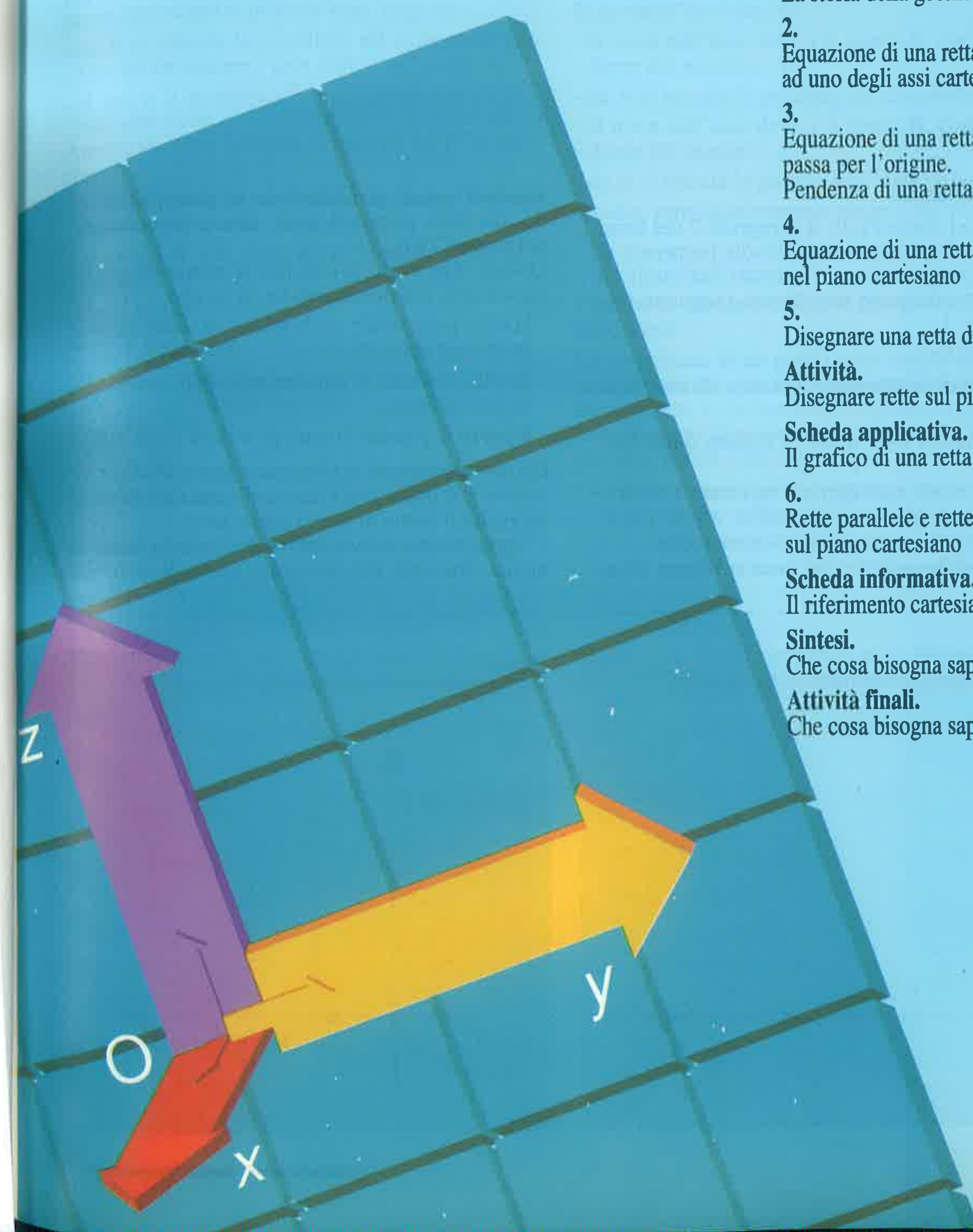
CAPITOLO OTTAVO

GEOMETRIA ANALITICA



1

Assi cartesiani e coordinate di un punto

Gli assi cartesiani

Studiando i numeri (cfr. il paragrafo 2 del terzo capitolo) si è trovata una notevole proprietà: si possono rappresentare i numeri razionali su una retta, sulla quale sono fissati i seguenti elementi (fig. 1):

- un punto O;
- un verso di percorrenza, indicato da una freccia;
- un segmento OU, unità di misura delle lunghezze.

In questo modo ogni numero razionale è rappresentato da un punto e, viceversa, ad un punto della retta può essere associato un numero.
La geometria analitica si basa sull'idea di estendere questo procedimento al piano, fissando due rette perpendicolari, che si incontrano nel punto O (fig. 2).
Queste due rette prendono il nome di *assi coordinati;* più precisamente, si ha che:

- la retta orizzontale si chiama *asse delle ascisse* (o *asse delle x*);
- la retta verticale si chiama *asse delle ordinate* (o *asse delle y*);
- il punto O prende il nome di *origine degli assi.*

Gli assi coordinati si chiamano anche *assi cartesiani* e il piano con i due assi cartesiani prende anche il nome di *piano cartesiano.*
L'aggettivo *cartesiano* deriva da Cartesio, matematico francese del Seicento, che sviluppò la geometria basandosi sulle coordinate dei punti (cfr. anche la scheda storica di p. 336).
Spesso si dice che i due assi cartesiani formano *un sistema di riferimento* nel piano. Questo vuol dire che i due assi forniscono un metodo per individuare la posizione di un punto nel piano.

Ascissa e ordinata di un punto

Per individuare la posizione di un punto P nel piano cartesiano si procede così (fig. 3):

- da P si traccia la parallela all'asse delle y, fino ad incontrare l'asse delle x nel punto A;
- si trova il numero -3 corrispondente di A sull'asse delle x.

Analogamente, sempre a partire da P, si ha che:

- la parallela all'asse delle x incontra l'asse delle y nel punto B;
- al punto B sull'asse delle y corrisponde il numero 2.

Quindi si dice che:

P ha ascissa -3 e ordinata 2

e si scrive:

$P(-3; 2)$

che si legge:

P di coordinate -3 e 2.

In conclusione, le coordinate di un punto sono due numeri:

- *l'**ascissa**, che si legge sull'asse delle ascisse;*
- *l'**ordinata**, che si legge sull'asse delle ordinate.*

Determinare sul piano un punto di coordinate assegnate

Il procedimento finora seguito può essere percorso in senso inverso. Ecco un esempio.
Determinare il punto:

$R(-4; -1)$

Si procede così (fig. 4):

- si trova sull'asse delle x il punto A, corrispondente del numero -4;
- da A si traccia la parallela all'asse delle y;
- si trova sull'asse delle y il punto B, corrispondente del numero -1;
- da B si traccia la parallela all'asse delle x;
- le due rette si incontrano proprio nel punto R.

L'ordine in cui sono scritte le coordinate è importante

Le coordinate di un punto sono scritte in modo molto sintetico, con delle convenzioni che debbono essere accuratamente seguite; in particolare bisogna prestare attenzione all'ordine in cui sono scritti i due numeri:

- *il primo numero indica sempre l'ascissa,* cioè il numero che si legge sull'asse delle x;
- *il secondo numero indica sempre l'ordinata,* cioè il numero che si legge sull'asse delle y.

Figura 1
Rappresentare i numeri razionali su una retta

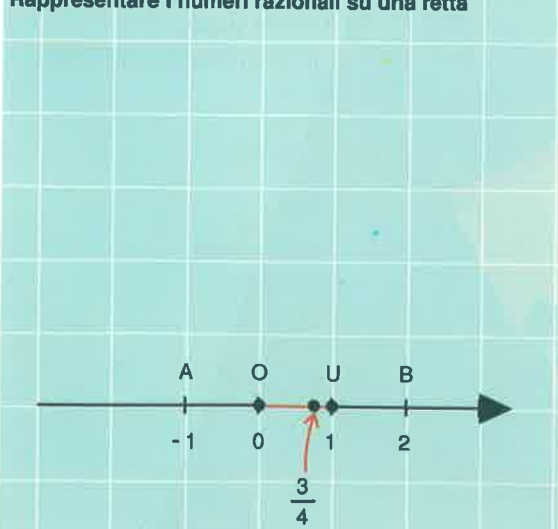


Figura 2
Il riferimento cartesiano nel piano

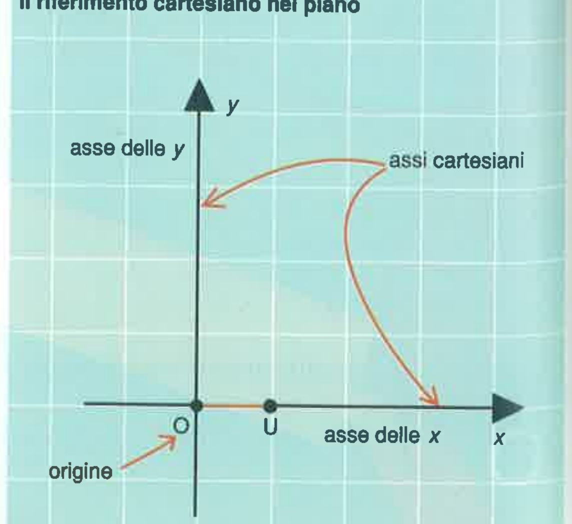


Figura 3
Coordinate di un punto P

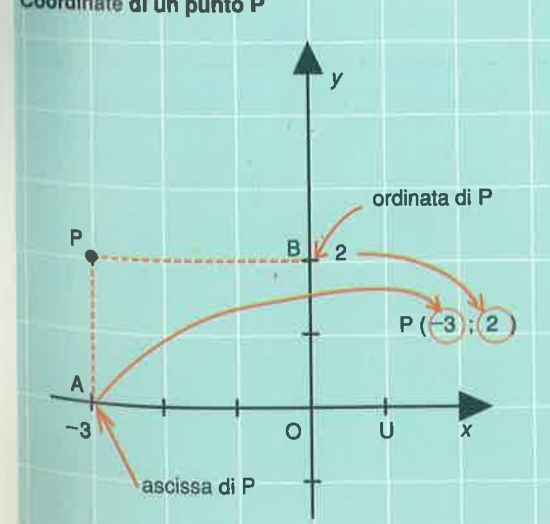
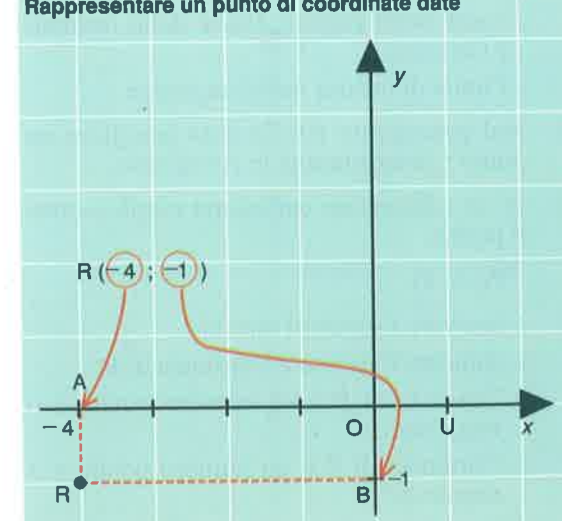


Figura 4
Rappresentare un punto di coordinate date



La fig. 5 visualizza quest'osservazione: i punti Q(2; –3) e P(–3; 2), che hanno le coordinate scritte in ordine diverso, si trovano in posizioni differenti e non possono essere confusi.

Il segno delle coordinate è importante

In fig. 6 sono disegnati due punti con le coordinate di segno opposto:

R(–2; –1) S(2; 1)

Questi due punti occupano due diverse posizioni nel piano; si nota così quanto è importante il segno delle coordinate.
Per questo il piano cartesiano è diviso in quattro quadranti numerati in senso antiorario (fig. 7) e si ha che:

- nel I quadrante si trovano i punti con le due coordinate positive;
- nel II quadrante si trovano i punti con ascissa negativa ed ordinata positiva;
- nel III quadrante si trovano i punti con le due coordinate negative;
- nel IV quadrante si trovano i punti con ordinata negativa ed ascissa positiva.

Verifiche

Conoscenze

① Disegnare un riferimento cartesiano, indicando:
- l'asse delle ascisse, l'asse delle ordinate e l'origine;
- l'unità di misura delle lunghezze.

② Nel precedente riferimento scegliere un punto e determinarne le coordinate.

③ In un riferimento cartesiano rappresentare il punto:

P(–5; 4)

e risolvere i seguenti quesiti:

a. indicare l'ascissa e l'ordinata di P;
b. l'ascissa di P è un numero positivo o negativo?
c. l'ordinata di P è un numero positivo o negativo?
d. in quale quadrante si trova P?

④ Ripetere l'esercizio precedente a partire dal punto Q(5; –4).

⑤ In un riferimento cartesiano rappresentare i punti seguenti:

P(–1; –3) Q(–1; 3) R(1; –3) S(1; 3)

Di ciascun punto indicare:
- l'ascissa e l'ordinata;
- il quadrante in cui si trova.

Comprensione

① Che cosa sono le coordinate di un punto?

② Quali sono le coordinate dell'origine O?

③ In un riferimento cartesiano ci sono due punti che si trovano sull'asse delle x e distano 1 dall'origine O; indicare questi punti e determinarne le coordinate.

④ In un riferimento cartesiano ci sono due punti che si trovano sull'asse delle y e distano 1 dall'origine O; indicare questi punti e determinarne le coordinate.

Applicazioni

① Determinare le coordinate dei punti indicati in fig. 8.

② Disegnare sul piano un riferimento cartesiano e rappresentarvi i seguenti punti:

P(–2; 1) Q(2; –1) R(–1; 2) S(–2; –1)

③ Disegnare sul piano un riferimento cartesiano e rappresentarvi i seguenti punti:

P(–2; 0) Q(0; –2) R(2; 0) S(0; 2)

Vocabolario

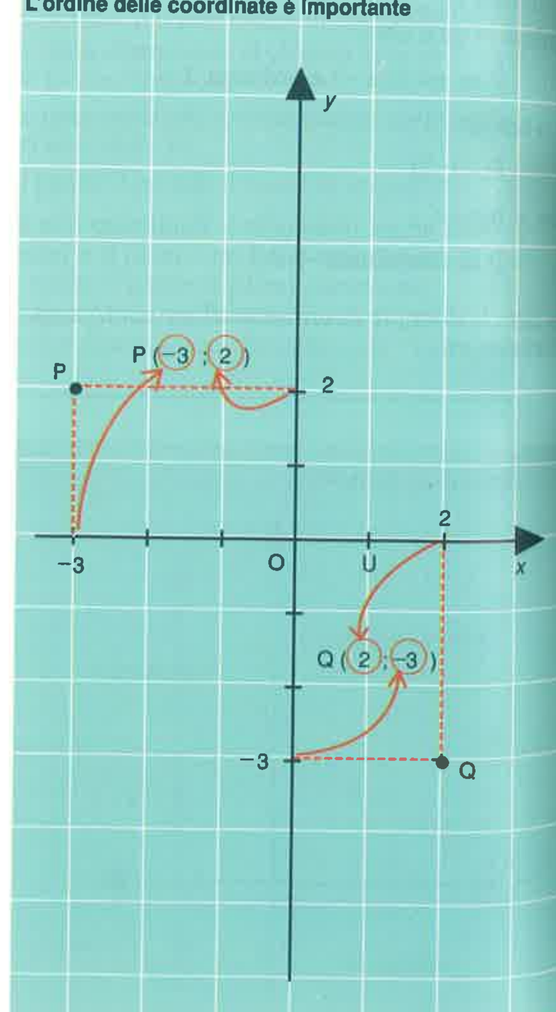
① Tutte le seguenti frasi sono errate; correggere gli errori.

a. «le ordinate di un punto sono due numeri»;
b. «il riferimento cartesiano è costituito da due rette che si chiamano ascissa e ordinata»;
c. «il riferimento cartesiano è costituito da due rette che si chiamano x e y»;
d. «l'origine è il punto zero».

② Spiegare il significato dei seguenti termini:

a. ordinata e coordinata;
b. ascissa e asse delle ascisse;
c. ordinata e asse delle ordinate.

