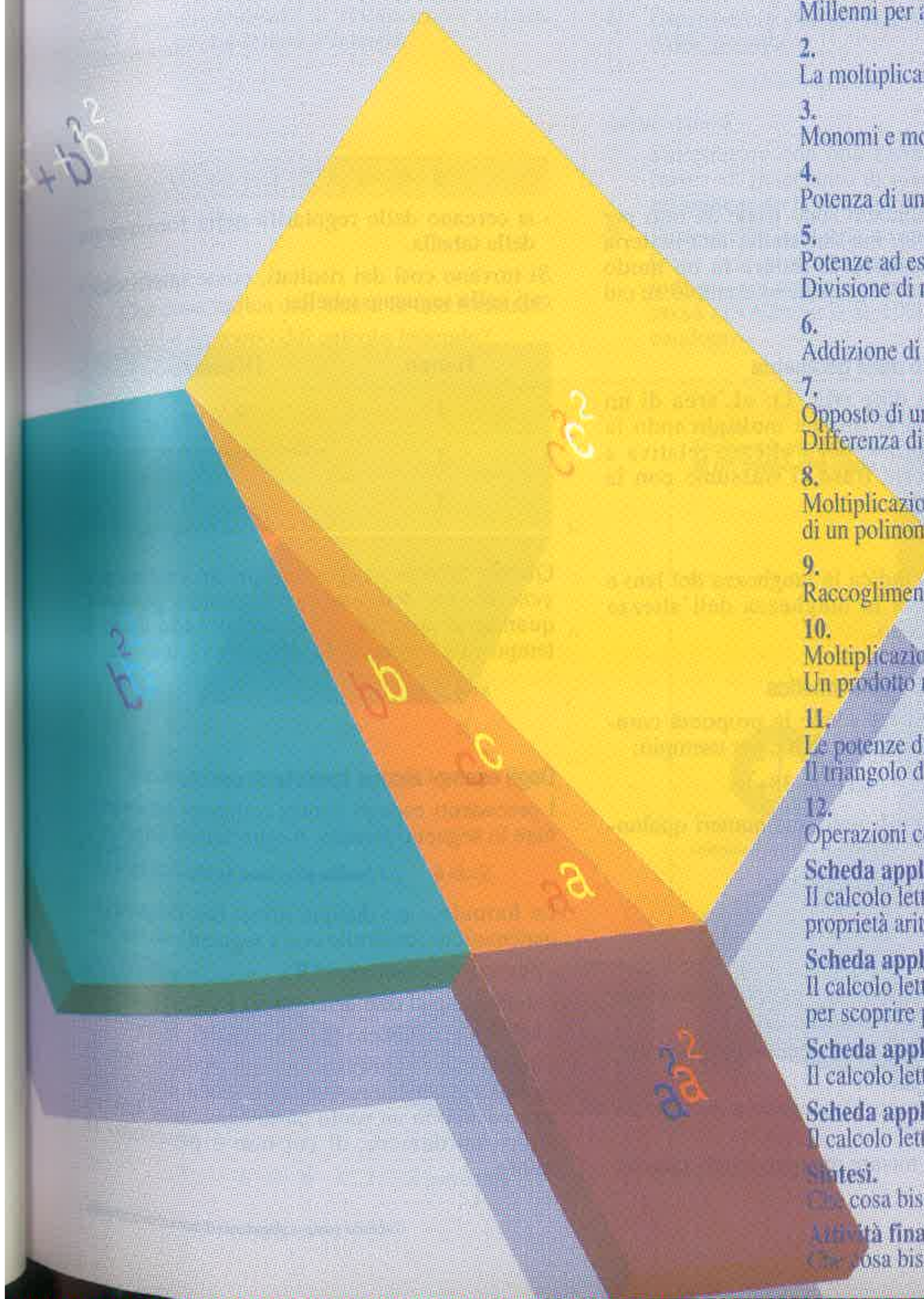
CAPITOLO SESTO

ALGEBRA: IL CALCOLO LETTERALE



1

Introduzione al calcolo letterale

Le lettere dell'alfabeto sono usate da tutti per formare le parole, ma chi studia una materia scientifica usa spesso le lettere in un modo molto particolare. Ecco qualche esempio su cui riflettere.

Un esempio tratto dalla geometria

In geometria si dice (fig. 1): «L'area di un parallelogramma si ottiene moltiplicando la lunghezza di un lato per l'altezza relativa a quel lato». Questa frase si riassume con la seguente formula:

$$S=b\cdot h$$

dove la lettera b indica la lunghezza del lato e la lettera h indica la lunghezza dell'altezza relativa al lato scelto.

Un esempio tratto dall'aritmetica

In aritmetica si dice: «Vale la proprietà commutativa dell'addizione»; si ha, per esempio:

$$3+5=5+3 \qquad 15+38=38+15$$

In generale, se a e b sono due numeri qualunque, risulta:

$$a+b=b+a$$

Un esempio tratto dalla fisica

In fisica, per studiare il movimento di un corpo che cade, si procede così (fig. 2):

- si misura la distanza (o spazio) che percorre il corpo;
- si misura il tempo impiegato a percorrere quella distanza;
- si riuniscono le misure ottenute in una tabella;
- si cercano delle regolarità nella formazione della tabella.

Si trovano così dei risultati, come quelli elencati nella seguente tabella:

Tempo	Distanza
1	$4{,}9\cdot 1^2$
2	$4{,}9\cdot 2^2$
3	$4{,}9\cdot 3^2$

Questa tabella suggerisce un *procedimento generale* per determinare la distanza percorsa, quando si conosce il tempo di caduta: se il tempo vale t secondi, la distanza s è data da:

$$s=4{,}9\cdot t^2$$

Dagli esempi alcune importanti conclusioni

I precedenti esempi hanno condotto ad esaminare le seguenti *formule* o *espressioni letterali*:

$$S=b\cdot h \qquad a+b=b+a \qquad s=4{,}9\cdot t^2$$

Le formule sono dunque «frasi del linguaggio matematico», costruite con i seguenti elementi:

- numeri (per esempio 4,9);
- simboli tipici dell'aritmetica (+ , = , etc.);
- lettere dell'alfabeto (per esempio S, b, c).

I numeri ed i simboli aritmetici mantengono il significato che hanno nell'aritmetica, ma le lettere assumono un ruolo particolare: una lettera indica un numero, di cui non è precisato il valore.

Una lettera diventa così un contenitore, dove può essere inserito un qualunque numero (fig. 3). Sviluppare i calcoli lavorando anche con le lettere è lo scopo del *calcolo letterale,* di cui si occupa questo capitolo.
Riassumendo queste considerazioni si può dire che:

- *nel calcolo letterale una lettera indica un qualunque numero di cui non è precisato il valore;*
- *nel calcolo letterale si sviluppano i calcoli lavorando con lettere e numeri.*

Verifiche

Conoscenze

① Che cosa indica una lettera in una formula?

② Qual è lo scopo del calcolo letterale?

Comprensione

① Esaminare la formula:

$$(a+b)+c=a+(b+c)$$

e indicare quali sono i simboli aritmetici che vi compaiono.

② Esprimere a parole la proprietà espressa dalla formula:

$$(a+b)+c=a+(b+c)$$

③ Esprimere a parole la proprietà espressa dalla formula:

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$$

Applicazioni

① Sintetizzare con una formula la seguente frase: «Il peso netto di una merce si ottiene sottraendo la tara dal peso lordo».

② Sintetizzare con una formula la seguente frase: «Il prezzo da pagare è il prezzo indicato sul catalogo, con l'aggiunta della tassa (IVA) che è il 19% del prezzo di catalogo».

Figura 1
L'area di un parallelogramma

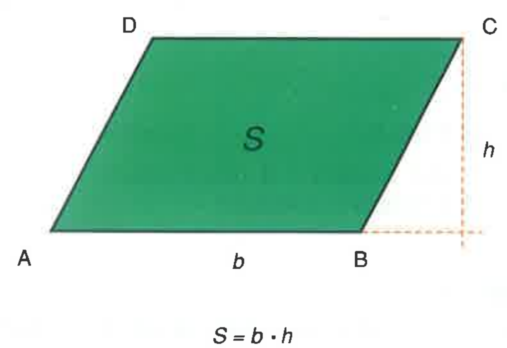


Figura 2
Studiare il movimento di un corpo che cade

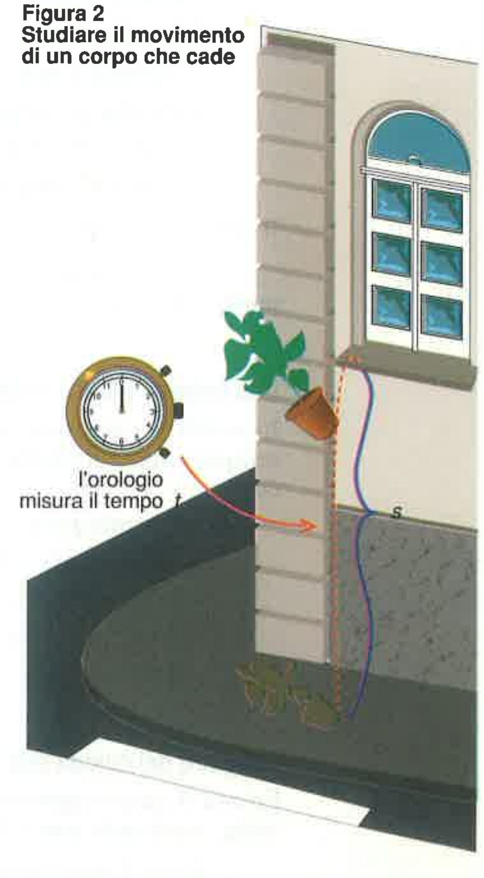
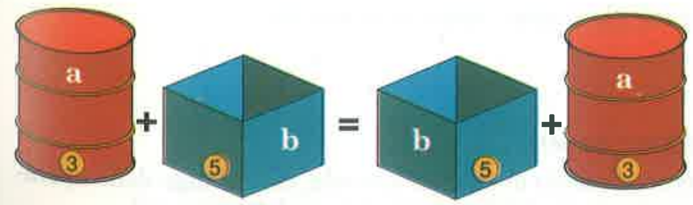


Figura 3
Una lettera è come un contenitore



$a + b = b + a$ in generale

$3 + 5 = 5 + 3$ in particolare

Lavorare con lettere e numeri

Attività 1

Un gioco di «lettura del pensiero»

Ecco un gioco che simula la lettura del pensiero.

«Pensa un numero, raddoppialo e aggiungi 6; alla fine dei calcoli dimmi solo la somma ottenuta e riuscirò ad indovinare il numero che hai pensato».

Si può provare a giocare:

- si pensa il numero 5;
- si raddoppia 5 e si ha .... ;
- si aggiunge 6 e si ha .... ;
- si dice al «mago» il numero ....

Il «mago» risponde che il numero pensato è 5.

Si continua a giocare con altri numeri e il mago «indovina» sempre il numero pensato. Si tratta davvero di lettura del pensiero?

Una lettera indica un numero qualunque

In realtà il mago non legge il pensiero, ma svolge dei calcoli, basandosi su una semplice idea: indicare con la lettera n il numero pensato. Il gioco procede quindi così:

- il numero pensato è n;
- si raddoppia n e si ha .... ;
- si aggiunge 6 e si ha .... ;
- si indica con la lettera s la somma ottenuta, cioè si ha:

  s=.................................... .

Eseguire dei calcoli con lettere e numeri

Ed ora il mago segue un procedimento di calcolo letterale, cioè svolge delle operazioni, lavorando non solo con numeri (2 e 6), ma anche con lettere (n e s).

Ecco il procedimento:

- si considera la metà della somma s:

  $\frac{s}{2}$ = ... ;

- si applica la proprietà distributiva della divisione rispetto all'addizione e si ha:

  $\frac{s}{2}$ = ... ;

- si sottrae 3 all'ultimo risultato e si ottiene:

  $\frac{s}{2} - 3$ = ...

In conclusione risulta:

$$\frac{s}{2} - 3 = n$$

Ecco dunque un'importante conclusione: il procedimento porta ad ottenere *sempre* il numero pensato n.

Attività 2

Una ricerca in geometria

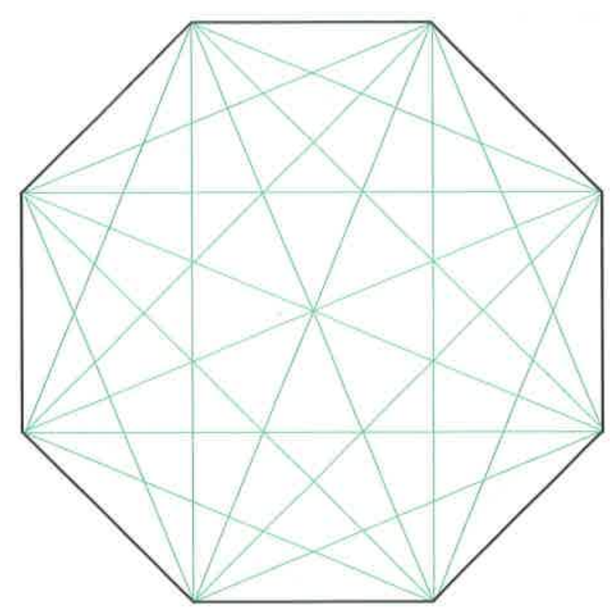
Quante diagonali ha un poligono convesso?

Osservando le diagonali di un poligono con molti lati (fig. 1), si rimane disorientati: da dove cominciare a contare?

Un modo conveniente per contare le diagonali può essere il seguente:

1. contare le diagonali uscenti da un vertice;
2. trovare successivamente il numero totale di diagonali.

Figura 1
Le diagonali di un poligono



Per seguire il procedimento, basiamoci sul poligono di 8 lati di fig. 2; si procede dunque nel modo seguente:

1. si fissa l'attenzione su un vertice del poligono, per esempio il vertice A, e si cominciano a disegnare le diagonali uscenti da A:
   - congiungendo A con il vertice successivo B o con il precedente (H) non si ottiene una diagonale, ma un lato (AB o HA);
   - per ottenere una diagonale si deve unire A con uno dei restanti 5 vertici;
   - le diagonali uscenti da A sono dunque 5.
2. per avere il numero totale di diagonali si può ora ripetere questo calcolo per gli altri vertici; così si contano in tutto:

   $8 \cdot 5 = 40$ diagonali

Ma questo procedimento porta ad un errore: ogni diagonale viene contata due volte; per esempio la diagonale AG di fig. 2 viene contata una volta come uscente da A e una seconda volta come uscente da G.

Per eliminare questo errore basta dividere per 2 il numero ottenuto prima; perciò un poligono di 8 lati ha:

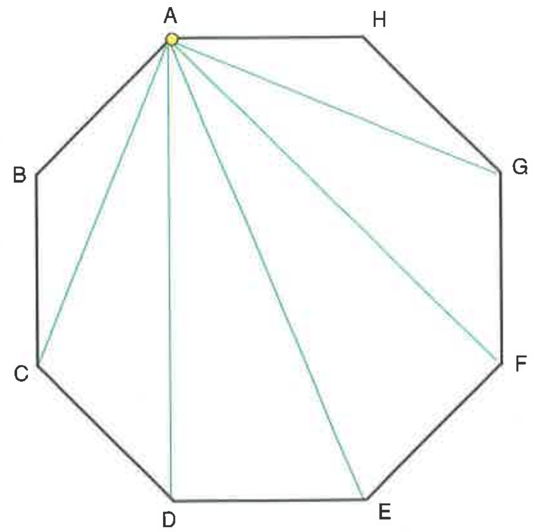
$40:2=20$ diagonali

Si ripete il procedimento in qualche altro caso

- Il poligono di fig. 3 ha 9 lati.
  1. il numero delle diagonali uscenti dal vertice A è .... ;
  2. ripetendo il calcolo per tutti i vertici si otterrebbe il numero .... ;
  3. il numero totale di diagonali è invece ....

- Disegnare un poligono di 7 lati.
  1. il numero delle diagonali uscenti da un vertice è .... ;
  2. ripetendo il calcolo per tutti i vertici si otterrebbe il numero .... ;
  3. il numero totale di diagonali è invece ....

Figura 2
Per contare le diagonali si fissa l'attenzione su un vertice



Si arriva ad un procedimento generale

Gli ultimi due esempi suggeriscono un'osservazione: si è seguito sempre lo stesso procedimento, cambiando solo il numero dei lati del poligono.

Perciò, se un poligono ha n lati:

1. il numero delle diagonali uscenti da un vertice è .... ;
2. ripetendo il calcolo per tutti i vertici si otterrebbe il numero .... ;
3. il numero totale di diagonali è invece ....

In definitiva, il numero d di diagonali di un poligono di n lati è:

$$d = \frac{n \cdot (n-3)}{2}$$

Il risultato ora ottenuto è dunque una *formula generale*, che dà il numero d di diagonali, quando si conosce il numero n di lati.

Così non c'è più bisogno né di disegni, né di ragionamenti per contare le diagonali, per esempio, di un poligono di 12 lati; si ha:

$$d = \frac{12 \cdot (12-3)}{2} = \frac{12 \cdot 9}{2} = 54$$

E così, un poligono di 20 lati ha un numero d di diagonali, dato da:

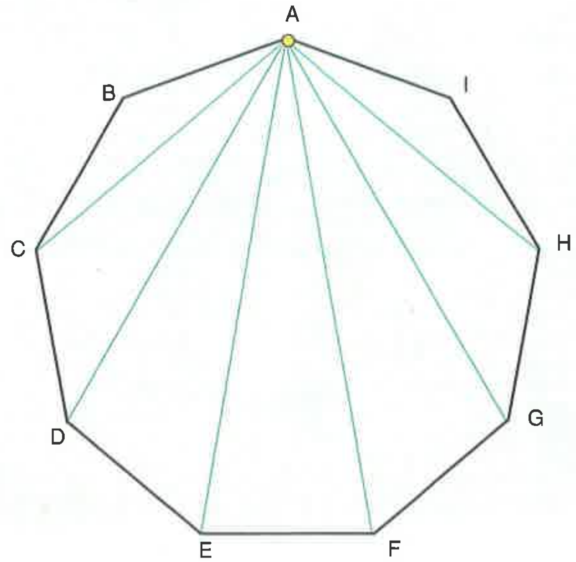
$d=$ ....

Dai due problemi qualche idea sul calcolo letterale

I due problemi esaminati sono diversi, ma hanno degli aspetti comuni:

- si usa una lettera per indicare un numero qualunque, di cui non è precisato il valore;
- si eseguono delle operazioni con lettere e numeri;
- si ottengono dei risultati che rimangono sempre validi, quando al posto della lettera si sostituisce un particolare numero.

Figura 3
Contare le diagonali di un poligono di 9 lati



Millenni per arrivare ai simboli

Il Papyrus Rhind e la matematica egizia

Nel 1858 un appassionato di cose egizie, l'inglese Henry Rhind, acquistava da un mercante di Tebe, sulle rive del Nilo, un rotolo di papiro, scritto a caratteri fitti ed illustrato da qualche disegno. Né lui né il mercante potevano immaginare che questo papiro era... senza prezzo: si trattava infatti di uno dei più antichi documenti sulla matematica egizia e risaliva al 1650 a.C.

Il *Papyrus Rhind* – come fu poi chiamato – si trova oggi esposto in una sala del British Museum di Londra (fig. 1): è appeso ad una parete come un quadro. Questo papiro, lungo oltre cinque metri ed alto trenta centimetri, è un manuale di matematica pratica. Vi sono raccolti ottantaquattro problemi, questioni della vita di tutti i giorni: «Come dividere un pane fra tre persone? e fra cinque? e fra sei?». Si pongono anche domande sulle dosi dei vari ingredienti necessari per ottenere una certa quantità di pane o di birra. Ad ogni problema viene sempre data una soluzione; si dice: «Tu farai... ed otterrai...».

Ecco uno di questi problemi: «Ad una quantità si aggiunge la sua metà e il suo settimo e i suoi due terzi; si ottiene 37; qual è il valore della quantità?».

Figura 1
Il Papyrus Rhind

A questa domanda oggi si risponde facilmente: si indica con la lettera x la quantità che si deve calcolare e si scrive:

$$x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{7}x + \frac{2}{3}x = 37$$

Si ottiene quindi il valore di x risolvendo l'equazione così ottenuta.

Ma nel papiro non c'è questa traduzione in simboli; non può esserci perché all'idea del simbolo, all'idea cioè di rappresentare una quantità con una lettera, si è arrivati molti secoli dopo.

La matematica babilonese

Fu un esploratore italiano, Pietro della Valle, a scoprire nel 1621, nella città di Persepoli (l'attuale Shiraz nell'Iran), delle tavolette di argilla cotta, stranamente scolpite. Si trattava di semplici disegni decorativi o – come della Valle aveva intuito – di un tipo di scrittura?

Passarono circa due secoli: quei «disegni» erano effettivamente dei simboli, era la *scrittura cuneiforme*, caratteristica degli antichi babilonesi, che scrivevano sull'argilla tenera e poi mettevano la tavoletta al sole o nel forno.

Ai primi del Novecento una scoperta sensazionale: durante alcuni scavi eseguiti nella città di Nippur (l'attuale Naffar), a sud di Babilonia, furono rinvenute più di 50 000 tavolette d'argilla scritte in caratteri cuneiformi (fig. 2). Recenti studi hanno attribuito un'età a queste «pagine»: sono del 2000 a.C. Si trattava fuori di dubbio dei libri di una biblioteca.

