CAPITOLO SETTIMO

L'ALGEBRA DI BOOLE E LE SUE INTERPRETAZIONI

1 Semplici circuiti logici

Un circuito con un interruttore

Molti apparecchi elettronici, fra cui i calcolatori, sono fondati su un fenomeno semplice a capirsi: in un circuito come quello di fig. 1, con un interruttore *a* ed una lampadina *L*, la lampadina si accende solo se l'interruttore è chiuso. Si ha dunque:

- *luce in* L, *se* a *è chiuso;*
- *non luce in* L, *se* a *non è chiuso.*

Per descrivere il comportamento di un circuito si indica brevemente:

- *luce con* 1, *e anche l'interruttore chiuso con* 1;
- *non luce con* 0, *e anche l'interruttore non chiuso con* 0.

L'invertitore e la negazione

La chiusura e l'apertura degli interruttori può avvenire automaticamente per mezzo di un elettromagnete (fig. 2); l'elettromagnete *P* agisce nel modo seguente (fig. 3):

- se in *P* circola corrente, viene attirata la laminetta metallica *a*, così l'interruttore si apre e la lampadina resta spenta:
- se in *P* non circola corrente, la laminetta *a* riprende la posizione indicata in fig. 3, dove l'interruttore è chiuso e la lampadina è accesa.

Proprio su questo principio è basato *l'invertitore* rappresentato in fig. 4:

- se è chiuso l'interruttore *b*, ***non*** è chiuso *a*;
- se ***non*** è chiuso l'interruttore *b*, è chiuso *a*.

Per questo l'interruttore *b* viene anche chiamato *non a*; si può dire brevemente: «L'invertitore *non a* è chiuso (*non a*=1) quando l'interruttore *a* è aperto (*a*=0) e viceversa».

Il comportamento dell'invertitore viene descritto con una tabella come quella seguente, che prende il nome di *tabella della negazione*.

a	non *a*
1	0
0	1

Figura 1
Un circuito elettrico con interruttore

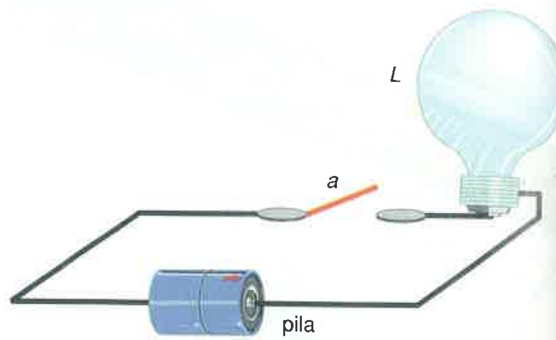
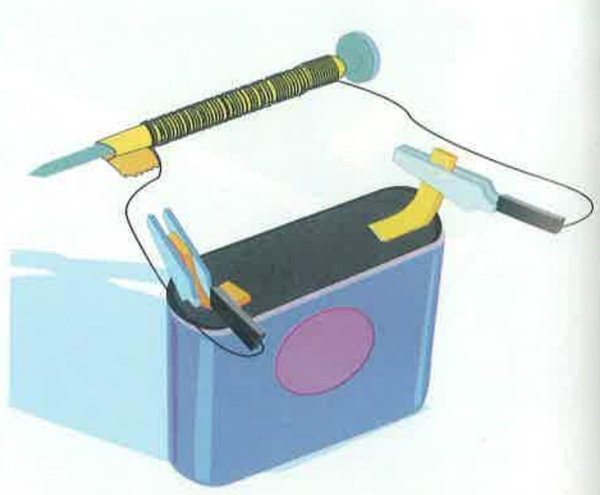


Figura 2
Un elettromagnete



Gli interruttori in serie e la congiunzione «e»

In fig. 5 è rappresentato un circuito con due interruttori – *a* e *b* – in serie.
Si ha luce nella lampadina, cioè *L*=1, solo se risulta *a* chiuso, cioè *a*=1, ***e***, contemporaneamente, *b* chiuso, cioè *b*=1; in tutti gli altri casi la lampadina è spenta, cioè si ha *L*=0.

Più brevemente, si può dire che: «In un circuito con due interruttori – *a* e *b* – in serie la lampadina *L* è accesa (*L* =1) in un solo caso: quando *a* e *b* sono *entrambi chiusi* (*a*=1 e *b*=1)».
Il comportamento del circuito si riassume nella tabella seguente, chiamata *tabella della congiunzione «e»*.

a	*b*	*a* e *b*
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Figura 3
Un elettromagnete che comanda un interruttore

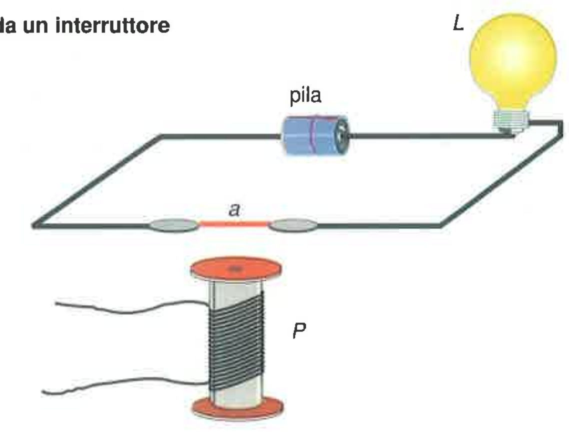


Figura 4
Un invertitore

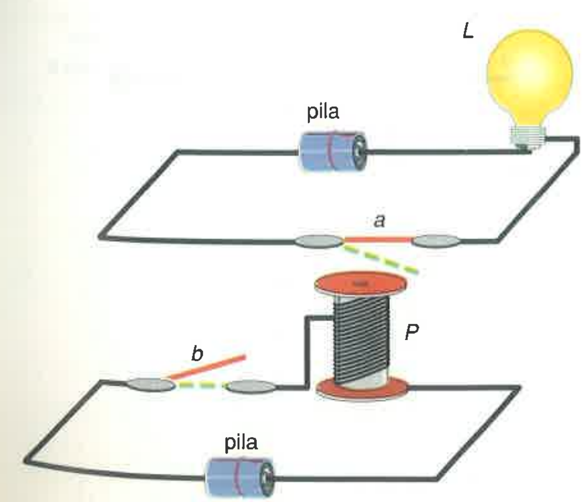
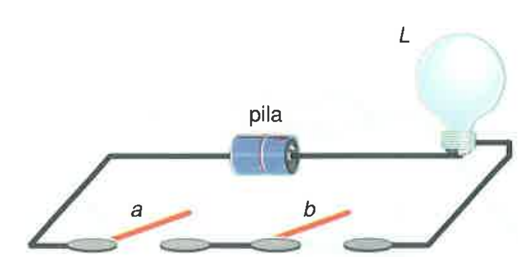


Figura 5
Due interruttori in serie



Gli interruttori in parallelo e la disgiunzione «o»

In fig. 6 è rappresentato un circuito con due interruttori – a e b – in parallelo.
La lampadina L è accesa, cioè risulta $L=1$, nei seguenti casi:

- quando a è chiuso, cioè $a=1$ (la corrente passa solo sopra);
- quando b è chiuso, cioè $b=1$ (la corrente passa solo sotto);
- quando a e b sono chiusi, cioè $a=1$ *e* $b=1$ (la corrente passa sopra e sotto).

Più in breve si dice: «In un circuito con due interruttori a, b in parallelo, la lampadina si accende quando è chiuso l'interruttore a ***o*** l'interruttore b».

Il comportamento del circuito viene descritto dalla tabella seguente, chiamata *tabella della disgiunzione «o»*.

a	*b*	*a* o *b*
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Disgiunzione «o» inclusiva ed esclusiva

È importante ricordare subito che, nella lingua italiana, la disgiunzione «o» si usa con due significati diversi:

I. *o esclusiva*, per esempio nella frase «la borsa ***o*** la vita», in cui *è escluso* il caso di conservare la borsa e la vita;

II. *o inclusiva*, per esempio nella frase «vorrei parlare con tua madre ***o*** con tuo padre», in cui *è incluso* il caso di parlare con entrambi.

La terminologia tecnica di origine inglese distingue invece queste due disgiunzioni, traducendo:

- «o esclusiva» con *exor* (abbreviazione di «exclusive or»);
- «o inclusiva» con *or*.

I circuiti logici

Le considerazioni svolte in questo paragrafo suggeriscono due osservazioni:

- un fatto tecnico, cioè l'accendersi o il non accendersi di una lampadina, ha portato a considerazioni sul linguaggio;
- il funzionamento di alcuni circuiti è stato collegato all'uso dei connettivi *non, e, o,* chiamati anche *connettivi logici*.

Figura 6
Due interruttori in parallelo

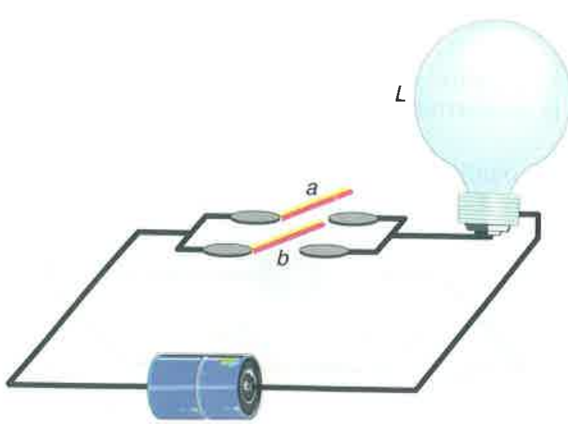
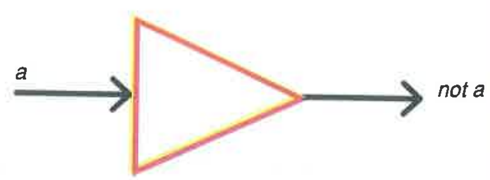


Figura 7
Il circuito *not*



a	*not a*
0	1
1	0

Proprio per questo i circuiti esaminati prendono anche il nome di *circuiti logici*, ed hanno un ruolo fondamentale nella struttura dei calcolatori.

In particolare, per i tre circuiti esaminati in questo paragrafo, sono stati fissati dei termini tecnici di origine inglese ed un apposito simbolo.
I termini tecnici sono i seguenti:

- circuito ***not*** per l'invertitore;
- circuito ***and*** per il circuito con due interruttori in serie;
- circuito ***or*** per il circuito con due interruttori in parallelo.

I corrispondenti simboli sono rappresentati nelle figure 7, 8 e 9, dove si ritrovano anche le tabelle che descrivono il funzionamento di ogni circuito.

V e r i f i c h e

Conoscenze

① Descrivere il funzionamento di un circuito con un interruttore.

② Descrivere il funzionamento di un invertitore.

③ Descrivere il funzionamento di un circuito con due interruttori in serie.

④ Descrivere il funzionamento di un circuito con due interruttori in parallelo.

⑤ Presentare la tabella della congiunzione «e» e della disgiunzione «o inclusiva».

Comprensione

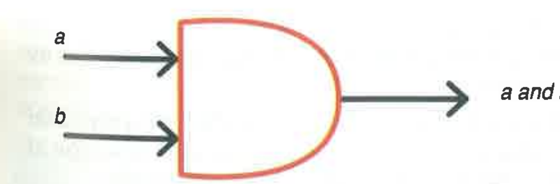
① Spiegare la differenza fra «o inclusiva» e «o esclusiva», portando degli esempi diversi da quelli del testo.