Figura 5
L'ordine delle coordinate è importante



6
no delle coordinate è importante

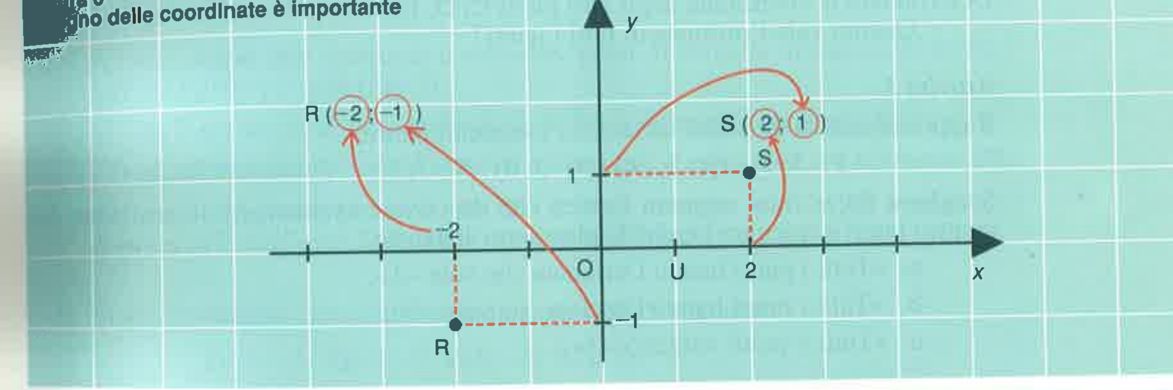


Figura 7
I quattro quadranti del piano cartesiano

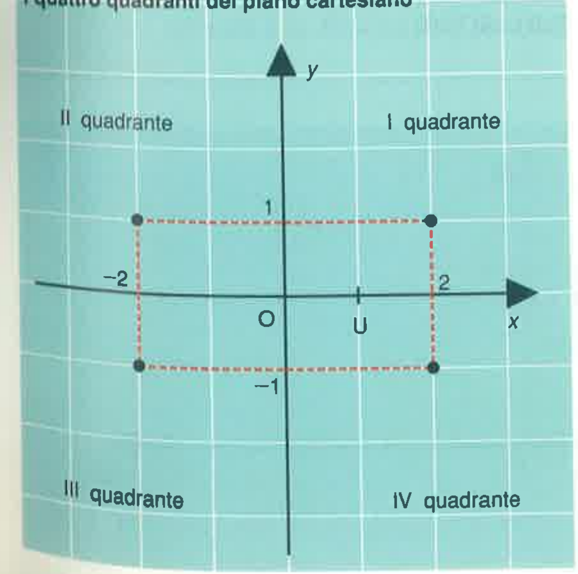
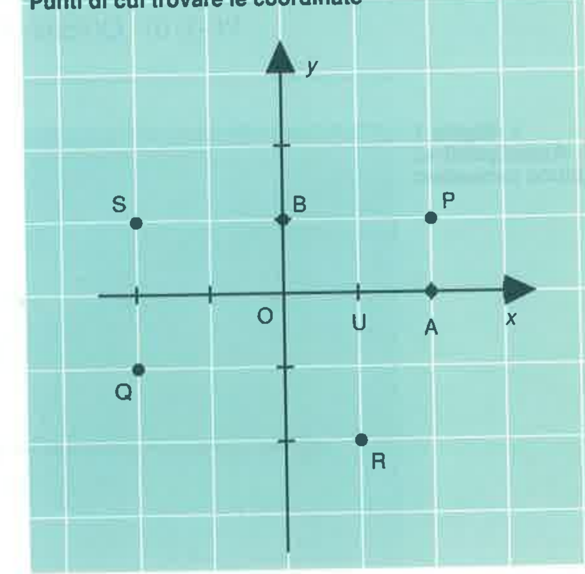


Figura 8
Punti di cui trovare le coordinate



Attività

Rappresentare punti in un riferimento cartesiano

Attività 1

In fig. 1 sono rappresentati su un piano cartesiano i punti:

P(4; 2) Q(–5; 2) R(0; 2)

Determinare le coordinate degli altri punti C, D, E, F, rappresentati in figura.
Quanto vale l'ordinata di tutti i punti?

Attività 2

Rappresentare su un piano cartesiano i seguenti punti:

P(–3; 2) Q(–3; –4) R(–3; 0) S(–3; 1)

Scegliere fra le frasi seguenti l'unica che descrive correttamente la posizione dei quattro punti e spiegare perché le altre sono sbagliate.

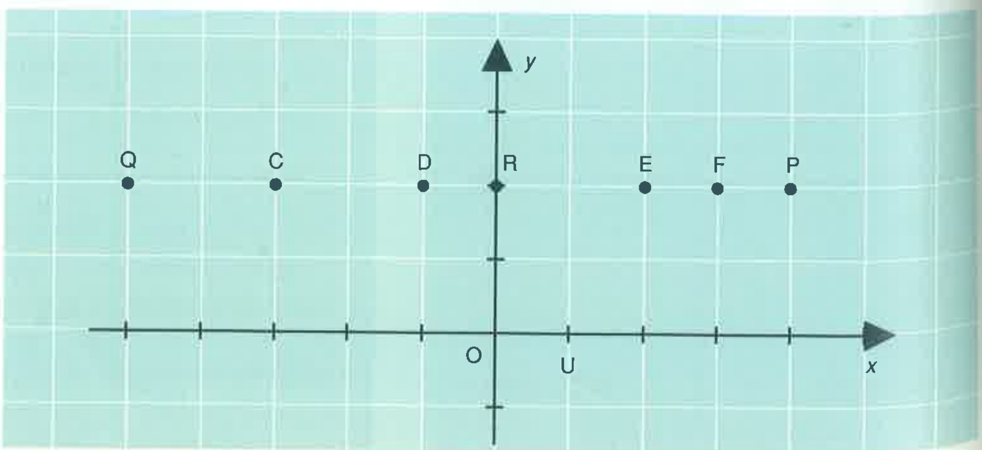
a. «Tutti i punti hanno l'ordinata che vale –3»;
b. «Tutti i punti hanno l'ascissa che vale –3»;
c. «Tutti i punti valgono –3».

Attività 3

Rappresentare su un piano cartesiano i seguenti punti:

P(–3; 0) Q(4; 0) R(–1; 0) S(1; 0)

Figura 1
Alcuni punti su un piano cartesiano



Scegliere fra le frasi seguenti quelle che descrivono correttamente la posizione dei quattro punti e spiegare perché le altre sono sbagliate.

a. «Tutti i punti hanno l'ordinata che vale 0»;
b. «Tutti i punti hanno l'ascissa che vale 0»;
c. «Tutti i punti stanno sullo zero»;
d. «Tutti i punti si trovano sull'asse delle ascisse»;
e. «Tutti i punti si trovano sull'asse delle ordinate».

Attività 4

Ripetere l'attività 3 a partire dai seguenti punti:

O(0; 0) P(0; –2) Q(0; 3) R(0; 1)

Attività 5

I. In fig. 2 è rappresentato il punto P(–5; 2).
Rispondere alle seguenti domande:
a. qual è l'ascissa di P?
b. quanto dista P dall'asse delle y?

Per rispondere alla domanda b *ricordare come si trova la distanza del punto* P *dall'asse delle* y *e cioè* (fig. 2):
- *da* P *si traccia la perpendicolare all'asse, ottenendo un punto* B;
- *si calcola quante volte l'unità di misura* OU *è contenuta nel segmento* PB.

Nel caso assegnato si trova che OU *è contenuta 5 volte in* PB *e perciò la distanza di* P *dall'asse delle* y *è il numero positivo 5.*

II. In un riferimento cartesiano rappresentare i punti seguenti:

P(–1; –3) Q(–1; 3) R(1; –3) S(1; 3)

Di ciascun punto indicare:
a. l'ascissa e la distanza dall'asse delle ordinate;
b. l'ordinata e la distanza dall'asse delle ascisse.

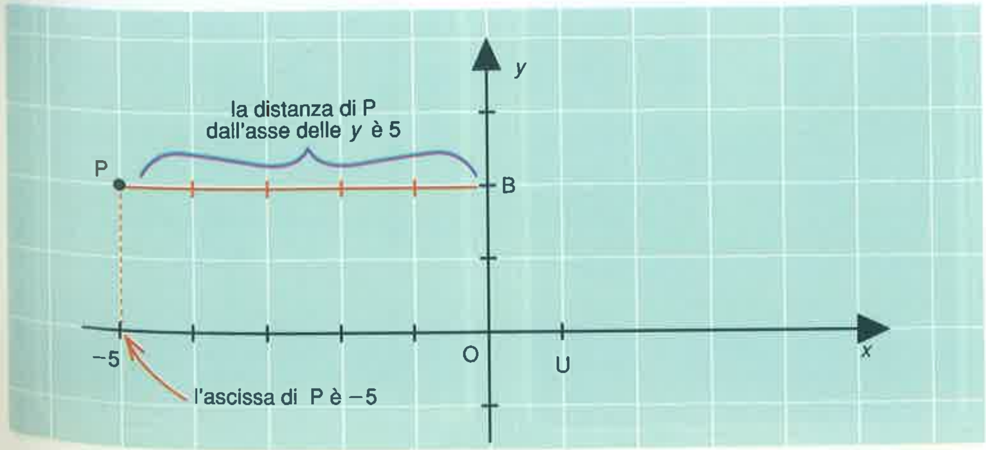


Figura 2
Coordinate e distanze

La storia della geometria analitica

I grafici degli egizi, dei greci e dei romani

La geometria analitica è arrivata a noi dopo una lunga storia di ricerche e tentativi: è una storia che è stata ricostruita studiando incisioni su rocce, pergamene, libri. E forse la storia è ancora incompleta, forse si troveranno ancora, qua e là nel mondo, altri documenti di epoche remote. Ecco quanto si sa finora.

Gli astronomi dell'antico Egitto già si basavano su un reticolato per rappresentare la posizione di una stella.

I greci e i romani si valevano di un reticolato per progettare la costruzione di una nuova città: due rette perpendicolari rappresentavano le strade principali.

Dicearco, uno scienziato greco del IV sec. a.C., si basò su un reticolato per disegnare un carta geografica della Terra, allora ritenuta piatta.

I grafici nel Medioevo

Un piano a quadretti e due rette che si tagliano bastano dunque per individuare con un punto la posizione di una località o di una stella.

Ma, intorno al X secolo, si cominciano anche a trovare disegni come quello di fig. 1: non vi sono indicati solamente dei punti, immagini della Luna e dei pianeti allora conosciuti, ma anche delle linee, che descrivono le traiettorie compiute in cielo da questi corpi celesti. Questo metodo d'indicare le traiettorie dei pianeti fu seguito in astronomia fino alla fine del XIV secolo e divenne obbligatorio in molte università.

È proprio alla fine del Trecento che un francese, Nicola d'Oresme, ebbe un'idea geniale: utilizzare il piano a quadretti per riportarvi i dati numerici relativi ad esperimenti di fisica. Con gli esperimenti si studiava, per esempio, il movimento di un corpo lanciato in aria o la temperatura delle varie parti di una sbarra metallica riscaldata ad un estremo, ottenendo grafici come quello di fig. 2, che si trova, appunto, in un libro di Nicola d'Oresme.

Il primo passo era fatto: alla fine del Medioevo, Nicola d'Oresme, un uomo che si occupava di teologia, di economia e di politica, oltre che di matematica e fisica, aveva introdotto un'idea rivoluzionaria.

Fino ad allora, infatti, la matematica si sviluppava secondo due direzioni ben separate: da un lato la geometria, che studiava le figure considerate immobili, dall'altro l'algebra, che studiava i numeri e le operazioni.

Invece, nei grafici di d'Oresme si trovano collegate geometria ed algebra e questo collegamento era dovuto allo stimolo dato dai fenomeni fisici.

La geometria analitica nasce nel Seicento

La voce di Nicola d'Oresme non poteva però affermarsi in un'epoca in cui tutto rimaneva soffocato da dispute teologiche; inoltre le sue idee non potevano svilupparsi perché mancava uno strumento essenziale: il calcolo letterale, la grammatica della matematica, che doveva essere introdotto ben due secoli dopo (cfr. anche la scheda storica di p. 240).

È solo nel Seicento che le idee di Nicola d'Oresme vengono riprese da due matematici francesi (figure 3 e 4): Pierre de Fermat e René Descartes (nome italianizzato in Cartesio). A questi due matematici si deve la creazione di quel ramo della matematica che prende il nome di *geometria analitica*.

La geometria analitica collega strettamente punti e numeri, linee ed equazioni e così fonde l'algebra e la geometria: la geometria viene arricchita dai metodi algebrici e l'algebra viene arricchita dall'interpretazione visiva.

Come scrisse Cartesio: «È applicando l'algebra dei moderni alla geometria degli antichi che si sono trovati i fondamenti di una scienza meravigliosa».

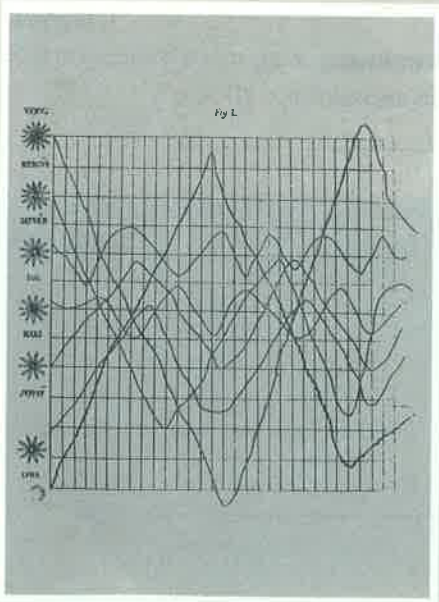


Figura 1 (a sinistra) **Rappresentazione delle traiettorie dei pianeti su una pergamena del X-XI secolo**

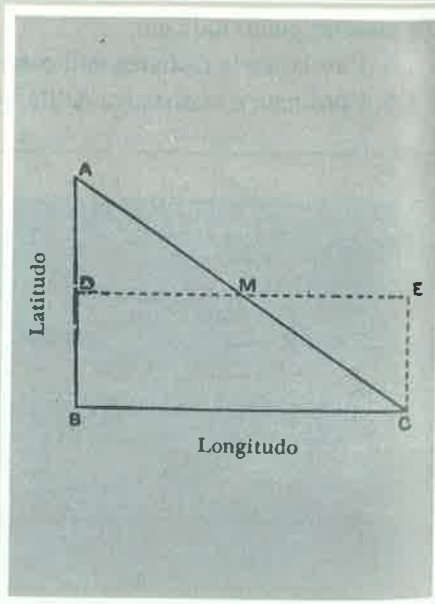
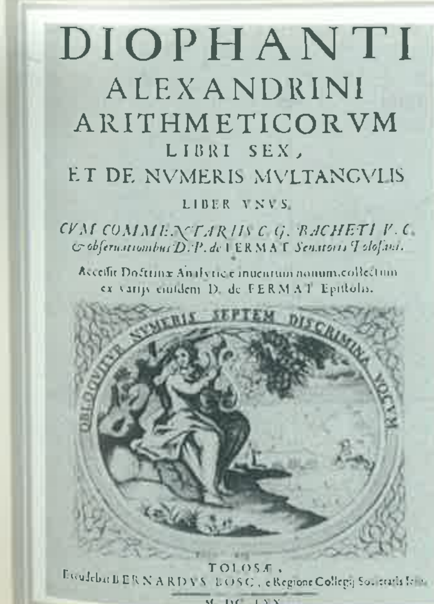


Figura 2 (a destra) **Grafico che si trova in un libro di Nicola d'Oresme (XIV secolo)**



DIOPHANTI
ALEXANDRINI
ARITHMETICORVM
LIBRI SEX,
ET DE NVMERIS MVLTANGVLIS
LIBER VNVS.
CVM COMMENTARIIS C. G. BACHETI V. C. & obseruationibus D. P. de FERMAT *Senatoris Tolosani.*
Accessit Doctrinæ Analyticæ inuentum nouum, collectum ex varijs eiusdem D. de FERMAT Epistolis.
OBLOQVITVR NVMERIS SEPTEM DISCRIMINA VOCVM
TOLOSÆ,
Excudebat BERNARDVS BOSC, e Regione Collegij Societatis Iesu.
M. DC. LXX.

Figura 3 (a sinistra) **Il frontespizio di un antico testo con le annotazioni di Pierre de Fermat**

Figura 4 (a destra) **Ritratto di René Descartes**

2

Equazione di una retta parallela ad uno degli assi cartesiani

L'idea su cui si basa la geometria analitica

Stabilire sul piano un riferimento cartesiano significa considerare insieme ad un punto le sue coordinate, cioè una coppia di numeri.
Questo è l'inizio di un nuovo modo di organizzare la geometria: è la *geometria analitica*, un ramo della matematica ricco di applicazioni anche nelle scienze sperimentali.
Tutta la geometria analitica è basata su un'idea (fig. 1): pensare che una linea tracciata sul piano è costituita da tanti punti, ed esaminare le coordinate di questi punti.
Per capire meglio di che si tratta conviene considerare la più semplice linea che si può tracciare sul piano: la retta.
Ovviamente, una retta può essere disegnata sul piano in tante diverse posizioni (fig. 2).
Ecco che cosa succede quando si disegna una retta parallela ad uno degli assi cartesiani.

