale dell'auto a gasolio: $140x+1\,200\,000$
- costo annuale dell'auto a benzina: $300x+200\,000$

L'auto a gasolio è conveniente se risulta:

$$140x+1\,200\,000<300x+200\,000$$

- *Si addiziona ai due membri il monomio –............, ottenendo:*

........................<........................

- *Si addiziona ai due membri il numero –.........., ottenendo:*

........................<........................

- *Si moltiplicano i due membri per il numero negativo .... e quindi si cambia segno di disuguaglianza, ottenendo:*

........................>........................

e cioè:

$$x>6250$$

In conclusione, nel caso considerato si trova che l'auto a gasolio è conveniente solo se si percorrono in un anno più di 6250 kilometri.