Oggi queste tavolette sono conservate sia al British Museum di Londra che in vari musei degli Stati Uniti. Molte riguardano problemi di matematica: si tratta di calcoli relativi al commercio e, anche, di questioni sulla canalizzazione delle acque o sul prosciugamento delle paludi. Si tratta dunque di problemi relativi a una civiltà di commercianti e di agricoltori.

La matematica è più elevata di quella egizia, ma anche in questo caso si dice: «tu farai... ed otterrai...». La soluzione dei problemi proposti nelle tavolette babilonesi diventa semplice e ben motivata, se si rappresentano le quantità con delle lettere, ma anche i babilonesi non conoscevano questo simbolismo.

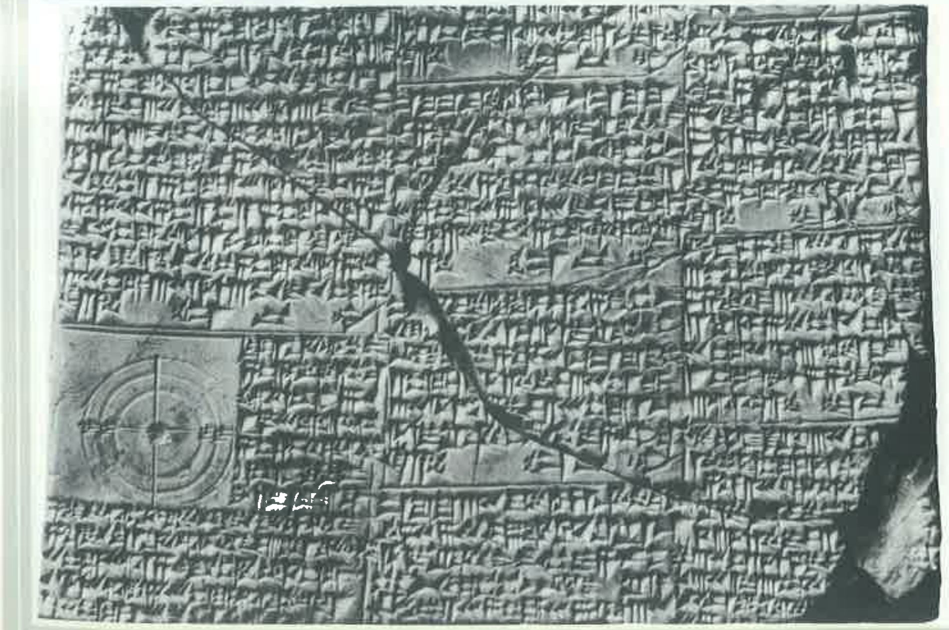


Figura 2
Particolare di una tavoletta babilonese con scrittura cuneiforme

La civiltà di Ebla

Le scoperte archeologiche continuano. Nell'autunno del 1975 un gruppo di archeologi italiani ha portato alla luce, durante gli scavi a Ebla, in Siria, 17 000 tavolette di argilla che risalgono al 2500 a.C.

Si tratta di documenti che appartenevano ad un archivio dell'amministrazione della città e riguardavano merci e tasse. Molti di questi documenti debbono essere ancora tradotti dalla lingua locale, scritta in caratteri cuneiformi, ma si pensa che vi siano contenuti molti calcoli. Avremo qualche sorpresa anche nel campo del calcolo letterale?

La matematica greca

Matematica, filosofia, arte raggiunsero un grado elevatissimo di sviluppo nell'antica Grecia. Per i greci le scoperte matematiche degli egizi e dei babilonesi erano poca cosa perché provenivano dall'esperienza, dalle osservazioni.

L'aritmetica – diceva Platone nel IV secolo a.C. – deve essere studiata per la conoscenza e non ai fini del commercio; la geometria non va studiata su oggetti: le figure debbono essere impalpabili, come le immagini date dalla superficie di un lago. Non si debbono accettare proprietà scoperte osservando la realtà, perché i sensi possono condurre in errore; si deve invece ragionare.

Questo dio della ragione divide la società greca in due: da una parte gli intellettuali (i filosofi, i matematici, gli artisti) e dall'altra il popolo, la massa, i lavoratori manuali.

E così la matematica diventa pura indagine intellettuale; è un libro scritto da Euclide nel III secolo a.C., gli *Elementi*, che dà un'idea della geometria costruita solo col ragionamento: ogni proprietà viene ricavata con una catena di ragionamenti da altre proprietà introdotte prima. Anche problemi di carattere aritmetico sono tradotti in termini geometrici e trattati quindi con lo stesso metodo.

Figura 3
Astronomi arabi in una miniatura persiana del XVI secolo

Con l'uso esclusivo del ragionamento i greci hanno imposto un modo di fare matematica: si deve abbandonare l'osservazione della realtà e l'intuizione, perché l'uomo deve fidarsi solo del ragionamento.

La matematica islamica

Alle idee dei greci, che disprezzavano i numeri legati al commercio, faceva riscontro, da parte degli arabi e degli indiani, la venerazione per i numeri e per i calcoli, proprio perché numeri e calcoli erano alla base delle loro civiltà.

In queste civiltà abili nel commercio, ma anche appassionate di astronomia, si trovano le origini dell'algebra (fig. 3).

È giunto fino a noi un libro di matematica del IX secolo, scritto in arabo: il titolo è *Al-jabr* e l'autore è al-Khuwarizmi, cioè nativo di Khuwarizmi, oggi Khiva, nel Turkestan sovietico. Il titolo sembra provenire da una parola che significava «trasportare»; si alludeva forse alle equazioni in cui si può trasportare un termine da un membro all'altro. E in latino il titolo diventò *Algebra*.

Ma, durante il fiorire della civiltà araba, il simbolismo era molto rudimentale: gli arabi non usavano le lettere, ma usavano spesso la parola «cosa», e la «cosa» poteva essere un numero o una grandezza geometrica o... una cosa qualunque.

La nascita del calcolo letterale

Un salto di qualità nello studio dell'algebra fu fatto alla fine del Cinquecento: è dovuto ad un avvocato francese, François Viète, latinizzato come Vieta, considerato il più grande matematico del suo secolo.

Viète era un uomo di legge, con un'alta posizione nel governo francese; come egli stesso scrisse, «si dilettava di matematica a tempo perso».

L'idea del calcolo letterale, cioè l'idea di sostituire ai numeri delle lettere, venne a Viète dal problema inverso: decifrare i messaggi segreti che inviavano in Francia gli Spagnoli per rovesciare il governo. Decifrare un codice significava sostituire a certi simboli delle parole o dei numeri.

L'idea si prestava ad essere capovolta: un problema espresso con parole e numeri poteva diventare più breve sostituendo delle lettere ad alcune parole (o ad alcuni numeri).

Ecco un esempio. Il problema: «Al prodotto di un numero incognito per 5 si toglie 24, poi si divide per 6 questa differenza e, al quoziente, si aggiunge 13; sapendo che il risultato ottenuto è il numero dato, determinare il valore dell'incognita», diventa:

$$(5 \cdot x - 24):6+13=x$$

Basta chiamare x il numero incognito per avere l'equazione scritta in simboli moderni.

Quest'idea, che oggi appare ovvia, abituati come siamo ad abbreviare tutto in simboli e sigle, segnò, alla fine del Cinquecento, un passo importantissimo nella storia della matematica: veniva dato uno strumento per la risoluzione di problemi di qualsiasi tipo.

Accadde in particolare che, mentre i greci cercavano di tradurre in chiave geometrica anche i problemi algebrici, dal tempo di Viète cominciò il processo inverso: molti problemi geometrici furono tradotti in equazioni, cioè in algebra.

Una volta tradotti in simboli una frase, un discorso, un problema, si trattava di saper manipolare questi simboli, di dare delle regole di calcolo, di imparare a lavorare con le lettere come se fossero numeri. In questo consiste proprio il *calcolo letterale*, che, dal tempo di Viète, è andato via via arricchendosi.

2 La moltiplicazione nel calcolo letterale

Due problemi che conducono a moltiplicare lettere

Ecco due problemi che conducono a moltiplicare delle lettere.

1. Scrivere la regola generale per calcolare l'area di un quadrato di lato dato.
   Si indica con a la lunghezza del lato, con s l'area e si ha (fig. 1):

   $$s = a \cdot a$$

2. Scrivere la regola generale per calcolare l'area di un rettangolo di dimensioni date. Si indicano con a, b le lunghezze delle dimensioni, con S l'area e si ha (fig. 2):

   $$S = a \cdot b$$

Abbreviare formule con la definizione di potenza

Si può calcolare effettivamente il risultato s o S solo quando sono dati i numeri da sostituire alle lettere. Tuttavia, si può scrivere la prima formula in modo più breve, ricordando la definizione di potenza, richiamata qui sotto:

$$a \cdot a \cdot \ldots \cdot a = a^n$$

(n è il numero dei fattori tutti uguali ad a)

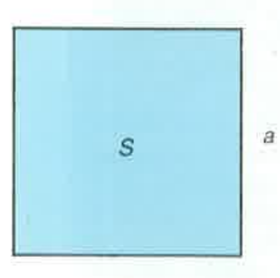
Si ha dunque, in particolare:

$a = a^1 \qquad a \cdot a = a^2 \qquad a \cdot a \cdot a = a^3$ e così via;

e quindi si può scrivere:

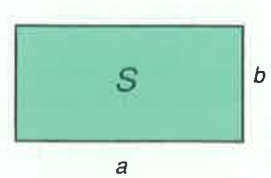
$s = a^2$ invece di $s = a \cdot a$

Figura 1
Area s di un quadrato di lato a



$s = a \cdot a = a^2$

Figura 2
Area S di un rettangolo di lati a e b



$S = a \cdot b = ab$

Come si indica la moltiplicazione nel calcolo letterale

Non si può abbreviare allo stesso modo la formula:

$$S = a \cdot b$$

perché le lettere a, b indicano due numeri diversi. In questo caso invece si elimina il simbolo «·», che indica la moltiplicazione, e si scrive:

$$S = ab$$

Quest'ultimo modo di indicare la moltiplicazione è caratteristico del calcolo letterale. È facile capire perché:

- nel *calcolo numerico* il prodotto di due numeri, per esempio 2 e 3, si deve indicare in simboli con:

  2×3 oppure $2 \cdot 3$

  perché il simbolo «23» indica il numero «ventitré»;
- nel *calcolo letterale* il prodotto di due numeri espressi da lettere, per esempio a, b, si indica in simboli con:

  $a \cdot b$ oppure ab

perché il simbolo «×» si può confondere con la lettera «x».

Due problemi che conducono a moltiplicare lettere e numeri

1. Si modificano le due dimensioni del rettangolo di fig. 2, raddoppiando un lato e triplicando l'altro; quanto vale l'area S del nuovo rettangolo? Il rettangolo avrà le due dimensioni lunghe $2 \cdot a$, $3 \cdot b$ (fig. 3); perciò l'area S è data da:

   $$S = 2 \cdot a \cdot 3 \cdot b$$

2. Si considera un parallelepipedo a base quadrata che ha l'altezza doppia del lato di base; qual è il volume V di questo solido? Il parallelepipedo ha la base di area a^2 e l'altezza lunga $2 \cdot a$ (fig. 4); si ha dunque:

   $$V = a^2 \cdot 2 \cdot a$$

Abbreviare formule con le proprietà della moltiplicazione

La formula che dà l'area del rettangolo si può scrivere in forma più breve, applicando le proprietà della moltiplicazione; si ha:

$2 \cdot a \cdot 3 \cdot b = 2 \cdot 3 \cdot a \cdot b$ [commutativa]

$2 \cdot 3 \cdot a \cdot b = (2 \cdot 3) \cdot (a \cdot b) = 6ab$ [associativa]

Si ottiene dunque:

$$2 \cdot a \cdot 3 \cdot b = 6ab$$

Si può quindi scrivere:

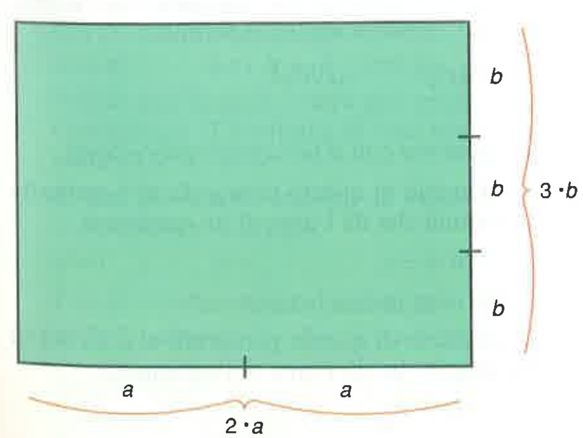
$S = 6ab$ invece di $S = 2 \cdot a \cdot 3 \cdot b$

Abbreviare formule con le proprietà delle potenze

Le stesse proprietà della moltiplicazione si possono applicare alla formula:

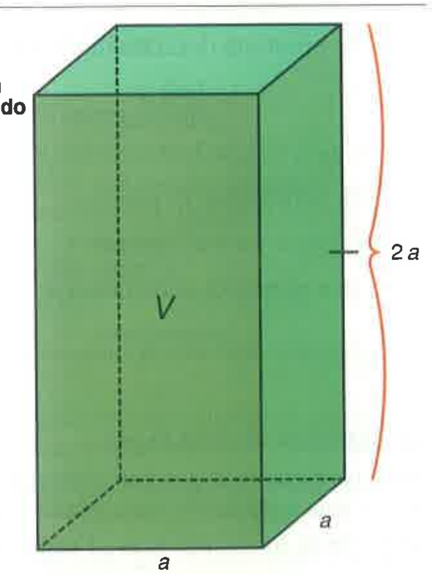
$$V = a^2 \cdot 2a$$

Figura 3
Area S di un rettangolo che ha dimensioni $2a$ e $3b$



$S = (2 \cdot a) \cdot (3 \cdot b) = 6\,ab$

Figura 4
Volume di un parallelepipedo



$V = a^2 \cdot 2 \cdot a = 2\,a^3$

Si ha:

$a^2 \cdot 2 \cdot a = 2 \cdot a^2 \cdot a$ [commutativa]

$2 \cdot a^2 \cdot a = 2 \cdot (a^2 \cdot a)$ [associativa]

Ma ora compare il prodotto di potenze di uguale base a, perciò risulta:

$2 \cdot (a^2 \cdot a) = 2 \cdot a^3$

Si ottiene dunque:

$a^2 \cdot 2 \cdot a = 2a^3$

Si può quindi scrivere:

$V=2a^3$ invece di $V=a^2 \cdot 2 \cdot a$

La proprietà delle potenze applicata in quest'ultimo caso è la seguente:

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

che fornisce, in particolare:

$a^2 \cdot a^1 = a^{2+1} = a^3$

Le regole fondamentali per moltiplicare lettere e numeri

Si possono ora trarre due importanti conclusioni.

I. *Nel calcolo letterale la moltiplicazione si indica scrivendo vicini lettere e numeri.* Così, si ha per esempio:

$a \cdot b \cdot c = abc$ $\quad 7 \cdot x \cdot y = 7xy$

II. *Formule costruite moltiplicando lettere e numeri possono essere abbreviate basandosi sulle nozioni richiamate qui sotto:*

- le proprietà della moltiplicazione:

$a \cdot b = b \cdot a$
$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
$a \cdot 1 = a$

- la definizione di potenza:

$a \cdot a \cdot \ldots \cdot a = a^n$

- una proprietà delle potenze:

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

Un'applicazione delle regole

Ecco un esempio in cui, per abbreviare una formula, bisogna applicare le varie proprietà elencate.

Scrivere in forma più breve l'espressione:

$-3xy(-2y)$

Si ha:

- per la proprietà commutativa:

$-3xy(-2y) = (-3)(-2)xyy$

- per la proprietà associativa:

$(-3)(-2)xyy = [(-3)(-2)]x(yy)$

- per la proprietà delle potenze:

$[(-3)(-2)]x(yy) = 6xy^2$

In definitiva risulta:

$-3xy(-2y) = 6xy^2$

Verifiche

Conoscenze

① Come si indica la moltiplicazione nel calcolo letterale?

② Elencare le proprietà da applicare per semplificare una formula in cui compare solo la moltiplicazione fra lettere e numeri.

Comprensione

① Scrivere una formula in cui non compare solo la moltiplicazione fra lettere e numeri.

② Si deve applicare la proprietà distributiva per abbreviare formule in cui compare solo la moltiplicazione fra lettere e numeri?

Applicazioni

① Abbreviare le seguenti formule:

$2a^3 \cdot 8a^4 \quad -3x^2y \cdot \frac{1}{3} y^2x$

② Scrivere almeno due formule che, abbreviate, diano le seguenti formule:

$24x^6y^5 \quad -a^3b^5c^8$

Collegamento con il paragrafo precedente

① All'inizio di questo paragrafo si è scritta la formula che dà l'area di un quadrato:

$s=a \cdot a$

Che cosa indica la lettera a?

② All'inizio di questo paragrafo si è scritta la formula che dà l'area del rettangolo:

$S=a \cdot b$

Che cosa indicano le lettere a, b?

3 Monomi e moltiplicazione di monomi

Che cos'è un monomio

Nel paragrafo precedente sono state descritte e abbreviate varie formule, usando quasi sempre parole abbastanza diffuse nel linguaggio comune. Ma nel calcolo letterale si usano vocaboli particolari che è utile conoscere.
Un vocabolo tipico del calcolo letterale è la parola *monomio*.
Un monomio è una formula costruita moltiplicando lettere e numeri.
Il termine *monomio* è composto con il prefisso di origine greca *mono*, che significa «unico» ed è usato anche in altre parole italiane, come per esempio monopattino (un solo pattino); il nome ricorda dunque che un monomio è una formula composta di un solo termine.

I monomi più semplici

Sono due nozioni sulle operazioni che permettono di scoprire i monomi più semplici.

I. Nella moltiplicazione, 1 è l'elemento neutro; perciò risulta, per esempio:

$a=1 \cdot a \quad b=1 \cdot b \quad x=1 \cdot x \quad y=1 \cdot y$

Perciò una singola lettera può anche essere considerata il risultato di una moltiplicazione.

II. Si può elevare un numero ad esponente 0 e si ottiene, per esempio:

$a^0=1 \quad b^0=1 \quad x^0=1 \quad y^0=1$

Perciò si può scrivere, per esempio:

$2=2 \cdot 1=2 \cdot a^0 \quad -5=-5 \cdot 1=-5 \cdot b^0$

Quindi anche un solo numero può essere considerato il prodotto di un numero per una lettera elevata ad esponente zero.

In conclusione *i monomi più semplici sono costituiti da una singola lettera o da un numero.*

Moltiplicazione di monomi

Le formule esaminate nel paragrafo precedente si possono anche descrivere usando il termine *monomio* ora introdotto; ecco qualche esempio:

- il monomio $a \cdot a$ è ottenuto moltiplicando il monomio a per se stesso;
- il monomio $a \cdot b$ è ottenuto moltiplicando fra loro i monomi a, b;
- il monomio $a^2 \cdot 2a$ è ottenuto moltiplicando i monomi a^2 e $2a$.

Si conclude dunque che:

- *moltiplicando fra loro più monomi si ottiene ancora un monomio;*
- *un monomio può essere considerato come un prodotto di più monomi.*

Monomi scritti in forma ridotta

Uno degli scopi del calcolo letterale è quello di scrivere le formule nel modo più semplice. Nel paragrafo precedente si è lavorato su vari monomi, fino a scriverli nella forma più breve possibile; ecco due esempi:

$2 \cdot a \cdot 3 \cdot b = 6ab \quad a^2 \cdot 2 \cdot a = 2a^3$

I monomi così ottenuti presentano una struttura caratteristica:

- compare un solo numero, che abitualmente è scritto prima delle lettere;
- compaiono varie lettere, scritte ciascuna una sola volta.

Si dice in questo caso che il monomio è scritto *in forma ridotta.*

In conclusione, *un monomio in forma ridotta si presenta come prodotto di un solo numero moltiplicato per varie lettere, scritte ciascuna una sola volta.*

Coefficiente di un monomio

In un monomio scritto in forma ridotta si nota subito il numero che precede tutte le lettere. Questo numero prende il nome di *coefficiente* o, più precisamente, *coefficiente numerico.*
La parola coefficiente, composta dal prefisso *co* (cioè *con*) e da *efficiente,* significa «che opera insieme»; coefficiente numerico è dunque «il numero che opera insieme con le lettere».
Ecco qualche esempio di monomio in cui è indicato il coefficiente.

Monomio	Coefficiente
$12abc$	12
$\frac{3}{4}bc^3$	$\frac{3}{4}$
xy^2	1
$-a^3b$	-1

Per determinare il coefficiente degli ultimi due monomi occorre ricordare che 1 è l'elemento neutro della moltiplicazione, perciò risulta:

$$xy^2=1\cdot xy^2 \qquad -a^2bc=(-1)\cdot a^2bc$$

Grado di una lettera

Dopo il coefficiente in un monomio si trova la parte letterale.
Quando la parte letterale è costituita da una sola lettera, se ne considera spesso una caratteristica: il *grado.*
Il *grado di una lettera* è legato alla definizione di potenza, già richiamata nel paragrafo precedente, e cioè:

$$a^n=a\cdot a\cdot a\cdot\ldots\cdot a$$

Si possono dunque ordinare le lettere basandosi sul valore dell'esponente; per esempio, si dice che:
- se $n=1$, la lettera è presente al 1° grado (o «la lettera è al 1° grado»);
- se $n=2$, la lettera è presente al 2° grado (o «la lettera è al 2° grado»).