② Riconoscere i due circuiti descritti dalle seguenti tabelle:

a	*b*	......
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

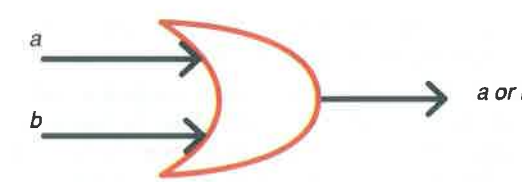
a	*b*	......
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Figura 8
Il circuito *and*



a	*b*	*a and b*
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Figura 9
Il circuito *or*



a	*b*	*a or b*
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

2 La logica: i connettivi «non», «e», «o»

Come si riconosce una proposizione

Ecco un breve periodo da esaminare:

«Ho disegnato sulla lavagna un triangolo, cioè un poligono con quattro lati, ma il disegno è brutto».

Il periodo è formato da tre frasi, che conviene scrivere più chiaramente nel modo seguente:

I. «Ho disegnato sulla lavagna un triangolo»;
II. «Il triangolo è un poligono con quattro lati»;
III. «Il disegno è brutto».

Le tre frasi indicate presentano notevoli differenze:

- si può decidere con certezza se la prima è vera o falsa (basta guardare la lavagna);
- la seconda è sicuramente falsa, perché il triangolo ha tre lati e non quattro;
- la terza esprime un giudizio che può essere vero per alcuni e falso per altri.

Frasi di quest'ultimo tipo non vengono considerate nello studio della logica; la logica si occupa invece di un particolare tipo di frasi: le frasi che possono essere solo vere o false; queste frasi si chiamano *proposizioni*.
In conclusione: *in logica si chiamano proposizioni le frasi che possono essere solo vere o false.*

Nell'ambito della logica le proposizioni, per brevità, vengono spesso indicate con una sola lettera dell'alfabeto; ecco qualche esempio di proposizioni tratte dalla matematica.

p: «Il quadrato ha tutti i lati uguali» (vera)
q: «Il quadrato ha tutti gli angoli uguali» (vera)
r: «Il numero 3 è divisore di 10» (falsa)
s: «Il numero 3 è divisore di 6» (vera)

Proposizioni composte

Ecco alcune proposizioni da esaminare:

«Il quadrato *non* ha tutti i lati uguali»
ottenuta dalla precedente proposizione p, mediante la negazione «non».
«3 *non* è divisore di 10»
ottenuta dalla proposizione q, mediante la negazione «non».
«Il quadrato ha uguali tutti i lati *e* tutti gli angoli»
ottenuta collegando le proposizioni p, q mediante il connettivo «e».
«3 è divisore di 6 *o* di 10»
ottenuta collegando le proposizioni r, s mediante il connettivo «o».

Le quattro proposizioni esaminate hanno dunque una caratteristica comune: sono ottenute *componendo* altre proposizioni più semplici mediante i connettivi «non», «e», «o»; proprio per questo prendono il nome di *proposizioni composte*.

In conclusione: *collegando due proposizioni mediante i connettivi logici* «non», «e», «o» *si ottengono delle proposizioni composte*.
In questo paragrafo si esamineranno in particolare queste proposizioni ottenute mediante i connettivi «non», «e», «o».

Il connettivo «non»

I primi due esempi, e cioè:

«Il quadrato *non* ha tutti i lati uguali» (falsa)
«3 *non* è divisore di 10» (vera)

mettono in evidenza l'effetto del connettivo «non»:

- *negando una proposizione vera si ottiene una proposizione falsa;*

- *negando una proposizione falsa si ottiene una proposizione vera.*

Queste affermazioni si riassumono nella seguente *tavola di verità*, dove:

- la lettera p indica una proposizione;
- il simbolo $\sim p$ (o anche $\neg p$) indica *la negazione di* p, ottenuta mediante il connettivo «non»;
- la lettera V indica che la proposizione è vera;
- la lettera F indica che la proposizione è falsa.

p	$\sim p$
V	F
F	V

Il connettivo «e»

Il terzo esempio, e cioè:

«Il quadrato ha uguali tutti i lati *e* tutti gli angoli» (vera)

esprime, in forma abbreviata, la proposizione seguente:

«Il quadrato ha uguali tutti i lati *e* il quadrato ha uguali tutti gli angoli»

Si tratta dunque della proposizione ottenuta mediante il connettivo «e», a partire dalle due proposizioni seguenti:
p: «Il quadrato ha uguali tutti i lati» (vera)
q: «Il quadrato ha uguali tutti gli angoli» (vera)

La proposizione composta con il connettivo «e» si indica anche con il simbolo $p \wedge q$ ed è facile verificare che risulta vera in un solo caso: quando sono vere tutte e due le proposizioni.
Si trova così la seguente tavola di verità, dove ora p e q indicano due qualunque proposizioni, mentre $p \wedge q$ indica la proposizione composta con il connettivo «e».

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

La tavola si può leggere sinteticamente nel modo seguente: *componendo due proposizioni* p, q *con il connettivo «e» si ha la proposizione* p∧q, *che è vera solo quando sono vere le due proposizioni* p *e* q.

Il connettivo «o»

L'ultimo esempio, e cioè:

«3 è divisore di 6 *o* di 10» (vera)

esprime, sempre in forma abbreviata, la proposizione seguente:

«3 è divisore di 6 *o* 3 è divisore di 10»

Si tratta dunque della proposizione ottenuta mediante il connettivo «o» a partire dalle due proposizioni seguenti:

r: «il numero 3 è divisore di 10» (falsa)
s: «il numero 3 è divisore di 6» (vera)

La proposizione composta si indica con il simbolo $r \vee s$ e risulta falsa in un solo caso: quando sono false le due proposizioni.
Si trova così la seguente tavola di verità, dove ora r e s indicano due qualunque proposizioni e $r \vee s$ indica la proposizione composta con il connettivo «o».

r	s	$r \vee s$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Questa tavola si può leggere sinteticamente nel modo seguente: *componendo due proposizioni* r, s *con il connettivo «o» si ha la proposizione* r∨s *che è vera quando è vera* r ***o*** *quando è vera* s ***o*** *quando sono vere entrambe.*

La disgiunzione «o» inclusiva ed esclusiva

Conviene ricordare che, nella lingua italiana, la disgiunzione «o» si usa con i due significati diversi già indicati nel paragrafo precedente:

I. «*o esclusiva*», per esempio nella frase «la borsa ***o*** la vita», in cui *è escluso* il caso di conservare la borsa e la vita;
II. «*o inclusiva*», per esempio nella frase «vorrei parlare con tua madre ***o*** con tuo padre», in cui *è incluso* il caso di parlare con madre e padre.

La lingua latina, invece, distingue questi due connettivi con l'uso di due termini diversi:

- «o esclusiva» si traduce *aut*;
- «o inclusiva» si traduce *vel*.

Così, il simbolo «∨», che indica appunto «o inclusiva», ha origine probabilmente proprio dall'iniziale del «vel» latino.

Una sintesi dei risultati ottenuti

Le tre tavole di verità ottenute hanno un significato molto generale: le lettere p, q, r, s rappresentano delle proposizioni che possono avere i contenuti più vari: si possono riferire alla matematica, alla storia o alla vita di tutti i giorni.
Ma, quando si conosce *il valore di verità* di quelle proposizioni (cioè quando si sa se sono vere o false), si può stabilire «automaticamente» il valore di verità di tutte le proposizioni composte: basta valersi delle tavole di verità, richiamate qui sotto.

p	$\sim p$
V	F
F	V

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

r	s	$r \vee s$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Verifiche

Conoscenze

① Quali sono i connettivi logici studiati in questo paragrafo?

② Scrivere la tavola di verità della negazione, spiegando il significato dei simboli.

③ Scrivere la tavola di verità del connettivo «e», spiegando il significato dei simboli.

④ Scrivere la tavola di verità del connettivo «o», spiegando il significato dei simboli.

Comprensione

① Portare degli esempi di proposizioni diverse da quelle date dal testo.

② Spiegare la differenza fra «o inclusiva» e «o esclusiva», portando degli esempi diversi da quelli del testo.

③ Riconoscere i connettivi descritti dalle seguenti tavole di verità:

p	q	......
F	F	F
F	V	F
V	F	F
V	V	V

p	q	......
F	F	F
F	V	V
V	F	V
V	V	V

④ Compilare la tavola di verità del connettivo «o esclusiva».

Applicazioni

① Esaminare le seguenti frasi:

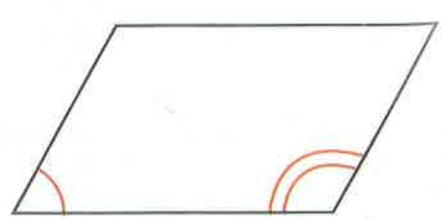
I. «Oggi è una giornata speciale»
II. «Oggi piove»
III. «Oggi non piove»
IV. «Oggi passo a prendere Luigi e vado al cinema»
V. «Oggi esco con Luca o con Andrea»

Indicare:
- la frase che non è una proposizione logica;
- le proposizioni composte.

② Per ciascuna proposizione composta data nell'esercizio precedente indicare:
- le proposizioni di cui è composta;
- il connettivo usato;
- i casi in cui la proposizione risulta vera.

③ Stabilire il valore di verità delle due seguenti proposizioni:
p: «Il parallelogramma di fig. 1 ha i lati opposti paralleli»
q: «Il parallelogramma di fig. 1 ha i quattro angoli uguali»
Considerare le proposizioni $\sim p$, $\sim q$, $p \wedge q$, $p \vee q$ e stabilirne il valore di verità.

Figura 1
Un parallelogramma



3 La logica e gli insiemi

Il connettivo «e» e l'intersezione di insiemi

Nel paragrafo precedente sono state esaminate, dal punto di vista della logica, le seguenti proposizioni:

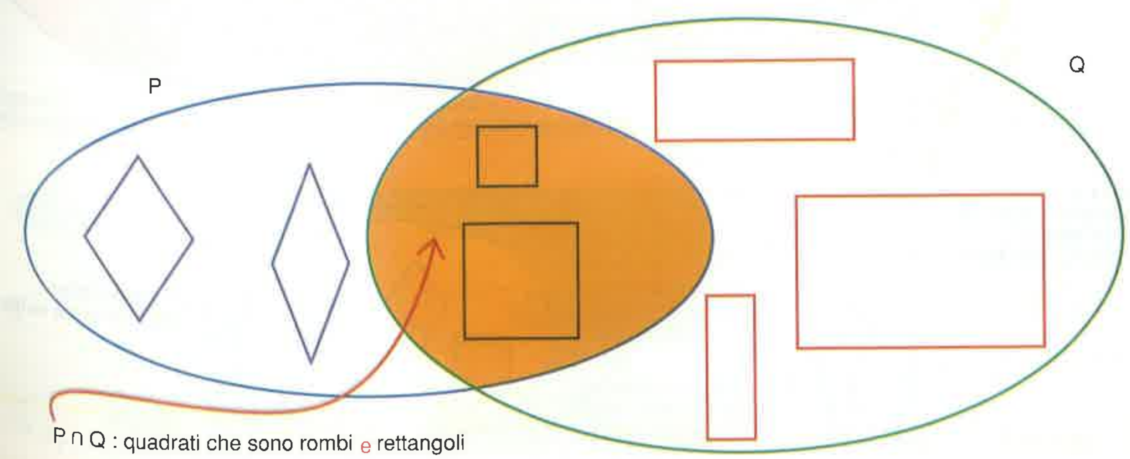
p: «Il quadrato ha uguali tutti i lati»
q: «Il quadrato ha uguali tutti gli angoli»
$p \wedge q$: «Il quadrato ha uguali tutti i lati *e* tutti gli angoli»

Le stesse proposizioni possono essere esaminate da un altro punto di vista: usando il «linguaggio degli insiemi».
Si può procedere così (fig. 1):
- si considera l'insieme P dei quadrilateri con tutti i lati uguali, cioè l'insieme dei rombi;
- si esprime p nella forma: «Il quadrato appartiene all'insieme P dei rombi».