Retta parallela all'asse delle *y*

In fig. 3 è disegnata la retta *r* che è parallela all'asse delle *y* e passa per il punto R(2; 3).
Basta determinare le coordinate di alcuni punti di *r* per scoprire una proprietà caratteristica: *i punti allineati sulla retta* r *hanno tutti la stessa ascissa che vale 2*.
Questa frase si riassume, in geometria analitica, con la formula seguente:

$$x=2$$

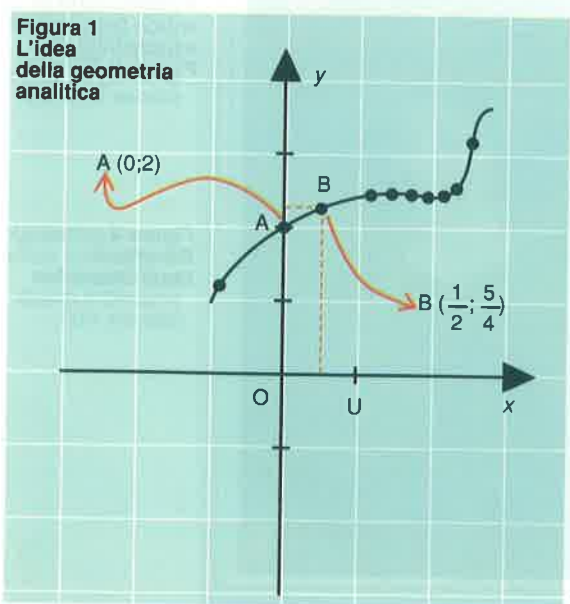


Figura 1
L'idea della geometria analitica

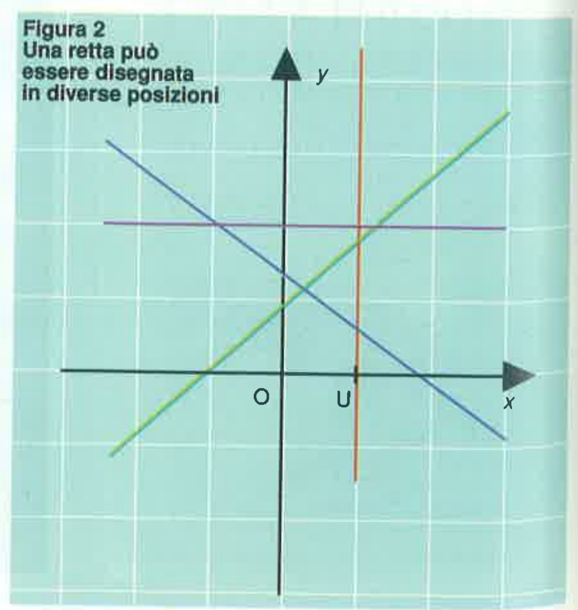


Figura 2
Una retta può essere disegnata in diverse posizioni

che prende anche il nome di *equazione della retta r*.
Questa formula diventa più espressiva immaginando un punto P che si muove sul piano cartesiano. Le coordinate di questo punto variano durante il movimento e vengono indicate con le lettere *x*, *y*; si scrive dunque:

$$P(x; y)$$

Ora, il punto P percorre proprio la retta *r* solo se la sua ascissa *x* mantiene sempre il valore 2; questo vuol dire che, per ogni punto della retta, deve risultare:

$$x=2$$

In modo del tutto analogo si può ragionare per determinare l'equazione di altre rette parallele all'asse delle *y*, come quelle disegnate in fig. 4.
In generale, si ha che:
una retta parallela all'asse delle y *ha l'equazione del tipo*:

$$x=a$$

Questa equazione esprime con una formula la seguente proprietà:
«Tutti i punti della retta hanno la stessa ascissa che vale a*»*,
o anche:
«Un punto P(x; y)*, variabile sul piano cartesiano, percorre la retta solo se la sua ascissa* x *vale sempre* a*»*.
In particolare si trova che anche l'asse delle *y* ha una sua equazione; *l'asse delle* y *ha equazione:*

$$x=0$$

Infatti tutti i punti dell'asse delle *y* hanno l'ascissa che vale 0.

Retta parallela all'asse delle *x*

È facile ora scrivere l'equazione della retta *s* di fig. 5: la retta è parallela all'asse delle *x* e passa per R(2; 3).
In questo caso si dirà:
«Sulla retta si trovano tutti i punti che hanno ordinata 3»,
o anche:
«Un punto P(*x*; *y*) percorre la retta *s* solo se la sua ordinata *y* vale sempre 3».
L'equazione della retta *s* è allora:

$$y=3$$

In modo del tutto analogo si può ragionare per determinare l'equazione di altre rette parallele all'asse delle *x*, come quelle disegnate in fig. 6.
In generale, si ha dunque che:
una retta parallela all'asse delle x *ha l'equazione del tipo*:

$$y=a$$

Questa equazione esprime con una formula la seguente proprietà:
«Tutti i punti della retta hanno la stessa ordinata che vale a*»*,
o anche:
«Un punto P(x; y)*, variabile sul piano cartesiano, percorre la retta solo se la sua ordinata* y *vale sempre* a*»*.

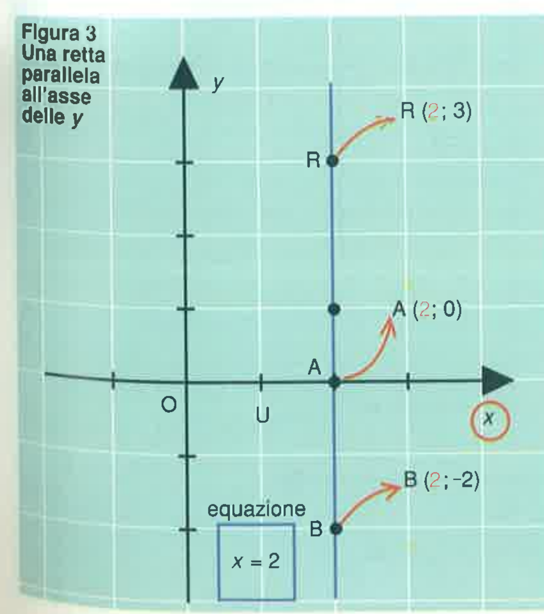


Figura 3
Una retta parallela all'asse delle *y*

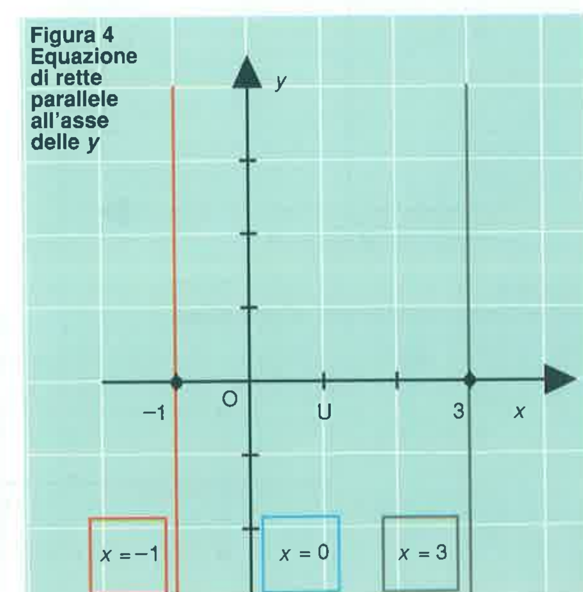


Figura 4
Equazione di rette parallele all'asse delle *y*

In particolare si trova che anche l'asse delle x ha una sua equazione; *l'asse delle x ha equazione:*

y**=0**

Infatti i punti dell'asse delle x hanno tutti l'ordinata che vale 0.

V e r i f i c h e

Conoscenze

① Qual è l'equazione dell'asse delle y?

② In un riferimento cartesiano disegnare una retta parallela all'asse delle y e darne l'equazione.

③ Qual è l'equazione dell'asse delle x?

④ In un riferimento cartesiano disegnare una retta parallela all'asse delle x e darne l'equazione.

Comprensione

① Spiegare perché l'asse delle y ha equazione $x=0$ e perché l'asse delle x ha equazione $y=0$.

② Sul piano cartesiano c'è un solo punto con l'ascissa che vale 1?

③ Sul piano cartesiano c'è un solo punto con l'ordinata che vale 2?

④ Sul piano cartesiano c'è un solo punto con l'ascissa che vale 1 e l'ordinata che vale 2?

Applicazioni

① Ogni lato del rettangolo di fig. 7 si trova su una retta parallela ad uno degli assi cartesiani; determinare l'equazione delle quattro rette e le coordinate dei vertici del quadrato.

Vocabolario

① Tutte le frasi seguenti sono ***sbagliate***; correggere gli errori.

a. l'asse delle x ha equazione $x=0$;
b. l'asse delle y ha equazione $y=0$;
c. l'asse delle x ha ordinata 0;
d. l'asse delle y ha ascissa 0;
e. l'origine O ha equazione $x=0$;
f. l'origine O è il solo punto che ha ascissa 0.

Figura 5
Una retta parallela all'asse delle *x*

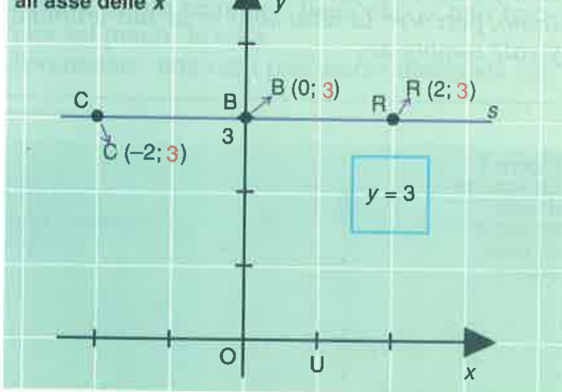


Figura 6
Equazione di rette parallele all'asse delle *x*

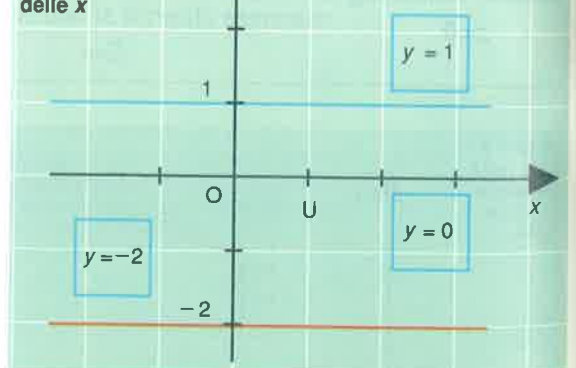
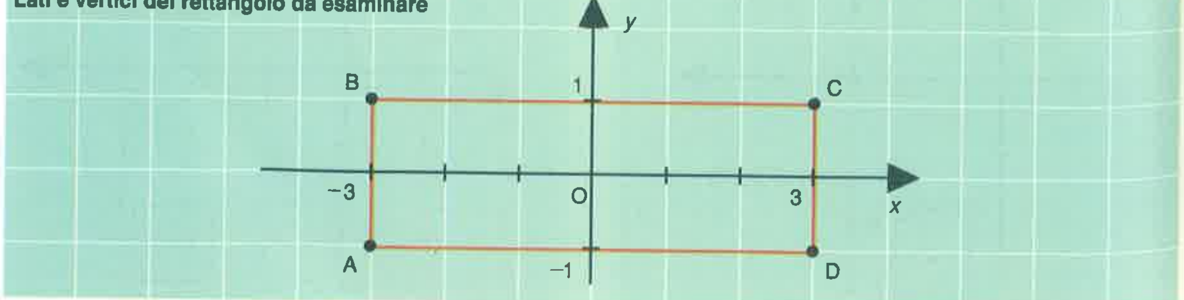


Figura 7
Lati e vertici del rettangolo da esaminare



3 Equazione di una retta che passa per l'origine. Pendenza di una retta

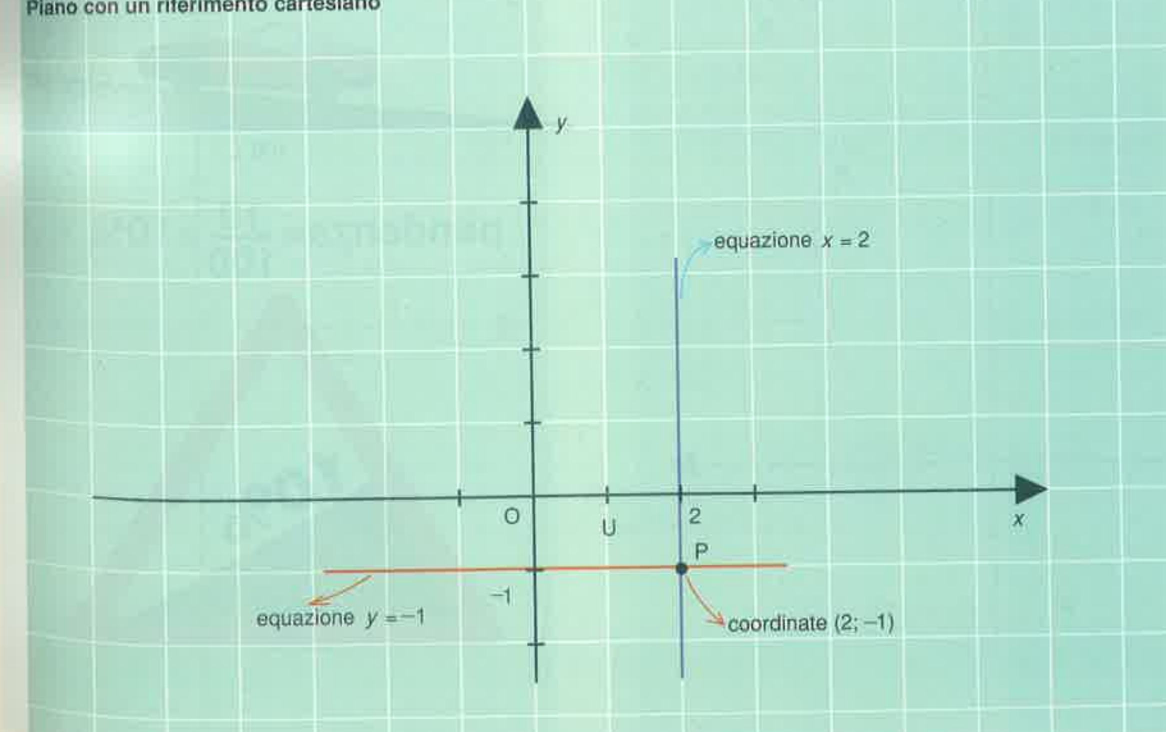
Coordinate di un punto ed equazione di una retta

I procedimenti seguiti nei paragrafi precedenti conducono ad una conclusione: quando si stabilisce sul piano un riferimento cartesiano, si trova che (fig. 1):

- a un punto corrisponde una coppia di numeri;
- ad una retta parallela ad uno degli assi cartesiani corrisponde un'equazione;
- l'equazione di una retta esprime con una formula la proprietà comune a tutti i punti che si trovano su quella retta.

Quando la retta è parallela agli assi cartesiani è facile scriverne l'equazione, perché si trova subito la proprietà che caratterizza i punti della retta. E negli altri casi come si può ragionare? Ecco qualche esempio su cui riflettere.

Figura 1
Piano con un riferimento cartesiano



Pendenza ed equazione di alcune rette che passano per O

In fig. 2 è disegnata la retta a, che passa per O e per A(2; 4); è indicato anche un punto P(x; y), che percorre la retta a. L'ascissa x e l'ordinata y cambiano entrambe mentre P si muove, eppure c'è qualcosa che caratterizza il percorso sulla retta a: la pendenza.

La pendenza di una strada è una nozione abbastanza comune; si ha (fig. 3):

$$\text{pendenza} = \frac{\text{aumento di quota}}{\text{spostamento orizzontale}}$$

È facile allora conoscere la pendenza della retta a: quando P ha percorso OA, si ha (fig. 2):

spostamento orizzontale=2

aumento di quota=4

perciò la pendenza della retta a è data da:

$$\text{pendenza} = \frac{4}{2} = 2$$

Ora, il punto P(x; y) che percorre la retta a trova sempre la stessa pendenza 2; così, per esempio, si ha che (fig. 2):

- ad uno spostamento orizzontale lungo 3 corrisponde un aumento di quota che vale 6;
- più in generale, ad uno spostamento orizzontale lungo x corrisponde un aumento di quota y, che è sempre doppio di x e cioè vale $2x$.

In conclusione, P(x; y) percorre la retta r solo se risulta:

$$y=2x$$

Questa è l'equazione della retta a.

L'equazione descrive con una formula la proprietà che caratterizza la retta a: i punti hanno l'ordinata y che è doppia dell'ascissa x.

Questa proprietà caratterizza tutti i punti della retta, anche quelli che si trovano nel III quadrante (fig. 2).

La retta a non è la sola che passa per O: se ne possono disegnare tante altre; per esempio b, che passa per B(2; 3) o c, che passa per C (2; 1) (fig. 4). Ripetendo il ragionamento seguito prima, si trova:

- per la retta b: pendenza $= \frac{3}{2}$

equazione $y = \frac{3}{2}x$

- per la retta c: pendenza $= \frac{1}{2}$

equazione $y = \frac{1}{2}x$

Rette con pendenza negativa

Ecco un altro caso da esaminare (fig. 5): la retta r, che passa per O e R(2; –4).