Così si ha per esempio che:
- sono lettere presenti al 1° grado:

$$a=a^1 \quad x=x^1 \quad y=y^1$$

- sono lettere presenti al 2° grado:

$$a^2 \quad x^2 \quad y^2$$

In conclusione, *il grado di una lettera è dato dall'esponente della lettera.*

Grado complessivo di un monomio

Se un monomio è il prodotto di diverse lettere, si esaminano due caratteristiche della parte letterale:
- il grado di ciascuna lettera, descritto prima;
- il grado complessivo di un monomio.

Il grado complessivo di un monomio è la somma dei gradi delle singole lettere che vi compaiono.
Ecco qualche esempio di monomio di cui è indicato il grado complessivo.

Monomio	Grado complessivo
$4a^2b^3$	$2+3=5$
$-2bc^3=(-2)\,b^1c^3$	$1+3=4$
$12abc=12a^1b^1c^1$	$1+1+1=3$

Il termine *grado* proviene dalla parola latina *gradus*, che significa «gradino». Si può afferrare meglio il significato di questo termine pensando così:
- il grado di una lettera permette di ordinare le sue potenze come se fossero su una scala (fig. 1);
- analogamente, il grado complessivo di un monomio permette di ordinare tutti i monomi (fig. 2).

V e r i f i c h e

Conoscenze

① Che cosa significa la parola *monomio* e qual è la sua etimologia, cioè la sua origine?
② Quali sono i monomi più semplici?
③ Come si presenta un monomio scritto in forma ridotta?
④ Che cos'è il coefficiente di un monomio?
⑤ Come si trova il grado di una lettera?
⑥ Come si trova il grado complessivo di un monomio?

Applicazioni

① Indicare quali fra le formule seguenti *non* sono monomi.

$$3a^2b \qquad 2x+3y \qquad 4a^2-b^2 \qquad -x \qquad y^3$$

② Indicare quali fra i monomi seguenti *non* sono in forma ridotta.

$$3a^2b \qquad 3a^22b \qquad -a \qquad a^2ab$$

③ Completare la tabella A qui sotto.

Collegamento con il paragrafo precedente

① Elencare le regole da applicare per moltiplicare più monomi.
② Scrivere i monomi seguenti sotto forma di prodotto di monomi.

$$12a^2b \qquad -x^2y^3 \qquad 24xy$$

③ Scrivere i monomi seguenti in forma ridotta, indicando le proprietà applicate.

$$4a^3x\cdot 2a \qquad -\frac{3}{2}a^2b\cdot\frac{2}{3}ab^2$$

Figura 1
Il grado di una lettera

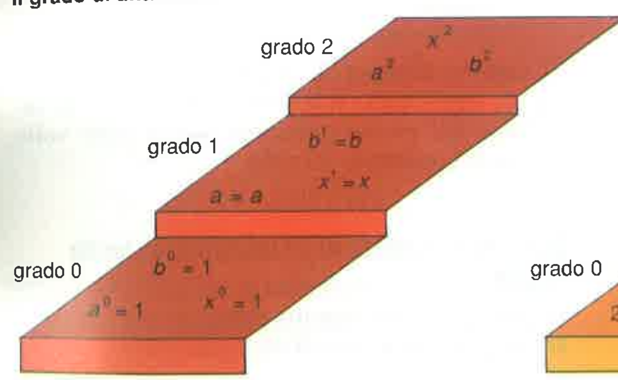


Figura 2
Il grado di un monomio

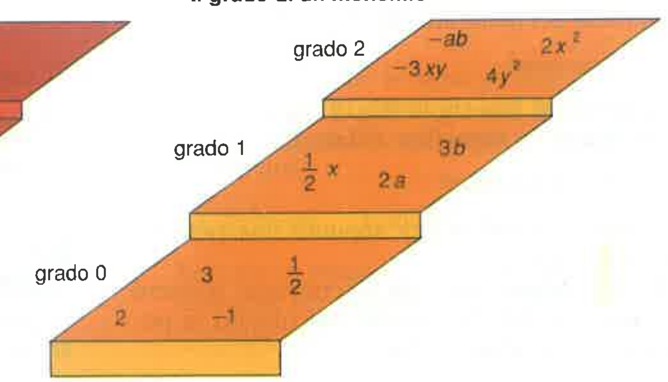


Tabella A
Indicare il grado di un monomio

Monomio	Coefficiente	Grado della 1ª lettera	Grado della 2ª lettera	Grado complessivo
$8x^2y^3$	8	2	3	$2+3=5$
$-3a^5b^4$				
	-1	1	3	
$-xy^3$				
	1	1	1	
ab				
	-8	0	0	
14				

4 Potenza di un monomio

Un problema che conduce a calcolare la potenza di un monomio

Ecco un problema che si risolve calcolando la potenza di un monomio: come varia la superficie di un quadrato triplicandone il lato?
Indicando con a la lunghezza del lato e con s la superficie del quadrato (fig. 1), si ha:

$$s=a\cdot a=a^2$$

Il quadrato di lato triplo (fig. 2) ha il lato lungo $3a$ e, quindi, la superficie S data da:

$$S=3a\cdot 3a=(3a)^2$$

La formula $(3a)^2$ indica appunto una potenza del monomio $3a$.
Per confrontare $(3a)^2$ con a^2 conviene scrivere l'espressione in altra forma, calcolando la potenza di un prodotto e cioè:

$$(a\cdot b)^m=a^m\cdot b^m$$

Così si ha:

$$(3a)^2=3^2a^2=9a^2$$

e si può quindi scrivere:

$$S=9a^2$$

Si ottiene dunque il risultato visualizzato in fig. 2: triplicando il lato di un quadrato, la superficie del nuovo quadrato risulta nove volte quella del quadrato iniziale.

Scrivere la potenza di un monomio in forma ridotta

Il procedimento seguito prima si può ripetere anche per il prodotto di tre o più fattori.

Figura 1
Quadrato con il lato lungo *a*

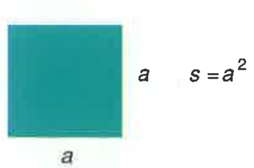
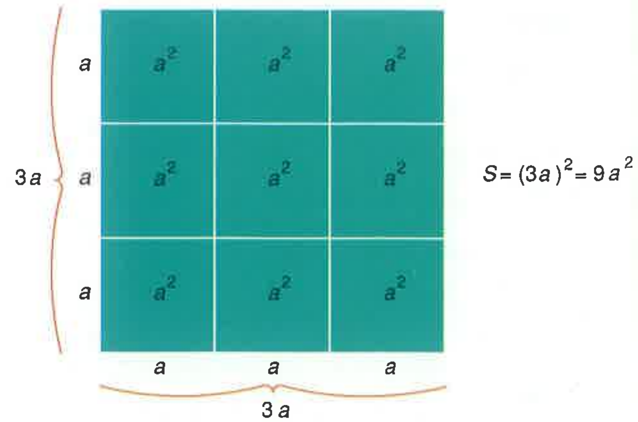


Figura 2
Quadrato con il lato triplo



Così si ha, per esempio:

$$(2xyz)^4=2^4x^4y^4z^4=16x^4y^4z^4$$

I calcoli appena eseguiti suggeriscono qualche osservazione:
- il monomio $16x^4y^4z^4$ è scritto in forma ridotta ed ha come coefficiente 16;
- l'espressione $(2xyz)^4$ *non* è un monomio scritto in forma ridotta e perciò 2 *non* è il coefficiente del monomio potenza.

Ma, per scrivere in forma ridotta la potenza di un monomio, non sempre è sufficiente il procedimento seguito prima. Ecco un esempio in cui occorre ricordare anche un'altra proprietà delle potenze. Calcolare:

$$(a^4b^2)^3$$

Calcolando la potenza del prodotto, si ha:

$$(a^4b^2)^3 = (a^4)^3(b^2)^3$$

Si deve ora sviluppare la potenza della potenza e si ottiene:

$$(a^4)^3(b^2)^3=a^{4\cdot 3}b^{2\cdot 3}=a^{12}b^6$$

La proprietà applicata nel secondo passaggio è la seguente:

$$(a^m)^n=a^{m\cdot n} \qquad \text{[potenza di potenza]}$$

Per cui risulta:

$$(a^4)^3=a^{4\cdot 3} \quad \text{e} \quad (b^2)^3=b^{2\cdot 3}$$

Regole per eseguire la potenza di un monomio

Le considerazioni finora svolte portano alle seguenti conclusioni:
- *elevando a potenza un monomio si ottiene ancora un monomio;*
- *per scrivere il monomio potenza in forma ridotta ci si basa sulle seguenti proprietà:*

$$(a\cdot b)^m=a^m\cdot b^m \qquad \text{[potenza di un prodotto]}$$

$$(a^m)^n=a^{m\cdot n} \qquad \text{[potenza di potenza]}$$

Esempi di applicazione delle regole

Ecco alcuni esempi di applicazione di queste regole.

1. Elevare al quadrato il monomio $-b$. Si ha:

   $$(-b)^2=[(-1)b]^2=(-1)^2b^2=1\cdot b^2=b^2$$

   In conclusione risulta:

   $$(-b)^2=b^2$$

2. Elevare al cubo il monomio $-b$. Si ha:

   $$(-b)^3=[(-1)b]^3=(-1)^3b^3=-1\cdot b^3=-b^3$$

   In conclusione risulta:

   $$(-b)^3=-b^3$$

3. Elevare alla quarta potenza (o *alla quarta*) il monomio $-3a^2b^3$. Si ha:

   $$(-3a^2b^3)^4=(-3)^4(a^2)^4(b^3)^4=81a^8b^{12}$$

   In conclusione risulta:

   $$(-3a^2b^3)^4=81a^8b^{12}$$

V e r i f i c h e

Conoscenze

① Elencare le proprietà delle potenze necessarie per scrivere in forma ridotta la potenza di un monomio.

Comprensione

① Spiegare perché le uguaglianze seguenti *sono errate*; al posto di ogni uguaglianza errata scrivere la corrispondente uguaglianza corretta.

$$(-a)^2=-a^2 \qquad (-x)^3=x^3 \qquad (2xy^2)^3=2x^3y^6$$

② Indicare le proprietà delle potenze che *non* si usano per sviluppare la potenza di un monomio.

Applicazioni

① Scrivere in forma ridotta le seguenti potenze di monomi:

$$(4x)^3 \qquad (-2xy^2)^4 \qquad (-ay^2)^2$$

② Scrivere sotto forma di potenza di un monomio i seguenti monomi:

$$9a^2b^2 \qquad -8x^3 \qquad x^4y^8$$

Collegamento con il paragrafo precedente

① Spiegare perché $(2xyz)^4$ *non* è un monomio scritto in forma ridotta.

② Indicare il coefficiente e il grado complessivo dei seguenti monomi:

$$(4x)^3 \qquad (-2xy^2)^4 \qquad (-ay^2)^2$$

5

Potenze ad esponente negativo. Divisione di monomi

Regole per sviluppare potenze ad esponente negativo

Nel paragrafo precedente sono state indicate le seguenti proprietà, necessarie per scrivere in forma ridotta la potenza di un monomio:

$(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$ [potenza di un prodotto]

$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$ [potenza di potenza]

Queste proprietà si applicano anche quando si eleva un monomio ad esponente negativo; in tal caso però bisogna ricordare la nozione di potenza ad esponente negativo (cfr. il capitolo primo, p. 25) e cioè:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Un esempio di applicazione delle regole

Ecco un esempio di espressione in cui si considerano monomi elevati ad esponente negativo:

$$(-3x^4y^3)^{-2}$$

Per la nozione di potenza ad esponente negativo, si ha:

$$(-3x^4y^3)^{-2} = \frac{1}{(-3x^4y^3)^2}$$

Calcolando la potenza del prodotto, si ottiene:

$$\frac{1}{(-3x^4y^3)^2} = \frac{1}{(-3)^2\,(x^4)^2\,(y^3)^2}$$

Sviluppando infine la potenza della potenza risulta:

$$\frac{1}{(-3)^2\,(x^4)^2\,(y^3)^2} = \frac{1}{9x^8y^6}$$

Reciproco di un monomio

Le potenze ad esponente negativo consentono di estendere ai monomi la nozione di reciproco: in aritmetica (cfr. i paragrafi 3 e 5 del primo capitolo) si dice che il reciproco di un numero a è il numero che, moltiplicato per a, dà come prodotto 1. Il reciproco di a si indica con:

$$\frac{1}{a} = a^{-1}$$

ed è dunque caratterizzato dalla seguente proprietà:

$$a \cdot \frac{1}{a} = 1 \quad \text{ossia} \quad a \cdot a^{-1} = 1$$

Per estendere la nozione di reciproco anche ai monomi, si dirà allora che *il reciproco di un monomio si ottiene elevando un monomio a potenza con esponente* –1.

Un esempio di reciproco di un monomio

Ecco un esempio di reciproco di un monomio. Il reciproco di $4x^2y^3$ è:

$$\frac{1}{4x^2y^3} = (4x^2y^3)^{-1}$$

Per scrivere il monomio reciproco in forma ridotta, bisogna basarsi sulle proprietà delle potenze.

Calcolando la potenza del prodotto, si ha:

$$(4x^2y^3)^{-1} = 4^{-1}(x^2)^{-1}(y^3)^{-1}$$

Calcolando la potenza della potenza, si ottiene:

$$4^{-1}(x^2)^{-1}(y^3)^{-1} = 4^{-1}x^{-2}y^{-3}$$

Divisione di monomi

Il reciproco di un monomio permette di introdurre la divisione fra due monomi: basta seguire la stessa idea che porta a considerare la divisione fra due numeri razionali come una moltiplicazione (cfr. il par. 3 del primo capitolo). Si ha dunque che *per dividere due monomi si moltiplica il primo monomio per il reciproco del secondo.*

Un esempio di divisione fra due monomi

Ecco un esempio di divisione fra due monomi:

$$\frac{a^3b}{ab} = a^3b \cdot (ab)^{-1}$$

L'ultimo monomio ottenuto può essere scritto in forma ridotta tenendo presenti, oltre alle proprietà delle potenze, anche le proprietà della moltiplicazione.

Calcolando la potenza del prodotto, risulta:

$$a^3b \cdot (ab)^{-1} = a^3b \cdot a^{-1}b^{-1}$$

Applicando le proprietà commutativa e associativa della moltiplicazione, s ha:

$$a^3b \cdot a^{-1}b^{-1} = (a^3 \cdot a^{-1})(b \cdot b^{-1})$$

Calcolando il prodotto di potenze di ugual base, si ottiene:

$$(a^3 \cdot a^{-1})(b \cdot b^{-1}) = a^2 \cdot 1$$

Ricordando che 1 è elemento neutro della moltiplicazione, risulta:

$$a^2 \cdot 1 = a^2$$

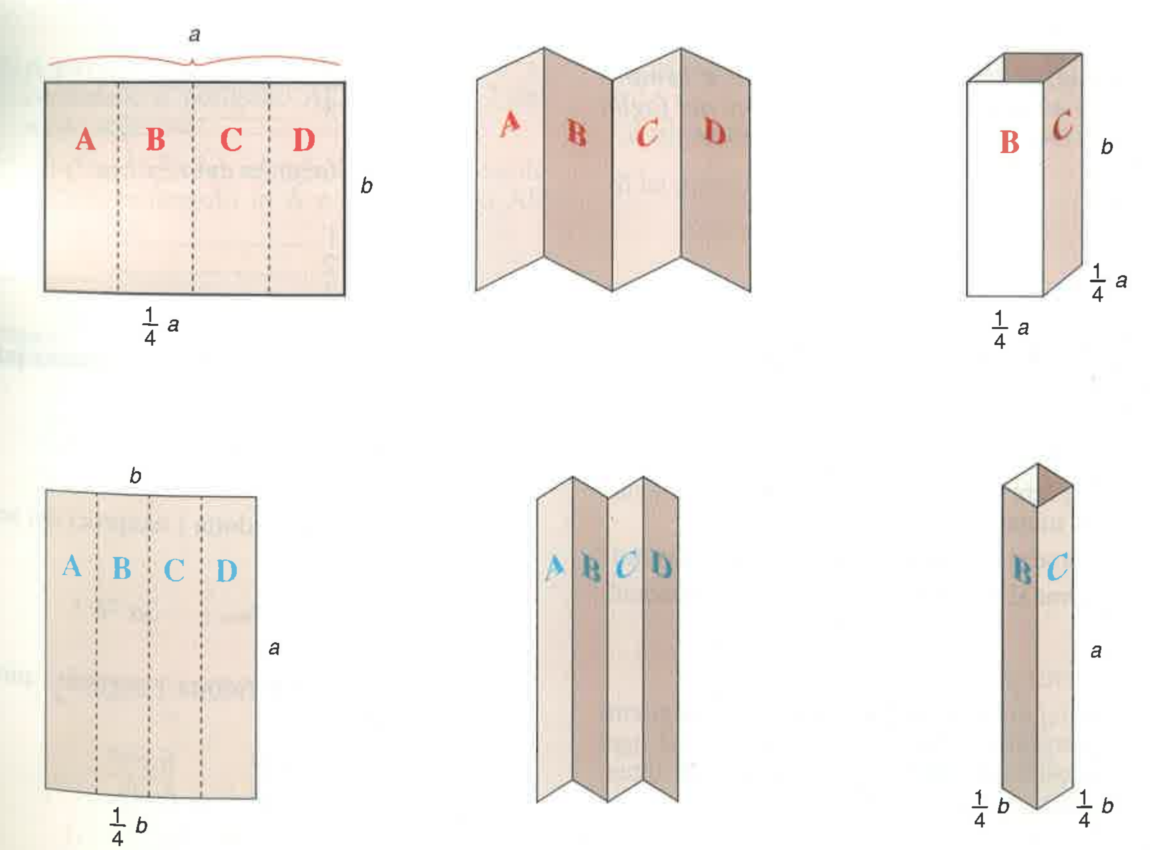
e quindi:

$$\frac{a^3b}{ab} = a^2$$

Un problema che conduce a dividere due monomi

Due fogli di carta uguali vengono piegati in quattro parti uguali, l'uno parallelamente al lato più corto, l'altro parallelamente al lato più lungo (fig. 1).

Figura 1
Due parallelepipedi costruiti con un foglio di carta



Si ottengono due solidi che hanno certamente la stessa superficie laterale (è il foglio di carta); ma hanno anche lo stesso volume? Conviene calcolare i due volumi e, per ottenere un risultato generale, conviene indicare con due lettere – per esempio a, b – le dimensioni del rettangolo (fig. 1); così si ha che:

- un solido ha il lato di base lungo $\frac{1}{4}a$, l'altezza lunga b ed il volume V dato da:

$$V=\left(\frac{1}{4}a\right)^2 b=\frac{1}{16}a^2b$$

- l'altro solido ha il lato di base lungo $\frac{1}{4}b$, l'altezza lunga a ed il volume W dato da:

$$W=\left(\frac{1}{4}b\right)^2 a=\frac{1}{16}b^2a$$

I due volumi non sono dunque uguali e, per confrontarli, conviene calcolare il loro quoziente; si ha:

$$\frac{V}{W}=V\cdot W^{-1}=\frac{1}{16}a^2b\cdot\left(\frac{1}{16}b^2a\right)^{-1}=a\cdot b^{-1}$$

In definitiva si ottiene:

$$\frac{V}{W}=\frac{a}{b}$$

Dunque, *il rapporto fra i volumi è sempre uguale al rapporto fra le dimensioni del foglio che ne costituisce la superficie laterale.*

Verifiche

Conoscenze

① Esporre le regole da applicare per elevare un monomio ad esponente negativo.

② Come si ottiene il reciproco di un monomio?

③ Come si esegue la divisione fra due monomi?

Comprensione

① Spiegare perché le uguaglianze seguenti *sono tutte errate*; scrivere, accanto ad ogni uguaglianza errata, la corrispondente uguaglianza corretta.

$(-4x)^{-1}=4x$ ....

$(x^2y)^{-3}=x^5y^3$ ....

$\frac{a^2b}{ab^2}=ab$ ....

$\frac{a^3b^2}{a^2b^3}=\frac{b^2}{a^2}$ ....

② Spiegare perché le seguenti uguaglianze *sono tutte esatte*, elencando le proprietà delle operazioni su cui è basato ogni passaggio.

$(-3a)^{-1}=(-3)^{-1}a^{-1}=-\frac{1}{3}a^{-1}$

Proprietà: 1. ....
2. ....

$(b^{-2}c^2)^{-2}=(b^{-2})^{-2}(c^2)^{-2}=b^4c^{-4}$

Proprietà: 1. ....
2. ....

$\frac{x^3b^4}{x^4b}=x^3b^4(x^4b)^{-1}=x^3b^4x^{-4}b^{-1}=b^3x^{-1}$

Proprietà: 1. ....
2. ....
3. ....

$\frac{ay^2}{a^2y}=ay^2(a^2y)^{-1}=ay^2a^{-2}y^{-1}=a^{-1}y$

Proprietà: 1. ....
2. ....
3. ....