Analogamente si può procedere per la proposizione q:
- si considera l'insieme Q dei quadrilateri con tutti gli angoli uguali, cioè l'insieme dei rettangoli;
- si esprime q nella forma: «Il quadrato appartiene all'insieme Q dei rettangoli».

In questo modo si trova che i due insiemi hanno una parte comune (in colore in fig. 1), dove si trovano i quadrati, che sono rettangoli *e* rombi.
Questa parte comune si chiama *intersezione dei due insiemi* e si indica con **P∩Q**.
L'intersezione P∩Q di due insiemi viene dunque descritta mediante il connettivo «e»; risulta infatti che *l'intersezione* P∩Q *è formata dagli elementi contenuti in P* e *in Q*.

Figura 1
P insieme dei rombi, Q insieme dei rettangoli



Il connettivo «o» e l'unione di insiemi

Considerazioni analoghe si possono ripetere a partire da altre tre proposizioni esaminate nel paragrafo precedente:

r: «il numero 3 è divisore di 10»

s: «il numero 3 è divisore di 6»

$r \vee s$: «3 è divisore di 6 *o* di 10»

In questo caso si considerano i seguenti insiemi (fig. 2):

- l'insieme R dei divisori di 10;
- l'insieme S dei divisori di 6;
- l'insieme **R∪S**, *unione dei due insiemi*, costituito dai numeri che sono divisori di 6 *o* di 10 *o* di entrambi.

In questo modo la proposizione $r \vee s$ diventa: «3 appartiene all'insieme R∪S».

Dunque l'unione R∪S di due insiemi viene descritta mediante il connettivo «o»: *l'unione* R∪S *è formata dagli elementi contenuti in* R o *in* S o *in entrambi.*

In questo caso il connettivo «o» è usato in senso *inclusivo*; appartengono cioè all'unione R∪S gli elementi seguenti (fig. 2):

- gli elementi che si trovano solo in R (5 e 10);
- gli elementi che si trovano solo in S (3 e 6);
- gli elementi che si trovano in R e in S (1 e 2).

Il connettivo «non» e la complementazione

Si può interpretare dal punto di vista insiemistico anche la negazione. Per questo conviene ancora una volta riprendere due proposizioni esaminate nel paragrafo precedente:

p: «il quadrato ha tutti i lati uguali»

$\sim p$: «il quadrato *non* ha tutti i lati uguali»

Ecco come si può procedere (fig. 3):

- si osserva che, parlando di quadrati, si parla sempre di particolari quadrilateri, cioè si lavora sempre nell'insieme U dei quadrilateri;
- all'interno dell'insieme U si trova l'insieme P dei rombi, che sono i quadrilateri con tutti i lati uguali.

In questo modo la proposizione p può diventare: «Il quadrato appartiene all'insieme P»; mentre la proposizione $\sim p$ diventa: «Il quadrato non appartiene all'insieme P», cioè «Il quadrato si trova al di fuori dell'insieme P».

La negazione porta dunque a considerare la parte di U che si trova al di fuori di P, parte che viene anche chiamata complemento di P, indicato con il simbolo $\bar{P}$: *il complemento di P* ($\bar{P}$) *è formato dagli elementi che non appartengono a P.*

Analogamente si possono interpretare le proposizioni:

r: «il numero 3 è divisore di 10»

$\sim r$: « il numero 3 *non* è divisore di 10»

In questo caso l'ambiente di lavoro è l'insieme N dei numeri naturali, quindi l'insieme U, chiamato *insieme universo*, coincide con l'insieme N.

Figura 2
R insieme dei divisori di 10, S insieme dei divisori di 6

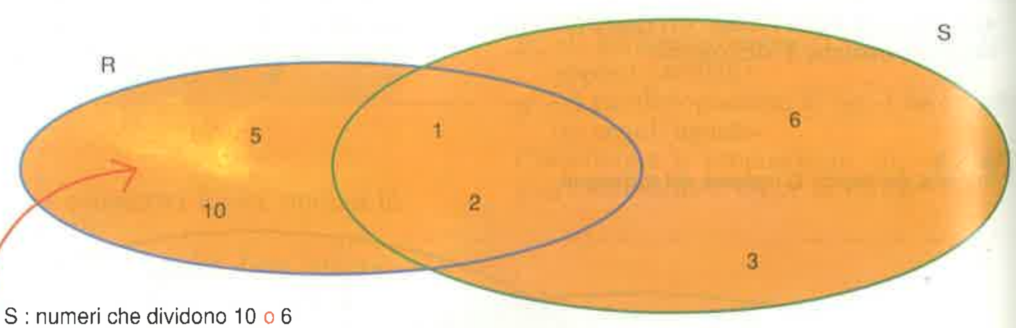
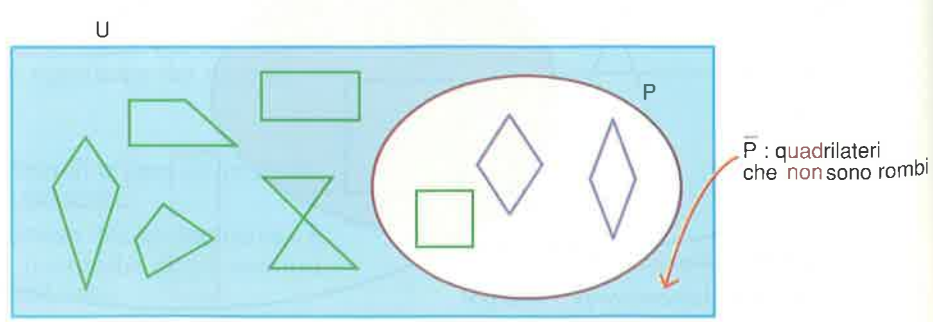


Figura 3
U insieme universo (quadrilateri), P insieme dei rombi



All'interno di N si trova l'insieme R dei divisori di 10 (fig. 4) e perciò $\bar{R}$ è costituito dai naturali che *non* sono divisori di 10. Così la proposizione $\sim r$ diventa:

«3 appartiene all'insieme $\bar{R}$»

Sintesi del paragrafo

I connettivi logici «e», «o», «non», che hanno un ruolo importante nell'analisi e nella comprensione del linguaggio, sono anche fondamentali nella descrizione delle operazioni fra insiemi. Infatti, dati due qualunque insiemi P e Q all'interno di un insieme U, chiamato insieme universo, si trova che:

- l'*intersezione* P∩Q è costituita dagli elementi che si trovano in P *e* in Q (fig. 5);
- l'*unione* P∪Q è costituita dagli elementi che si trovano in P *o* in Q (fig. 6);
- il *complemento* $\bar{P}$ è formato dagli elementi di U che *non* appartengono a P (fig. 7).

V e r i f i c h e

Conoscenze

① Descrivere a parole e con un disegno l'intersezione di due insiemi.

② Descrivere a parole e con un disegno l'unione di due insiemi.

③ Descrivere a parole e con un disegno il complemento di un insieme.

Comprensione

① Spiegare perché si descrive l'unione di due insiemi mediante il connettivo «o inclusiva».

② Spiegare perché si descrive l'intersezione di due insiemi mediante il connettivo «e».

③ Spiegare perché si descrive il complemento di un insieme mediante il connettivo «non».

Applicazioni

① Nell'insieme U di tutti i triangoli, considerare i seguenti insiemi:

P: l'insieme dei triangoli rettangoli;

Q: l'insieme dei triangoli isosceli.

Descrivere i triangoli che si trovano nei seguenti insiemi:

$\bar{P}$ $\bar{Q}$ P∩Q P∪Q

In quale insieme si trovano i triangoli equilateri?

② Nell'insieme U dei numeri razionali, considerare i seguenti insiemi:

P: l'insieme dei naturali;

Q: l'insieme degli interi.

Descrivere i numeri che si trovano nei seguenti insiemi:

$\bar{P}$ $\bar{Q}$ P∩Q P∪Q

Figura 4
U=N, R insieme dei divisori di 10

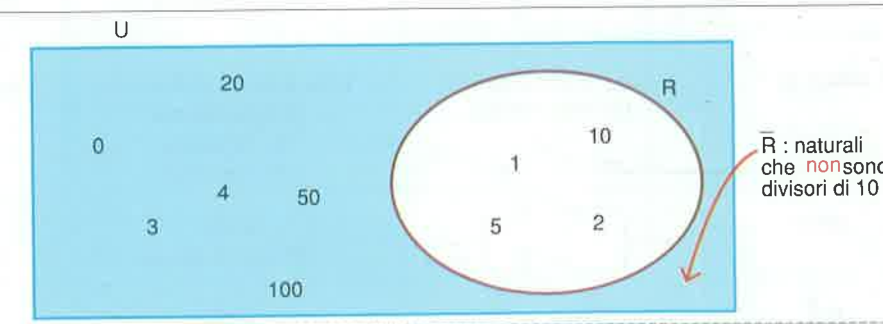


Figura 5
Intersezione di due insiemi

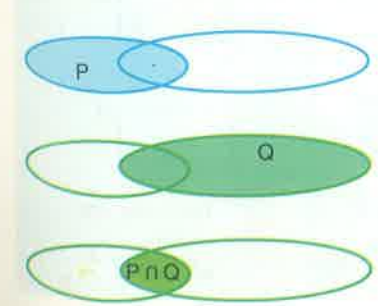


Figura 6
Unione di due insiemi

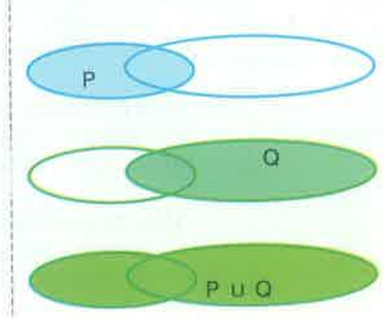
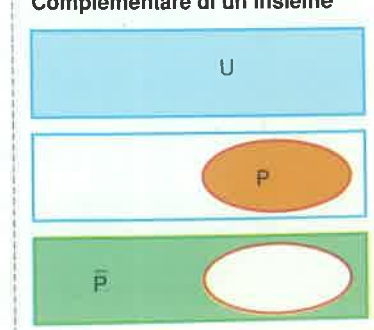


Figura 7
Complementare di un insieme



4 L'algebra di Boole

Analogie fra circuiti, connettivi e insiemi

Nei paragrafi precedenti si sono studiati tre argomenti che apparentemente non sembrano avere molto in comune:

- circuiti costruiti con invertitori o con più interruttori in serie o in parallelo;
- composizione di proposizioni mediante i connettivi «non», «e», «o»;
- operazioni di complementazione, intersezione e unione fra insiemi.