Questa retta presenta un andamento diverso dalle precedenti, perché il tratto OR viene percorso «in discesa». Questo vuol dire che allo spostamento orizzontale lungo 2, corrisponde una diminuzione di quota. Si può anche pensare la diminuzione di quota come un aumento negativo, che vale –4. Per la retta r si ha allora:

spostamento orizzontale = 2

aumento di quota = –4

e quindi:

$$\text{pendenza} = \frac{-4}{2} = -2$$

In questo caso, per il punto P(x; y) che percorre la retta r, si trova che (fig. 6):

- in seguito ad uno spostamento orizzontale lungo 3, la quota subisce un aumento negativo che vale:

$$-6=(-2)\cdot 3$$

- in seguito ad uno spostamento orizzontale lungo x, la quota subisce un aumento negativo y, che è dato da:

$$(-2)\cdot x=-2x$$

L'equazione della retta r è dunque:

$$y=-2x$$

La retta r non è la sola ad avere pendenza ne-

Figura 2
Equazione della retta a

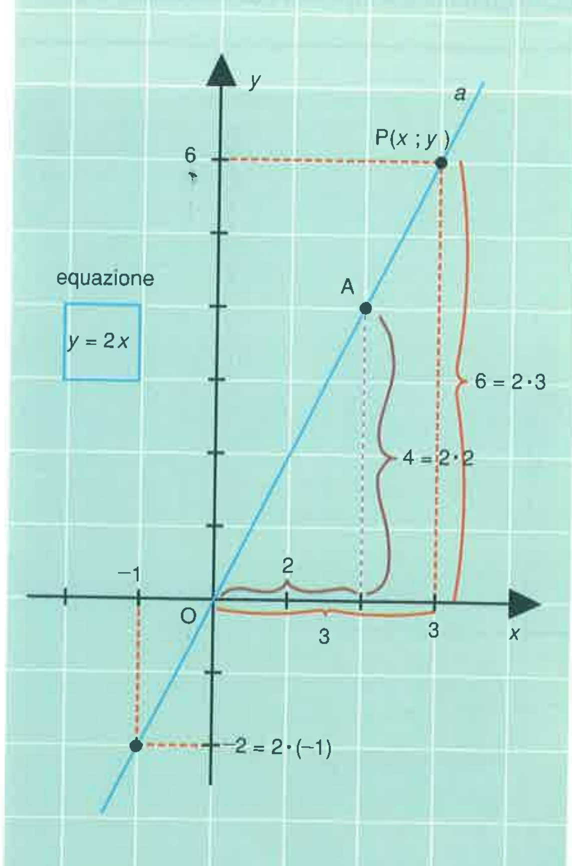


Figura 3
La pendenza di una strada

Figura 4
Equazione di altre rette che passano per O

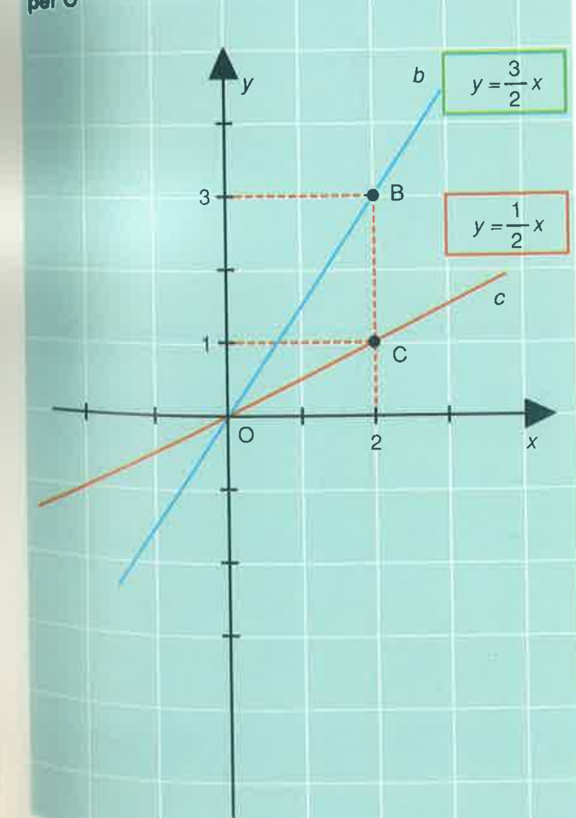
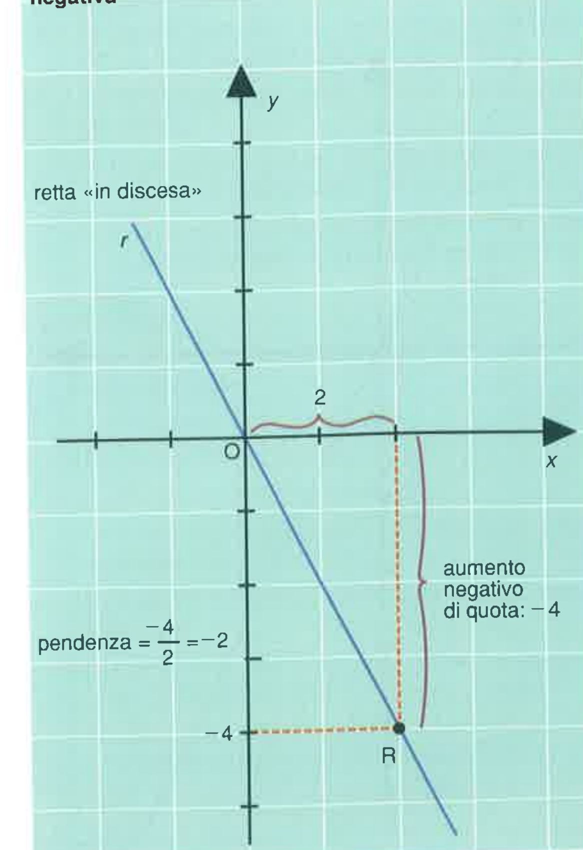


Figura 5
Una retta con pendenza negativa



gativa: se ne possono disegnare tante altre (fig. 7); per esempio s, che passa per S(2; –6) o t, che passa per T(2; –1).

Cercando pendenza ed equazione di queste rette con il precedente ragionamento, si trova:

- per la retta s: pendenza = –3

  equazione $y=-3x$
- per la retta t: pendenza $= -\frac{1}{2}$

  equazione $y = -\frac{1}{2}x$

Equazione di una retta che passa per O

Si può ora arrivare ad una conclusione di carattere generale:
una retta che passa per O ha sempre un'equazione del tipo:

$$y=mx$$

Le lettere x, y e m che compaiono nell'equazione hanno il seguente significato:

- le lettere x e y indicano l'ascissa e l'ordinata di un punto P(x; y) che percorre la retta;
- la lettera m indica la pendenza della retta.

L'asse delle *x* ha la pendenza che vale 0

Anche l'asse delle ascisse è una retta che passa per O (fig. 8), ma qual è la sua pendenza?
Per rispondere, si ragiona così: percorrendo l'asse delle x, si ha un aumento di quota che è sempre lungo 0 e perciò si trova:

$$\text{pendenza dell'asse delle } x = \frac{0}{\text{spostamento orizzontale}}$$

La pendenza dell'asse delle x *vale 0, perché è il risultato di un'operazione del tipo:*

$$\frac{0}{a} = 0$$

E del resto l'equazione dell'asse delle x, che è:

$$y=0$$

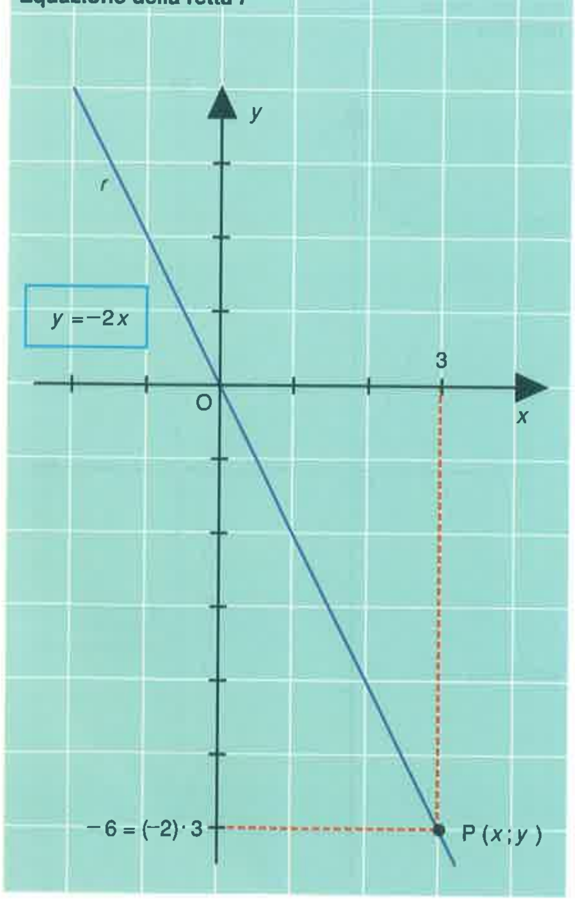


Figura 6
Equazione della retta r

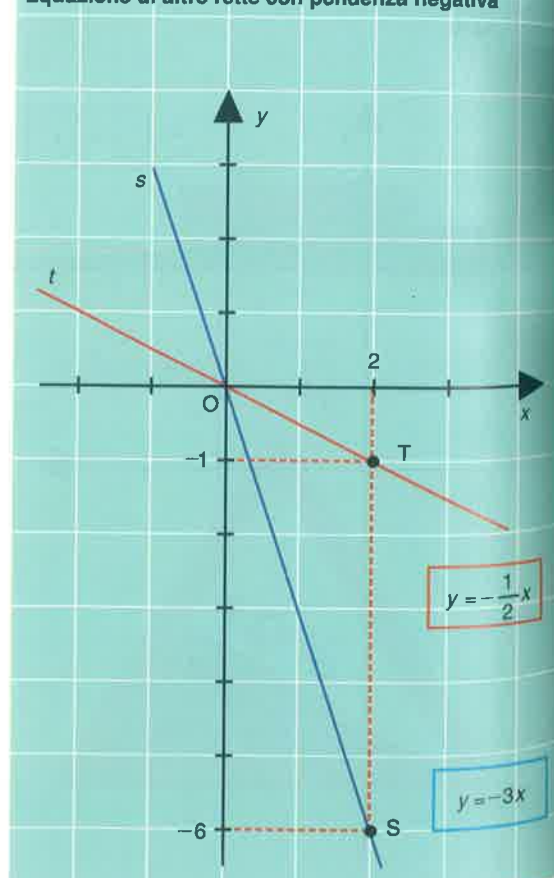


Figura 7
Equazione di altre rette con pendenza negativa

può essere considerata un caso particolare dell'equazione:

$$y=mx$$

dove, al posto della lettera m che rappresenta la pendenza, si ha 0.

Infatti, quando si scrive:

$$y=0\cdot x$$

si ottiene:

$$y=0$$

Non si può determinare la pendenza dell'asse delle *y*

Si trova invece una situazione del tutto diversa nel caso dell'asse delle ordinate (fig. 9).
Infatti, percorrendo l'asse delle y, si ha uno spostamento orizzontale che è sempre lungo 0; perciò, calcolando la pendenza, si trova:

$$\text{pendenza dell'asse delle } y = \frac{\text{aumento di quota}}{0}$$

La pendenza dell'asse delle y *è il risultato di un'operazione del tipo:*

$$\frac{a}{0}\text{, che è senza significato.}$$

Visto che il risultato di questa operazione non si può trovare, non si può determinare la pendenza dell'asse delle ordinate.
Si può tuttavia trovare l'equazione dell'asse delle y; basta osservare che tutti i suoi punti hanno ascissa nulla e dunque risulta:

$$x=0$$

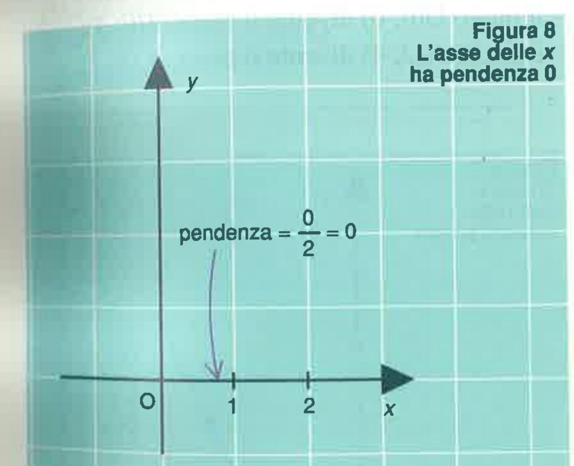


Figura 8
L'asse delle x ha pendenza 0

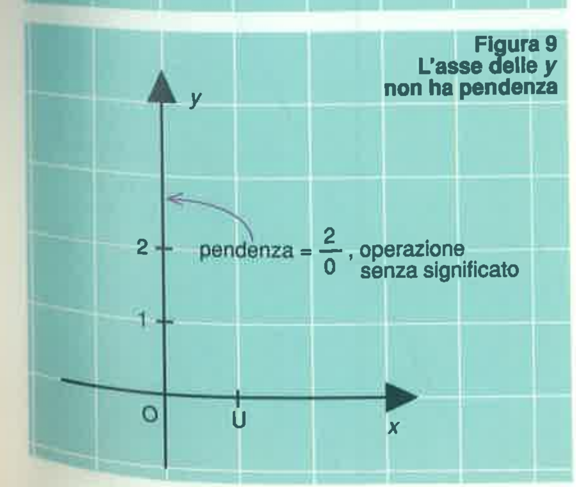


Figura 9
L'asse delle y non ha pendenza

Verifiche

Conoscenze

① Dire in quale forma si presenta l'equazione di una retta che passa per O, spiegando il significato delle lettere.

Comprensione

① Spiegare come si trova l'equazione della retta a, che passa per O e A(4; –3).

② Spiegare perché l'asse delle x ha la pendenza che vale 0.

③ Spiegare perché non si può trovare la pendenza dell'asse delle y.

④ Le seguenti frasi ***sono errate***; correggere gli errori.

a. L'asse delle y non ha pendenza, perciò non se ne può trovare l'equazione.

b. L'asse delle x ha la pendenza che vale 0, perciò la sua equazione è $m=0$.

Applicazioni

① Disegnare in un riferimento cartesiano le seguenti rette:

a, che passa per O e A(2; 3);
b, che passa per O e B(3; 2);
c, che passa per O e C(2; –3).

Determinare la pendenza e l'equazione delle tre rette.

② Disegnare sul piano cartesiano le due rette seguenti:

r, che passa per O e A(2; 2) ed è anche detta *bisettrice del I e III quadrante;*
s, che passa per O e B(2; –2) ed è anche detta *bisettrice del II e IV quadrante.*

Determinare la pendenza e l'equazione delle due rette.

4

Equazione di una retta nel piano cartesiano

Traslare una retta che passa per O

In fig. 1 sono disegnate le due rette seguenti:
a, che passa per O e A(2; 4);
b, ottenuta *traslando*, cioè facendo scivolare la retta a verso l'alto senza modificarne la pendenza, fino ad incontrare l'asse delle y nel punto B(0; 3).

L'equazione della retta a è stata trovata nel paragrafo precedente ed è:

$$y=2x$$

Qual è l'equazione della retta b ?
Ecco come si può ragionare: la traslazione aggiunge 3 all'ordinata di tutti i punti e così:
- il punto O(0; 0) diventa il punto B(0; 3);
- il punto A(2; 4) diventa il punto A'(2; 7);
- in generale, il punto P(x; $2x$), che percorre la retta a, diventa il punto P'(x; $2x$+3) che percorre la retta b.

Per la retta b si può dunque dire che:
- ha pendenza 2;
- passa per B(0; 3);
- ha equazione:

$$y=2x+3$$

La retta c di fig. 2, invece, è ottenuta traslando la retta a verso il basso, fino ad incontrare l'asse delle y in C(0; –3); in tal caso la traslazione aggiunge –3 alle ordinate di tutti i punti e, dunque, per la retta c si può dire che:
- ha pendenza 2;
- passa per C(0; –3);
- ha equazione:

$$y=2x+(-3) \quad \text{cioè} \quad \boldsymbol{y=2x-3}$$

Formula generale per l'equazione di una retta

Gli esempi precedenti suggeriscono delle conclusioni di carattere generale (fig. 3).
Disegnata sul piano cartesiano una retta r *con le seguenti caratteristiche:*
- *pendenza* m;
- *intersezione con l'asse delle* y *in* $Q(0;\ q)$;

si troverà che la retta r *ha l'equazione:*

$$y=mx+q$$

Equazione di una retta in qualche caso particolare

Nell'equazione:

$$\boldsymbol{y=mx+q}$$

si possono ritrovare, come casi particolari, anche delle equazioni presentate nei due paragrafi precedenti. Si ha infatti che (fig. 4):
- *per le rette che passano per* O(0; 0) risulta q=0 e perciò l'equazione diventa:

  $$y=mx+0 \quad \text{cioè} \quad \boldsymbol{y=mx}$$

- *per l'asse delle* x risulta anche m=0 e perciò l'equazione diventa:

  $$y=0 \cdot x+0 \quad \text{cioè} \quad \boldsymbol{y=0}$$

- *per una retta parallela all'asse delle* x, che incontra l'asse delle y in Q(0; q), la pendenza è sempre m=0 e, dunque, l'equazione diventa:

  $$y=0 \cdot x+q \quad \text{cioè} \quad \boldsymbol{y=q}$$

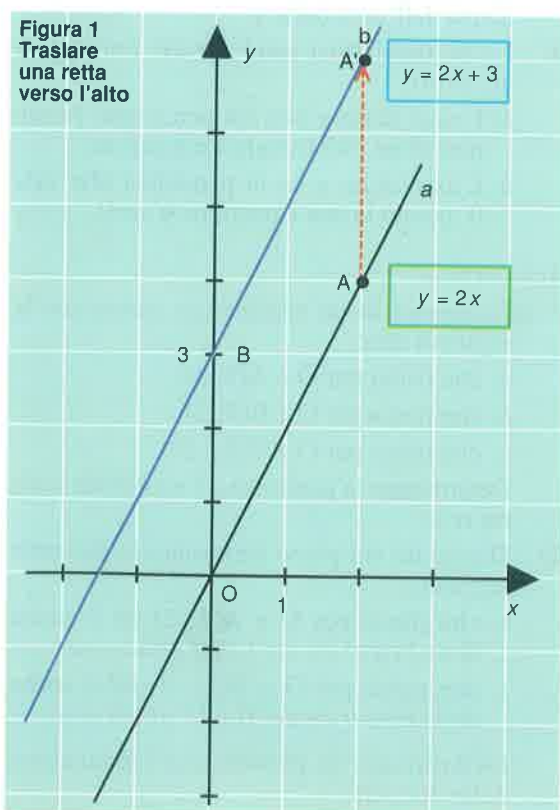


Figura 1 Traslare una retta verso l'alto

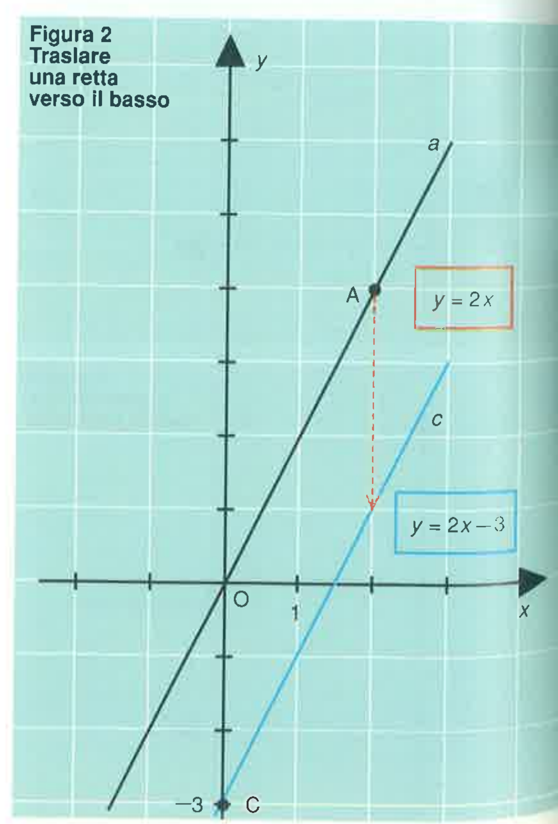


Figura 2 Traslare una retta verso il basso

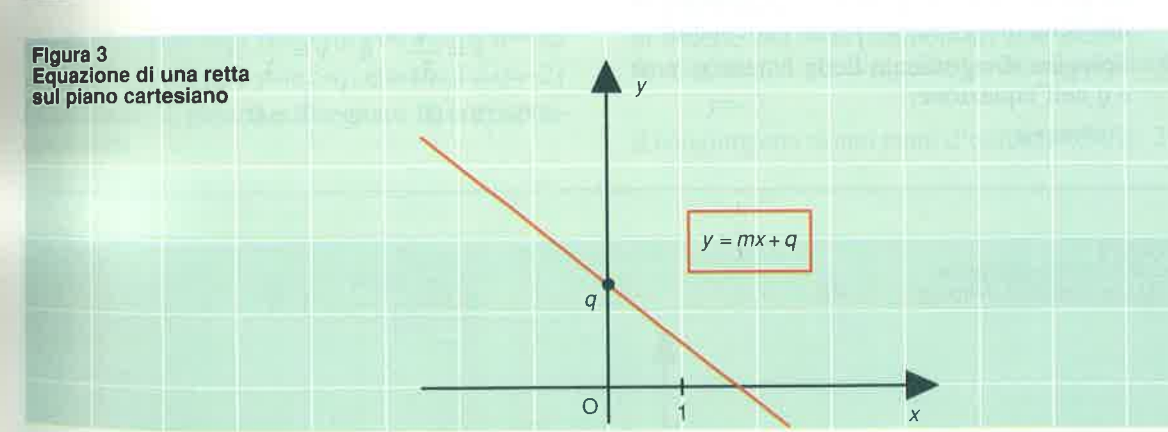


Figura 3 Equazione di una retta sul piano cartesiano

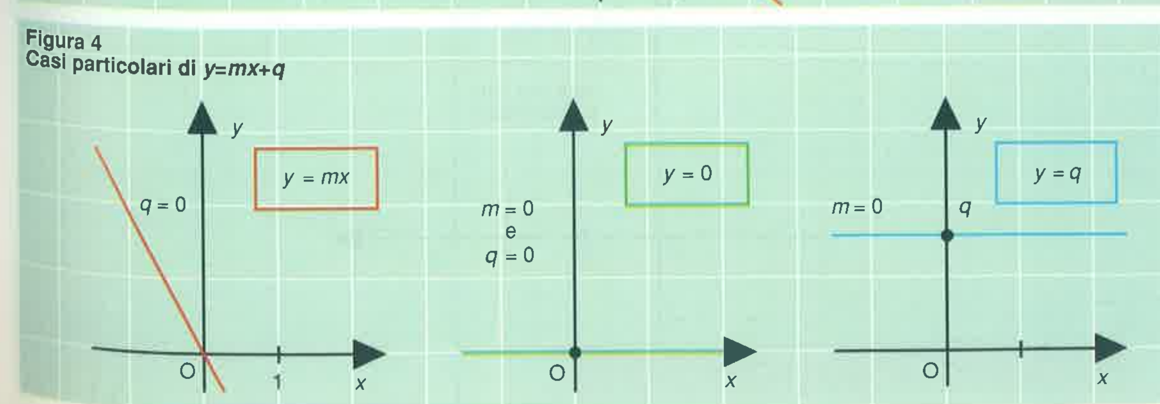


Figura 4 Casi particolari di $y=mx+q$

Le equazioni $x=a$ non sono casi particolari della $y=mx+q$

Delle varie equazioni finora ottenute resta però un caso da esaminare: le rette parallele all'asse delle y (fig. 5), che sono rappresentate da equazioni del tipo:

$$x=a$$

Per queste rette, infatti, si presenta la stessa situazione dell'asse delle y: non è possibile calcolarne la pendenza e perciò l'equazione non si può ottenere dalla $y=mx+q$ fissando un opportuno valore della pendenza. Tuttavia, si può trovare l'equazione direttamente, osservando che tutti i punti hanno la stessa ascissa.

Equazione di una retta sul piano cartesiano

Si arriva così ad una conclusione di carattere generale e cioè: *l'equazione di una retta nel piano cartesiano si presenta in una delle due forme seguenti:*

$$\boldsymbol{y=mx+q} \quad \text{oppure} \quad \boldsymbol{x=a}$$

V e r i f i c h e

Conoscenze

① In quali forme si presenta l'equazione di una retta disegnata sul piano cartesiano?

② Spiegare il significato delle lettere x, y, m e q nell'equazione:

$$y=mx+q$$

Comprensione

① Spiegare perché le equazioni del tipo:

$$y=q \quad e \quad y=mx$$

sono un caso particolare dell'equazione:

$$y=mx+q$$

② Spiegare perché le equazioni del tipo:

$$x=a$$

non sono un caso particolare dell'equazione:

$$y=mx+q$$

③ Spiegare perché nessuna delle equazioni seguenti rappresenta una retta.

$$y=3x^2+1 \qquad y=\frac{1}{2x}+3 \qquad y=-\frac{1}{x}$$

Applicazioni

① Le equazioni seguenti sono tutte del tipo $y=mx+q$; indicare il valore delle lettere m e q.

$$y=3x-5 \qquad y=-\frac{3}{4}x+\frac{2}{3} \qquad y=1$$

② Nelle seguenti coppie di equazioni cancellare quelle che non rappresentano rette:

$$y=x^3 \quad \text{e} \quad y=3x$$

$$y=x-1 \quad \text{e} \quad y=-\frac{1}{x}$$

$$y=\frac{1}{3x} \quad \text{e} \quad y=\frac{1}{3}\cdot x$$

$$x=0 \quad \text{e} \quad \frac{1}{x}=0$$

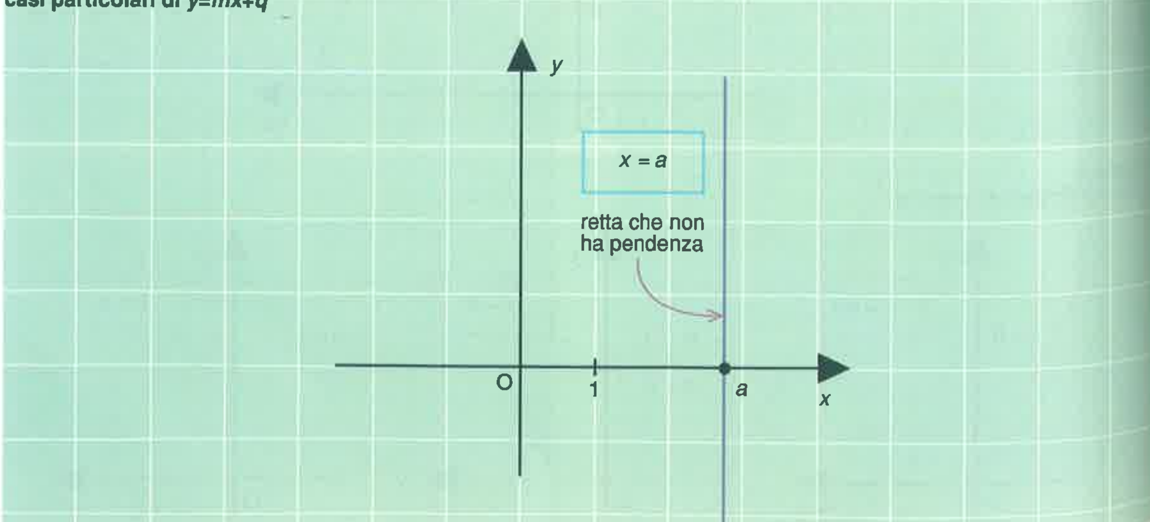


Figura 5
Equazioni che non sono casi particolari di $y=mx+q$

5 Disegnare una retta d'equazione data

Qualche esempio numerico

Nel paragrafo precedente si è trovato che l'equazione di una retta si presenta in una delle due forme seguenti:

$$y=mx+q \quad \text{oppure} \quad x=a$$

Perciò rappresentano certamente delle rette le equazioni seguenti:

$x=-2$	[del tipo $x=a$, con $a=-2$]
$y=-2$	[del tipo $y=mx+q$, con $m=0$ e $q=-2$]
$y=3x-2$	[del tipo $y=mx+q$, con $m=3$ e $q=-2$]

Ecco come si possono disegnare le corrispondenti rette.

Disegnare rette d'equazione $x=a$ oppure $y=q$

La retta d'equazione:

$$x=-2$$

deve essere formata da tutti i punti che hanno ascissa –2; perciò, per disegnarla, si può procedere così (fig. 1):

- si indicano sul piano cartesiano alcuni punti d'ascissa –2;
- si congiungono questi punti con l'aiuto di un righello.

Si ottiene una retta parallela all'asse delle y.

Analogamente, per disegnare la retta d'equazione:

$$y=-2$$

si congiungono alcuni punti d'ordinata –2 (fig. 2);

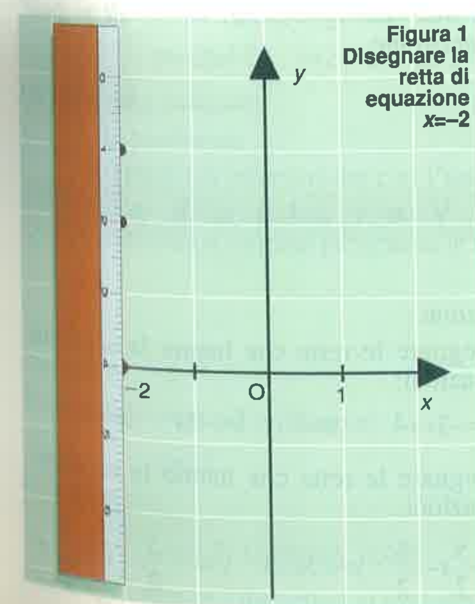


Figura 1
Disegnare la retta di equazione $x=-2$

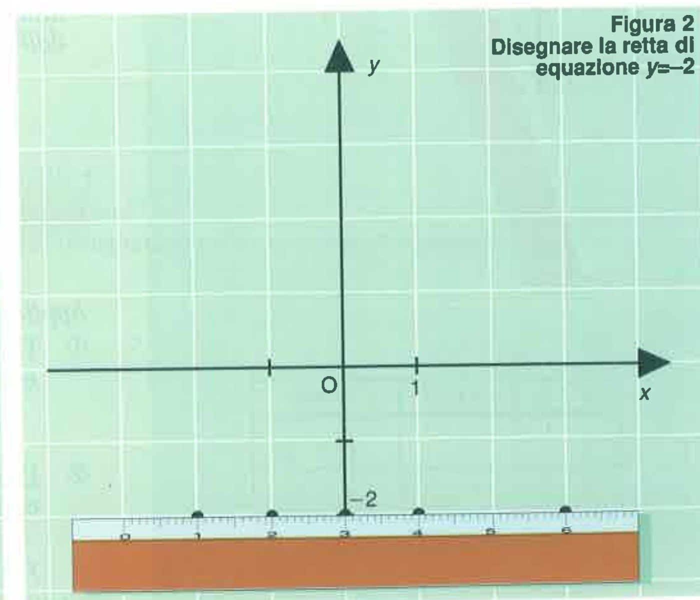


Figura 2
Disegnare la retta di equazione $y=-2$

si ottiene così una retta parallela all'asse delle x. Allo stesso modo si può procedere per disegnare altre rette con equazione del tipo:

$x=a$ oppure $y=q$

Si ha dunque che:

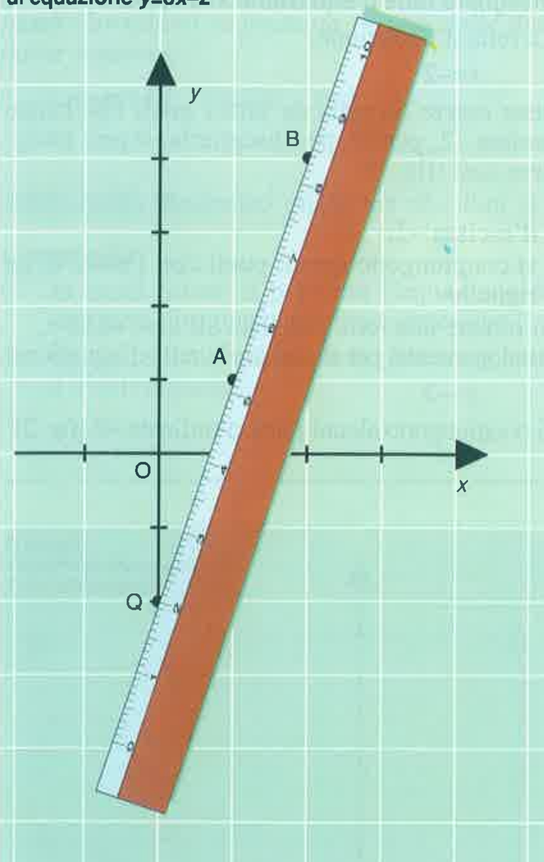
- *per disegnare una retta d'equazione* x=a, *basta congiungere alcuni punti d'ascissa* a;
- *per disegnare una retta d'equazione* y=q, *basta congiungere alcuni punti d'ordinata* q.

Grafico di una retta d'equazione $y=mx+q$

L'ultima equazione, e cioè:

$y=3x-2$

Figura 3
Disegnare la retta di equazione $y=3x-2$



x	$y=3x-2$	Punti
0	−2	Q (0; −2)
1	1	A (1; 1)

due punti bastano per disegnare la retta

descrive la retta t formata dai punti con la seguente proprietà: l'ordinata y è la differenza fra $3x$ (cioè il triplo dell'ascissa x) e 2.
In questo caso non è facile indicare un punto della retta; conviene allora ragionare così: se l'ascissa ha un dato valore, per esempio 0, l'ordinata deve essere:

$y=3\cdot0-2=0-2=-2$

Si trova dunque che Q(0; −2) è un punto della retta.
Ripetendo questo procedimento, a partire da altri valori dell'ascissa, si trovano i risultati riassunti nella seguente tabella:

x	$y=3x-2$	Punti
0	$y=3\cdot0-2=-2$	Q(0; −2)
1	$y=3\cdot1-2=\ 1$	A(1; 1)
2	$y=3\cdot2-2=\ 4$	B(2; 4)

Congiungendo ora i punti Q, A, B con l'aiuto di un righello (fig. 3), si ottiene il disegno, o meglio *il grafico*, della retta.
Proprio disegnando la retta si osserva un fatto: i primi due punti – Q e A – bastano da soli per fissare la posizione del righello.
Si conclude dunque che:

- *per disegnare una retta d'equazione:*

  $y=mx+q$

  basta congiungere due *punti che hanno le coordinate legate dall'equazione;*
- *per determinare le coordinate di questi* due *punti si assegnano* due *valori a* x *e si calcolano i* due *corrispondenti valori di* y *dati dall'equazione.*

Verifiche

Applicazioni

① Disegnare le rette che hanno le seguenti equazioni:

$y=-3x+4 \qquad y=4 \qquad y=-3x \qquad x=-3$

② Disegnare le rette che hanno le seguenti equazioni:

$y=\frac{5}{2}x-\frac{3}{2} \qquad y=5x-3 \qquad y=-\frac{3}{2} \qquad y=\frac{5}{2}x$

Disegnare rette sul piano cartesiano

Attività 1

Tracciare il grafico delle seguenti rette:

$y=-2x \qquad y=-2x+1 \qquad y=-2x-3$

Di ogni retta indicare:

- la pendenza;
- il punto di intersezione con l'asse delle y.

Quale caratteristica comune presentano le equazioni?
Quale caratteristica comune presentano le rette corrispondenti alle equazioni assegnate?

Attività 2

Tracciare il grafico delle seguenti rette:

$y=-2x+3 \qquad y=2x+3 \qquad y=3$

Di ogni retta indicare:

- la pendenza;
- il punto di intersezione con l'asse delle y.

Quale caratteristica comune presentano le equazioni?
Quale caratteristica comune presentano le rette corrispondenti alle equazioni assegnate?

Attività 3

Sono dati la retta r d'equazione:

$y=2x$

ed i punti:

A(0,5; 1) B(0,5; 0,99)

Come decidere se i due punti si trovano sulla retta?

Si potrebbe pensare di rispondere basandosi solo sul grafico della retta (fig. 1).

Infatti, il grafico dà una prima risposta immediata: A e B non possono trovarsi entrambi sulla retta, perché c'è un solo punto della retta che ha ascissa 0,5.

Tuttavia il disegno non consente di distinguere quei due punti perché sono troppo vicini; è l'equazione che può dare una risposta certa:

- *il punto A si trova sulla retta perché risulta:*

  $1=2\cdot 0{,}5$

  e, dunque le coordinate (0,5; 1) *sono legate dall'equazione data;*
- *il punto B* non *si trova sulla retta perché risulta:*

  $0{,}99\neq 2\cdot 0{,}5$

  cioè 0,99 non è uguale *a 2·0,5.*

Si conclude che l'equazione di una retta permette di decidere se un dato punto si trova sulla retta; si procede così:

- *si scrivono le coordinate del punto al posto di* x *e* y *nell'equazione della retta, fino ad ottenere un'uguaglianza fra numeri;*
- *se l'uguaglianza è vera, il punto si trova sulla retta;*
- *se l'uguaglianza è falsa, il punto non si trova sulla retta.*

Applicare le considerazioni ora svolte per decidere se il punto C(1; 2) appartiene alla retta data.