Applicazioni

① Scrivere in forma ridotta le seguenti potenze di monomi:

$\left(\frac{1}{3}xy^3\right)^{-2}$ $\quad\left(\frac{1}{2}x^{-2}y^{-1}\right)^{-3}$

② Scrivere in forma ridotta i reciproci dei seguenti monomi:

$4x$ $\quad\frac{1}{4}a^2b$ $\quad-3a^{-2}b^{-1}$

③ Scrivere in forma ridotta i seguenti quozienti di monomi:

$\frac{6\,x^2y^3}{2\,x^3y^2}$ $\quad\frac{2\,x^3y^2}{6\,x^2y^3}$ $\quad\frac{6\,x^2y^3}{6\,x^2y}$

6 Addizione di monomi. Polinomi

Due problemi che conducono ad addizionare monomi

1. Dare una regola generale per calcolare la lunghezza di un percorso AC, conoscendo la lunghezza dei tratti AB e BC (fig. 1). Si può indicare con a e b le lunghezze dei tratti AB e BC e con p la lunghezza totale del percorso; si ha:

$$p=a+b$$

2. A partire dal segmento AC di fig. 1 si costruisce il poligono ACED di fig. 2 nel modo seguente:
   - si costruisce sul segmento AB il triangolo ABD, rettangolo in A e con il cateto AD lungo $2a$;
   - si costruisce sul segmento BC il triangolo BCE, rettangolo in B e con il cateto BE lungo $2b$;
   - si uniscono i punti D e E.

   Dare una regola per calcolare l'area S del poligono così ottenuto.

La figura mostra che il poligono è composto di tre triangoli, di cui si può trovare l'area:

- il triangolo ABD ha area $\frac{1}{2}\cdot a\cdot 2a=a^2$
- il triangolo BCE ha area $\frac{1}{2}\cdot b\cdot 2b=b^2$
- il triangolo BDE ha area $\frac{1}{2}\cdot a\cdot 2b=ab$

Si ha quindi:

$$S=a^2+b^2+ab$$

Figura 1
Lunghezza p di un percorso

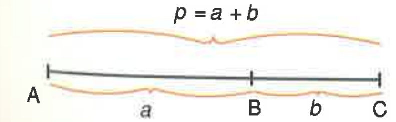
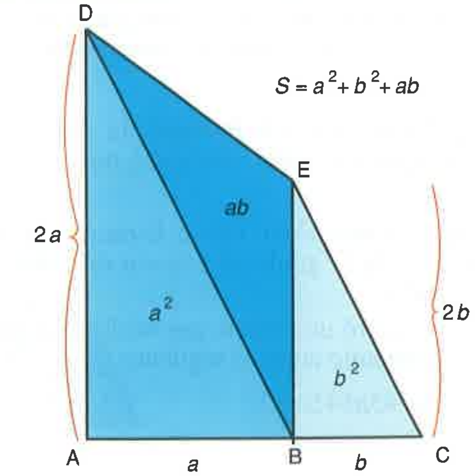


Figura 2
Area S di un poligono



Che cos'è un polinomio

Le due espressioni ottenute prima, e cioè:

$a+b \qquad a^2+b^2+ab$

sono costruite addizionando monomi, ma *non sono monomi*, proprio perché non sono composte di un solo termine; prendono invece il nome di *polinomi*.
Il nome è ottenuto con il prefisso di origine greca *poli*, che significa «molti» e si trova in numerosi vocaboli della lingua italiana, per esempio poliambulatorio (molti ambulatori riuniti).

In conclusione, *un polinomio è la somma di più monomi.*

Un'osservazione immediata: nessuna proprietà delle operazioni permette di scrivere i due polinomi in forma più breve.

Binomi e trinomi

Qualche volta si fissa in particolare l'attenzione sui polinomi composti di due o tre termini, che si indicano con i nomi di *binomio* e *trinomio*.
Il binomio *è un polinomio somma di due monomi.*
Il trinomio *è un polinomio ottenuto sommando tre monomi.*
I due vocaboli sono ottenuti con i prefissi *bi* per indicare «due» e *tri* per indicare «tre». Sono prefissi che compaiono anche in altre parole della lingua italiana; per esempio biennio (periodo di due anni), bicolore (a due colori), triennio (periodo di tre anni), tricolore (con tre colori).

Grado di un polinomio

Il grado di un polinomio si decide esaminando il grado dei monomi che lo compongono. Così, esaminando i due polinomi ottenuti prima, si trova che:

- il polinomio $a+b$ è formato da monomi di 1° grado ed è ovvio dire che è un *polinomio di 1° grado*;
- il polinomio a^2+b^2+ab è formato da tutti monomi di 2° grado ed è ovvio dire che è *di 2° grado*.

Non si ha però un criterio per decidere il grado di un polinomio come il seguente:

$2a^3+3ab+5c$

Questo polinomio è infatti somma dei seguenti monomi:

$2a^3$ che è di 3° grado;
$3ab$ che è di 2° grado;
$5c$ che è di 1° grado.

In casi come questo si è stabilito il seguente criterio: scegliere il monomio di grado massimo per decidere il grado del polinomio; così si dice che il polinomio è di 3° grado.

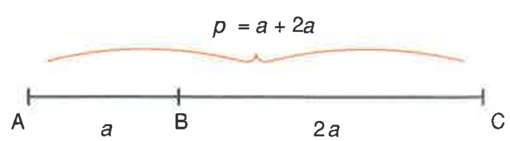
In conclusione, il grado di un polinomio si trova nel modo seguente:
- *si calcola il grado di ogni suo monomio;*
- *si individua il grado massimo;*
- *il grado massimo così ottenuto è il grado del polinomio.*

Due problemi che conducono a sommare monomi simili

1. Il percorso AC è formato da un tratto AB e da un tratto BC, che è il doppio di AB (fig. 3); quanto è lungo il percorso AC?
Indicando ora con a la lunghezza di AB, la lunghezza di BC è $2a$ e, quindi, la lunghezza p del percorso è data da:

$p=a+2a$

Figura 3
Un particolare percorso



2. Sul segmento AC si costruisce come prima il poligono ACED (fig. 4). Come si calcola ora l'area S del poligono?

In questo caso si ha che:
- il triangolo ABD ha area a^2;
- il triangolo BCE ha area $4a^2$;
- il triangolo BDE ha area $2a^2$;

Si ha quindi:

$S= a^2+4a^2+2a^2$

La prima formula ottenuta, e cioè:

$a+2a$

è somma dei due monomi seguenti:
$a=1\cdot a$ che ha coefficiente 1 e parte letterale a;
$2a=2\cdot a$ che ha coefficiente 2 e parte letterale a.

Si nota dunque una caratteristica particolare: i due monomi hanno la stessa parte letterale e diverso coefficiente.
Analogamente la seconda espressione, e cioè:

$a^2+4a^2+2a^2$

è somma di monomi che hanno la stessa parte letterale (a^2).
I monomi che presentano la stessa parte letterale prendono il nome di monomi simili.

La somma di monomi simili è ancora un monomio

Conviene fissare l'attenzione sui monomi simili per la seguente ragione: la somma di monomi simili si può scrivere in forma più breve.

Per ottenere questa abbreviazione ci si basa, come sempre, sulle proprietà delle operazioni; ora occorrono le due seguenti proprietà della moltiplicazione:
- il numero 1 è elemento neutro, cioè:

$1\cdot a=a$ ossia $a=1\cdot a$

- la proprietà distributiva, cioè:

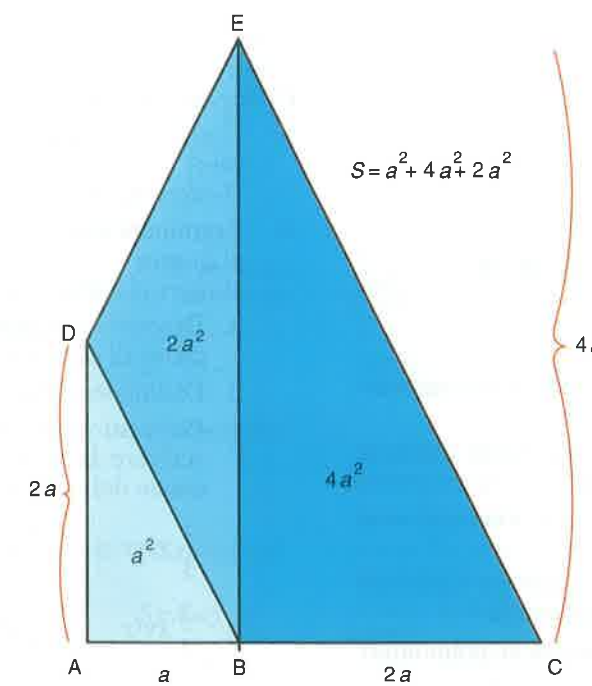
$(a+b)c=ac+bc$ ossia $ac+bc=(a+b)c$

Ecco come si può procedere, a partire dalla formula $a+2a$:

$a+2a=1\cdot a+2\cdot a$ [1 elemento neutro]
$1\cdot a+2\cdot a=(1+2)a=3a$ [distributiva]

Si è ottenuto così il monomio $3a$ con le seguenti caratteristiche:
- parte letterale a, che è la stessa dei monomi addendi (a e $2a$);
- coefficiente $3=1+2$, somma dei coefficienti (1 e 2) dei monomi addendi.

Figura 4
Un particolare poligono



Si può procedere analogamente a partire dalla formula:

$$a^2+4a^2+2a^2$$

Si ottiene:

$$a^2+4a^2+2a^2=1\cdot a^2+4\cdot a^2+2\cdot a^2=(1+4+2)a^2=7a^2$$

Regole per calcolare la somma di monomi simili

Ecco dunque le regole per calcolare la somma di monomi simili, basandosi sulla proprietà distributiva.
La somma di più monomi simili è un monomio con le seguenti caratteristiche:

- *è simile ai monomi dati (cioè ha la stessa parte letterale dei vari addendi);*
- *il coefficiente è la somma dei coefficienti dei monomi addendi.*

La regola indicata permette di scrivere rapidamente la somma di più monomi simili senza svolgere tanti passaggi. Ecco due esempi.

$$3ab+5ab=\boxed{8}\,ab$$

$$\boxed{5+3=8}$$

$$\frac{3}{4}xy^2+\frac{5}{4}xy^2=\boxed{2}\,xy^2$$

$$\boxed{\frac{3}{4}+\frac{5}{4}=\frac{8}{4}=2}$$

Verifiche

Conoscenze

① Addizionando due monomi si ottiene sempre un monomio?
② Come si chiama un'espressione ottenuta sommando più monomi?
③ Che cosa significa che due monomi sono simili?
④ Esporre le regole da seguire per calcolare la somma di più monomi simili.
⑤ Come si determina il grado di un polinomio?

Comprensione

① Esaminare le uguaglianze seguenti e scegliere quelle *corrette*, indicando le proprietà applicate correttamente.

$a+a^2=2a^2$ $\quad a^2+a^2=2a^2$

$2ab+3ab=5ab$ $\quad 2ab+3ab=5a^2b^2$

② Esaminare le uguaglianze seguenti e scegliere quelle *sbagliate*, indicando le proprietà applicate in modo errato.

$3c+3c=6c$ $\quad 3b+3c=3bc$

$4x+5xy=9xy$ $\quad 4xy+5xy=9xy$

③ Spiegare perché la somma di più monomi è, in generale, un polinomio, mentre la somma di più monomi simili è un monomio.
④ Spiegare perché conviene fissare l'attenzione sui monomi simili.

Applicazioni

① Esaminare i seguenti monomi e riconoscere i monomi simili:

$2a \quad a^2 \quad 3a \quad a^3 \quad 3a^2 \quad 2a^3$

② Sommare le coppie di monomi simili individuate nell'esercizio precedente e scrivere il risultato nella forma più breve.
③ Scrivere almeno 3 monomi simili al monomio $4a^2x$.
④ Stabilire il grado dei seguenti polinomi:

$2x+3 \quad 4x^2+5x+1 \quad 2a^2b+a^2b^2+ab$

Collegamento con i paragrafi precedenti

① Come si determina il grado di un monomio?
(Vedere il paragrafo 3)
② Esaminare i monomi seguenti e rispondere ai quesiti.
(Vedere il paragrafo 3)
a. Descrivere la parte letterale ed il coefficiente di ogni monomio.
b. Distinguere le coppie di monomi simili.
c. Per ogni coppia di monomi simili, descrivere la parte letterale ed il coefficiente del monomio somma.

$\frac{4}{3}x^2yz \quad \frac{4}{3}xy^2z \quad \frac{4}{3}xyz^2$

$\frac{2}{3}xy^2z \quad \frac{2}{3}xyz^2 \quad \frac{2}{3}x^2yz$

7 Opposto di un monomio. Differenza di monomi

Opposto di un monomio

Le considerazioni svolte a proposito dei monomi simili permettono di estendere la nozione di opposto introdotta in aritmetica.
Si è detto infatti in aritmetica (p. 15) che, addizionando un numero razionale con il suo opposto, si ottiene sempre zero; così si ha, per esempio:

$$5+(-5)=0 \qquad -\frac{4}{3}+\frac{4}{3}=0 \qquad -1+1=0$$

D'altra parte, nel paragrafo precedente si è trovato che la somma di monomi simili si calcola eseguendo la somma dei loro coefficienti.
Ecco allora che cosa succede quando si sommano due monomi simili che hanno coefficienti opposti:

$$5b+(-5)b=[5+(-5)]b=0\cdot b=0$$

$$-4x^2+4x^2=(-4+4)x^2=0\cdot x^2=0$$

Si ottiene sempre come somma zero, in base alla seguente proprietà: 0 è elemento assorbente della moltiplicazione, cioè:

$$0\cdot a=0$$

Si dice dunque che *sono opposti due monomi simili con i coefficienti opposti.*
E così:

$7a^3=7\cdot a^3$ ha come opposto $-7a^3=(-7)a^3$

$-5xy^2=(-5)\cdot xy^2$ " " " $5xy^2=5\cdot xy^2$

$-ab=(-1)\cdot ab$ " " " $ab=1\cdot ab$

Significato di un monomio con coefficiente negativo

Bisogna prestare particolare attenzione al significato di monomi come i seguenti:

$$-a \quad -b \quad -x$$

Questi monomi infatti conducono talvolta ad un *errore di lettura*: si pensa che il monomio rappresenti sempre un numero *negativo*.
È facile capire che questo non è vero ricordando due nozioni fondamentali:

I. una lettera è una specie di contenitore, nel quale si può inserire un qualunque numero;
II. risulta:

$$-a=(-1)\cdot a$$

Si possono allora avere le situazioni indicate nella tabella seguente:

a	$-a=(-1)\cdot a$
3 (numero positivo)	$(-1)\cdot 3=-3$ (numero negativo)
-4 (numero negativo)	$(-1)\cdot(-4)=4$ (numero positivo)

Differenza di due monomi

In aritmetica (p. 15) si è trovato che la differenza fra due numeri razionali si può sempre considerare come una somma: si addiziona al primo numero l'opposto del secondo; risulta cioè:

$$a-b=a+(-b)$$

Così anche la differenza di monomi si può considerare come somma del primo monomio con l'opposto del secondo; in tal caso valgono ancora le regole esposte nel paragrafo precedente. Ecco due esempi.

1. Scrivere la differenza fra i monomi $6b$ e $4b^2$; si ha:

$$6b+(-4)b^2=6b-4b^2$$

che è un polinomio, dato che i monomi $6b$ e $4b^2$ non sono simili.

2. Scrivere la differenza fra i monomi $6bc$ e $4bc$; si ha:

$$6bc+(-4)bc=6bc-4bc=\underbrace{\boxed{2}}_{\boxed{6+(-4)=6-4=2}}\,bc$$

In conclusione si ha che:

- la *differenza di due monomi è in generale un polinomio;*
- la *differenza di due monomi simili è ancora un monomio simile, che ha per coefficiente la differenza dei coefficienti.*

Verifiche

Conoscenze

① Basandosi anche sulla fig. 1, spiegare come si ottiene l'opposto di un monomio.

② Elencare le proprietà che si applicano per calcolare la somma di due monomi opposti.

③ Spiegare come si calcola la differenza di due monomi simili.

Comprensioni

① Perché si possono applicare le stesse regole per calcolare la somma e la differenza di due monomi simili?

② L'opposto di un monomio si può anche ottenere moltiplicando il monomio per un numero?

③ Spiegare perché il monomio $-2y$ non rappresenta sempre un numero negativo.

Applicazioni

① Scrivere gli opposti dei seguenti monomi:

$8bc$	b^2z	$3ax^{-2}$
$-\frac{4}{5}by$	$-x^3$	$-4ax^{-3}$

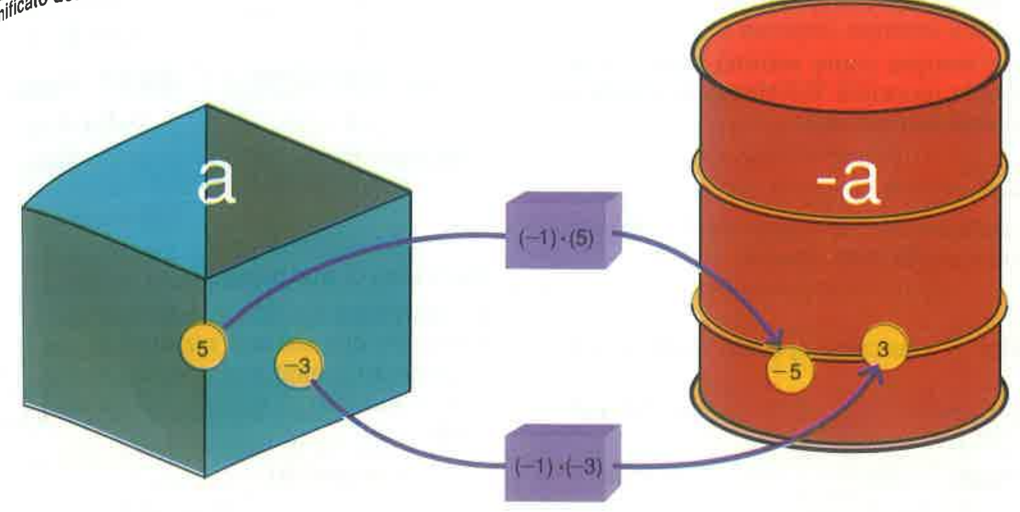
② Scrivere in forma ridotta le seguenti differenze di monomi simili:

$24ac-9ac$ $\qquad \frac{4}{3}x^2-\frac{1}{3}x^2$

Collegamento con il paragrafo precedente

① Spiegare in quali casi la differenza di monomi dà un monomio e in quali casi dà un polinomio.

Figura 1
Significato del monomio $-a$



8 Moltiplicazione e divisione di un polinomio per un monomio

Un problema che conduce a moltiplicare un polinomio per un monomio

Un segmento AC è diviso in due parti (fig. 1): AB, di lunghezza a, e BC, di lunghezza b. Sul segmento si costruisce un rettangolo ACDE di altezza c; calcolare l'area S del rettangolo così ottenuto.

Si osserva subito che il rettangolo presenta le seguenti caratteristiche:

- la base lunga $a+b$;
- l'altezza lunga c.

L'area S è dunque data da:

$$S=(a+b)\cdot c \qquad (1)$$

D'altra parte, la fig. 2 suggerisce un'osservazione: il rettangolo risulta formato da due rettangoli, uno di dimensioni a e c, l'altro di dimensioni b e c (fig. 2); perciò si ha:

$$S=a\cdot c+b\cdot c \qquad (2)$$

Come si sviluppa la moltiplicazione di un polinomio per un monomio

Il problema ha condotto dunque a percorrere il seguente itinerario:

- si è moltiplicato il polinomio $a+b$ per il monomio c, ottenendo:

$$S=(a+b)c$$

- si è scoperto, confrontando la (1) con la (2), che vale la seguente uguaglianza:

$$(a+b)c=ac+bc \qquad (3)$$

Figura 1
Area S di un rettangolo di dimensioni $a+b$ e c

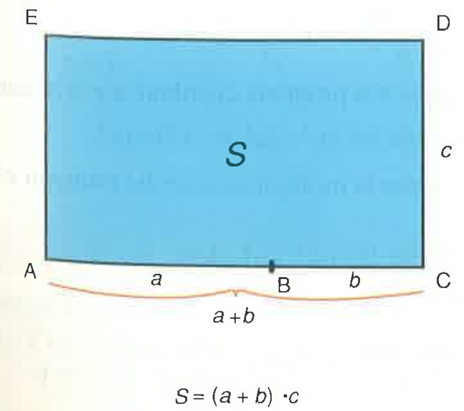
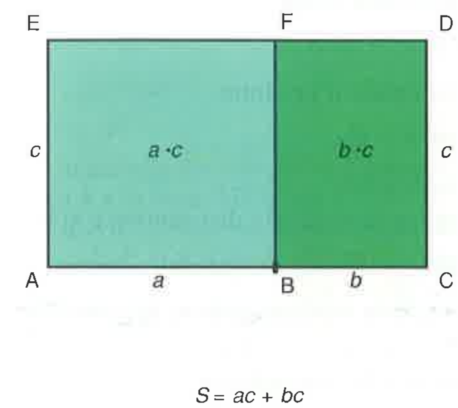


Figura 2
Area S di due rettangoli di dimensioni a, c e b, c



L'uguaglianza ottenuta non è però dovuta a particolari proprietà geometriche; è invece basata su una nota proprietà delle operazioni, richiamata qui sotto:

$(a+b)c=ac+bc$ [proprietà distributiva]

Ora, la proprietà distributiva si estende immediatamente al caso di polinomi formati da più di due termini; perciò risulta, per esempio:

$(a+b+c+d)h=ah+bh+ch+dh$

Si arriva così alle seguenti conclusioni:

- *moltiplicando un polinomio per un monomio si ha sempre un polinomio;*
- *si ottiene il polinomio prodotto basandosi sulla proprietà distributiva.*

Esempi di calcolo del polinomio prodotto

Ecco qualche esempio di applicazione di queste conclusioni.