Questi tre casi sono collegati da profonde analogie:

- *con i connettivi si descrivono i circuiti e le operazioni fra insiemi;*
- *i connettivi logici e i circuiti sono descritti da tabelle analoghe.*

La fig. 1 mostra un esempio di questa analogia.

Tabella A
Simboli dell'algebra di Boole e loro interpretazioni

	INTERPRETAZIONI DELL'ALGEBRA DI BOOLE		
Simboli	**Nei circuiti**	**Nella logica**	**Negli insiemi**
Lettere a, b	Una lettera indica un interruttore a	Una lettera indica una proposizione a: «Piove» b: «Esco»	Una lettera indica un insieme b
$a+b$	a b a or b	$a \vee b$: «Piove *o* esco»	a U b a b
$a \cdot b$	a b a and b	$a \wedge b$: «Piove *e* esco»	a ∩ b
$\bar{a}$	a not a	$\sim a$: «*non* piove»	U a $\bar{a}$
1	1	Una proposizione v sempre vera v: «Il triangolo ha tre lati»	U
0	0	Una proposizione f sempre falsa f: «Il quadrato ha tre lati»	$\emptyset$ Insieme che non ha elementi

L'algebra di Boole

Queste analogie portano ad una nuova algebra, basata sulle convenzioni e sulle interpretazioni indicate nella tabella A.
Si tratta dunque di un sistema di simboli e operazioni che sembrano del tutto diversi da quelli presentati nel precedente capitolo di calcolo letterale.
Questa nuova algebra si chiama *algebra di Boole*, dal nome del matematico inglese George Boole che, nella prima metà del secolo scorso, la creò a partire dai suoi studi di logica (cfr. anche la scheda storica a p. 319).

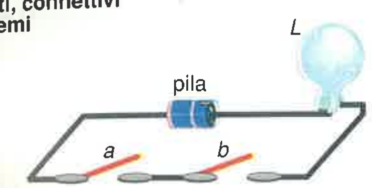
Alcune proprietà dell'algebra di Boole

L'algebra di Boole sembra molto lontana da quella ordinaria; eppure anche in questa nuova algebra sono fondamentali le proprietà che collegano simboli e operazioni. Per analizzare queste proprietà, in qualche caso risulta più espressiva l'interpretazione legata ai circuiti, in altri casi quelle legate alla logica o agli insiemi.

Ecco alcune proprietà che si scoprono facilmente basandosi sui circuiti.

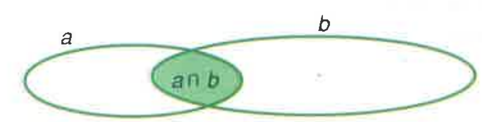
I. *Si esamina l'espressione* $a \cdot 1$
In quest'espressione si ha che (fig. 2):
a è un interruttore;
1 è l'interruttore sempre chiuso;
$a \cdot 1$ è il circuito ottenuto collegando in serie a e 1.
Questo circuito si comporta come il circuito con il solo interruttore a; risulta quindi:
$a \cdot 1 = a$ per qualunque a

Figura 1
Analogia fra circuiti, connettivi e insiemi



L si accende solo se sono chiusi *a* e *b*

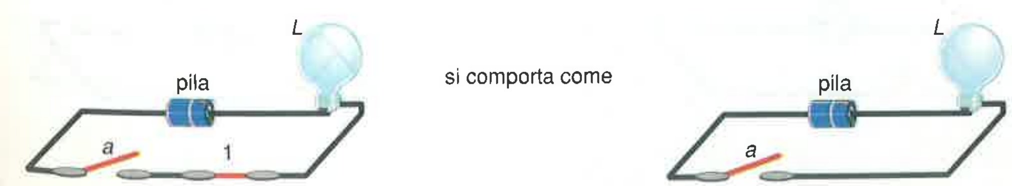
a	b	a and b
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0



$a \cap b$ è formato dagli elementi che appartengono ad a e b

a	b	$a \wedge b$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Figura 2
Nell'algebra di Boole $a \cdot 1 = a$



II. *Si esamina l'espressione* a+0

Ora si ha che (fig. 3):
a è un interruttore;
0 è l'interruttore sempre aperto;
a+0 è il circuito ottenuto collegando in parallelo a e 0.

Questo circuito si comporta come il circuito con il solo interruttore a; perciò risulta:

$a+0=a$ per qualunque a

III. *Si esamina l'espressione* a·0

Per quest'espressione si trova che (fig. 4): un circuito che ha in serie un interruttore a e l'interruttore sempre aperto 0 si comporta come il circuito con il solo interruttore 0; perciò risulta:

$a \cdot 0=0$ per qualunque a

Si sono così trovate tre proprietà dell'algebra di Boole, che sono analoghe a proprietà dell'algebra ordinaria: il significato dei simboli è diverso, ma le formule che collegano i simboli sono identiche.
Ma, continuando a lavorare con l'algebra di Boole, è facile scoprire delle proprietà del tutto nuove. Ecco un esempio.

IV. *Si esamina l'espressione* a+1

L'espressione descrive un circuito che ha in parallelo l'interruttore a e l'interruttore sempre chiuso 1 (fig. 5); questo circuito si comporta come il circuito con il solo interruttore 1. Risulta dunque:

$a+1=1$ per qualunque a

Algebra di Boole e algebra ordinaria

La nuova algebra inventata da Boole presenta molti aspetti innovativi: i simboli abituali cambiano significato e proprietà del tutto inconsuete si uniscono alle note proprietà delle operazioni.
Non è possibile lavorare nell'algebra di Boole senza prestare molta attenzione al significato dei vari simboli; perfino il consueto simbolo «=» cambia significato:
- nei circuiti «=» collega due circuiti che si comportano nello stesso modo;
- nella logica «=» collega due proposizioni che hanno la stessa tavola di verità;
- negli insiemi «=» collega due insiemi formati dagli stessi elementi.

C'è un'altra riflessione da non trascurare: l'algebra di Boole è stata fondamentale nello sviluppo dei calcolatori (fig. 6).
Proprio questa stretta interazione fra teoria e applicazioni è forse uno degli aspetti più affascinanti della ricerca matematica.
Il paragrafo successivo sarà appunto dedicato ad un esame più approfondito delle proprietà dell'algebra di Boole.

Verifiche

Conoscenze

① Elencare le tre interpretazioni dei seguenti simboli nell'algebra di Boole:

lettere a, b	0	1
$a+b$	$a \cdot b$	=

Comprensione

① Verificare che risulta:
$a+0=a$
basandosi sulle tre interpretazioni dell'algebra di Boole.

② Verificare che risulta:
$a \cdot 0=0$
basandosi sulle tre interpretazioni dell'algebra di Boole.

③ Verificare che risulta:
$a \cdot 1=a$
basandosi sulle tre interpretazioni dell'algebra di Boole.

④ Verificare che risulta:
$a+1=1$
basandosi sulle tre interpretazioni dell'algebra di Boole.

Applicazioni

① Verificare che nell'algebra di Boole vale la seguente proprietà:
$a+\bar{a}=1$

② Verificare che nell'algebra di Boole vale la seguente proprietà:
$a \cdot \bar{a}=0$

Figura 3
Nell'algebra di Boole *a*+0=*a*

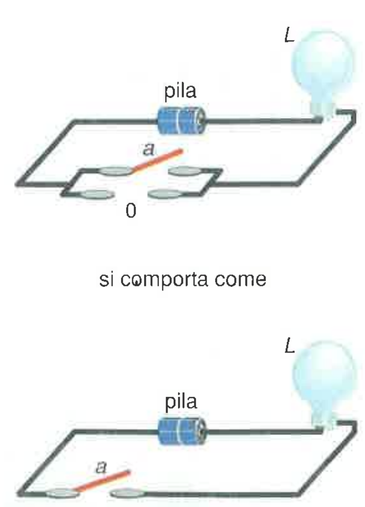


Figura 4
Nell'algebra di Boole *a* 0=0

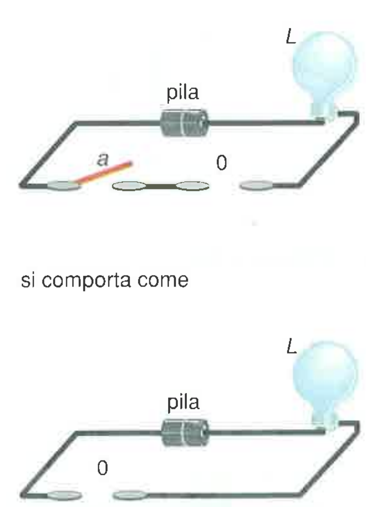


Figura 5
Nell'algebra di Boole *a*+1=1

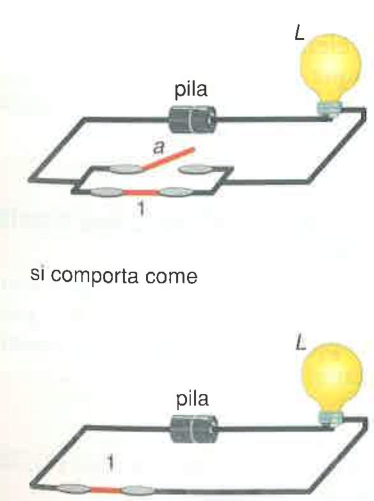


Figura 6
Un circuito integrato. I circuiti dei calcolatori si basano sull'algebra di Boole

5 Le proprietà dell'algebra di Boole

Questo paragrafo è dedicato a completare il paragrafo precedente per scoprire le proprietà che caratterizzano l'algebra di Boole. Si tratta di proprietà che risultano evidenti basandosi sull'interpretazione insiemistica.
Le più semplici da scoprire sono la proprietà commutativa e la proprietà associativa, analoghe alle note proprietà dell'algebra ordinaria.

Proprietà commutativa

È facile scoprire che risulta:

$a+b = b+a$ per qualunque a e b

Basta pensare che l'unione di due insiemi è sempre lo stesso insieme, indipendentemente dall'ordine in cui sono considerati i due insiemi.

Con considerazioni analoghe alle precedenti si trova che risulta:

$a \cdot b = b \cdot a$ per qualunque a e b

Si può dunque concludere che *nell'algebra di Boole vale la proprietà commutativa dell'addizione e della moltiplicazione.*

Proprietà associativa

Ragionando in modo analogo si trova che:

$(a+b)+c=a+(b+c)$ per qualunque a, b, c

Infatti, l'unione di tre insiemi è sempre lo stesso insieme, indipendentemente dal modo in cui sono associati i singoli insiemi.
Lo stesso ragionamento si può ripetere per l'intersezione di tre insiemi, trovando che risulta: $(a \cdot b) \cdot c=a \cdot (b \cdot c)$ per qualunque a, b, c

Si può dunque concludere che *nell'algebra di Boole vale la proprietà associativa dell'addizione e della moltiplicazione.*

Proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione

Avendo trovato le proprietà commutativa e associativa, viene l'idea di ricercare l'analoga della proprietà distributiva e cioè:

$$a \cdot (b+c)=a \cdot b+a \cdot c$$

Pensando alle operazioni fra insiemi (fig. 1); si ha che:

- il primo membro indica l'insieme $a \cap (b \cup c)$;
- il secondo membro indica invece l'insieme $(a \cap b) \cup (a \cap c)$.