Attività 4

Sono dati la retta s d'equazione:

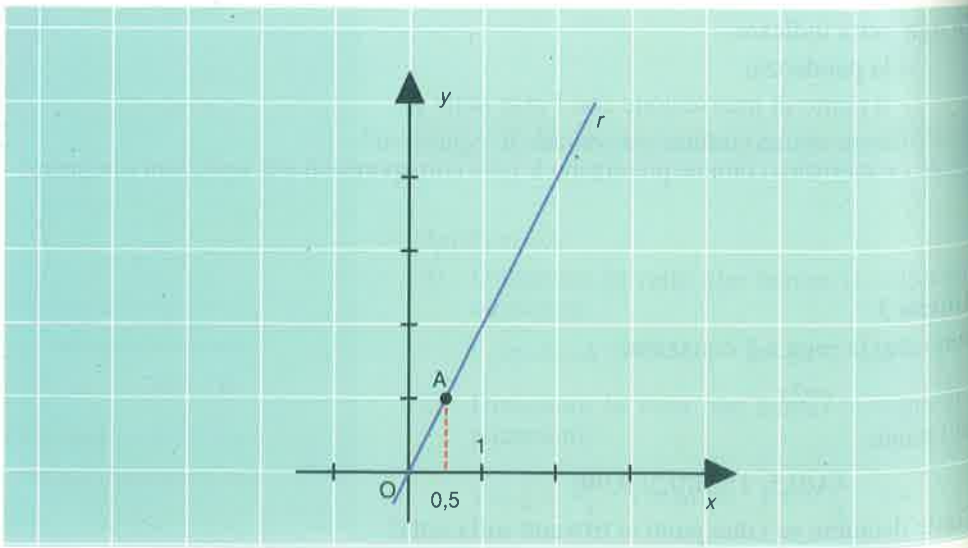
$$y=\frac{4}{3}x-\frac{1}{3}$$

ed i punti:

$$O\ (0;0)\quad A\left(0;-\frac{1}{3}\right)\quad B\ (1;1)$$

Stabilire se i punti appartengono alla retta.

Figura 1
Il grafico della retta *y=2x*



Il grafico di una retta nella fisica

Disegnare una retta d'equazione assegnata sembra un problema strettamente matematico, ma non è così: nelle scienze sperimentali e, in particolare, nella fisica si incontrano molto spesso grafici di rette. Ecco qualche esempio.

Movimento a velocità costante

Un corpo percorre una traiettoria rettilinea con una velocità di 3 metri al secondo, allontanandosi dal punto di partenza O (fig. 1); in tal caso, la distanza s dal punto O varia al variare del tempo t e si ha che:

- dopo 1 secondo, la distanza s vale 3 metri;
- dopo 2 secondi, la distanza s vale 3·2 metri;
- dopo t secondi, la distanza s vale $3\cdot t$ metri.

Si ha dunque la legge:

$$s=3t$$

Questa legge viene rappresentata su un piano cartesiano nel modo seguente (fig. 2):

- si riportano i valori del tempo t sull'asse delle ascisse;
- si riportano i valori della distanza s sull'asse delle ordinate.

Figura 1
Un corpo che si muove con velocità costante partendo da O

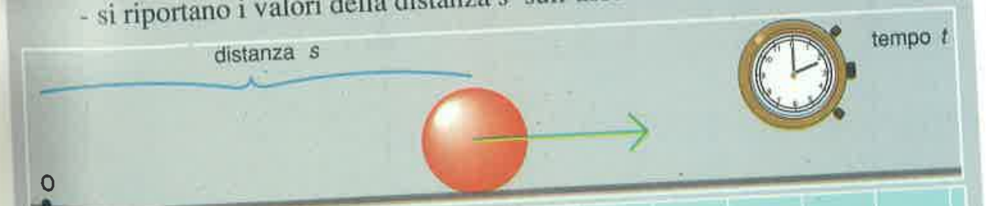
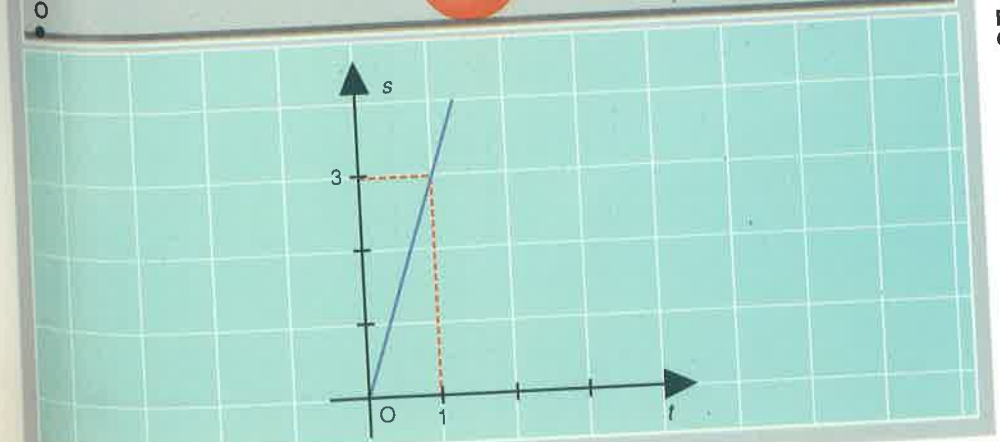


Figura 2
Grafico della legge *s=3t*



Si ottiene così una retta che passa per O ed ha pendenza:

$$m=3$$

Se, invece, il corpo parte dal punto A, che dista 4 metri da O, risulterà, per la distanza s dal punto O (fig. 3):

- dopo 1 secondo, $s=3+4$;
- dopo 2 secondi, $s=3\cdot 2+4$;
- dopo t secondi, $s=3\cdot t+4$.

Si ha dunque la legge:

$$s=3t+4$$

che ha per grafico una retta con le seguenti caratteristiche (fig. 4):

- pendenza 3;
- intersezione con l'asse delle ordinate nel punto Q(0; 4).

Più in generale, si trova che:

- *la distanza* s *percorsa da un corpo che si muove con velocità costante* v, *varia, al variare del tempo* t, *secondo la legge:*

$$s=vt+q$$

- *la legge ha per grafico una retta con le seguenti caratteristiche:*
- *pendenza* v;
- *intersezione con l'asse delle ordinate nel punto* Q(0; q).

Così si trova che:

- rette che incontrano l'asse delle ordinate nello stesso punto Q descrivono il movimento di diversi corpi, che partono tutti dalla stessa posizione iniziale, ma hanno diversa velocità (fig. 5);

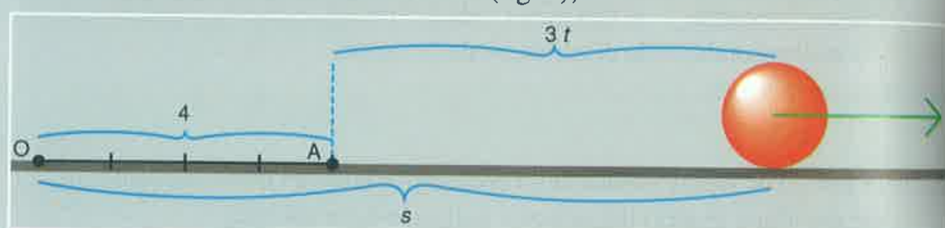
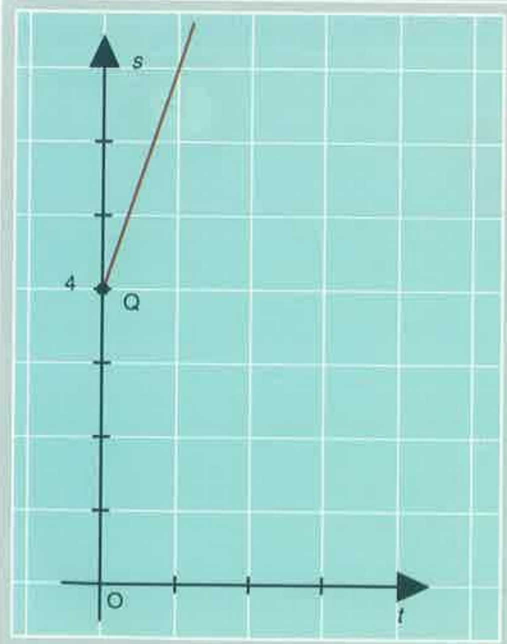


Figura 3
Un corpo che si muove con velocità costante senza partire da O



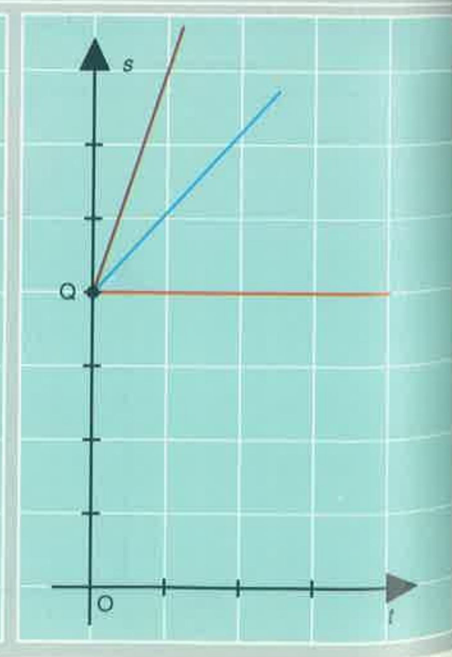


Figura 4 (a sinistra)
Grafico della legge $s=3t+4$

Figura 5 (a destra)
Movimenti di corpi che partono dallo stesso punto A

- rette con la stessa pendenza descrivono il movimento di diversi corpi, che hanno tutti la stessa velocità, ma partono da diverse posizioni iniziali (fig. 6).

Movimento ad accelerazione costante

Per un corpo lasciato cadere, la velocità aumenta di circa 10 metri al secondo ogni secondo; in tal caso, la velocità v varia al variare del tempo t e risulta che:

- dopo 1 secondo, la velocità v vale 10 metri al secondo;
- dopo 2 secondi, la velocità v vale $10\cdot 2$ metri al secondo;
- dopo t secondi, la velocità v vale $10\cdot t$ metri al secondo.

Si trova dunque la legge:

$$v=10t$$

Questa legge viene rappresentata su un piano cartesiano nel modo seguente (fig. 7):

- si riportano i valori del tempo t sull'asse delle ascisse;
- si riportano i valori della velocità v sull'asse delle ordinate.

Si ottiene così una retta che passa per O ed ha pendenza:

$$m=10$$

Se, invece, il corpo viene lanciato verso il basso con una velocità iniziale di 5 metri al secondo, risulterà, per la velocità v:

- dopo 1 secondo, $v=10+5$;
- dopo 2 secondi, $s=10\cdot 2+5$;
- dopo t secondi, $s=10\cdot t+5$.

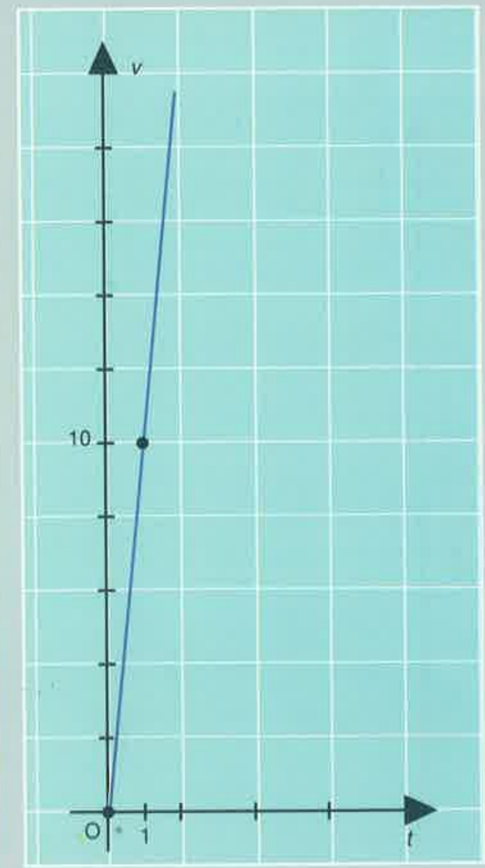


Figura 6 (a sinistra)
Movimenti di corpi che hanno la stessa velocità

Figura 7 (a destra)
Grafico della legge $v=10t$

Si ha dunque la legge:

$v=10t+5$

che ha per grafico una retta con le seguenti caratteristiche (fig. 8):

- pendenza 10;
- intersezione con l'asse delle ordinate nel punto Q(0; 5).

Più in generale si trova che:

- *la velocità* v *di un corpo che si muove con accelerazione costante a varia al variare del tempo* t *secondo la legge:*

  $v=at+q$

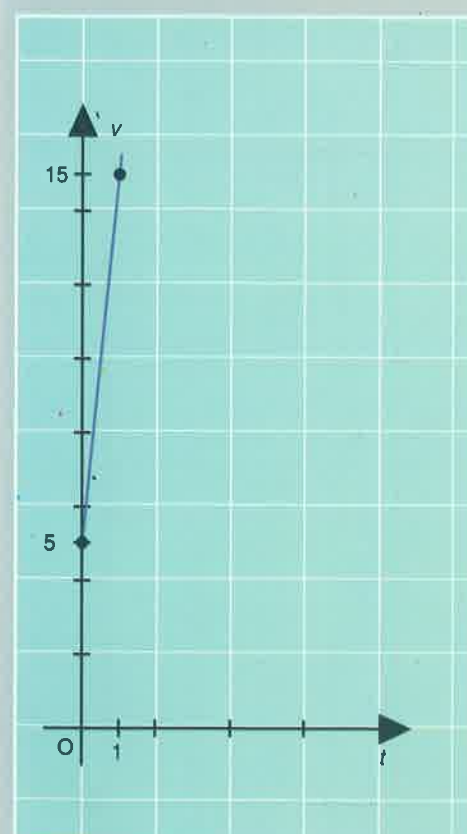
- *la legge ha per grafico una retta con le seguenti caratteristiche:*
- *pendenza* a;
- *intersezione con l'asse delle ordinate nel punto* Q(0; *q*).

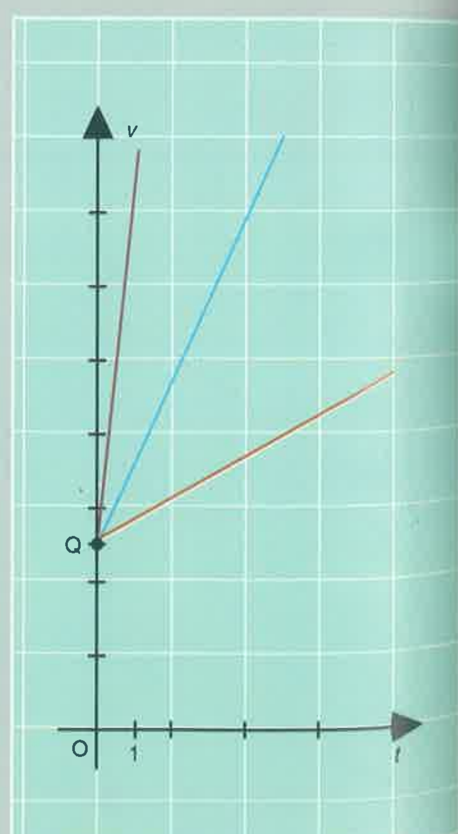
Così si trova che:

- rette che incontrano l'asse delle ordinate nello stesso punto Q descrivono il movimento di diversi corpi, che hanno tutti la stessa velocità iniziale, ma hanno diversa accelerazione (fig. 9);
- rette che hanno la stessa pendenza descrivono il movimento di diversi corpi, che hanno tutti la stessa accelerazione, ma partono con diverse velocità iniziali (fig. 10).

Figura 8 (a sinistra)
Grafico della legge *v*=10*t*+5

Figura 9 (a destra)
La velocità di vari corpi aumenta a partire dallo stesso valore iniziale





La dilatazione termica lineare

Il grafico di una retta può visualizzare anche un altro fenomeno già esaminato a p. 282: la dilatazione termica lineare.

Si esamina dunque una sottile sbarra di metallo che viene riscaldata, portandola dalla temperatura di 0°C a temperature via via più elevate; con un'adatta apparecchiatura sperimentale si rileva che, all'aumentare della temperatura, la sbarretta si allunga, seguendo la legge:

$L'=\alpha LT+L$

dove si indica:

- con L' la lunghezza della sbarretta alla temperatura T;
- con L la lunghezza iniziale della sbarretta;
- con T la temperatura a cui viene portata la sbarretta;
- con α un coefficiente che dipende dal materiale.

Questa legge può essere visualizzata da un grafico nel modo seguente (fig. 11):

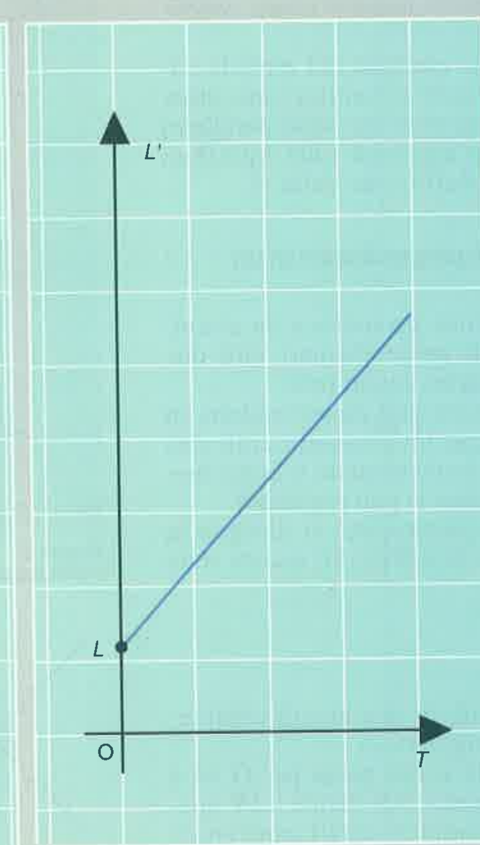
- sull'asse delle ascisse si riporta la temperatura T;
- sull'asse delle ordinate si riporta la lunghezza L' della sbarretta.