1. Per sviluppare il prodotto

   $(3a+4b)2xy$

   si procede così:
   - si applica la proprietà distributiva e si ha:

     $(3a+4b)2xy=3a\cdot 2xy+4b\cdot 2xy$

   - si esegue la moltiplicazione dei monomi e si ottiene:

     $3a\cdot 2xy+4b\cdot 2xy=6axy+8bxy$

   In conclusione risulta:

   $(3a+4b)2xy=6axy+8bxy$

2. Si procede analogamente per sviluppare la moltiplicazione:

   $a(a^2+1)$

   Si ottiene:

   $a(a^2+1)=a^2\cdot a+a\cdot 1=a^3+a$

   In conclusione risulta:

   $a(a^2+1)=a^3+a$

3. Per sviluppare il prodotto

   $(ab+4)(-b)$

   si procede così:
   - si applica la proprietà distributiva e si ha:

     $(ab+4)(-b)=ab(-b)+4(-b)$

   - si esegue la moltiplicazione dei monomi e si ha:

     $ab(-b)+4(-b)=-ab^2-4b$

   In conclusione risulta:

   $(ab+4)(-b)=-ab^2-4b$

4. Anche l'espressione

   $-(2a-3b)$

   può essere sviluppata con lo stesso procedimento; basta ricordare che risulta:

   $-(2a-3b)=(-1)[2a+(-3b)]$

   e quindi si ha:

   $(-1)[2a+(-3b)]=(-1)2a+(-1)(-3b)=-2a+3b$

   In definitiva risulta:

   $-(2a-3b)=-2a+3b$

Gli esempi svolti suggeriscono qualche osservazione:

- per moltiplicare un polinomio per un monomio, si debbono moltiplicare *tutti* i termini del polinomio per quel monomio;
- anche i termini del polinomio sono monomi, quindi bisogna eseguire più volte la moltiplicazione fra monomi.

Divisione di un polinomio per un monomio

La divisione di un polinomio per un monomio può essere sempre ricondotta ad una moltiplicazione: *si moltiplica il polinomio per il reciproco del monomio.*

Si dovranno perciò tenere sempre presenti le proprietà delle operazioni richiamate prima, fra cui, in particolare, la proprietà distributiva.

Ecco tre esempi di sviluppo della divisione di un polinomio per un monomio.

1. Per dividere il polinomio

   $2ab+3b^2$

   per il monomio b, si procede così:
   - si considera il reciproco come potenza ad esponente negativo e si scrive:

     $$\frac{2ab+3b^2}{b}=(2ab+3b^2)b^{-1}$$

   - si applica la proprietà distributiva e si ottiene:

     $(2ab+3b^2)b^{-1}=2ab\cdot b^{-1}+3b^2\cdot b^{-1}$

   - si esegue la moltiplicazione dei monomi e si ha:

     $2ab\cdot b^{-1}+3b^2\cdot b^{-1}=2a+3b$

   In definitiva risulta:

   $$\frac{2ab+3b^2}{b}=2a+3b$$

2. Analogamente, per dividere il polinomio

   $4x^2-y^2$

   per il monomio x^2, si procede così:
   - si considera il reciproco come potenza ad esponente negativo e si scrive:

     $$\frac{4x^2-y^2}{x^2}=(4x^2-y^2)\cdot(x^2)^{-1}$$

   - si calcola la potenza di potenza e si ottiene:

     $(4x^2-y^2)\cdot(x^2)^{-1}=(4x^2-y^2)\cdot x^{-2}$

   - si applica la proprietà distributiva e si ha:

     $(4x^2-y^2)\cdot x^{-2}=4x^2\cdot x^{-2}-y^2\cdot x^{-2}$

   - si esegue la moltiplicazione dei monomi e si ha:

     $4x^2\cdot x^{-2}-y^2\cdot x^{-2}=4-y^2\cdot x^{-2}$

   In definitiva si ottiene:

   $$\frac{4x^2-y^2}{x^2}=4-\frac{y^2}{x^2}$$

3. Si procede in modo analogo per sviluppare la seguente divisione:

   $$\frac{6x^2-y^2}{-3xy}$$

   - si considera il reciproco come potenza ad esponente negativo e si scrive:

     $$\frac{6x^2-y^2}{-3xy}=(6x^2-y^2)\cdot(-3xy)^{-1}$$

   - si calcola la potenza del prodotto e si ha:

     $(6x^2-y^2)\cdot(-3xy)^{-1}=(6x^2-y^2)\cdot(-3)^{-1}\cdot x^{-1}\cdot y^{-1}$

   - si applica la proprietà distributiva e si ottiene:

     $(6x^2-y^2)\cdot(-3)^{-1}\cdot x^{-1}\cdot y^{-1}=$

     $=6x^2\cdot(-3)^{-1}\cdot x^{-1}\cdot y^{-1}-y^2\cdot(-3)^{-1}\cdot x^{-1}\cdot y^{-1}$

   - si esegue la moltiplicazione dei monomi e si ha:

     $6x^2\cdot(-3)^{-1}\cdot x^{-1}\cdot y^{-1}-y^2\cdot(-3)^{-1}\cdot x^{-1}\cdot y^{-1}=$

     $=-2xy^{-1}+3^{-1}x^{-1}y=-2xy^{-1}+y(3x)^{-1}$

   Si ottiene in definitiva:

   $$\frac{6x^2-y^2}{-3xy}=-\frac{2x}{y}+\frac{y}{3x}$$

Verifiche

Conoscenze

① Che cosa si ottiene moltiplicando un polinomio per un monomio?

② Quale proprietà bisogna applicare per ottenere il prodotto di un monomio per un polinomio?

③ Come si esegue la divisione di un polinomio per un monomio?

Comprensione

① Spiegare perché si deve applicare la proprietà distributiva quando si moltiplica un monomio per un polinomio.

② Spiegare perché *non* si deve applicare la proprietà distributiva quando si moltiplicano fra loro due monomi.

③ Fra le uguaglianze seguenti scegliere quelle *errate*, motivando la scelta; accanto ad ogni uguaglianza errata scrivere la corrispondente uguaglianza esatta.

$2x(x+y)=2x^2+y$ ....

$2x(x+y)=2x^2+2y$ ....

$-(2ax-4y)=-2ax-4y$ ....

$-(2ax+4y)=-2ax+4y$ ....

$\frac{a^3+\cancel{b^2}}{\cancel{b^2}}=a^3$ ....

$\frac{2x+4\cancel{y}}{\cancel{y}}=2x+4$ ....

Applicazioni

① Sviluppare le seguenti moltiplicazioni:

$a(b+c)$

$2a(x-y)$

$-ab(ax+by-2z+t)$

$(3bx-6b^2y+9b^3z)\ \frac{1}{3}\ b$

② Sviluppare le seguenti divisioni:

$$\frac{2xy^2+ab}{ax}$$

$$\frac{2xy^2+x^2}{y^2}$$

$$\frac{2xy^2+x^2}{x^2}$$

③ Un rettangolo ABCD ha l'altezza BC lunga h e la base AB lunga b, con $b>h$.
Su AB si fissa un punto P, che dista h da A; da P si traccia la perpendicolare PQ al lato opposto DC. Determinare l'area dei due rettangoli APQD e PBCQ in due modi: basandosi sulla figura e basandosi sul calcolo letterale.

9

Raccoglimento a fattor comune

Un altro modo di usare la proprietà distributiva

Il paragrafo precedente ha condotto a sviluppare la moltiplicazione di un monomio per un polinomio, basandosi sulla proprietà distributiva.
Ma ovviamente si può scrivere la proprietà distributiva anche nella forma seguente:

$ab+ac=a(b+c)$ [proprietà distributiva]

Ciò significa che il procedimento seguito nel precedente paragrafo può essere percorso in senso inverso. Ad esempio, è dato il polinomio:

$3ax+3ay+3az$

- vi si riconosce il monomio $3a$, fattore comune «distribuito» per moltiplicare *tutti* i termini, dato che risulta:

$3ax+3ay+3az=3a \cdot x+3a \cdot y+3a \cdot z$

- si applica la proprietà distributiva per scrivere:

$3a \cdot x+3a \cdot y+3a \cdot z=3a(x+y+z)$

Raccogliere a fattor comune un monomio

Alla fine del procedimento, il polinomio assegnato ($3ax+3ay+3az$) è scritto come prodotto del fattore comune ($3a$) per un altro polinomio ($x+y+z$); in tal caso si dice che *si è raccolto il fattore comune 3a*.
Più in generale, dato un polinomio, *raccogliere a fattor comune un monomio significa scrivere il polinomio come prodotto del fattore comune per un opportuno polinomio.*
Il procedimento da seguire è quello esposto prima e cioè:

- *si trova un monomio fattore comune di tutti i termini del polinomio;*
- *si applica la proprietà distributiva per scrivere il polinomio come prodotto del fattore comune per un opportuno polinomio.*

Qualche applicazione del procedimento

1. Calcolare l'area S di un poligono circoscritto ad un cerchio. Si esamina il poligono di fig. 1: ha i lati lunghi a, b, c, d, tutti tangenti ad un cerchio di raggio r. Il poligono è la somma di quattro triangoli; perciò risulta:

$$S=\frac{1}{2}ra+\frac{1}{2}rb+\frac{1}{2}rc+\frac{1}{2}rd$$

Raccogliendo il fattore comune r, si ottiene:

$$S=\frac{1}{2}r\ (a+b+c+d)$$

dove la somma $(a+b+c+d)$ indica il perimetro del poligono.

2. Nel polinomio $6x+8y+2$ si raccoglie il fattore comune 2; si ha:

$6x+8y+2=2 \cdot 3x+2 \cdot 4y+2 \cdot 1$

Risulta quindi:

$6x+8y+2=2(3x+4y+1)$

3. Nel polinomio x^3+2x^2+x si raccoglie il fattore comune x; si ha:

$x^3+2x^2+x=x \cdot x^2+x \cdot 2x+x \cdot 1$

Risulta quindi:

$x^3+2x^2+x=x(x^2+2x+1)$

4. Nel polinomio (x^3+2x^2+1) *non* si può raccogliere a fattor comune nessun monomio.

In particolare *non* si può raccogliere x, perché x non compare come fattore dell'ultimo monomio, che è 1.
Quindi scrivere:

$x^3+2x^2+1=x(x^2+2x+1)$ ***è sbagliato***

È facile accorgersi dell'errore: basta sviluppare correttamente la moltiplicazione indicata al secondo membro. Si ha:

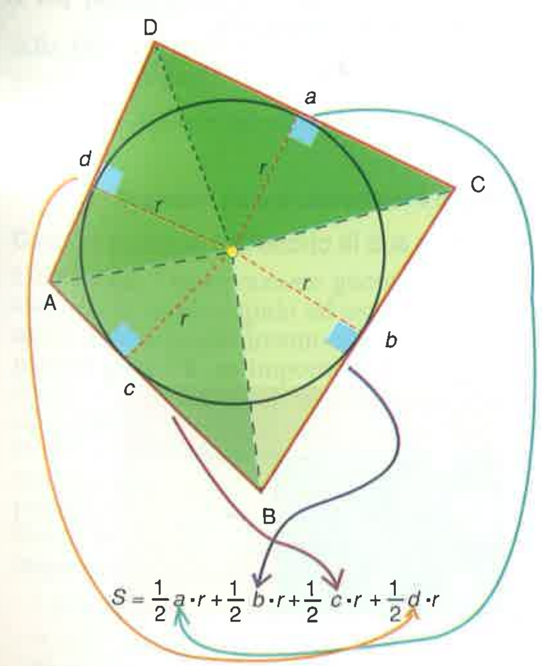
$x(x^2+2x+1)=x \cdot x^2+x \cdot 2x+x \cdot 1=x^3+2x^2+\boldsymbol{x}$

Si trova così che il prodotto ottenuto ($x^3+2x^2+\boldsymbol{x}$) non è il polinomio di partenza (che era x^3+2x+1).

Gli esempi svolti suggeriscono due osservazioni:

- il raccoglimento a fattor comune non si può eseguire sempre, ma solo se uno stesso fattore compare in tutti i monomi del polinomio;
- dopo aver raccolto un fattore, può restare il dubbio di aver sbagliato qualche calcolo. Ma si può risolvere facilmente questo dubbio: si esegue la moltiplicazione indicata e si controlla che il polinomio ottenuto sia proprio quello di partenza.

Figura 1
Area di un poligono circoscritto ad un cerchio



Verifiche

Conoscenze

① Che cosa vuol dire raccogliere a fattor comune un monomio?
② In che forma si scrive un polinomio, dopo che si è raccolto a fattor comune un monomio?
③ Come si può verificare se un procedimento di raccoglimento a fattor comune è esatto?
④ È sempre possibile raccogliere a fattor comune un monomio in un polinomio?

Comprensione

① Portare degli esempi di polinomi in cui si può raccogliere un monomio a fattor comune.
② Portare degli esempi di polinomi in cui non è possibile raccogliere un monomio a fattor comune.

Applicazioni

① Raccogliere a fattor comune il monomio x nei seguenti polinomi:

$xy+2x$ x^2-3x $2x^2-x$

② Spiegare perché nei polinomi seguenti *non* si può raccogliere x a fattor comune.

$xy+2$ x^2-3 $2x^2-y$

③ Fra le uguaglianze seguenti scegliere quella sbagliata, motivando la scelta, e correggerla scrivendo la corrispondente uguaglianza esatta.

$3x^3+2x^2+x=x(3x^2+2x)$

$3x^3+2x^2-x=x(3x^2+2x-1)$

Collegamento con il paragrafo precedente

① Spiegare perché il procedimento di moltiplicazione di un polinomio per un monomio è sempre possibile, mentre invece il procedimento di raccoglimento di un monomio a fattor comune non è sempre possibile.
② Nel polinomio $(2x^2y+4xy^2)$ si raccoglie il fattore comune $(2xy)$ e si scrive:

$2xy(x+2y)$

Con quale operazione si ottiene il polinomio $(x+2y)$ a partire da quello assegnato?

10 Moltiplicazione di polinomi. Un prodotto notevole

Un problema che conduce a moltiplicare due polinomi

Un rettangolo ABCD ha i lati lunghi b e h. Si prolunga la base AB di un segmento BE lungo c, l'altezza AD di un segmento DF lungo d (fig. 1) e si costruisce il rettangolo AFGE, che ha i lati AF e AE. Quanto vale l'area S del nuovo rettangolo?
Il rettangolo AFGE presenta le seguenti caratteristiche:

- un lato AE lungo $b+c$;
- l'altro lato AF lungo $h+d$.

Perciò l'area S è data da:

$$S=(b+c)(h+d) \qquad (1)$$

D'altra parte, la fig. 2 mostra che il rettangolo AFGE è somma di quattro rettangoli e perciò si ha:

$$S=bh+bd+ch+cd \qquad (2)$$

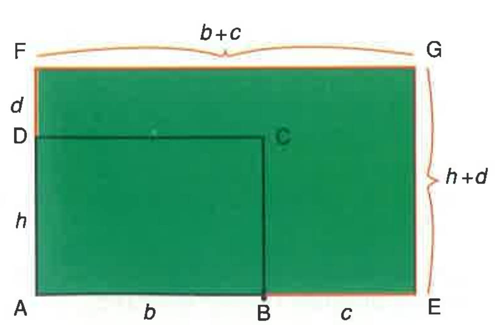
La moltiplicazione di due polinomi con un procedimento geometrico

Il problema ha condotto dunque a percorrere il seguente itinerario:

- si è moltiplicato il polinomio $(b+c)$ per il polinomio $(h+d)$, ottenendo:

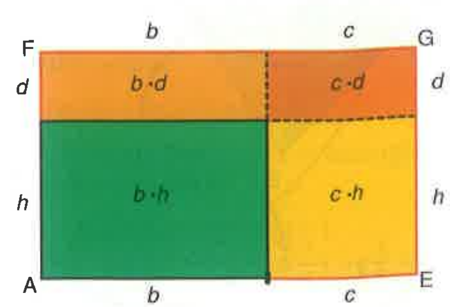
$$S=(b+c)(h+d) \qquad (1)$$

Figura 1
Area S di un rettangolo di dimensioni $(b+c)$ e $(h+d)$



$S=(b+c)\cdot(h+d)$

Figura 2
Il rettangolo è formato da quattro rettangoli



$S=bh+bd+ch+cd$

- ci si è basati su considerazioni geometriche legate alla fig. 2 per scrivere:

$$S=bh+bd+ch+cd \qquad (2)$$

- confrontando la (1) con la (2), si è scoperto che vale l'uguaglianza:

$$(b+c)(h+d)=bh+bd+ch+cd \qquad (3)$$

La moltiplicazione di due polinomi con un procedimento algebrico

L'ultima formula ottenuta suggerisce un'importante osservazione: l'uguaglianza (3) non è legata a particolari proprietà geometriche; è invece dovuta alla proprietà distributiva.
Si può infatti eseguire la moltiplicazione $(b+c)(h+d)$ nel modo seguente:

1. si applica la proprietà distributiva, considerando $h+d$ come un solo fattore f; si ha:

   $(b+c)f=bf+cf$ ossia:
   $(b+c)(h+d)=b(h+d)+c(h+d)$

2. si applica di nuovo la proprietà distributiva, scrivendo:

   $b(h+d)=bh+bd \qquad c(h+d)=ch+cd$

3. si addizionano i risultati precedenti, ottenendo:

   $b(h+d)+c(h+d)=bh+bd+ch+cd$

Alla fine dei calcoli si ottiene proprio l'uguaglianza (3) e cioè:

$$(b+c)(h+d)=bh+bd+ch+cd$$

Come si sviluppa il prodotto di due polinomi

Certamente l'osservazione geometrica porta al risultato in modo rapido ed espressivo, mentre quest'ultimo procedimento algebrico è lungo e pesante. Ma c'è un'importante differenza fra i due metodi: l'osservazione geometrica è legata alla figura, perciò vale solo in casi particolari; invece il procedimento algebrico è basato solo sulle proprietà delle operazioni, che sono sempre valide.
Perciò il procedimento algebrico presenta due importanti caratteristiche:

- è generale;
- si può estendere al caso di polinomi formati da più termini.

Così risulta, per esempio, applicando due volte la proprietà distributiva:

$(a+b+c)(x+y+z)=$
$=a(x+y+z)+b(x+y+z)+c(x+y+z)=$
$=ax+ay+az + bx+by+bz + cx+cy+cz$

Si può dunque arrivare alle seguenti conclusioni:

- *moltiplicando due polinomi si ha ancora un polinomio;*
- *per ottenere il polinomio prodotto basta valersi della proprietà distributiva.*

Un esempio di calcolo di un prodotto di polinomi

Ecco un'applicazione delle precedenti conclusioni. Sviluppare il prodotto:

$$(2a+4b)(3x+5y)$$

Si ha:

$(2a+4b)(3x+5y)=2a(3x+5y)+4b(3x+5y)=$

$=2a\cdot 3x+2a\cdot 5y+4b\cdot 3x+4b\cdot 5y=$ [distributiva]

$=6ax+10ay+12bx+20by$ [prodotto di monomi]

In definitiva si ottiene:

$$(2a+4b)(3x+5y)=6ax+10ay+12bx+20by$$

Un prodotto notevole

Risulta invece più lungo ed elaborato lo sviluppo della seguente moltiplicazione:

$$(a+b)(a-b)$$

Si ha: $(a+b)(a-b)=$

$=(a+b)\cdot[a+(-b)]=$ [differenza di monomi]

$=a\cdot[a+(-b)]+b\cdot[a+(-b)]=$ [distributiva]

$=a\cdot a+a\cdot(-b)+b\cdot a+b\cdot(-b)=$ [distributiva]

$=a^2-ab+ab-b^2=$ [prodotto di monomi]

$=a^2-b^2$ [somma di monomi opposti]

Si arriva dunque ad un risultato molto semplice:

$$\boxed{(a+b)(a-b)=a^2-b^2}$$

Conviene allora ricordare questo risultato finale, in modo da evitare di ripetere tante volte il lungo procedimento: *moltiplicando la somma di due termini per la loro differenza si ottiene la differenza dei quadrati dei due termini.*
Questo risultato prende anche il nome di *prodotto notevole,* cioè prodotto che deve essere notato (o ricordato).

Osservazioni sugli esempi svolti

I vari esempi sviluppati suggeriscono un'osservazione: per svolgere la moltiplicazione fra due polinomi occorre applicare correttamente tutte le nozioni svolte in questo capitolo.
In particolare, è importante:

- ricordare sempre tutte le nozioni imparate in un lungo periodo di tempo;
- esaminare accuratamente ogni espressione, per trovare la proprietà da applicare.

Verifiche

Conoscenze

① Che cosa si ottiene moltiplicando fra loro due polinomi?

② Quale proprietà bisogna applicare per svolgere il prodotto di due polinomi?

③ Qual è il prodotto notevole introdotto in questo paragrafo?

Comprensione

① Portare un esempio di moltiplicazione fra due polinomi che non si riesce a svolgere ripetendo le considerazioni geometriche esposte all'inizio del paragrafo.

② Portare un esempio di moltiplicazione fra due polinomi che si riesce a svolgere ripetendo considerazioni geometriche analoghe a quelle esposte all'inizio del paragrafo.

Applicazioni

① Sviluppare i prodotti seguenti di polinomi:

$(2x+1)(4+x)$ $\quad$ $(1-xy)(x^2+1)$

$\left(-\frac{1}{3}ab+3c\right)\left(3ab-\frac{1}{3}c\right)$

② Sviluppare i prodotti seguenti, ricordando il prodotto notevole segnalato in questo paragrafo.