La fig. 1 mostra che i due insiemi sono formati dagli stessi elementi.
Si può dunque concludere che *nell'algebra di Boole vale la proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione.*

Proprietà distributiva dell'addizione rispetto alla moltiplicazione

L'algebra di Boole, come si è già visto nel paragrafo precedente (cfr. p. 308), presenta anche delle proprietà del tutto inconsuete, fra cui la seguente:

$$a+(b \cdot c)=(a+b) \cdot (a+c)$$

Infatti, pensando ancora alle operazioni fra insiemi (fig. 2), si ha che:

- il primo membro indica l'insieme $a \cup (b \cap c)$;
- il secondo membro indica invece l'insieme $(a \cup b) \cap (a \cup c)$.

La fig. 2 mostra che i due insiemi sono formati dagli stessi elementi.
Così si trova che *nell'algebra di Boole, contrariamente a quanto accade nell'algebra ordinaria, vale anche la proprietà distributiva dell'addizione rispetto alla moltiplicazione.*

Figura 1
Proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione

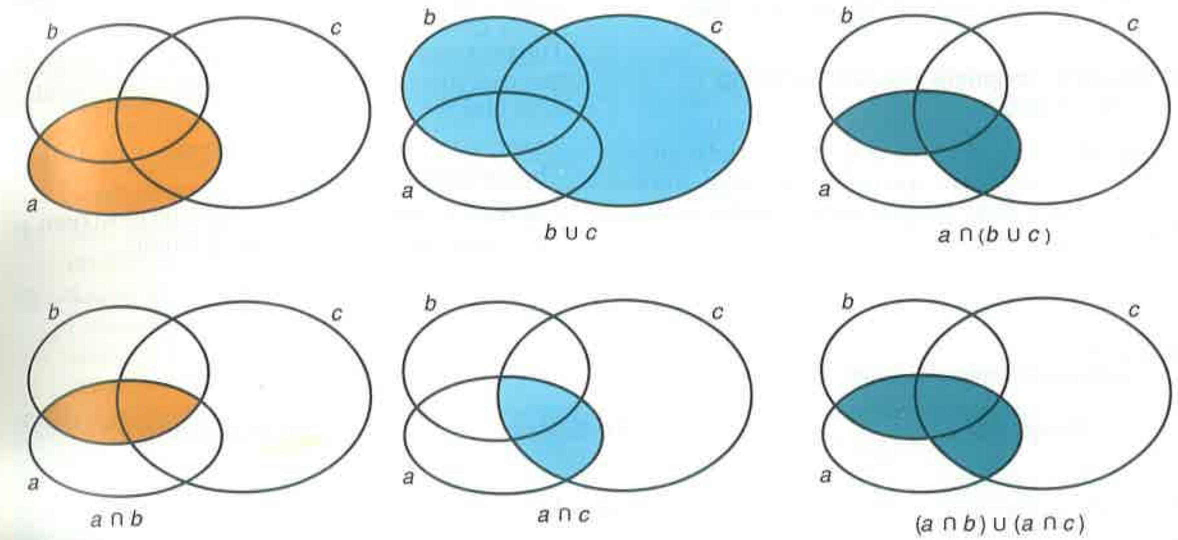
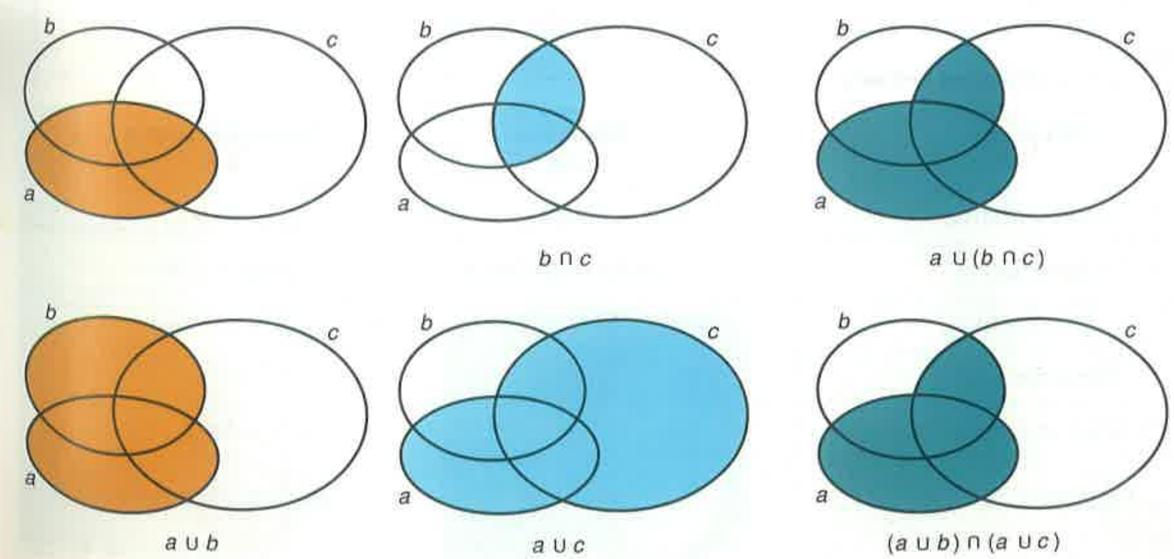


Figura 2
Proprietà distributiva dell'addizione rispetto alla moltiplicazione



Proprietà della negazione (e complementazione)

Il simbolo $\bar{a}$, caratteristico solo dell'algebra di Boole, porta altre proprietà inusuali; si ha:

$$a+\bar{a}=1 \qquad a\cdot\bar{a}=0$$

Si tratta di proprietà facili da scoprire pensando sempre alle operazioni fra insiemi (fig. 3):

- l'unione di un insieme con il suo complementare è l'insieme universo U;
- l'intersezione di un insieme con il suo complementare non contiene alcun elemento.

Sintesi delle proprietà che caratterizzano l'algebra di Boole

Nella tabella A si trova una sintesi delle proprietà presentate in questi ultimi due paragrafi; si tratta delle proprietà che caratterizzano l'algebra di Boole.

Confronto con le proprietà dell'algebra ordinaria

Vale la pena ora di rivedere le proprietà dell'algebra ordinaria per effettuare un confronto e qualche riflessione (tabella B).

Confrontando le due tabelle viene spontanea un'osservazione: nell'algebra ordinaria la moltiplicazione presenta delle proprietà in più rispetto all'addizione; nell'algebra di Boole invece si trovano le stesse proprietà per addizione e moltiplicazione.

Tuttavia nessuna delle due algebre è «migliore» dell'altra; sono invece tutte e due valide, ciascuna nel proprio ambito:

- operando con i numeri razionali, vale l'algebra ordinaria;
- operando con interruttori, con proposizioni o con insiemi, vale l'algebra di Boole.

Tabella A
Le proprietà dell'algebra di Boole

Proprietà	Addizione $a+b$	Moltiplicazione $a\cdot b$
Commutativa	$a+b=b+a$	$a\cdot b=b\cdot a$
Associativa	$(a+b)+c=a+(b+c)$	$(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$
Distributiva	$a+(b\cdot c)=(a+b)\cdot(a+c)$	$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$
Elemento neutro	$a+0=a$	$a\cdot 1=a$
Elemento assorbente	$a+1=1$	$a\cdot 0=0$
Negazione	$a+\bar{a}=1$	$a\cdot\bar{a}=0$

Tabella B
Le proprietà dell'algebra ordinaria

Proprietà	Addizione $a+b$	Moltiplicazione $a\cdot b$
Commutativa	$a+b=b+a$	$a\cdot b=b\cdot a$
Associativa	$(a+b)+c=a+(b+c)$	$(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$
Distributiva		$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$
Elemento neutro	$a+0=a$	$a\cdot 1=a$
Elemento assorbente		$a\cdot 0=0$
Opposto e inverso	$a+(-a)=0$	$a\cdot\frac{1}{a}=1$ (con $a\neq 0$)

Verifiche

Conoscenze

① Elencare le proprietà valide nell'algebra di Boole.

② Elencare le proprietà valide nell'algebra ordinaria.

Comprensione

① Elencare le proprietà dell'algebra di Boole che non valgono nell'algebra ordinaria.

② Elencare le proprietà dell'algebra ordinaria che non valgono nell'algebra di Boole.

③ Nell'algebra di Boole c'è l'opposto o l'inverso di un elemento?

④ Nell'algebra ordinaria c'è la negazione di un dato numero?

⑤ Spiegare perché nell'algebra di Boole l'elemento $\bar{a}$ non può essere considerato analogo né all'opposto né al reciproco di un dato elemento a.

⑥ Spiegare perché nell'algebra ordinaria né l'opposto né il reciproco di un dato numero a possono essere considerati l'analogo della negazione di a.

Applicazioni

① Verificare che nell'algebra di Boole si ha:

$$1+1=1$$

② Verificare che nell'algebra di Boole risulta:

$$a+a=a$$

Interpretare il risultato ottenuto dal punto di vista insiemistico e logico.
Applicare la proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione per sviluppare la seguente espressione:

$$a+a=a\cdot 1+a\cdot 1=\ldots$$

③ Verificare che nell'algebra di Boole risulta:

$$a\cdot a=a$$

Interpretare il risultato ottenuto dal punto di vista insiemistico e logico.
Applicare la proprietà distributiva dell'addizione rispetto alla moltiplicazione per sviluppare la seguente espressione:

$$a\cdot a=(a+0)\cdot(a+0)=\ldots$$

Figura 3
Nell'algebra di Boole $a+\bar{a}=1$

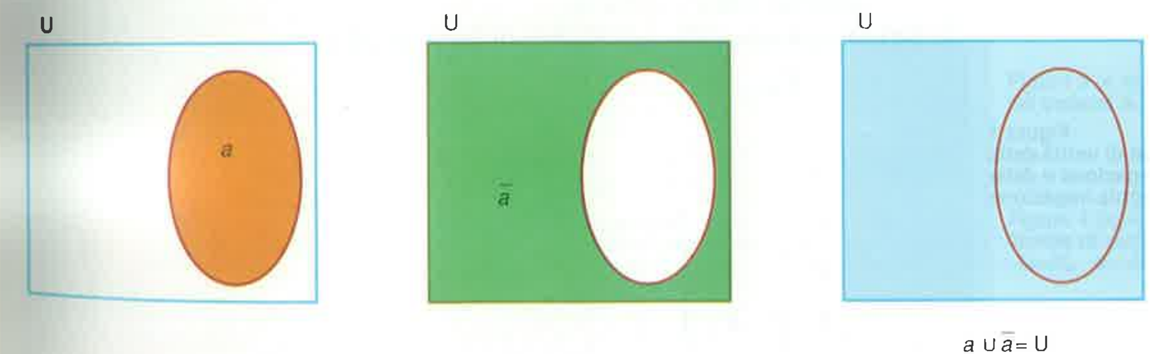
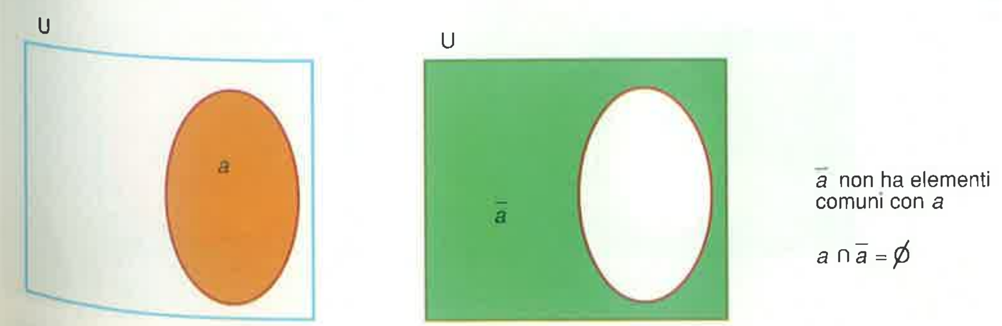


Figura 4
Nell'algebra di Boole $a\cdot\bar{a}=0$



Scheda informativa

Le leggi di De Morgan

De Morgan e Peirce continuano l'opera di Boole

Altri due grandi matematici del XIX secolo, l'inglese Augustus De Morgan (1806-1871) e l'americano Benjamin Peirce (1809-1880), continuarono l'opera di Boole dopo la sua morte (cfr. anche la scheda storica, p. 319).