Si ottiene come grafico una retta che presenta le seguenti caratteristiche:

- pendenza che vale αL;
- intersezione con l'asse delle ordinate Q(0; L).

Figura 10 (a sinistra)
La velocità di vari corpi aumenta con la stessa accelerazione

Figura 11 (a destra)
Grafico della legge $L'=\alpha LT+L$



6 Rette parallele e rette perpendicolari sul piano cartesiano

Equazioni di rette parallele

In fig. 1 sono rappresentate due rette parallele r e s, che hanno la stessa pendenza 3 ed equazione:

$$(r)\ y=\mathbf{3}x-1 \qquad (s)\ y=\mathbf{3}x+2$$

Più in generale, *due rette parallele hanno la stessa pendenza* m *e, perciò, nelle due equazioni compare lo stesso numero come coefficiente della* x.
È questo un notevole esempio del metodo caratteristico della geometria analitica: una situazione geometrica (due rette che sono parallele) si traduce in un fatto algebrico (due equazioni che hanno lo stesso coefficiente della x).

Equazioni di due rette perpendicolari in un caso particolare

Ecco un'altra situazione geometrica da esaminare (fig. 2): due rette perpendicolari, cioè due rette che formano quattro angoli retti.
Anche questa situazione può essere tradotta in termini algebrici, con un procedimento che coinvolge la geometria elementare e la geometria analitica. Ecco come si può ragionare.
Si parte da un caso particolare: si disegna la retta r che passa per O e R(1; 3); questa retta ha la pendenza:

$$m=\frac{3}{1}=3$$

e divide il I quadrante in due angoli complementari ampi α e β (fig. 3a).
Si disegna poi la retta s, che passa per O ed è perpendicolare a r; questa retta divide il IV quadrante in due angoli complementari ampi ancora una volta α e β (fig. 3b).

Figura 1
Due rette parallele hanno la stessa pendenza

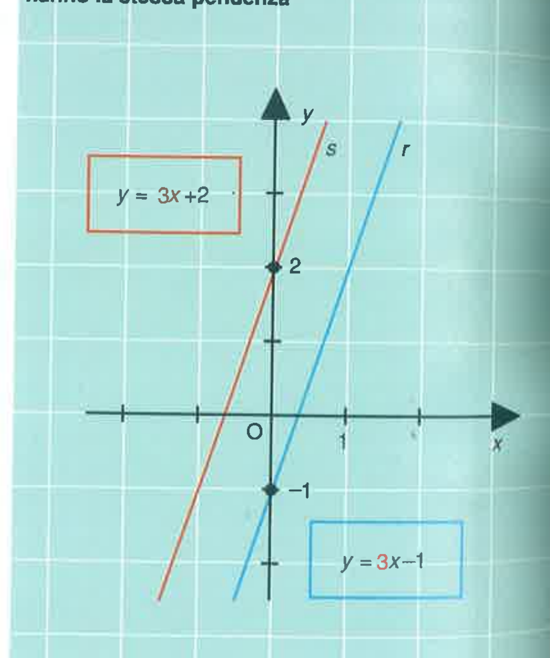
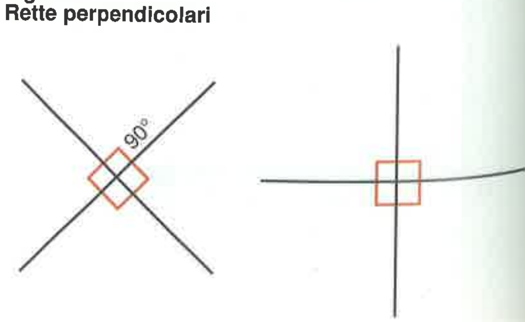


Figura 2
Rette perpendicolari



Quanto vale la pendenza della retta s ?
Per rispondere alla domanda, bisogna determinare le coordinate di un punto S della retta e questo si può ottenere costruendo due triangoli uguali (fig. 3c):

- ORH che è rettangolo, ha un angolo acuto ampio β, il cateto RH, opposto a quest'angolo, lungo 1 e l'altro cateto lungo 3;
- OSK che è rettangolo, ha un angolo acuto ampio β e il cateto SK, opposto a quest'angolo, lungo 1.

Così si trova subito che il cateto OK deve essere lungo 3 e, quindi, il punto S ha le coordinate seguenti (fig. 3d):

$$S(3; -1)$$

La pendenza della retta s è allora (fig. 3e):

$$m'=\frac{-1}{3}=-\frac{1}{3}$$

Equazioni di due rette perpendicolari

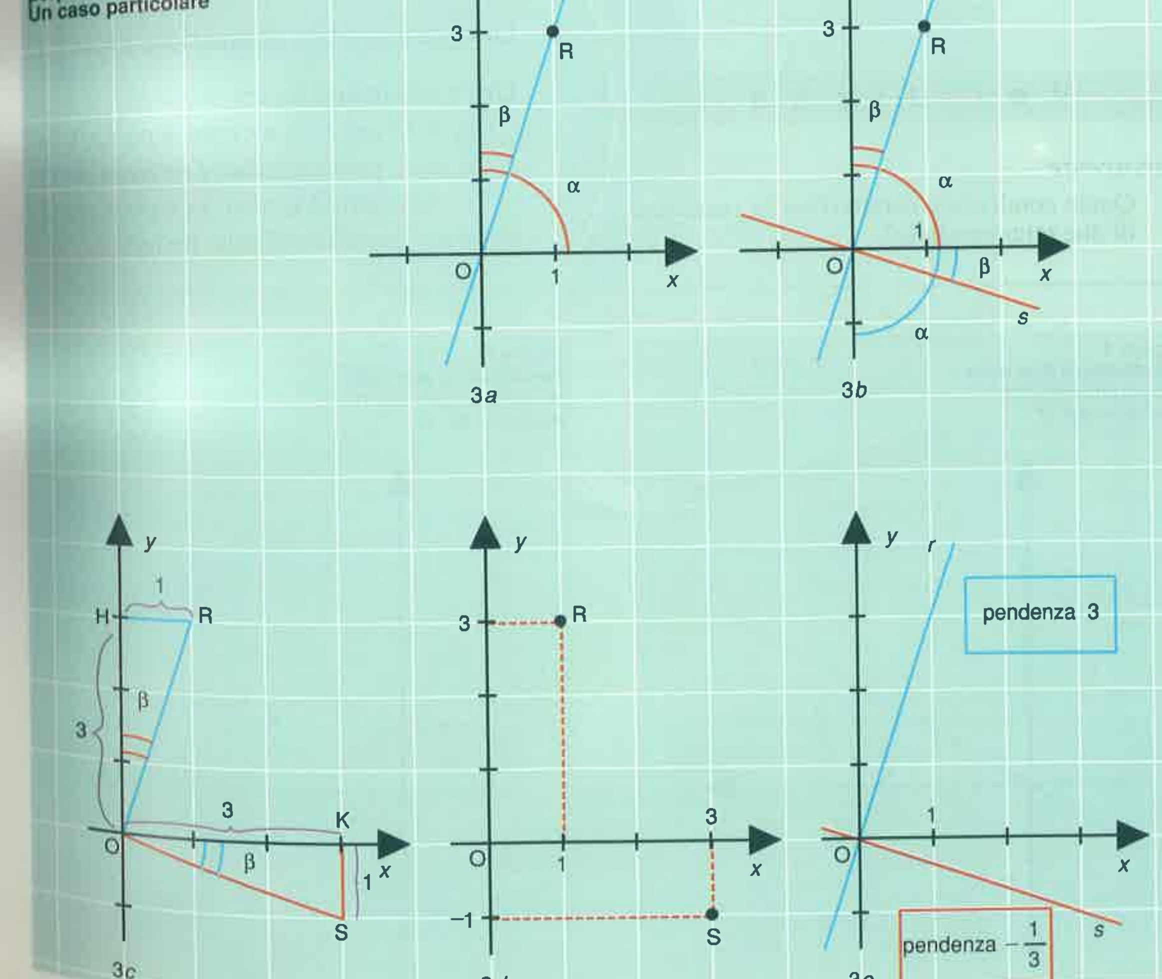
Ripetendo il ragionamento precedente più in generale (fig. 4), si considera una retta r che passa per O e R(1; a) ed ha pendenza:

$$m=a$$

Si traccia la retta s, che passa per O ed è perpendicolare a r, e si trova sulla retta s il punto S(a; –1); la pendenza di s è dunque data da:

$$m'=-\frac{1}{a}$$

Figura 3
Pendenza di due rette perpendicolari.
Un caso particolare



Questo vuol dire che, moltiplicando fra loro le due pendenze, si ha:

$$m \cdot m' = a\left(-\frac{1}{a}\right) = -1$$

Si possono ora traslare le due rette perpendicolari, in modo da farle passare per Q(0; q); la traslazione non altera la pendenza delle due rette (fig. 5), che presenteranno le seguenti caratteristiche:

- sono perpendicolari fra loro;
- hanno equazioni date da:

$$y=mx+q \quad \text{e} \quad y=m'x+q \qquad \text{con} \quad m\cdot m'=-1$$

Si arriva così alla seguente conclusione: *due rette perpendicolari hanno le pendenze* m *e* m' *legate dalla condizione:*

$$m\cdot m'=-1$$

In altre parole, *nelle equazioni di due rette perpendicolari i coefficienti della* x, *moltiplicati fra loro, danno come prodotto* –1.

Verifiche

Conoscenze

① Quale condizione caratterizza le pendenze di due rette parallele?

② Quale condizione caratterizza le pendenze di due rette perpendicolari?

Comprensione

① Spiegare perché nelle equazioni di due rette parallele compare lo stesso coefficiente della x.

② Spiegare perché le pendenze di due rette perpendicolari sono legate dalla condizione:

$$mm'=-1$$

Applicazioni

① Disegnare la retta r d'equazione $y=\frac{1}{4}x$

Disegnare quindi le rette seguenti:
- a, che è parallela a r e passa per Q(0; –2);
- b, che è perpendicolare a r e passa per O;
- c, che è perpendicolare a r e passa per Q.

Scrivere le equazioni delle tre rette.

② Disegnare la retta r d'equazione $y=-\frac{3}{2}x$

Disegnare quindi le rette seguenti:
- a, che è parallela a r e passa per Q(0; 3);
- b, che è perpendicolare a r e passa per O;
- c, che è perpendicolare a r e passa per Q.

Scrivere le equazioni delle tre rette.

Figura 4
Pendenza di due rette perpendicolari che passano per O

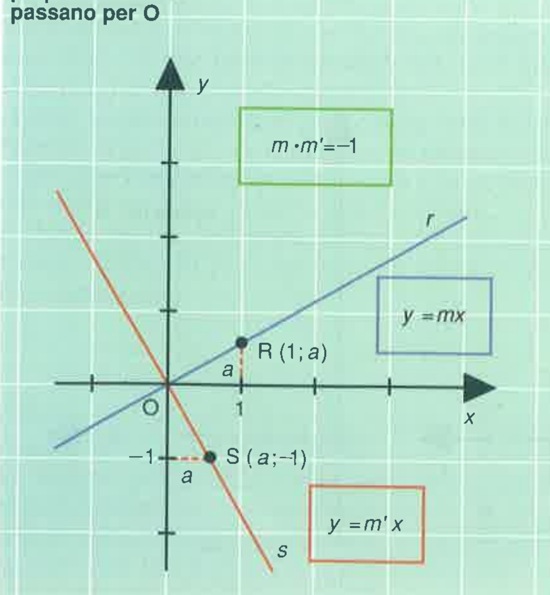
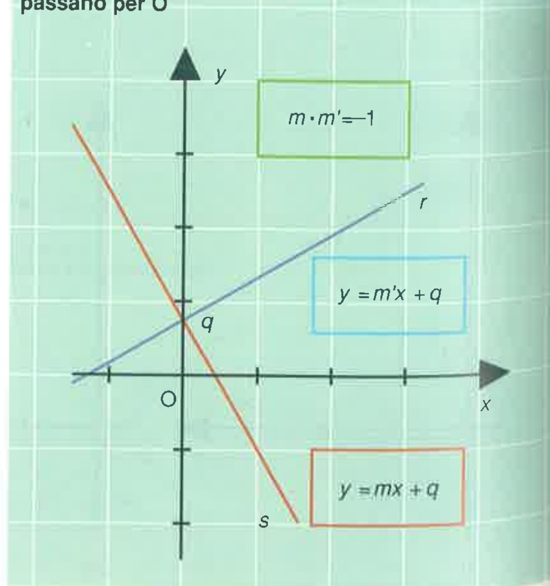


Figura 5
Pendenza di due rette perpendicolari che non passano per O



Scheda informativa

Il riferimento cartesiano nello spazio

Gli assi coordinati nello spazio

Per individuare un punto sulla superficie terrestre si danno due coordinate, la longitudine e la latitudine (fig. 1). Quando si passa allo spazio, per individuare la posizione di un aereo (fig. 2) si debbono dare tre coordinate: longitudine, latitudine e quota.

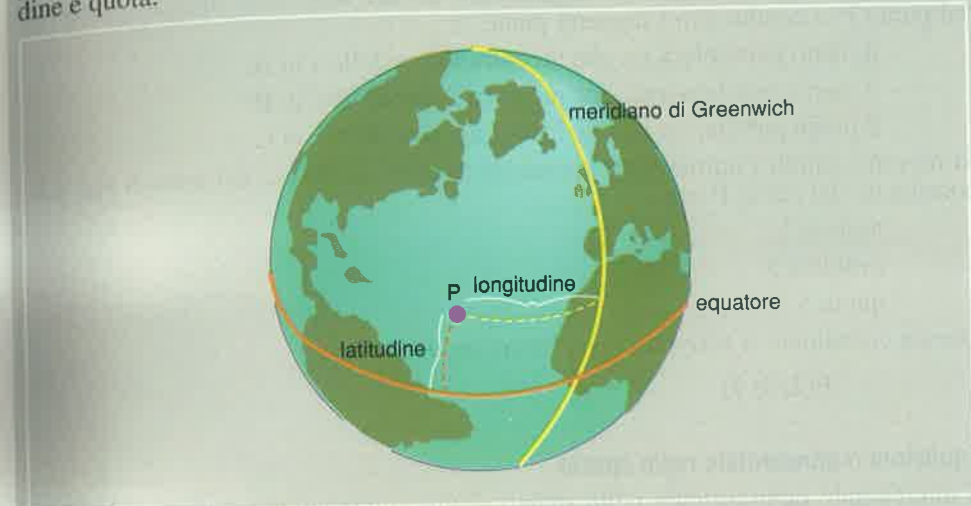


Figura 1
Riferimento nel piano

Figura 2
Riferimento nello spazio

Questo vuol dire che, per fissare la posizione di un punto P nello spazio, si deve costruire un riferimento costituito da tre rette (fig. 3), che sono perpendicolari due a due e prendono il nome di:

- *asse delle* x;
- *asse delle* y;
- *asse delle* z.

Il punto d'incontro O delle rette prende ancora il nome di *origine delle coordinate*.

Nel caso dello spazio, si osserva che le rette individuano tre piani, perpendicolari fra loro e passanti per O:

- il piano *xy*;
- il piano *yz*;
- il piano *xz*.

Questi tre piani prendono anche il nome di *piani coordinati*.

Le coordinate di un punto

Le coordinate di un punto P si leggono sui tre assi nel modo indicato in fig. 4; dal punto P si conducono i seguenti piani:

- il piano parallelo a *yz*, che incontra l'asse delle *x* in A;
- il piano parallelo a *xz*, che incontra l'asse delle *y* in B;
- il piano parallelo a *xy*, che incontra l'asse delle *z* in C.

Si trovano quindi i numeri corrispondenti ai punti A, B, C; nel caso di fig. 4 le coordinate del punto P sono:

- ascissa 2;
- ordinata 3;
- quota 5.

Queste coordinate si scrivono nella forma seguente:

P(2; 3; 5)

Equazioni rappresentate nello spazio

È interessante rappresentare nello spazio alcune equazioni già studiate nel piano. Ecco qualche esempio.

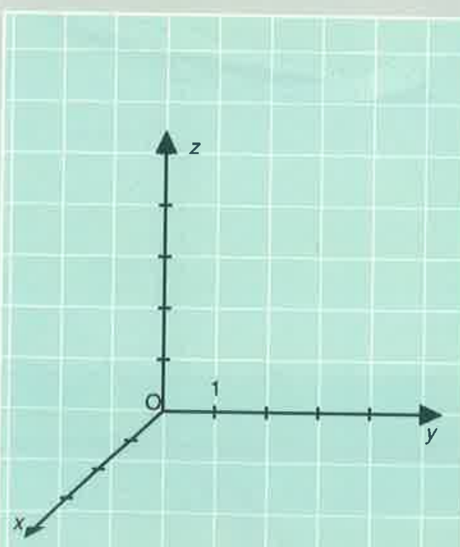


Figura 3 (a sinistra) **Riferimento cartesiano nello spazio**

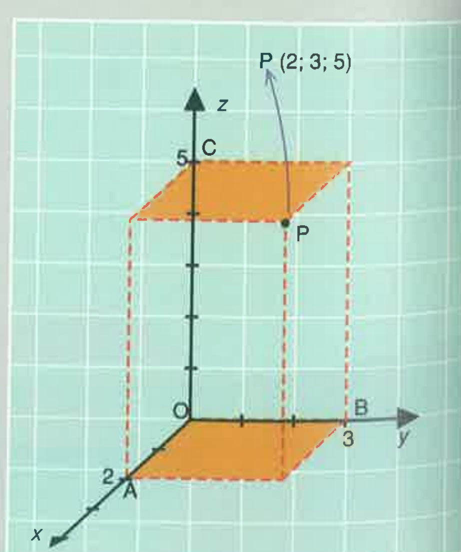


Figura 4 (a destra) **Coordinate di un punto**

L'equazione x=0

Questa equazione nel piano corrisponde all'asse delle *y* (fig. 5).