$(x+1)(x-1)$ $\quad$ $(1-a^2)(1+a^2)$

$(-a-b)(-a+b)$ $\quad$ $(-2-b^3)(-2+b^3)$

③ Un rettangolo ABCD ha il lato AB lungo b ed il lato AD lungo h (fig. 3).
All'interno del segmento AB si fissa un punto P a distanza p da B, all'interno del segmento AD si fissa un punto Q a distanza q da D e si costruisce il rettangolo di dimensioni AP e AQ. Calcolare l'area del rettangolo APKQ in due modi:
- basandosi su considerazioni geometriche;
- basandosi sul calcolo letterale.

④ È dato un quadrato ABCD con il lato lungo a (fig. 4). Si toglie un segmento lungo b al lato AD e si aggiunge lo stesso segmento al lato AB. Calcolare l'area del rettangolo AEFG in due modi:
- basandosi su considerazioni geometriche;
- basandosi sul calcolo letterale.

Figura 3
Calcolare l'area del rettangolo APKQ in due modi

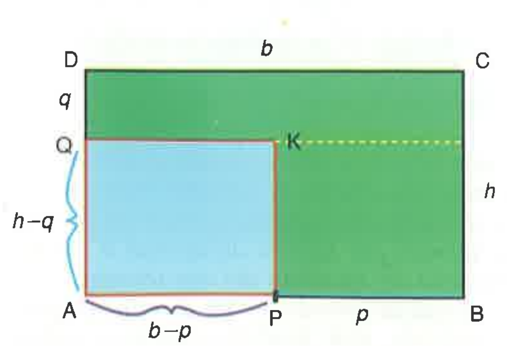
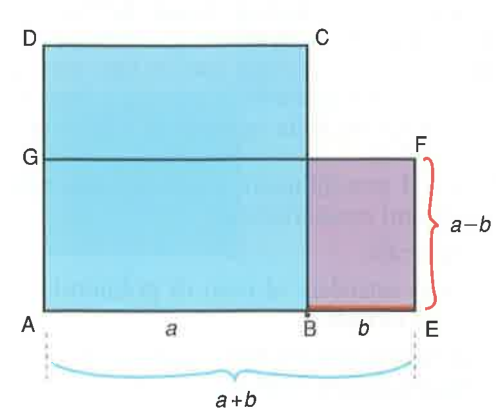


Figura 4
Calcolare l'area del rettangolo AEFG in due modi



11 Le potenze di un binomio. Il triangolo di Tartaglia

Un problema che conduce ad elevare un binomio al quadrato

Si considera un quadrato ABCD con il lato AB lungo a. Si prolunga il lato AB di un segmento BE lungo b (fig. 1) e si costruisce il quadrato AEFG di lato AE. Quanto vale l'area S del nuovo quadrato?
Il quadrato ha il lato AE lungo $a+b$; quindi si ha:

$$S=(a+b)^2$$

Si è dunque condotti a sviluppare il quadrato del binomio $(a+b)$.

Sviluppare il quadrato di un binomio

Basandosi ora sul calcolo letterale, si sviluppa il quadrato del binomio nel modo seguente:

- si ricorda la definizione di elevazione al quadrato e si scrive:

$$(a+b)^2=(a+b)(a+b)$$

- si sviluppa il prodotto di due polinomi e si ha:

$(a+b)(a+b)=$

$=a(a+b)+b(a+b)=$ [distributiva]

$=a\cdot a+a\cdot b+b\cdot a+b\cdot b=$ [distributiva]

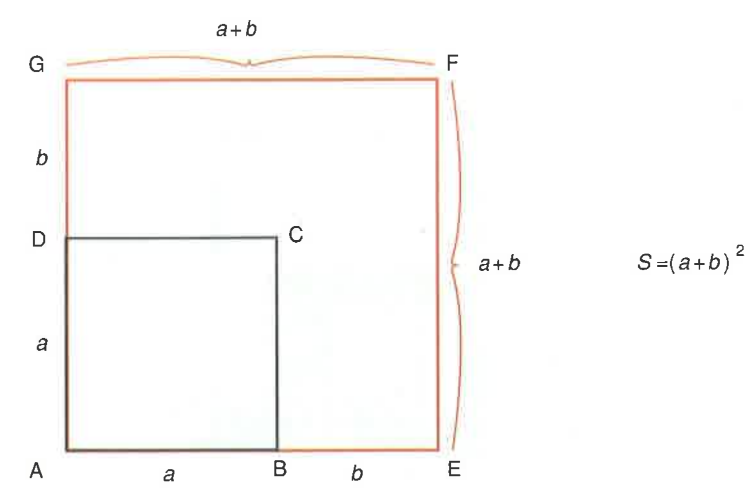
$=a^2+ab+ab+b^2=$ [prodotto di monomi]

$=a^2+2ab+b^2$ [somma di monomi simili]

Si trova infine *la seguente regola per sviluppare il quadrato di un binomio:*

$$\boxed{(a+b)^2=a^2+2ab+b^2}$$

Figura 1
Un quadrato di lato (a+b)



Il procedimento è abbastanza lungo; in questo caso, risulta più rapido ed espressivo il procedimento geometrico illustrato in fig. 2: il quadrato di lato $(a+b)$ è formato dai quadrati di area a^2 e b^2 e da due rettangoli uguali di area ab.

Comunque, per evitare di ripetere tutti i calcoli o di tracciare figure conviene ricordare il risultato ottenuto: *per elevare al quadrato la somma di due termini si deve sommare il quadrato del primo termine, il quadrato del secondo termine e il doppio prodotto dei due termini.*

Un problema che conduce ad elevare un binomio al cubo

Si considera un cubo con il lato lungo a. Si prolunga il lato di un segmento lungo b (fig. 3) e si costruisce il cubo con il lato lungo $a+b$.
Quanto vale il volume V del nuovo cubo?
In questo caso risulta:

$$V=(a+b)^3$$

Si è quindi condotti a sviluppare il cubo del binomio $(a+b)$.

Sviluppare il cubo di un binomio

Basandosi di nuovo sul calcolo letterale, si sviluppa questa potenza nel modo seguente:

- per la definizione di elevazione al cubo si scrive:

$$(a+b)^3=(a+b)(a+b)^2$$

- si applicano i risultati precedenti per sviluppare il quadrato e si scrive:

$$(a+b)(a+b)^2=(a+b)(a^2+2ab+b^2)$$

- si sviluppa il prodotto secondo i criteri dati nel paragrafo precedente; si ha:

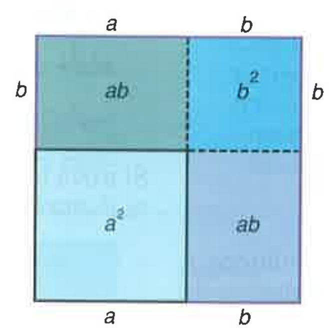
$$\begin{aligned}&(a+b)(a^2+2ab+b^2)=\\&=a(a^2+2ab+b^2)+b(a^2+2ab+b^2)=\\&=a\cdot a^2+a\cdot 2ab+a\cdot b^2+b\cdot a^2+b\cdot 2ab+b\cdot b^2=\\&=a^3+2a^2b+ab^2+ba^2+2ab^2+b^3=\\&=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\end{aligned}$$

In definitiva si arriva alla seguente *regola per sviluppare il cubo di un binomio:*

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

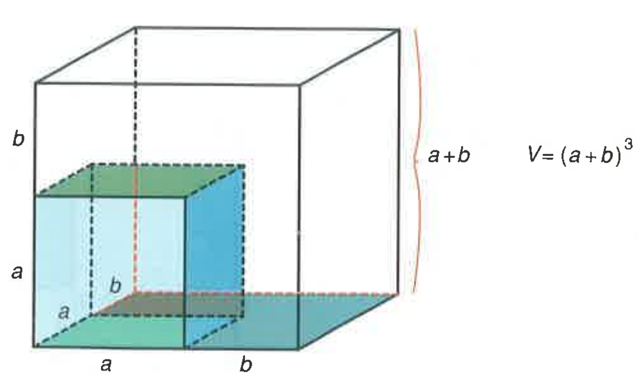
Il procedimento è abbastanza lungo; inoltre, in questo caso, il procedimento geometrico, illustrato in fig. 4, non risulta immediato da visualizzare: per riempire il cubo di lato $(a+b)$ non bastano i cubi di volume a^3 e b^3, ma occorrono anche tre parallelepipedi di volume a^2b e tre parallelepipedi di volume ab^2.
Conviene dunque ricordare il risultato ora ottenuto per evitare di ripetere il procedimento.

Figura 2
Il quadrato di lato $(a+b)$ è formato da un quadrato e da due rettangoli



$S=a^2+b^2+2ab$

Figura 3
Un cubo di lato $(a+b)$



La potenza di un binomio

Ancora una volta, il procedimento geometrico riesce facile e rapido solo in qualche caso particolare; per esempio, la quarta potenza di un binomio non può essere certo sviluppata geometricamente.
Si può, invece, applicare il calcolo letterale, ripetendo il procedimento illustrato prima; si ha:

$$(a+b)^4=(a+b)(a+b)^3=(a+b)(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3)$$

Sviluppando adeguatamente i calcoli indicati si trova infine:

$$(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$$

Quest'ultimo caso suggerisce un'immediata osservazione: per sviluppare la potenza di un binomio si eseguono lunghi calcoli con un gran numero di termini. Si è allora condotti ad esaminare meglio i risultati finora ottenuti per cercare un metodo più rapido per sviluppare le successive potenze di un binomio.

Ecco i risultati finora ottenuti nello sviluppo di potenze di binomi:

$a+b$
è somma di monomi tutti di 1° grado

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$
è somma di monomi tutti di 2° grado

$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$
è somma di monomi tutti di 3° grado

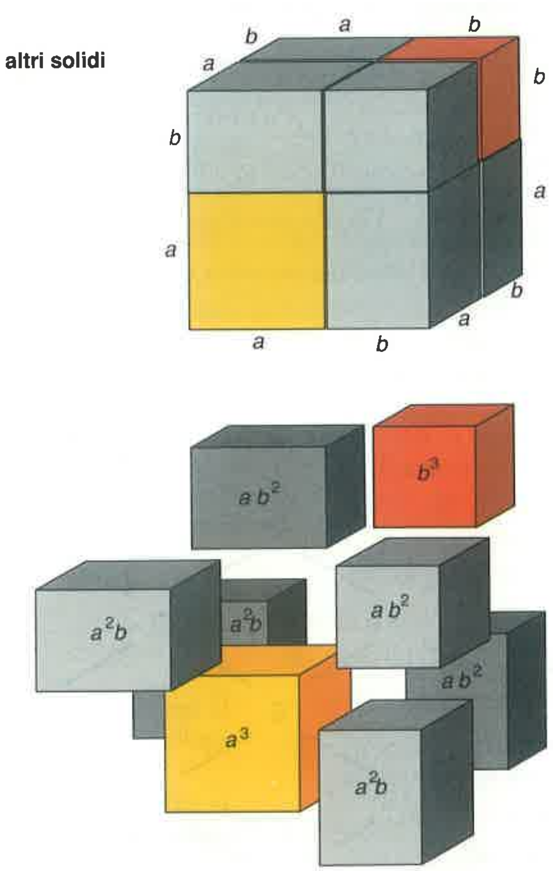
$(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$
è somma di monomi tutti di 4° grado

Questi risultati mostrano *una prima regola: la potenza* $(a+b)^n$ *è costruita sommando tutti i monomi dello stesso grado* n *che si possono formare con le lettere* a e b.

E così, per ottenere $(a+b)^5$, occorrono tutti i monomi di 5° grado che si possono formare con le lettere a e b e cioè:

$$a^5 \quad a^4b \quad a^3b^2 \quad a^2b^3 \quad ab^4 \quad b^5$$

Figura 4
Il cubo di lato $(a+b)$ è formato da altri solidi



Il triangolo di Tartaglia

Rimangono ora da determinare i coefficienti dei monomi.
Per questo conviene esaminare di nuovo i risultati ottenuti, fissando l'attenzione sui coefficienti dei monomi; si ottengono i risultati indicati nella tabella A.
La particolare disposizione a triangolo dell'ultima colonna della tabella mette in evidenza una proprietà:
- *si inizia e si termina ogni riga con 1;*
- *tutti gli altri coefficienti si ottengono sommando i due coefficienti più vicini della riga precedente*, secondo lo schema di fig. 5.

Lo schema di fig. 5 viene chiamato *triangolo di Tartaglia*, dal nome del matematico italiano del '500 che dedicò a questo triangolo aritmetico alcune pagine di un suo libro. Spesso, soprattutto in Francia, questa disposizione di numeri è chiamata *triangolo di Pascal*, dal nome del matematico francese del '600 che a questo triangolo dedicò un intero trattato. Ma questa disposizione triangolare di numeri con le sue proprietà è molto più antica di Tartaglia e di Pascal: in un libro di matematica cinese del 1303 si trova già illustrato proprio il triangolo aritmetico, chiamato addirittura «il vecchio metodo per trovare le potenze».

Regola per sviluppare la potenza $(a+b)^n$

Si arriva a sviluppare la potenza $(a+b)^5$ col seguente procedimento:
- ad ogni monomio si assegna il coefficiente dato dalla quinta riga del triangolo di Tartaglia; si ha:

$$1 \cdot a^5 \quad 5 \cdot a^4b \quad 10 \cdot a^3b^2 \quad 10 \cdot a^2b^3 \quad 5 \cdot ab^4 \quad 1 \cdot b^5$$

- si sommano i vari monomi e si ottiene:

$$(a+b)^5=a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$$

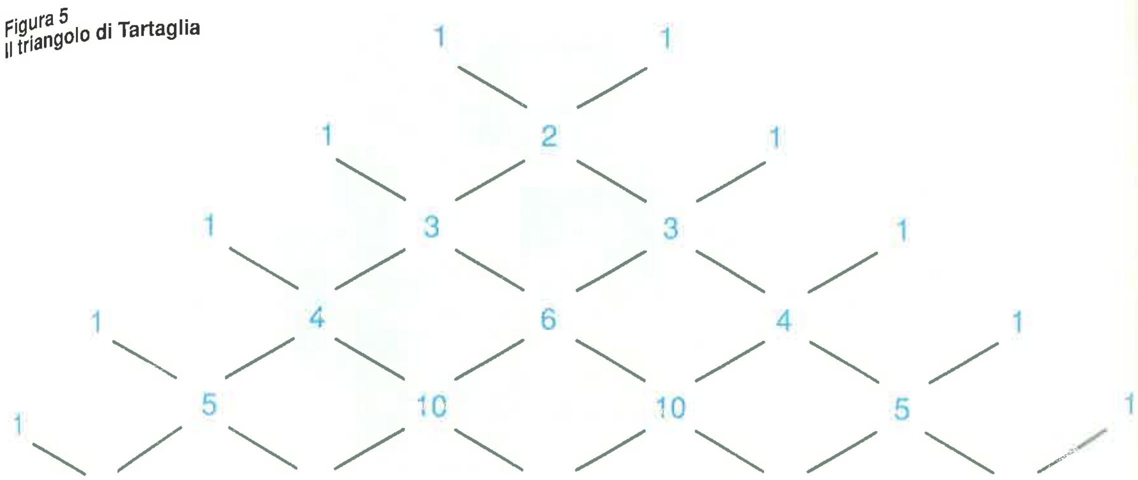
Il calcolo effettuato per sviluppare $(a+b)^5$ ha carattere generale e indica il modo più rapido per sviluppare la potenza $(a+b)^n$. In conclusione:
1. *si scrivono tutti i monomi di grado* n *che si possono formare con le lettere* a *e* b;
2. *si scelgono i coefficienti da assegnare ad ogni monomio, costruendo il triangolo di Tartaglia fino alla riga* n;
3. *si sommano tutti i monomi ottenuti.*

Questo metodo può anche essere seguito, in particolare, per calcolare il quadrato e il cubo di un binomio.

Tabella A
Sviluppo e coefficienti delle potenze del binomio $(a+b)$

Potenza	Sviluppo	Coefficienti
$a+b$	$1 \cdot a+1 \cdot b$	1 1
$(a+b)^2$	$1 \cdot a^2+2 \cdot ab+1 \cdot b^2$	1 2 1
$(a+b)^3$	$1 \cdot a^3+3 \cdot a^2b+3 \cdot ab^2+1 \cdot b^3$	1 3 3 1
$(a+b)^4$	$1 \cdot a^4+4 \cdot a^3b+6 \cdot a^2b^2+4 \cdot ab^3+1 \cdot b^4$	1 4 6 4 1

Figura 5
Il triangolo di Tartaglia



Esempi di applicazione delle regole

Le applicazioni delle regole ora sviluppate sono molte, ma sono tutte costruite nello stesso modo: si sostituiscono al posto di a e di b varie espressioni. Ecco degli esempi.

1. Sviluppare $(x+1)^2$.
   Si applica la regola per sviluppare il quadrato del binomio, cioè:
   $$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2 \qquad (1)$$
   Sostituendo x al posto di a e 1 al posto di b si ottiene:
   $$(x+1)^2=x^2+2x+1$$
2. Sviluppare $(x+1)^3$.
   Si applica la regola per sviluppare il cubo del binomio, cioè:
   $$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \qquad (2)$$
   Sostituendo ancora x al posto di a e 1 al posto di b si ottiene:
   $$(x+1)^3=x^3+3x^2+3x+1$$
3. Sviluppare $(3x-5y)^2$.
   Ora, per applicare la regola (1), conviene scrivere il binomio nel modo seguente:
   $$(3x-5y)^2=[3x+(-5y)]^2$$
   Così si sostituisce $3x$ al posto di a e $(-5y)$ al posto di b e si ottiene:
   $$[3x+(-5y)]^2=(3x)^2+2 \cdot 3x \cdot (-5y)+(-5y)^2=$$
   $$=9x^2-30xy+25y^2$$
   In definitiva risulta:
   $$(3x-5y)^2=9x^2-30xy+25y^2$$

Sviluppo di $(a-b)^2$ e $(a-b)^3$

Due importanti osservazioni completano il panorama delle regole da ricordare per sviluppare la potenza di un binomio.

1. Le regole trovate in questo paragrafo si applicano anche a binomi che sono differenza di due monomi.
   Basta ricordare che risulta:
   $$(a-b)=[a+(-b)]$$
   Così si può scrivere, per esempio:
   $$(a-b)^2=[a+(-b)]^2=a^2+2a(-b)+(-b)^2$$
   e quindi:
   $$\boxed{(a-b)^2=a^2-2ab+b^2}$$
   E analogamente:
   $$(a-b)^3=[a+(-b)]^3=a^3+3a^2(-b)+3a(-b)^2+(-b)^3$$
   da cui:
   $$\boxed{(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3}$$
2. Le regole possono essere utilizzate per riconoscere se un polinomio è la potenza di un binomio.
   Ecco due esempi:
   $$x^2+2xy+y^2=(x+y)^2$$
   $$a^2-4a+4=a^2-2 \cdot 2 \cdot a+2^2=(a-2)^2$$

V e r i f i c h e

Conoscenze

① Elencare le regole per sviluppare il quadrato ed il cubo del binomio.
② Spiegare come si costruisce il triangolo di Tartaglia.
③ Esporre il procedimento per sviluppare la potenza di un binomio.

Comprensione

① Si può sviluppare la potenza di un binomio senza usare il triangolo di Tartaglia?
② Sviluppando la potenza di un binomio $(a+b)^4$ si sono scritti i vari monomi nell'ordine seguente:
$$a^4 \quad b^4 \quad a^2b^2 \quad a^3b \quad ab^3$$
Si può usare direttamente il triangolo di Tartaglia? Motivare la risposta.

Applicazioni

① Sviluppare le seguenti potenze di binomi:
$$(a+3)^2 \quad (x-1)^3 \quad (a+b)^6 \quad (2a+4b)^5$$
② Spiegare perché sono sbagliati i seguenti sviluppi di potenze di binomi:
$$(a+b)^2=a^2+b^2 \qquad (x-2)^3=x^3-8$$
Scrivere poi lo sviluppo corretto.

12

Operazioni con monomi fratti

Monomi fratti

Nelle operazioni fra monomi e, in particolare, nella divisione, si possono seguire due diversi punti di vista:

1. trattare allo stesso modo i monomi con esponenti positivi e negativi;
2. esprimere le potenze con esponente negativo con il simbolo di frazione.

Gli esempi della tabella seguente chiariranno meglio questi due punti di vista.

Potenze con esponente negativo	Frazioni
x^{-1}	$\frac{1}{x}$
$x \cdot x^{-1} = x^0 = 1$	$x \cdot \frac{1}{x} = 1$
ab^{-1}	$\frac{a}{b}$
$(ab^{-1})^{-1}=a^{-1}b^1=a^{-1}b$	$\frac{1}{\frac{a}{b}}=\frac{b}{a}$

Finora nel testo si è seguito prevalentemente il primo metodo; tuttavia è opportuno conoscere meglio anche il secondo punto di vista e saper lavorare con *i monomi fratti*, tenendo presente che:

- *i monomi fratti sono quelli in cui alcune delle lettere compaiono con esponente negativo;*
- *i monomi fratti possono anche essere scritti valendosi del simbolo di frazione.*

In questo secondo modo, per eseguire i calcoli, occorre anche ricordare varie regole per eseguire i calcoli con le frazioni.
Ecco i casi che si presentano.