Fra le indagini condotte da questi matematici sono particolarmente interessanti e ricche di applicazioni quelle sul ruolo della negazione, collegata anche con gli altri connettivi.

Applicare due volte la negazione

È facile scoprire che cosa succede applicando due volte la negazione.

- *In logica* è noto che «due negazioni affermano» e la tabella di fig. 1 conferma che, data una proposizione a, risulta che $\sim(\sim a)$ ha *la stessa tabella di verità della proposizione* a.
- *Negli insiemi* si trova subito che (fig. 2) il complementare del complementare di un insieme a è ancora l'insieme a, cioè si ha che *l'insieme* $\bar{\bar{a}}$ *coincide con l'insieme* a.

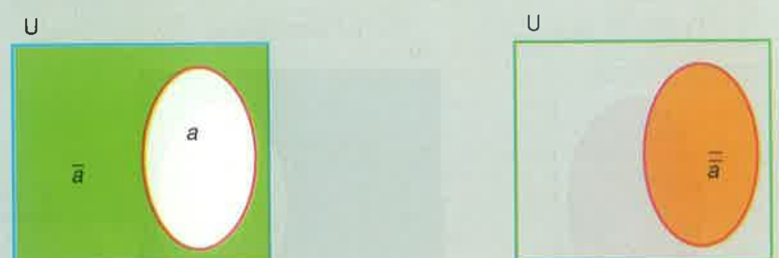
In definitiva si trova che nell'algebra di Boole risulta:

$$\bar{\bar{a}} = a$$

Figura 1
Tavola di verità della negazione e della doppia negazione

a	$\sim a$	$\sim(\sim a)$
V	F	V
F	V	F

Figura 2
Insieme complementare del complementare



Negazione e addizione

Conviene basarsi sull'interpretazione insiemistica per scoprire il risultato dell'espressione

$$\overline{a+b}$$

ottenuta collegando due elementi con l'addizione e negando il risultato.

A partire da due insiemi a e b, contenuti nello stesso insieme U, si procede così (fig. 3):

1. si trova l'insieme $a \cup b$;
2. si trova il complementare di questo insieme.

La fig. 3 suggerisce però che si arriva allo stesso insieme finale con le seguenti operazioni:

1. si trova l'insieme $\bar{a}$ complementare di a;
2. si trova l'insieme $\bar{b}$, complementare di b;
3. si calcola l'intersezione dei due insiemi, cioè $\bar{a} \cap \bar{b}$.

Si trova così che, nell'algebra di Boole, vale la legge:

$$\overline{a+b} = \bar{a} \cdot \bar{b}$$

I connettivi «non», «e»

Nel linguaggio della logica la legge trovata prima si scrive nella forma seguente:

$$\sim(a \vee b) = \sim a \wedge \sim b$$

verificata dalle tavole di verità di fig. 4.

In questo modo si riescono ad analizzare proposizioni composte come la seguente:

«Non è vero che 3 è divisore di 10 o di una potenza di 10»

Questa proposizione è composta a partire dalle proposizioni:

a: «3 è divisore di 10»

b: «3 è divisore di una potenza di 10»

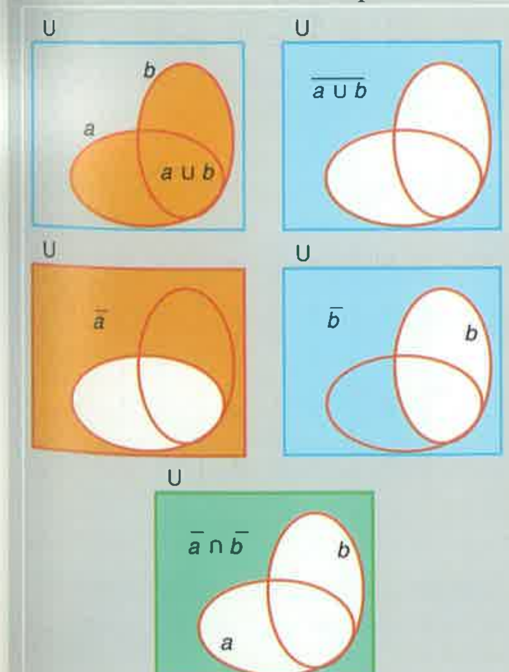


Figura 3 (a sinistra)
Gli insiemi $\overline{a \cup b}$ e $\bar{a} \cap \bar{b}$

a	b	$a \vee b$	$\sim(a \vee b)$
V	V	V	F
V	F	V	F
F	V	V	F
F	F	F	V

a	b	$\sim a$	$\sim b$	$\sim a \wedge \sim b$
V	V	F	F	F
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

Figura 4 (a destra)
Tavole di verità di $\sim(a \vee b)$, $\sim a \wedge \sim b$

e risulta appunto:

$\sim(a \vee b)$: «***Non è vero che*** 3 è divisore di 10 ***o*** 3 è divisore di una potenza di 10»

La legge scoperta prima afferma che la proposizione composta ora ottenuta è equivalente alla:

$\sim a \wedge \sim b$: «3 ***non*** è divisore di 10 ***e*** 3 ***non*** è divisore di una potenza di 10»
frase che nel linguaggio usuale assume la forma:

«3 non è divisore né di 10, né di una potenza di 10»

Negazione e moltiplicazione

Conviene ancora una volta basarsi sull'interpretazione insiemistica per scoprire il risultato dell'espressione

$$\overline{a \cdot b}$$

ottenuta collegando due elementi con la moltiplicazione e negando il risultato.

A partire da due insiemi a e b, contenuti nello stesso insieme U, si procede così (fig. 5):

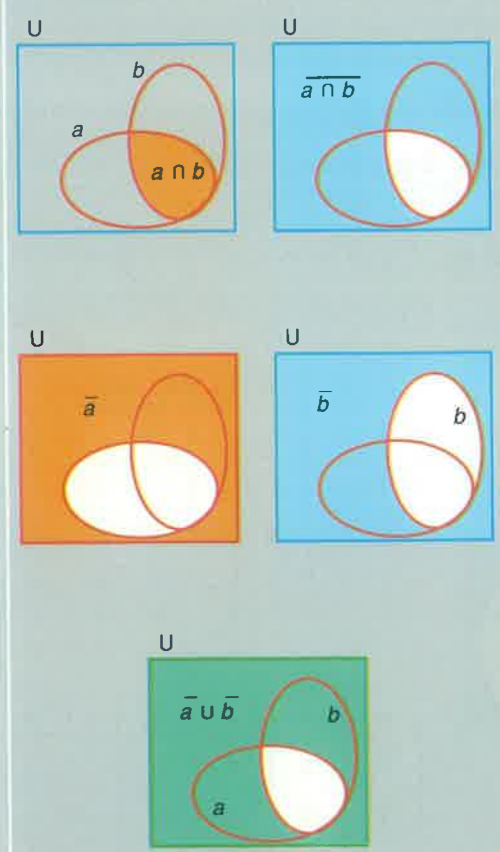


Figura 5 (a sinistra)
Gli insiemi $\overline{a \cap b}$, $\bar{a} \cup \bar{b}$

Figura 6 (a destra)
Tavole di verità di $\sim(a \wedge b)$, $\sim a \vee \sim b$

a	b	$a \wedge b$	$\sim(a \wedge b)$
V	V	V	F
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	V

a	b	$\sim a$	$\sim b$	$\sim a \vee \sim b$
V	V	F	F	F
V	F	F	V	V
F	V	V	F	V
F	F	V	V	V

1. si trova l'insieme $a \cap b$;
2. si trova il complementare di questo insieme.

La figura suggerisce ora che si arriva allo stesso insieme finale con le seguenti operazioni:

1. si trova l'insieme $\bar{a}$, complementare di a;
2. si trova l'insieme $\bar{b}$, complementare di b;
3. si calcola l'unione dei due insiemi, cioè $\bar{a} \cup \bar{b}$.

Si trova così che, nell'algebra di Boole, vale anche la seguente legge:

$$\overline{a \cdot b} = \bar{a} + \bar{b}$$

I connettivi «non», «o»

Nel linguaggio della logica la precedente legge si scrive nella forma seguente:

$$\sim(a \wedge b) = \sim a \vee \sim b$$

verificata dalle tavole di verità di fig. 6.
Così si riesce ad analizzare proposizioni composte come la seguente:

«Non è vero che un rombo ha uguali gli angoli e i lati»

Questa proposizione è composta a partire dalle proposizioni:

a: «un rombo ha gli angoli uguali»

b: «un rombo ha i lati uguali»

e risulta appunto:

$\sim(a \wedge b)$: «***Non è vero*** che un rombo ha gli angoli uguali ***e*** un rombo ha i lati uguali»

La legge scoperta prima afferma che la proposizione composta ora ottenuta è equivalente alla:

$\sim a \vee \sim b$: «Un rombo *non* ha gli angoli uguali ***o*** un rombo *non* ha i lati uguali»

Queste due ultime proposizioni sembrano lontane dal linguaggio usuale, invece potrebbero comparire in un dialogo come il seguente:

«Non è vero che un rombo ha uguali i lati **e** gli angoli».

«Hai ragione, però non ricordo se il rombo non ha uguali i lati **o** gli angoli ».

Le leggi di De Morgan

Si è così trovato che, nell'algebra di Boole, valgono le seguenti leggi:

$\overline{a+b} = \bar{a} \cdot \bar{b}$ ossia $\sim(a \vee b) = \sim a \wedge \sim b$

$\overline{a \cdot b} = \bar{a} + \bar{b}$ ossia $\sim(a \wedge b) = \sim a \vee \sim b$

Queste leggi furono scoperte indipendentemente da Peirce e da De Morgan; sono però note con il nome di *leggi di De Morgan*.

L'algebra di Boole con due sole operazioni

Le leggi di De Morgan hanno avuto una notevole importanza nello sviluppo dell'algebra di Boole, soprattutto quando sono state considerate insieme alla doppia negazione.