Nello spazio, invece, descrive i punti con l'ascissa che vale 0; questi punti si trovano tutti sul piano *yz*.

In conclusione, *l'equazione* x=0 *corrisponde al piano* yz.

Analogamente si trova che (fig. 5):

- *l'equazione* y=0 *corrisponde al piano* xz;
- *l'equazione* z=0 *corrisponde al piano* xy.

E così si ha che (fig. 6):

- *l'equazione* x=a *descrive un piano parallelo al piano* yz;
- *l'equazione* y=a *descrive un piano parallelo al piano* xz;
- *l'equazione* z=a *descrive un piano parallelo al piano* xy.

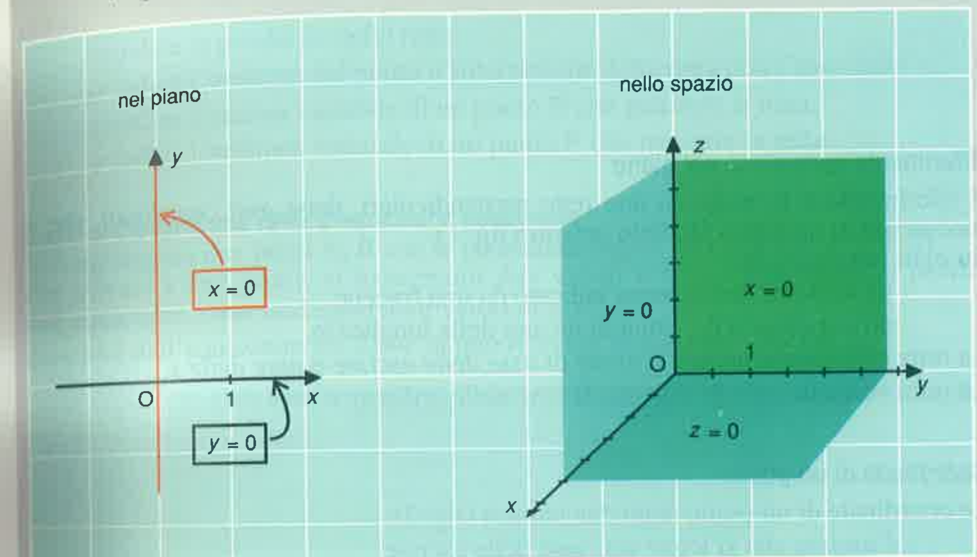


Figura 5 **Equazioni nel piano e nello spazio**

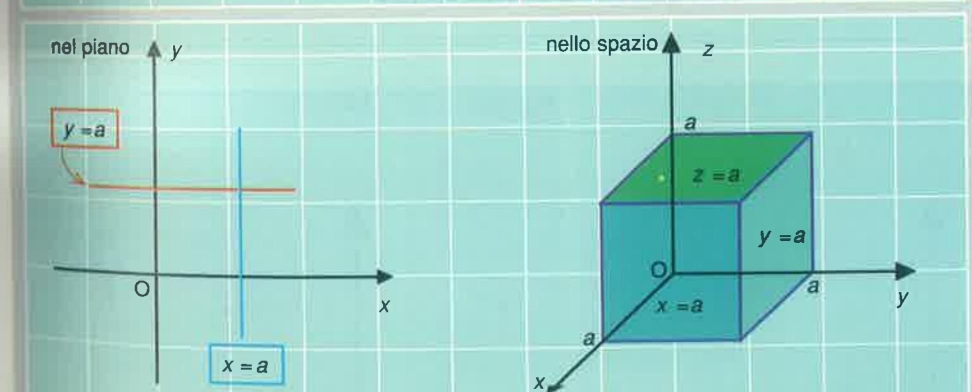


Figura 6 **Equazioni nel piano e nello spazio**

Un riferimento cartesiano nella realtà

Il riferimento cartesiano – si è detto all'inizio – è usato anche per dare la posizione di un aereo. Ma non è questa la sola occasione di incontrare il riferimento cartesiano nella realtà.

Anche entrando in una stanza, si può immaginare un riferimento cartesiano (fig. 7):

- lo spigolo vicino alla porta è l'asse delle *z*;
- il pavimento è il piano *xy*.

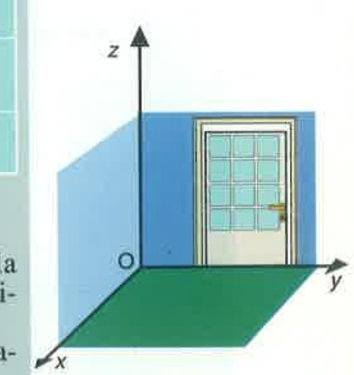


Figura 7 **Riferimento cartesiano in una stanza**

Che cosa bisogna sapere

Riferimento cartesiano nel piano

Il riferimento è formato da due rette perpendicolari, dette *assi coordinati*, che si incontrano in un punto O, detto *origine* (fig. 1).
Su ogni retta è fissato:

- un verso di percorrenza indicato da una freccia;
- un segmento OU, unità di misura delle lunghezze.

La retta orizzontale prende il nome di *asse delle ascisse* o *asse delle x*.
La retta verticale prende il nome di *asse delle ordinate* o *asse delle y*.

Coordinate di un punto

Le coordinate di un punto sono due numeri (fig. 2):

- *l'ascissa* che si legge sull'asse delle ascisse;
- *l'ordinata* che si legge sull'asse delle ordinate.

Esempio: P(–2; 3) ha l'ascissa che vale –2 e l'ordinata che vale 3.

Equazione di una retta

L'equazione descrive la proprietà comune a tutti i punti che si trovano sulla retta.
Casi possibili:

- retta parallela all'asse delle y, che ha equazione (fig. 3):

$$x=a$$

dove a indica l'ascissa di tutti i punti della retta;

- retta in altre posizioni, che ha equazione (fig. 4):

$$y=mx+q$$

dove:

m indica la pendenza della retta;
q indica l'ordinata del punto d'intersezione della retta con l'asse delle y;
x indica l'ascissa variabile di un punto P, che percorre la retta;
y indica l'ordinata variabile di un punto P, che percorre la retta.

Come si disegna una retta d'equazione assegnata

Si congiungono due punti A, B con le coordinate legate dall'equazione (fig. 5).
Per trovare i due punti, si assegnano due valori a x e si calcolano, a partire dall'equazione, i due corrispondenti valori di y.
Esempio: dall'equazione $y=-2x+4$ si può ricavare la seguente tabella:

x	$y=-2x+4$	Punti
0	$-2\cdot0+4=4$	A(0; 4)
1	$-2\cdot1+4=2$	B(1; 2)

Figura 1

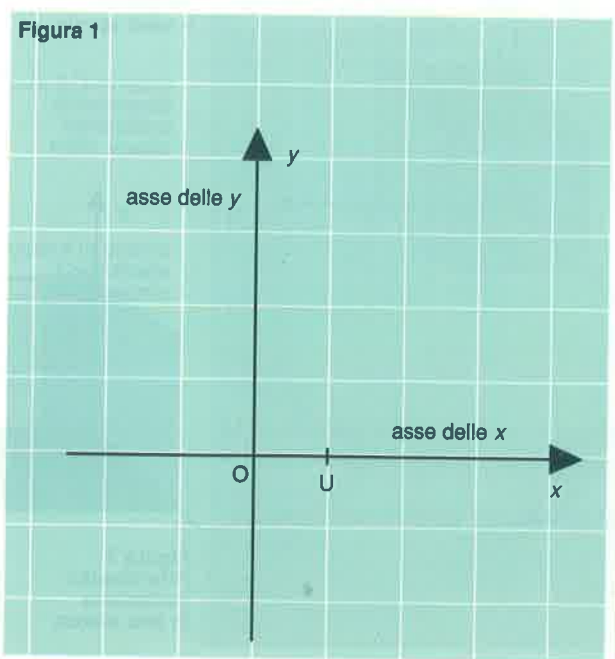


Figura 2

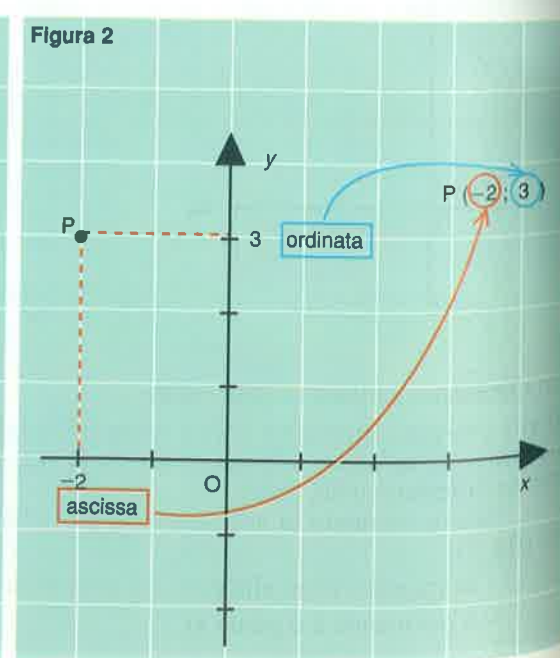


Figura 3

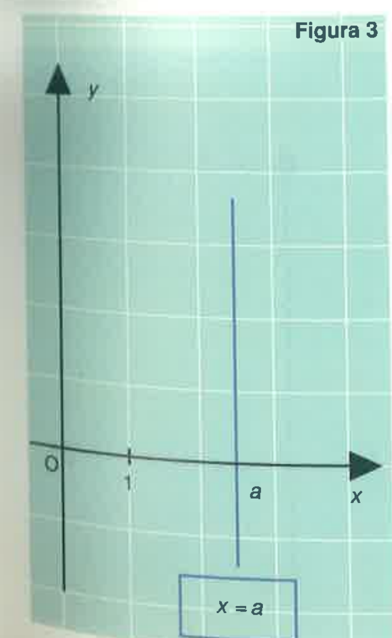


Figura 4

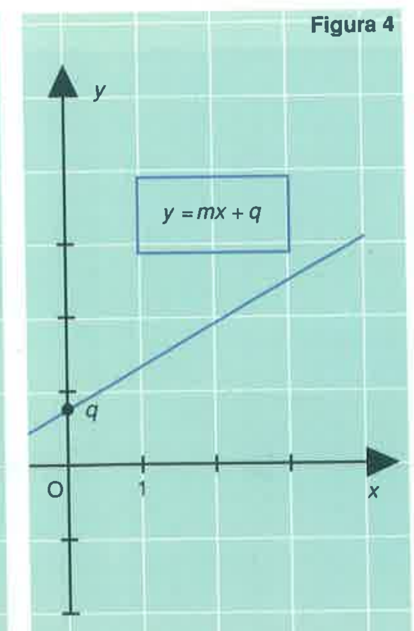
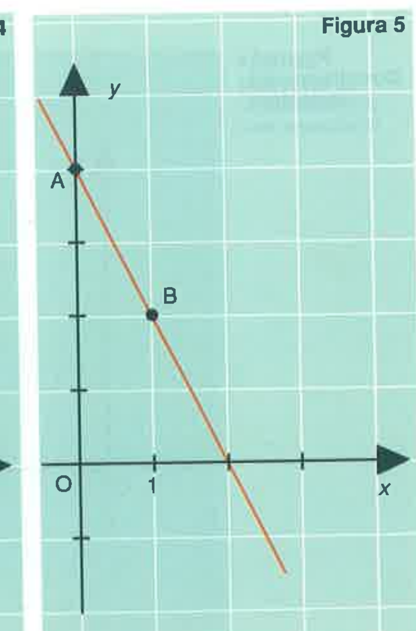


Figura 5



Attività finali

Che cosa bisogna saper fare

Rappresentare punti sul piano cartesiano

Attività 1

Sono assegnati i seguenti punti:

A(–4; 4) B(4; –4) C(0; 4) D(4; 0)

Rappresentare i punti, scegliendo il riferimento cartesiano più opportuno fra quelli presentati in fig. 1.

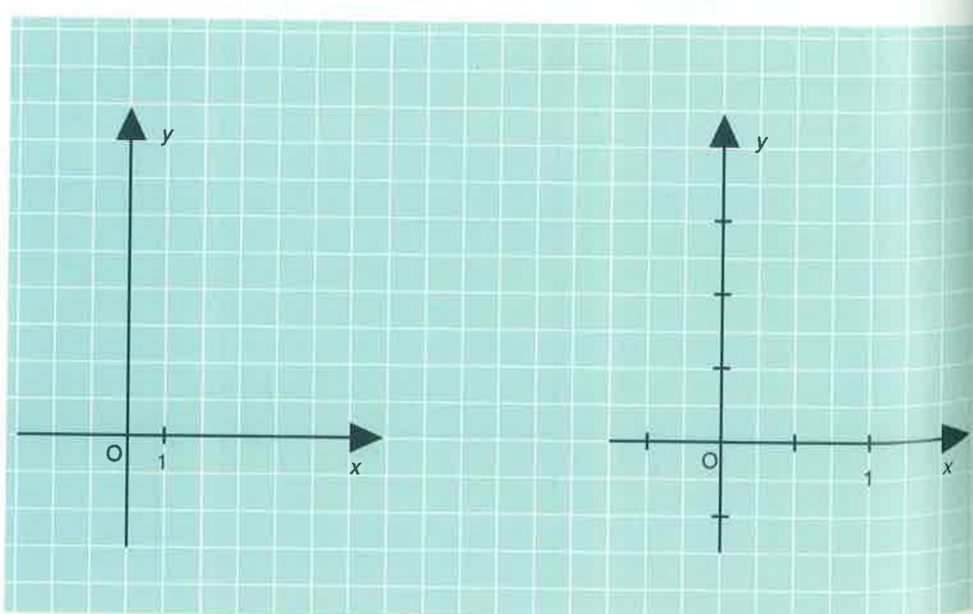
Attività 2

Sono assegnati i seguenti punti:

$$A\left(\frac{3}{4};-\frac{1}{4}\right)\quad B\left(-\frac{5}{4};\frac{3}{4}\right)\quad B\left(-\frac{1}{4};0\right)\quad B\left(0;-\frac{3}{4}\right)$$

Rappresentare i punti, scegliendo il riferimento cartesiano più opportuno fra quelli presentati in fig. 1.

Figura 1
Due riferimenti cartesiani



Equazione di una retta

Attività 3

Scrivere le equazioni delle rette rappresentate in fig. 2, spiegando brevemente i ragionamenti seguiti.

Riconoscere l'equazione di una retta

Attività 4

Fra le seguenti equazioni riconoscere quelle che rappresentano delle rette, motivando la scelta.

$$y=-x \qquad y=-1 \qquad y=\frac{1}{x}$$

$$y=-x^2 \qquad y=-2x \qquad y=x-2$$

Tracciare il grafico di una retta d'equazione assegnata

Attività 5

Le seguenti equazioni rappresentano due rette.

$$y=-8x+10$$

$$y=\frac{1}{5}x-1$$

Disegnare le due rette sullo stesso riferimento cartesiano, completando nel modo più opportuno le seguenti tabelle:

x	$y=$……	Punti
1		
2		

x	$y=$……	Punti
0		
5		

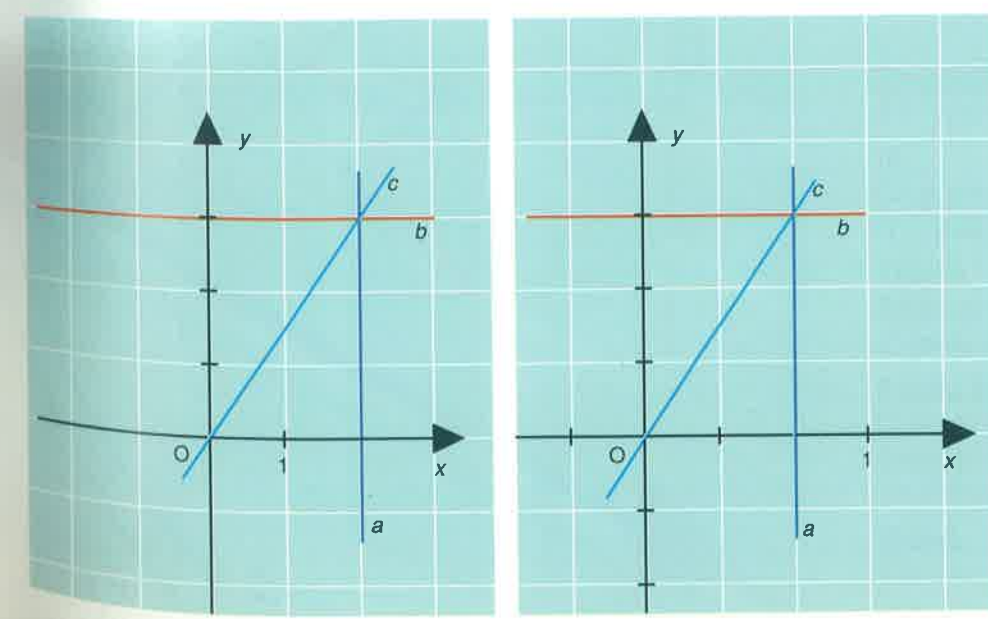


Figura 2
Due rette da rappresentare con equazioni