Moltiplicazione di monomi fratti

La regola della moltiplicazione di due frazioni è ben nota: si moltiplicano i numeratori fra loro e i denominatori fra loro. La stessa regola si estende ai monomi fratti.
Così si ha, per esempio:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{x}{y}=\frac{ax}{by} \qquad (1)$$

Alla precedente uguaglianza si può arrivare anche basandosi sulle potenze ad esponente negativo e sulle proprietà delle operazioni; si ha infatti:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{x}{y}=ab^{-1}xy^{-1}$$

e perciò, applicando la proprietà commutativa della moltiplicazione, si scrive:

$$ab^{-1}xy^{-1}=axb^{-1}y^{-1}$$

Calcolando poi la potenza del prodotto si ha:

$$axb^{-1}y^{-1}=ax(by)^{-1}$$

Ora, valendosi di nuovo del simbolo di frazione, si ha:

$$ax(by)^{-1}=\frac{ax}{by}$$

e si ritrova l'uguaglianza (1).

Divisione di monomi fratti

Per dividere due monomi fratti si estende la regola della divisione di due frazioni: si moltiplica il primo monomio per il reciproco del secondo.
Così si ha, per esempio:

$$\frac{a}{b}:\frac{x}{y}=\frac{a}{b}\cdot\frac{y}{x}=\frac{ay}{bx}$$

o anche:

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{x}{y}}=\frac{a}{b}\cdot\frac{y}{x}=\frac{ay}{bx}$$

Elevazione a potenza di monomi fratti

Per l'elevazione a potenza conviene tenere presenti le proprietà delle potenze e, in particolare, quelle che sono richiamate qui sotto:

I. $\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$

II. $(ab)^n=a^nb^n$

III. $(a^n)^m=a^{nm}$

Così si ha, per esempio:

$$\left(\frac{x}{y}\right)^3=\frac{x^3}{y^3} \qquad \text{(I)}$$

$$\left(\frac{-2ax}{3by}\right)^3=\frac{-8a^3x^3}{27b^3y^3} \qquad \text{(I e II)}$$

$$\left(\frac{-2a^2x^3}{b^3y^4}\right)^3=\frac{-8a^6x^9}{b^9y^{12}} \qquad \text{(I, II e III)}$$

Addizionare e sottrarre monomi fratti

La somma di monomi fratti si può scrivere in forma più breve seguendo un procedimento analogo a quello applicato per addizionare più frazioni; tale procedimento sarà dunque basato sui seguenti passi:

1. si calcola il minimo comune multiplo dei denominatori, cioè il prodotto dei fattori comuni e non comuni, presi ciascuno con il massimo esponente (per brevità, tale minimo comune multiplo viene spesso indicato con la sigla m.c.m.);
2. ad ogni monomio fratto si sostituisce un monomio, che ha per denominatore il m.c.m. prima determinato, mentre per il numeratore si procede nel modo seguente:
   I. si divide il m.c.m. per il denominatore;
   II. il risultato si moltiplica per il numeratore;
3. si sommano i monomi fratti ottenuti, che hanno tutti lo stesso denominatore.

Esempio:

$$\frac{a}{bc}+\frac{b}{ac}$$

1. m.c.m.$=abc$
2. - per la frazione $\frac{a}{bc}$
   I. $abc:bc=a(bc)\cdot(bc)^{-1}=a$
   II. $\frac{a}{bc}=\frac{a\cdot a}{abc}=\frac{a^2}{abc}$
   - per la frazione $\frac{b}{ac}$
   I. $abc:ac=b(ac)\cdot(ac)^{-1}=b$
   II. $\frac{b}{ac}=\frac{b\cdot b}{abc}=\frac{b^2}{abc}$
3. $\frac{a}{bc}+\frac{b}{ac}=\frac{a^2}{abc}+\frac{b^2}{abc}=\frac{a^2+b^2}{abc}$

In definitiva risulta:

$$\frac{a}{bc}+\frac{b}{ac}=\frac{a^2+b^2}{abc} \qquad (2)$$

Anche in questo caso, si può arrivare all'uguaglianza (2) basandosi sulle potenze ad esponente negativo.

Ecco come si procede.

- Si comincia riscrivendo l'espressione assegnata nel modo seguente:
$$\frac{a}{bc}+\frac{b}{ac}=a(bc)^{-1}+b(ac)^{-1}$$
- Si sviluppa la potenza del prodotto, ottenendo:
$$a(bc)^{-1}+b(ac)^{-1}=ab^{-1}c^{-1}+ba^{-1}c^{-1}$$
- Si osserva che si può scrivere:
$$a=a^2a^{-1} \quad \text{e} \quad b=b^2b^{-1}$$
e quindi:
$$ab^{-1}c^{-1}+ba^{-1}c^{-1}=a^2a^{-1}b^{-1}c^{-1}+b^2b^{-1}a^{-1}c^{-1}$$
- Si applica la proprietà commutativa della moltiplicazione e si calcola la potenza del prodotto, ottenendo:

$$a^2a^{-1}b^{-1}c^{-1}+b^2b^{-1}a^{-1}c^{-1}=a^2(abc)^{-1}+b^2(abc)^{-1}$$

- Si raccoglie il fattore comune $(abc)^{-1}$ e si trova:

$$a^2(abc)^{-1}+b^2(abc)^{-1}=(a^2+b^2)(abc)^{-1}$$

- L'ultima espressione, riscritta con il simbolo di frazione, dà:

$$(a^2+b^2)(abc)^{-1}=\frac{a^2+b^2}{abc}$$

e permette di ritrovare l'uguaglianza (2).

Per sottrarre monomi fratti, basta sommare al primo l'opposto del secondo; così si otterrà, per esempio:

$$\frac{a}{bc}-\frac{b}{ac}=\frac{a}{bc}+\frac{-b}{ac}=\frac{a^2-b^2}{abc}$$

Espressioni con monomi fratti

Per sviluppare un'espressione in cui compaiono più operazioni diverse da svolgere anche con monomi fratti, si seguono le indicazioni già date per svolgere le espressioni numeriche e cioè:

- si svolgono per prime le operazioni racchiuse fra parentesi;
- in assenza di parentesi si segue la priorità delle operazioni.

Ecco due esempi.

1. Scrivere in forma più sintetica l'espressione:

$$\left(\frac{3x^2}{y}\right)^2-\left(\frac{y^2}{x}\right)^2$$

Si ha:

$$\left(\frac{3x^2}{y}\right)^2-\left(\frac{y^2}{x}\right)^2=\frac{9x^4}{y^2}-\frac{y^4}{x^2}=\frac{9x^6-y^6}{y^2x^2}$$

2. Sviluppare la seguente espressione:

$$\left(\frac{3x^2}{y}-\frac{y^2}{x}\right)^2$$

Si ha:

$$\left(\frac{3x^2}{y}-\frac{y^2}{x}\right)^2=\left(\frac{3x^3-y^3}{yx}\right)^2=\frac{(3x^3-y^3)^2}{y^2x^2}$$

e quindi:

$$\left(\frac{3x^2}{y}-\frac{y^2}{x}\right)^2=\frac{9x^6+y^6-6x^3y^3}{y^2x^2}$$

Verifiche

Conoscenze

① Spiegare il significato del termine monomio fratto.

② Esporre i due modi di scrivere un monomio fratto, portando qualche esempio.

Comprensione

① Verificare che è corretta l'uguaglianza:

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{x}{y}}=\frac{a}{b}\cdot\frac{y}{x}=\frac{ay}{bx}$$

basandosi sulle potenze ad esponente negativo.

② Riprendere l'ultima espressione sviluppata in questo paragrafo ed indicare le regole o le proprietà applicate in ogni passaggio.

$$\left(\frac{3x^2}{y}-\frac{y^2}{x}\right)^2=\left(\frac{3x^3-y^3}{yx}\right)^2$$

.... di monomi fratti

$$\left(\frac{3x^3-y^3}{yx}\right)^2=\frac{(3x^3-y^3)^2}{y^2x^2}$$

potenza di ....

$$\frac{(3x^3-y^3)^2}{y^2x^2}=\frac{9x^6+y^6-6x^3y^3}{y^2x^2}$$

quadrato di ....

Applicazioni

① Sviluppare le due espressioni seguenti:

$$\frac{2a^2}{b}+\frac{3b^2}{a} \qquad \frac{(2a)^2}{b}+\frac{(3b)^2}{a}$$

Quale diversità di calcolo portano le parentesi nella seconda espressione?

② Sviluppare le due espressioni seguenti:

$$\left(\frac{2a}{b}\right)^2+\left(\frac{3b}{a}\right)^2 \qquad \left(\frac{2a}{b}+\frac{3b}{a}\right)^2$$

Confrontare i risultati ottenuti.

Il calcolo letterale per scoprire proprietà aritmetiche

Il calcolo letterale permette di studiare in modo rapido ed espressivo varie proprietà aritmetiche; ecco qualche esempio.

Come indicare i numeri pari

Si esamina la successione dei numeri pari, per esempio:

$2=2\cdot 1$
$4=2\cdot 2$
$6=2\cdot 3$

Si trova che un numero pari è sempre ottenuto moltiplicando per 2 un intero; si può quindi dire che *un numero pari* p *è un numero che si scrive nella forma:*

$$p=2n$$

dove n indica un numero intero.

Come indicare i numeri dispari

Si esamina ora la successione dei numeri dispari, per esempio:

1
$3=2\cdot 1+1$
$5=2\cdot 2+1$
$7=2\cdot 3+1$

Si può quindi dire che *un numero dispari* d *si ottiene aggiungendo* 1 *ad un numero pari e perciò si può scrivere nella forma:*

$$d=2n+1$$

dove n indica un numero intero.

Addizionando due dispari si ottiene un pari

Si esamina la somma di due dispari, per esempio:

$1+3=4$
$3+5=8$
$3+7=10$

In questi casi particolari si verifica che la somma di due dispari è un numero pari. Sarà sempre così?

Ecco come si può procedere per verificare che questa proprietà è sempre vera.

- Si considerano due qualunque numeri dispari h e k che, in base ai risultati precedenti, si possono scrivere nella forma seguente:

$h=2n+1 \qquad k=2m+1$

(n e m sono due interi diversi)

- Si scrive la somma di questi due numeri, data da:

$h+k=2n+1+2m+1=2n+2m+2$

- Si raccoglie il fattore comune 2 e si scrive:

$h+k=2(n+m+1)$

- Si indica con s l'intero che è la somma dei tre interi $(n+m+1)$; si ha:

$\boldsymbol{h+k=2s}$

Ora, $2s$ è sempre un numero pari e perciò si conclude che *la somma di due dispari è sempre pari.*

Un modo per generare numeri dispari

Esaminiamo le seguenti operazioni:

$1^2-0^2=1$

$2^2-1^2=3$

$3^2-2^2=5$

$4^2-3^2=7$

$5^2-4^2=9$

È immediato rilevare alcune regolarità:

- al primo membro si trovano le differenze fra i quadrati di due interi consecutivi;
- al secondo membro si trova un numero dispari.

Ci si chiede: si troveranno sempre queste regolarità?

Per rispondere a questa domanda bisogna svolgere i calcoli valendosi di lettere:

- si indica con n un qualunque numero intero;
- l'intero successivo sarà allora $n+1$.

Così la differenza dei quadrati avrà un valore q, dato da:

$q=(n+1)^2-n^2$

Sviluppando ora il quadrato del binomio $(n+1)$ si ha:

$q=n^2+2n+1-n^2 \qquad$ ossia $\qquad q=2n+1$

Si trova così che:

$\boldsymbol{(n+1)^2-n^2=2n+1}$

cioè, *la differenza fra i quadrati di due interi successivi è sempre un numero dispari.*

Il calcolo letterale per scoprire proprietà geometriche

Fra i rettangoli di perimetro fisso, scoprire quello di area massima

Si considerano i rettangoli realizzati con uno spago legato tenuto ben teso fra le mani (fig. 1); al variare della posizione delle dita e delle mani si trova che:

- variano i lati;
- resta fisso il perimetro, che è la lunghezza dello spago.

Cosa si può dire dell'area dei rettangoli?

Sono i due casi limite (fig. 2) che suggeriscono la risposta:

- in un caso limite un lato ha lunghezza zero e quindi l'area vale zero;
- nel secondo caso limite l'altro lato ha lunghezza zero e perciò l'area vale ancora zero.

L'area parte dunque dal valore zero, aumenta continuamente e poi diminuisce ritornando al valore zero; si intuisce che l'area avrà un valore massimo nel caso «centrale», cioè quando si forma il quadrato.

Valendosi del calcolo letterale si può verificare che queste intuizioni sono corrette; si procede nel modo seguente:

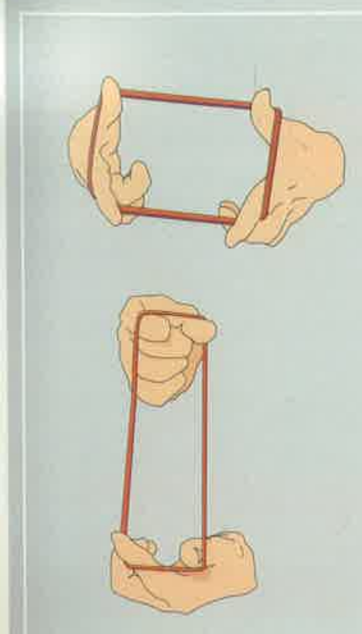


Figura 1 (a sinistra) **Rettangoli di uguale perimetro**

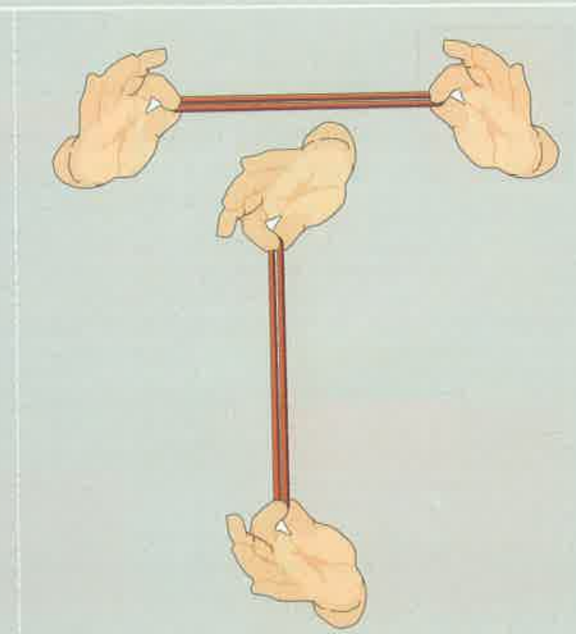


Figura 2 (a destra) **I due casi limite**

- si costruisce il quadrato che ha il lato lungo 1 e, quindi, il perimetro lungo 4 (fig. 3);
- si costruisce un rettangolo di perimetro 4, considerando un lato lungo $1+x$ e l'altro lungo $1-x$ (fig. 4); infatti, in questo modo il perimetro è:

$$2(1+x)+2(1-x)=2+2x+2-2x=4$$

- si calcola l'area Q del quadrato e l'area R del rettangolo; si ha:

$$Q=1 \qquad R=(1+x)(1-x)$$

Il prodotto notevole esaminato nel paragrafo 10 (p. 267) permette di sviluppare rapidamente il calcolo dell'area R; si ha:

$$\boldsymbol{R=1-x^2}$$

L'espressione ottenuta conferma le intuizioni geometriche:

- l'area R varia al variare di x, cioè del rettangolo costruito;
- l'area R si ottiene sempre togliendo da 1 la quantità x^2.

Si conclude dunque che *il valore massimo di* R *è* 1, *ottenuto nel caso del quadrato.*

Fra i rettangoli di area fissa, scoprire quello di perimetro minimo

Si considerano i rettangoli costruiti con tanti quadratini uguali (fig. 5); al variare della disposizione dei quadratini, si ha che:

- variano i lati;
- resta fissa l'area, che è il numero di quadratini utilizzati.

Cosa si può dire del perimetro dei rettangoli?

Certamente il perimetro varia e si intuisce che il quadrato realizza il perimetro minimo: in tal caso si ha il minor numero di quadratini che «contribuiscono a formare il perimetro».

Valendosi del calcolo letterale si può verificare che queste intuizioni sono corrette; si procede nel modo seguente:

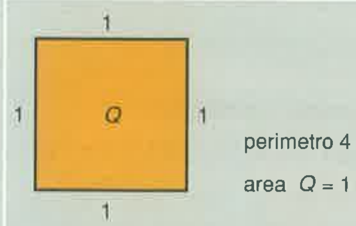


Figura 3 (a sinistra) **Il quadrato di lato 1 e perimetro 4**

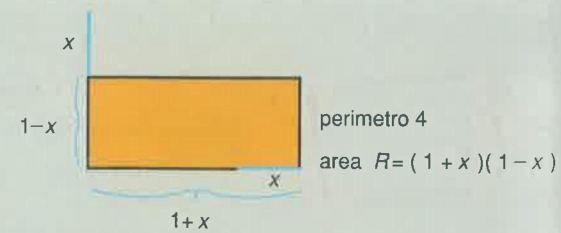


Figura 4 (a destra) **Un rettangolo di perimetro 4**

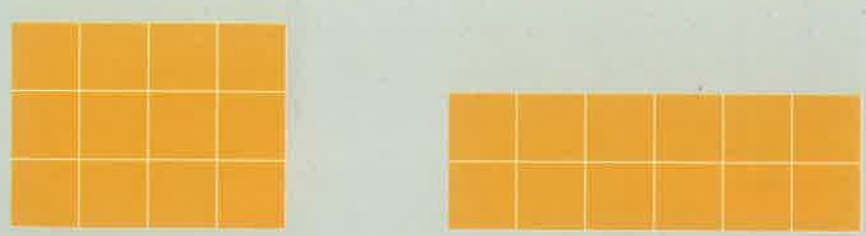


Figura 5 Rettangoli di uguale area

- si considera il quadrato che ha il lato lungo 1 e, quindi, l'area ampia 1 (fig. 6);
- si costruisce un rettangolo equivalente scegliendo un lato lungo x e l'altro lungo $\frac{1}{x}$ (fig. 7); infatti, questo rettangolo ha l'area data da:

$$x \cdot \frac{1}{x} = 1$$

- si calcolano i perimetri p del quadrato e P del rettangolo; si ha:

$$p=4 \qquad P=2x+2\cdot\frac{1}{x}=2\left(x+\frac{1}{x}\right)$$

Si arriva così ad un'espressione del perimetro P del rettangolo che non sembra suggerire alcuna conclusione immediata. Bisogna allora esprimere P in un'altra forma; ecco come si può procedere:

- si esegue l'addizione racchiusa fra parentesi, scrivendo:

$$2\left(x+\frac{1}{x}\right)=2\left(\frac{x^2+1}{x}\right)$$

- si ricorda un risultato relativo al quadrato di un binomio, e cioè:

$$(x-1)^2=x^2+1-2x$$

- da cui, aggiungendo $2x$ ai due membri, si può ricavare:

$$2x+(x-1)^2=x^2+1$$

- si scrive quindi:

$$P=2\left[\frac{2x+(x-1)^2}{x}\right]$$

- si esegue, valendosi della proprietà distributiva, la divisione del polinomio al numeratore per il monomio e si ottiene:

$$P=2\left[2+\frac{(x-1)^2}{x}\right]$$

- eseguendo la moltiplicazione per 2, si ha infine:

$$P=4+\frac{2(x-1)^2}{x}$$

L'ultima formula ottenuta conferma le intuizioni geometriche: il perimetro P del rettangolo si ottiene sempre aggiungendo a 4 un'espressione positiva; perciò *il valore minimo di* P *è* 4, *ottenuto nel caso del quadrato.*

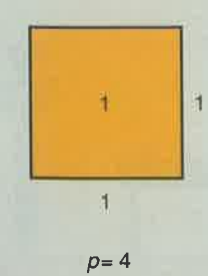


Figura 6 (a sinistra) **Il quadrato di lato 1 e area 1**

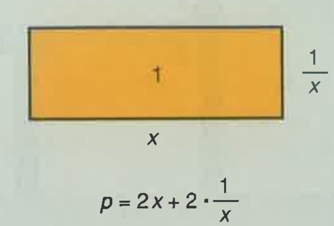


Figura 7 (a destra) **Un rettangolo di area 1**

Il calcolo letterale nella fisica

Il calcolo letterale e la dilatazione termica lineare

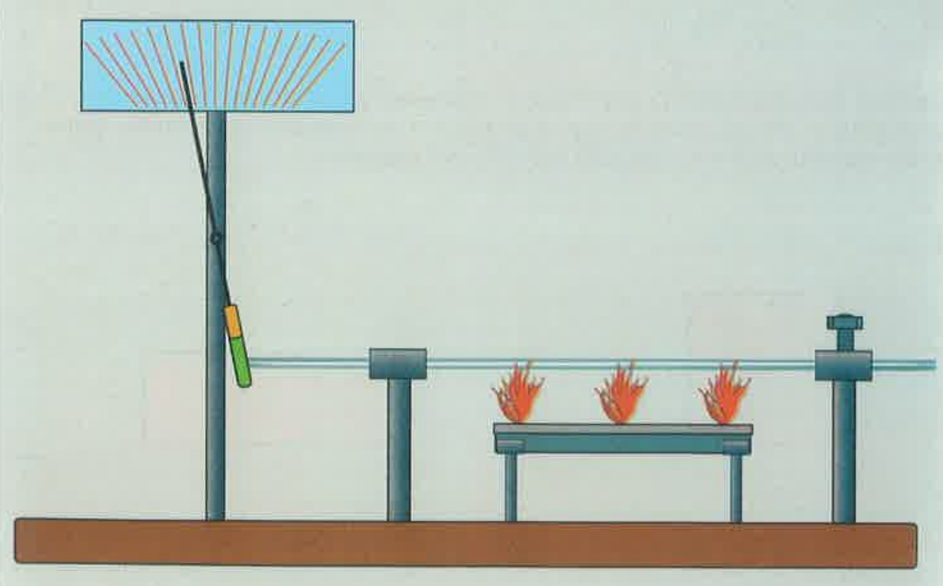
Una sottile sbarra di metallo viene riscaldata, portandola dalla temperatura di 0°C a temperature via via più elevate; con un'adatta apparecchiatura sperimentale (fig. 1) si rileva che, all'aumentare della temperatura, la sbarretta si allunga, si ha cioè il fenomeno della *dilatazione termica*.