Ecco come si può arrivare ad un'importante scoperta: si fissa l'attenzione, per esempio, sulla prima formula e si considera la negazione dei due membri. Si ha:

$$\overline{\overline{a+b}} = \overline{\bar{a}\cdot\bar{b}}$$

Ma, in base alla proprietà della doppia negazione, si ha:

$$\overline{\overline{a+b}} = a+b$$

e quindi:

$$a+b = \overline{\bar{a}\cdot\bar{b}}$$

Questa uguaglianza porta due importanti conseguenze:

- *l'operazione di addizione si può ottenere mediante le operazioni di negazione e moltiplicazione;*
- *l'algebra di Boole si può dunque costruire con due sole operazioni: moltiplicazione e negazione.*

In modo del tutto analogo si trova che risulta:

$$a\cdot b = \overline{\bar{a}+\bar{b}}$$

e perciò *tutta l'algebra di Boole si può costruire con le due sole operazioni di addizione e negazione.*

Le leggi di De Morgan e la conseguente possibilità di diminuire il numero di operazioni necessarie per sviluppare l'algebra di Boole hanno avuto importanza anche nello sviluppo dei circuiti, tanto che sono stati creati degli appositi termini tecnici:

nand, che abbrevia *not and*, per il circuito (fig. 7) che realizza:

$$\overline{a\cdot b}$$

nor, abbreviazione di *not or*, per il circuito (fig. 8) che realizza:

$$\overline{a+b}$$

Figura 7
Simbolo del circuito *nand*

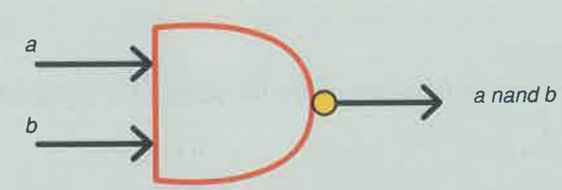
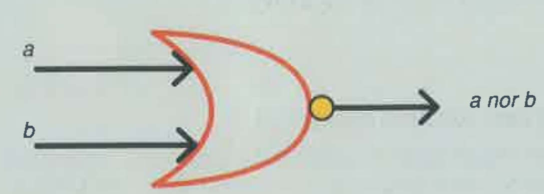


Figura 8
Simbolo del circuito *nor*



Logica, calcolo meccanico e insiemi nella storia dell'algebra di Boole

Le tre interpretazioni dell'algebra di Boole

In questo capitolo è stata sviluppata una nuova algebra, valida in tre settori scientifici:

- la logica;
- i circuiti;
- gli insiemi.

Questa scheda è dedicata appunto alle origini di questi tre filoni di ricerca.

Boole e le «leggi del pensiero»

Nel 1854 George Boole (1815-1864) pubblica un libro che diventa presto famoso: *The laws of thought*, cioè «Le leggi del pensiero».

In quest'opera si trovano gli sviluppi logici della «sua» algebra in una forma molto vicina a quella presentata nel paragrafo 2.

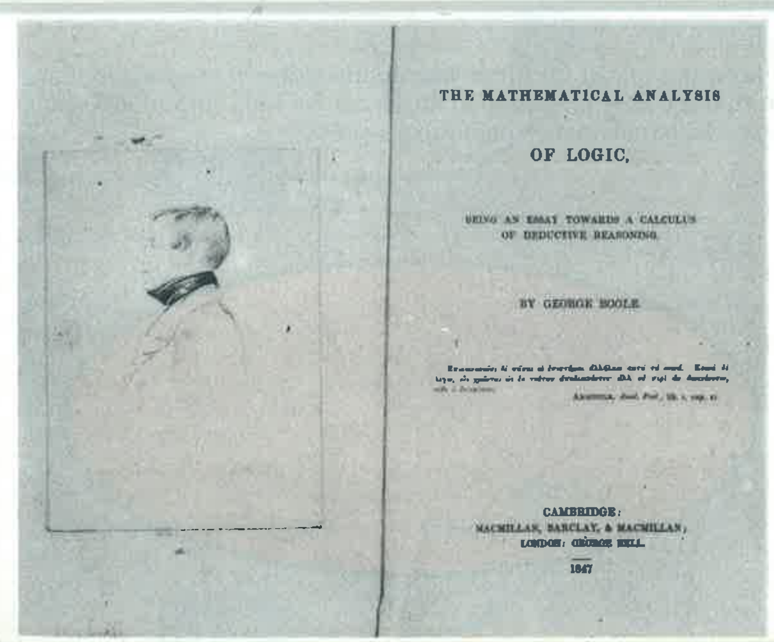


Figura 1
Un famoso libro di Boole

È proprio nelle prime pagine di questo libro Boole dichiara il suo ambizioso obiettivo: «indagare le leggi fondamentali delle operazioni della mente per mezzo delle quali si attua il ragionamento, [...] per ricavare indicazioni sulla natura e sulla costituzione della mente umana».

Si tratta quindi di un obiettivo più generale di quello strettamente logico-matematico.

Jevons e la prima macchina logica

Nella seconda metà dell'Ottocento *Le leggi del pensiero* diventano un punto di riferimento fondamentale: ogni scienziato legge l'opera di Boole da un particolare punto di vista.

L'inglese Stanley Jevons (1832-1882) fu il primo a capire che l'algebra di Boole era riducibile a regole meccaniche e, sulla base di questa osservazione, costruì una macchina logica, che realizzò nel 1869.

Jevons anticipa così quello che sarà realizzato nel 1946, data della costruzione del primo calcolatore elettronico.

Venn e gli insiemi

Qualche anno dopo il logico inglese John Venn (1834-1923), nel suo volume *Symbolic logic* («Logica simbolica», 1881), usa per primo il termine «logica simbolica». Con questo termine vuole mettere in evidenza che logica e matematica si valgono di simboli legati da alcune leggi di combinazione comuni.

Questo giustifica l'adozione di un comune sistema di simboli, fra i quali si trova una particolare rappresentazione grafica, chiamata poi «diagramma di Venn»: è la nota rappresentazione di un insieme con una linea chiusa (fig. 2).

I tre filoni di ricerca generati dall'algebra di Boole

Intorno al 1880 si trovano dunque tre filoni di ricerca generati dall'algebra di Boole:

- la logica;
- il calcolo meccanico;
- gli insiemi.

Da quel momento questi tre filoni si sviluppano in modo incredibilmente rapido, ora separati, ora collegati, portando ad alcuni fra i più importanti risultati teorici e applicativi della matematica del nostro secolo.

Figura 2 Diagramma di Venn

Che cosa bisogna sapere

A. Circuiti logici

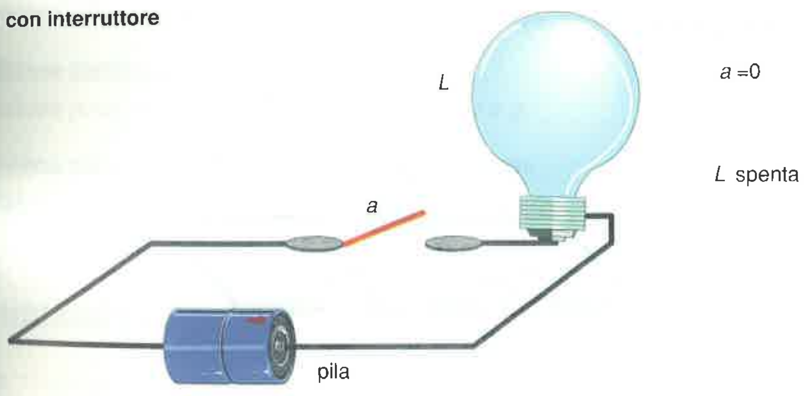
Circuito elementare

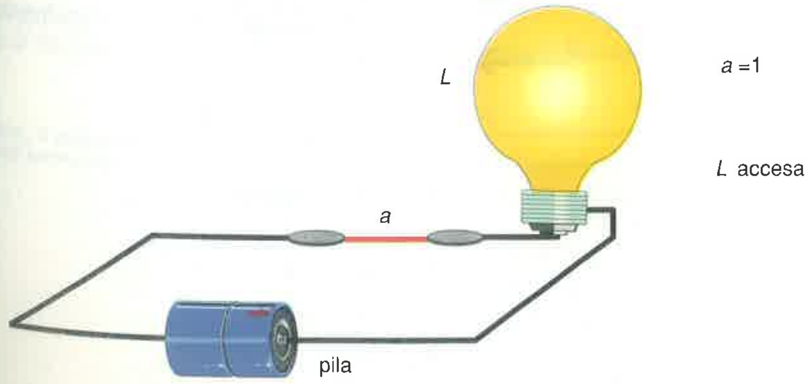
Circuito con lampadina L e interruttore a, che può trovarsi in due condizioni (o stati):

$a=1$ [a chiuso e quindi L *accesa*]

$a=0$ [a aperto e quindi L *spenta*]

Circuito con interruttore

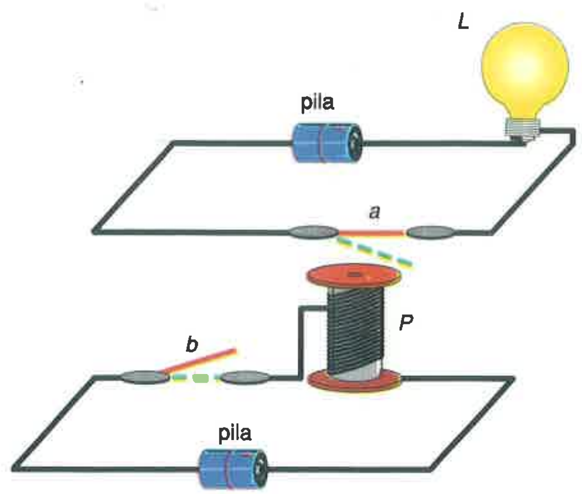




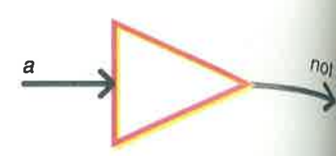
Circuito *not*

Circuito con *invertitore*: con *a* chiuso si ottiene *not a* aperto e viceversa.

Invertitore



Circuito *not*

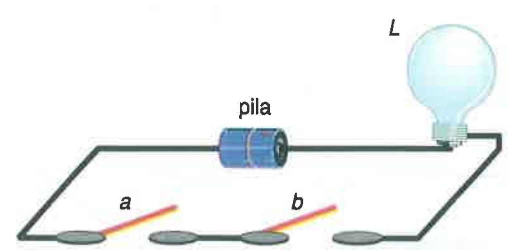


a	not a
0	1
1	0

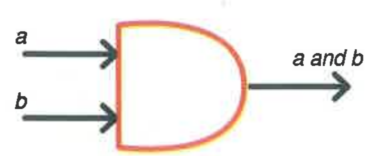
Circuito *and*

Circuito con una lampadina *L* e due interruttori – *a*, *b* – *in serie*: *L* è accesa solo con i due interruttori chiusi.

Due interruttori in serie



Circuito *and*

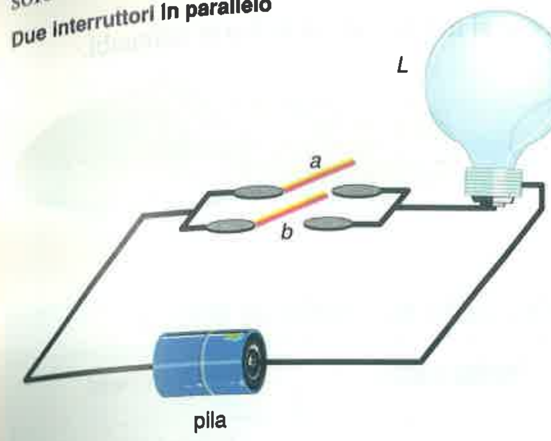


a	b	a and b
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

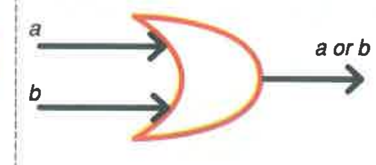
Circuito *or*

Circuito con una lampadina *L* e due interruttori – *a*, *b* – *in parallelo*: *L* è spenta solo con i due interruttori aperti.

Due interruttori in parallelo



Circuito *or*



a	b	a or b
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

B. Connettivi logici

Proposizione
Frase *p* che è vera (V) o falsa (F).

Proposizione composta con il connettivo «non»
Proposizione $\sim p$ ottenuta negando una proposizione *p*.

Proposizione composta con il connettivo «e»
Proposizione $p \wedge q$, che è vera solo se sono vere *p* ***e*** *q*.

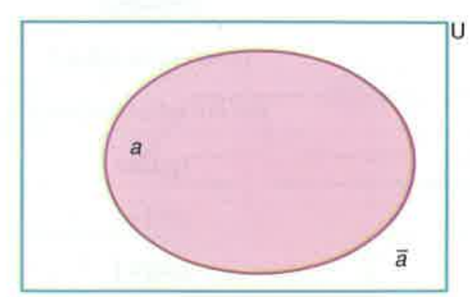
Proposizione composta con il connettivo «o inclusiva»
Proposizione $p \vee q$, che è vera se è vera *p* ***o*** *q* ***o*** entrambe.

C. Operazioni fra insiemi

Insieme
Parte *a* di un insieme U, chiamato *insieme universo*.

Complementare di un insieme
Insieme $\bar{a}$ formato dagli elementi di U che ***non*** appartengono a *a*.

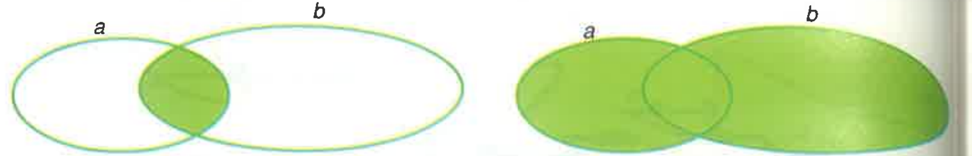
Un insieme, il suo complementare e l'insieme universo



Intersezione di due insiemi
Insieme $a \cap b$ formato dagli elementi che si trovano in *a* **e** in *b*.

Unione di due insiemi
Insieme $a \cup b$ formato dagli elementi che si trovano in *a* **o** in *b* **o** in entrambi.

Intersezione e unione di due insiemi



D. L'algebra di Boole

INTERPRETAZIONI DELL'ALGEBRA DI BOOLE

Significato dei simboli	Nei circuiti	Nella logica	Negli insiemi
Lettere *a*, *b*	Una lettera indica un interruttore (a)	Una lettera indica una proposizione *a*: «Piove» *b*: «Esco»	Una lettera indica un insieme (b)
a+b	a, b, a or b	$a \vee b$: «Piove **o** esco»	a∪b (a, b)
a·b	a, b, a and b	$a \wedge b$: «Piove **e** esco»	a∩b
$\bar{a}$	a, not a	$\sim a$: «*non* piove»	a, $\bar{a}$, U
1	1	Una proposizione *v* sempre vera *v*: «Il triangolo ha tre lati»	a, $\bar{a}$, U
0	0	Una proposizione *f* sempre falsa *f*: «Il quadrato ha tre lati»	∅ insieme che non ha elementi

E. Le proprietà dell'algebra di Boole

Proprietà dell'algebra di Boole	Addizione *a+b*	Moltiplicazione *a·b*
Commutativa	$a+b=b+a$	$a \cdot b=b \cdot a$
Associativa	$(a+b)+c=a+(b+c)$	$(a \cdot b) \cdot c=a \cdot (b \cdot c)$
Distributiva	$a+(b \cdot c)=(a+b) \cdot (a+c)$	$a \cdot (b+c)=a \cdot b+a \cdot c$
Elemento neutro	$a+0=a$	$a \cdot 1=a$
Elemento assorbente	$a+1=1$	$a \cdot 0=0$
Negazione	$a+\bar{a}=1$	$a \cdot \bar{a}=0$

Che cosa bisogna saper fare

A. Circuiti logici

Descrivere un circuito con una formula

Attività 1

Descrivere con una formula il circuito rappresentato in fig. 1.

- *I due interruttori* a, b *sono in parallelo, cioè si ha:*

  a ... b

- *l'interruttore* c *è in serie ai primi due, perciò si ha:*

  (a ... b) ... c

In quali casi si accende la lampadina *L*?

Attività 2

Descrivere con una formula il circuito di fig. 2, procedendo in modo analogo al caso precedente.

Figura 1
Un circuito con 3 interruttori

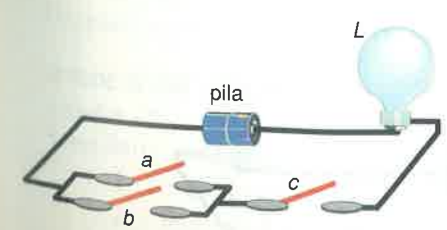
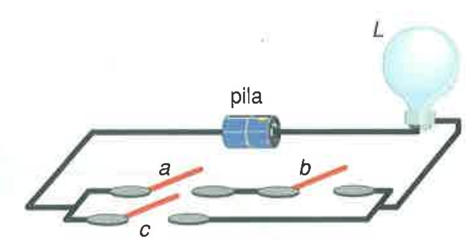


Figura 2
Un altro circuito con 3 interruttori



Progettare un circuito a partire da una formula

Attività 3
È data la formula:

$(a \text{ and } b) \text{ or } (c \text{ and } d)$

Per disegnare il corrispondente circuito si può ragionare così:
- si disegna il circuito a *and* b, disponendo due interruttori a, b in serie;
- si disegna il circuito c *and* d, disponendo due interruttori c, d in serie;
- si collegano i primi due circuiti in parallelo.

Completare la fig. 3 con le lettere.
Elencare i casi in cui la lampadina L si accende.

Attività 4
Seguendo un procedimento analogo, disegnare il circuito descritto dalla formula:

$(a \text{ or } b) \text{ and } (c \text{ or } d)$

Elencare i casi in cui la lampadina L si accende.

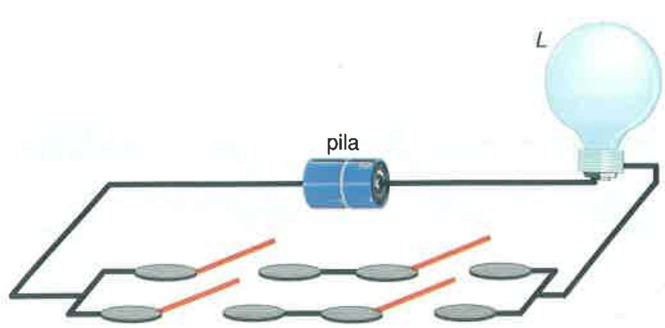
B. Connettivi logici

Sulla negazione

Attività 5
Completare la tabella seguente:

Proposizione p	Proposizione $\sim p$
4 è un numero pari (V)	4 *non* è un numero pari (F)
5 è un numero pari (...)	
	Non si può dividere per 0 (...)
	(V)
(V)	

Figura 3
Un circuito con 4 interruttori



Sul connettivo «e»

Attività 6
Sono date le seguenti proposizioni:

p: «Un triangolo è una figura piana» (V)
q: «Un triangolo ha tre angoli» (F)

Completare le righe lasciate incomplete:

$p \wedge q$: «Un triangolo è una figura piana con tre angoli» (V)
........: «Non è vero che un triangolo è una figura piana con tre angoli» (....)
$\sim p \wedge q$: «Un triangolo non è una figura piana, ma ha tre angoli» (....)
$p \wedge \sim q$: «...» (....)

Attività 7
Ripetere l'esercizio precedente a partire da altre due proposizioni scelte a piacere.

Sul connettivo «o»

Attività 8
Sono date le seguenti proposizioni:

p: «Un quadrato ha quattro lati» (V)
q: «Un quadrato ha il perimetro doppio del lato» (F)

Completare le righe lasciate incomplete:

$p \vee q$: «Un quadrato ha quattro lati o il perimetro doppio del lato» (V)
$\sim(p \vee q)$: «Non è vero che ....» (....)
$\sim p \vee q$: «Un quadrato non ha quattro lati, ma ha il perimetro doppio del lato» (....)
$p \vee \sim q$: «...» (....)

Attività 9
Ripetere l'esercizio precedente a partire da altre due proposizioni scelte a piacere.

C. Insiemi

Complementare di un insieme

Attività 10
Considerare i seguenti insiemi:

U: i razionali;
a: i razionali positivi.

Da quali numeri è costituito il complementare di a?

Attività 11
Considerare i seguenti insiemi:

U: l'insieme dei triangoli;
b: l'insieme dei triangoli acutangoli.

Da quali triangoli è costituito il complementare di b?

Unione di due insiemi

Attività 12
Sono dati i seguenti insiemi:

U: l'insieme dei trapezi;
a: l'insieme dei trapezi isosceli;
b: l'insieme dei trapezi rettangoli.

- Rappresentare gli insiemi indicati.

- Descrivere graficamente e a parole gli insiemi seguenti:

$$a \cup b \qquad \bar{a} \cup b \qquad a \cup \bar{b} \qquad \overline{a \cup b}$$

Attività 13
«Inventare» due insiemi a e b nell'insieme U dei quadrilateri, disegnarli e descrivere gli insiemi seguenti:

$$a \cup b \qquad \bar{a} \cup b \qquad a \cup \bar{b} \qquad \overline{a \cup b}$$

Intersezione di due insiemi
Attività 14
Sono dati i seguenti insiemi:

U: insieme dei naturali;
a: insieme dei divisori di 12;
b: insieme dei divisori di 30.

- Rappresentare gli insiemi indicati.
- Descrivere graficamente e a parole i seguenti insiemi:

$$a \cap b \qquad \bar{a} \cap b \qquad a \cap \bar{b} \qquad \overline{a \cap b}$$

Attività 15
«Inventare» due insiemi a e b nell'insieme U degli interi, disegnarli e descrivere i seguenti insiemi:

$$a \cup b \qquad \bar{a} \cup b \qquad a \cup \bar{b} \qquad \overline{a \cup b}$$

D. Algebra di Boole

L'attività fondamentale da svolgere sull'algebra di Boole è quella di sviluppare delle espressioni, seguendo le regole. Ecco due esempi.
Attività 16
Sviluppare:

$$a+a \cdot b$$

Uno schema del procedimento da seguire può essere il seguente:

$a+a \cdot b=a \cdot 1+a \cdot b$	proprietà ....
$a \cdot 1+a \cdot b=a \cdot (b+1)$	proprietà ....
$a \cdot (b+1)=a \cdot 1$	proprietà ....
$a \cdot 1=a$	proprietà ....

In definitiva risulta:

$$a+a \cdot b=a$$

Attività 17
Sviluppare:

$$a+\bar{a}b$$

....	distributiva dell'addizione rispetto alla moltiplicazione
....	proprietà della negazione
....	elemento neutro della moltiplicazione

In definitiva risulta:

$$a+\bar{a}b=a+b$$