Si eseguono allora vari esperimenti per studiare questo fenomeno; si ottengono in particolare i seguenti risultati:

- l'allungamento è proporzionale alla lunghezza iniziale della sbarretta;
- l'allungamento è proporzionale alla temperatura a cui viene portata la sbarretta;
- l'allungamento dipende dal materiale di cui è fatta la sbarretta.

Queste osservazioni sperimentali vengono abitualmente riassunte in una legge, scritta dopo aver indicato le grandezze esaminate con delle lettere; in particolare si possono scegliere le lettere nel modo seguente:

Figura 1
Un esperimento per studiare la dilatazione termica



- si indica con L la lunghezza iniziale della sbarretta;
- si indica con T la temperatura a cui viene portata la sbarretta;
- si indica con L' la lunghezza della sbarretta alla temperatura T;
- si indica con α un coefficiente collegato alla scelta del materiale.

In questo modo l'allungamento è $L'-L$ (fig. 2) e la legge si scrive nel modo seguente:

$$L'-L=\alpha LT$$

Da questo si ricava che, ad ogni temperatura T, la lunghezza L' si trova aggiungendo l'allungamento alla lunghezza iniziale; si ha dunque:

$$L'=L+\alpha LT$$

Raccogliendo infine il fattore comune L, si ottiene la seguente formula:

$$\mathbf{L'=L(1+\alpha T)} \qquad (1)$$

La formula prende il nome di *legge della dilatazione lineare*, per ricordare che la dilatazione avviene lungo una linea.

Le potenze del binomio e la dilatazione di una superficie o di un volume

Invece di una sbarretta si può riscaldare una sottile lamina quadrata; in tal caso la dilatazione termica farà aumentare tutta la superficie della lamina secondo una legge che è facile ora trovare. Si procede così:

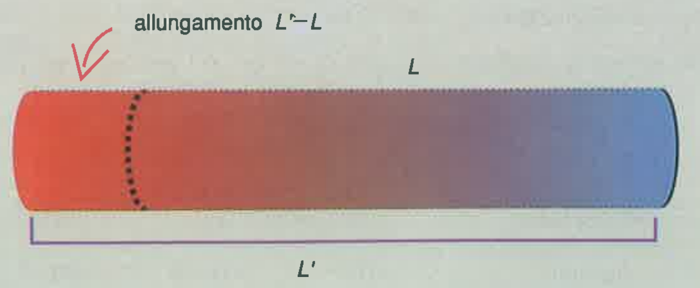
- alla temperatura di 0°C il lato della lamina è lungo L e la superficie vale:

$$S=L^2$$

- alla temperatura T il lato è lungo L' e la superficie diventa:

$$S'=(L')^2$$

Figura 2
L'allungamento di una sbarra



Basandosi ora sulla legge (1), ricavata prima, si ha:

$S'=[L\,(1+\alpha T)]^2$

Abitualmente la legge non viene lasciata scritta in questa forma; ma si svolgono i seguenti calcoli:

- potenza di un prodotto $[L\,(1+\alpha T)]^2 = L^2(1+\alpha T)^2$
- sviluppo del quadrato $L^2(1+\alpha T)^2 = L^2(1+2\alpha T+\alpha^2 T^2)$

Tenendo infine presente che risulta $L^2 = S$, si ottiene in definitiva:

$$\boldsymbol{S'=S(1+2\alpha T+\alpha^2T^2)} \qquad (2)$$

Si può ragionare in modo analogo quando si scalda un cubetto di metallo, che ha:

- alla temperatura di 0° il lato del cubo è lungo L ed il volume vale:

$V=L^3$

- alla temperatura T il lato è lungo L' ed il volume è:

$V'=(L')^3$

Basandosi ancora sulla legge (1) si può ora scrivere:

$V'=[L\,(1+\alpha T)]^3$

e svolgere i seguenti calcoli:

- potenza di un prodotto $[L\,(1+\alpha T)]^3 = L^3(1+\alpha T)^3$
- sviluppo del cubo $L^3(1+\alpha T) = L^3(1+3\alpha T+3\alpha^2T^2+\alpha^3T^3)$

Si ottiene in definitiva:

$$V'=V(1+3\alpha T+3\alpha^2T^2+\alpha^3T^3) \qquad (3)$$

Le formule (2) e (3), che descrivono la dilatazione di una superficie o di un solido, vengono spesso approssimate con leggi più semplici, basate sulla seguente osservazione: il coefficiente α è molto piccolo e dunque le sue potenze possono essere trascurate.

Così si scrivono le leggi per la dilatazione di una superficie o di un solido nella forma seguente:

$S'=S(1+2\alpha T) \qquad V'=V(1+3\alpha T)$

La tabella seguente fornisce il valore di α, α^2, α^3 per qualche materiale molto comune e permette di valutare meglio l'approssimazione.

Materiale	α	α^2	α^3
Acciaio	$\approx 10^{-5}$	$\approx 10^{-10}$	$\approx 10^{-15}$
Rame	$\approx 2\cdot 10^{-5}$	$\approx 4\cdot 10^{-10}$	$\approx 8\cdot 10^{-15}$
Vetro	$\approx 3\cdot 10^{-6}$	$\approx 9\cdot 10^{-12}$	$\approx 27\cdot 10^{-18}$

Il calcolo letterale nei problemi finanziari

La crescita del capitale con interesse semplice

Un *capitale*, cioè una somma di denaro, può essere affidato ad una banca; in tal caso la banca «ricompensa» il cliente aggiungendo ogni anno un po' di denaro al capitale versato. Questo denaro aggiunto ogni anno dalla banca si chiama *interesse* e può essere calcolato in vari modi.

Il modo più semplice di calcolare l'interesse è il seguente: ogni anno la banca aggiunge una percentuale fissa del capitale versato all'inizio; questa percentuale fissa si chiama *tasso d'interesse* e si indica abitualmente con la lettera r.

Ecco un esempio di questa situazione.

Si deposita oggi un capitale di 5 milioni e la banca dà un tasso d'interesse annuo del 7 per cento; in tal caso si ha:

$$r=7\%=\frac{7}{100}=0{,}07$$

Il capitale (in milioni) crescerà dunque nel modo seguente:

- capitale alla fine del 1° anno$=5+0{,}07\cdot 5=5{,}35$
- capitale alla fine del 2° anno$=5{,}35+0{,}07\cdot 5=5{,}7$
- capitale alla fine del 3° anno$=5{,}7+0{,}07\cdot 5=6{,}05$

e così via.

Quale sarà il capitale dopo 15 anni?

I calcoli da eseguire sono facili, ma molto lunghi e ripetitivi; per abbreviare il procedimento conviene lavorare con le lettere e cercare una regola generale.

Si scelgono, per esempio, le seguenti lettere:

A per indicare il capitale iniziale (fisso);
r per indicare il tasso annuo d'interesse;
C_1 per indicare il capitale alla fine del 1° anno*;
C_2 per indicare il capitale alla fine del 2° anno;
C_3 per indicare il capitale alla fine del 3° anno, etc.

* Il simbolo C_1 si legge «ci con uno»; un numero scritto al piede di una lettera prende il nome di *pedice* o *deponente* e in questo caso serve a scrivere in modo ordinato i diversi valori che assume il capitale. Il deponente non va confuso con l'esponente, che invece è scritto in alto e viene usato per indicare l'operazione di elevazione a potenza.

In tal caso si ha:

- alla fine del 1° anno $C_1=A+rA$
- alla fine del 2° anno $C_2=C_1+rA=A+rA+rA=A+2rA$
- alla fine del 3° anno $C_3=C_2+rA=A+2rA+rA=A+3rA$

e così via.

Gli esempi suggeriscono una regola generale: dopo n anni, il capitale C_n sarà dato da:

$$C_n=A+nrA$$

ossia, raccogliendo il fattore comune A:

$$\boldsymbol{C_n=A(1+nr)}$$

È facile ora calcolare il capitale in tante situazioni particolari; ecco un esempio:

se A=5 milioni, r=0,07 e n=15 anni, si ha:

$C_{15}=5(1+15\cdot 0{,}07)=5\cdot 2{,}05=10{,}25$

La crescita del capitale con interesse composto

Un secondo modo, molto più diffuso, di calcolare l'interesse è invece il seguente: alla fine di ogni anno la banca aggiunge una percentuale del capitale presente all'inizio dell'anno; la percentuale si chiama ancora *tasso d'interesse* e si indica sempre con la lettera r.

Ecco un esempio di questa situazione, analogo al precedente.

Si deposita oggi un capitale di 5 milioni e la banca dà un tasso d'interesse annuo del 7 per cento; cioè si ha:

$$r=7\%=\frac{7}{100}=0{,}07$$

Il capitale (in milioni) cresce nel modo seguente:

- capitale alla fine del 1° anno=5+0,07·5=5,35
- capitale alla fine del 2° anno=5,35+0,07·5,35=5,72
- capitale alla fine del 3° anno=5,72+0,07·5,72=6,12

e così via.

In questo caso si parla di *interesse composto*, perché ogni anno l'interesse viene calcolato a partire dal capitale già aumentato per l'interesse dell'anno precedente.

Anche in questo caso si può chiedere: quale sarà ora il capitale dopo 15 anni?

Conviene ancora una volta lavorare con le lettere per cercare una regola generale; mantenendo le lettere A, r, C_1, C_2, C_3, si scrive:

- alla fine del 1° anno $C_1=A+rA$
- alla fine del 2° anno $C_2=C_1+rC_1$
- alla fine del 3° anno $C_3=C_2+rC_2$

e così via.

I calcoli svolti non sembrano suggerire alcuna regola generale; per vedere meglio bisogna raccogliere opportunamente un fattore comune. Ecco come si procede:

- per C_1, fattore comune A $C_1=A(1+r)$
- per C_2, fattore comune C_1 $C_2=C_1(1+r)=A(1+r)(1+r)=A(1+r)^2$
- per C_3, fattore comune C_2 $C_3=C_2(1+r)=A(1+r)^2(1+r)=A(1+r)^3$

Finalmente si arriva ad una regola generale: dopo n anni, il capitale C_n sarà dato da:

$$\boldsymbol{C_n=A(1+r)^n}$$

È facile ora calcolare il capitale in tante situazioni particolari; ecco un esempio: se A=5 milioni, r=0,07 e n=15 anni, si ha:

$$C_{15}=5(1+0{,}07)^{15}\approx 5\cdot 2{,}759\approx 13{,}795$$

Confronto fra interesse semplice e interesse composto

Si può cominciare riesaminando l'ultimo esempio numerico, in cui il capitale iniziale era A=5 milioni, l'interesse r=0,07 e gli anni che passano n=15; per distinguere i due casi si può scrivere:

- capitale ottenuto con l'interesse semplice $C_{15}=10{,}25$
- capitale ottenuto con l'interesse composto $C'_{15}\approx 13{,}795$

Si osserva subito che l'interesse composto è più conveniente dell'interesse semplice e, in questo caso particolare, si può valutare anche quanto denaro in più si ottiene; si ha infatti:

$$C'_{15}-C_{15}=13{,}795-10{,}25=3{,}545$$

E in altri casi, quanto denaro si guadagna in più con l'interesse composto?

Il calcolo letterale e, in particolare, lo sviluppo della potenza del binomio, permette di effettuare il confronto in generale; ecco che cosa si ottiene, per esempio, nei primi tre anni:

Anni che passano n	**Capitale con interesse semplice** $\boldsymbol{C_n=A(1+nr)}$	**Capitale con interesse composto** $\boldsymbol{C'_n=A(1+r)^n}$
1	$C_1=A(1+r)$	$C'_1=A(1+r)$
2	$C_2=A(1+2r)$	$C'_2=A(1+r)^2=A(1+2r+r^2)$
3	$C_3=A(1+3r)$	$C'_3=A(1+r)^3=A(1+3r+3r^2+r^3)$

Si ha dunque che, alla fine del primo anno, il capitale raggiunto è lo stesso; ma si trova poi, alla fine del secondo anno:

$$C'_2-C_2=A(1+2r+r^2)-A(1+2r)=A(1+2r)+Ar^2-A(1+2r)$$

e quindi:

$$C'_2-C_2=Ar^2$$

- Analogamente, alla fine del terzo anno, si ha:

$$C'_3-C_3=A(1+3r+3r^2+r^3)-A(1+3r)=A(1+3r)+A(3r^2+r^3)-A(1+3r)$$

e quindi:

$$C'_3-C_3=A(3r^2+r^3)$$

In definitiva, la quota che si guadagna in più non è sempre la stessa; anzi, in base ai calcoli precedenti, risulta:

$$C'_2-C_2=Ar^2 \quad \text{e} \quad C'_3-C_3=3Ar^2+Ar^3$$

perciò, dopo tre anni, la quota diventa più del triplo di quella relativa ai primi due anni.

Che cosa bisogna sapere

Che cosa indicano le lettere nel calcolo letterale
Una lettera indica un numero qualunque, di cui non è precisato il valore.

Scopo del calcolo letterale
Scoprire delle proprietà generali, svolgendo i calcoli con lettere e numeri.

Regola fondamentale del calcolo letterale
I calcoli si svolgono basandosi sulle proprietà delle operazioni.

Termini introdotti nel calcolo letterale
Monomio: formula costruita moltiplicando lettere e numeri.
Monomio scritto in forma ridotta: prodotto di un solo numero moltiplicato per tante lettere, scritte ciascuna una sola volta.
Coefficiente di un monomio scritto in forma ridotta: l'unico numero che compare nel monomio.
Grado di una lettera: esponente della lettera.
Grado di un monomio scritto in forma ridotta: somma degli esponenti delle lettere.
Monomi simili: monomi che presentano la stessa parte letterale.
Polinomio: somma di monomi non simili.
Binomio: polinomio somma di due monomi.
Trinomio: polinomio somma di tre monomi.
Grado di un polinomio: il più grande fra i gradi di tutti i suoi monomi.

Regole da ricordare

Moltiplicazione di un monomio per un polinomio

$$a(b+c)=ab+ac$$

Raccoglimento a fattor comune

$$ab+ac=a(b+c)$$

Moltiplicazione di due polinomi

$$(a+b)(c+d)=a(c+d)+b(c+d)=ac+ad+bc+bd$$

Un prodotto notevole

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

Quadrato di un binomio

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$
$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$$

Cubo di un binomio

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$
$$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$$

Potenza di un binomio

$(a+b)^n$ si sviluppa applicando la seguente regola:
1. si scrivono tutti i monomi di grado n che si possono formare con le lettere a e b;
2. si scelgono i coefficienti da dare ad ogni monomio, costruendo il triangolo di Tartaglia fino alla riga n;
3. si sommano tutti i monomi ottenuti.

Triangolo di Tartaglia

1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1
1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1

Attività finali

Che cosa bisogna saper fare

Questo capitolo propone le nozioni fondamentali del calcolo letterale; ma non basta conoscere le varie regole, bisogna anche saperle applicare, scegliendo in ogni caso il procedimento adatto.

È questa una situazione che si è già presentata altre volte agli studenti: per esempio, alla scuola elementare si impara a moltiplicare e dividere numeri interi, quindi si svolgono vari esercizi per applicare correttamente le nozioni imparate.

Gli esercizi si possono dividere in due grandi categorie:

A. esercizi di calcolo (per esempio moltiplicazioni fra due numeri con tante cifre);

B. risoluzione di problemi che richiedono di svolgere le varie operazioni.

Gli esercizi del primo tipo possono sembrare i più facili perché richiedono solo di ripetere un procedimento di calcolo, ma sono anche i meno interessanti: in questi calcoli un ragazzo può essere facilmente sostituito dal piccolo calcolatore tascabile.

Risovere i problemi richiede invece un maggior impegno: bisogna prima capire quali sono le operazioni da svolgere e poi eseguirle. Ma così si sviluppa l'abilità più importante: saper scegliere il procedimento migliore per risolvere un dato problema.

Nel calcolo letterale si ritrova una situazione analoga; gli esercizi si possono dunque dividere in due categorie:

A. svolgere calcoli con lettere e numeri, applicando le regole;

B. scoprire proprietà generali o risolvere problemi, che richiedono a loro volta di svolgere calcoli con lettere e numeri.

Svolgere calcoli con lettere e numeri

Attività 1

Sviluppare $(a+1)(a-1)(a^2+1)$

$(a+1)(a-1)(a^2+1)=[(a+1)(a-1)](a^2+1)=$	[associativa della moltiplicazione]
$=(\ldots\ldots\ldots)(a^2+1)=$	[prodotto notevole]
$=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$	[prodotto notevole]

Si ottiene in definitiva:

$$(a+1)(a-1)(a^2+1)=a^4-1$$

Attività 2

Sviluppare $(a+b+c)^2$

$(a+b+c)^2=[a+(b+c)]^2=$	[associativa dell'addizione]
$=a^2+2a(\ldots\ldots\ldots)+(\ldots\ldots\ldots)^2=$	[quadrato di un binomio]
$=a^2+2a(\ldots\ldots\ldots)+\ldots\ldots\ldots\ldots=$	[quadrato di un binomio]
$=a^2+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots=$	[moltiplicazione di un binomio per un monomio]

Si ottiene in definitiva:

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$$

Osservazioni sugli esercizi di calcolo svolti

Gli esercizi di tipo analogo a quelli ora svolti si risolvono dunque seguendo più volte uno stesso itinerario:

1. si stabiliscono le regole o le proprietà da applicare;
2. si applicano correttamente le regole e le proprietà.

Risolvere problemi o scoprire proprietà generali

Attività 3

Un commerciante vende macchine fotografiche alle seguenti condizioni: sconto del 20% sul prezzo di listino, a cui bisogna aggiungere l'IVA (imposta sul valore aggiunto, che è del 19%).

Le condizioni del commerciante possono essere lette in due modi:

I. si aggiunge l'IVA al prezzo di listino e, sul totale, si pratica lo sconto del 20%;

II. si applica lo sconto del 20% sul prezzo di listino e poi si aggiunge l'IVA al prezzo scontato.

Quale dei due modi è più conveniente per il cliente?

Si può esaminare la situazione valendosi del calcolo letterale: si indica con p *un qualunque prezzo di listino e si confrontano i due modi di praticare lo sconto, organizzando i calcoli seguenti.*

I modo

- *Al prezzo* p *si aggiunge l'IVA e si ha il prezzo aumentato* a, *dato da:*

$$a=p+0{,}19p \qquad (1)$$

- *Si ha uno sconto* s *del 20% di questo prezzo* a *e dunque* s *è dato da:*

$$s=0{,}2a \qquad (2)$$

- *Invece del prezzo di listino* p, *il cliente paga un prezzo* v, *dato da:*

$$v=a-s \qquad (3)$$

Infine, per valutare il prezzo v *si procede così:*

- *dalla (1) si ricava:* $a=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
- *sostituendo il valore ottenuto nella (2) si ricava:* $s=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
- *sostituendo i valori ottenuti nella (3) si ricava:* $v=\ldots\ldots\ldots=0{,}952p$

Il modo

- *Al prezzo di listino* p *il commerciante applica lo sconto del 20%, ottenendo il prezzo diminuito* d, *dato da:*

$$d= \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (4)$$

- *al prezzo* d *aggiunge l'IVA, ottenendo un prezzo finale* f, *dato da:*

$$f= \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (5)$$

Valendosi ancora del calcolo letterale si trova ora:

- *dalla (4)* $d=\ldots\ldots\ldots\ldots$
- *dalla (5)* $f=\ldots\ldots\ldots\ldots= 0{,}952p$

Si trova dunque che:

- *in entrambi i casi si paga lo stesso prezzo;*
- *lo sconto sul prezzo di listino* p *è dato da:*

$p - 0{,}952\, p = 0{,}048$

Così, lo sconto reale sul prezzo di listino è del 4,8%.

Attività 4

Riprendere il problema precedente per esaminarlo più in generale, indicando per esempio:

- con p il prezzo di listino;
- con q l'IVA;
- con r lo sconto proposto dal commerciante.

Verificare che i due modi di praticare lo sconto danno lo stesso prezzo finale.

Calcolare lo sconto effettivo sul prezzo di listino.

Attività 5. Il teorema di Pitagora

Quattro triangoli rettangoli uguali con i cateti lunghi a, b e l'ipotenusa lunga c, sono disposti come in fig. 1: si ottiene un quadrato ABCD, che contiene all'interno un quadrato più piccolo EFGH; quale relazione collega le aree dei due quadrati?

Seguendo le indicazioni della fig. 1 si ha che:

- *il quadrato ABCD ha il lato lungo* a+b *e quindi l'area* Q, *dato da:*

$$Q=(a+b)^2$$

- *il quadrato EFGH ha il lato lungo* c *e quindi l'area* S, *data da:*

$$S=c^2$$

- *il quadrato EFGH si ottiene anche togliendo al quadrato ABCD quattro triangoli rettangoli uguali, con i cateti lunghi* a *e* b, *perciò risulta anche:*

$$S=(a+b)^2 - 4\,\frac{1}{2}ab$$

Eseguendo ora le operazioni si ottiene:

$$S=a^2+b^2+2ab-2ab=a^2+b^2$$

Confrontando i due modi di calcolare l'area S, *si trova che risulta:*

$$\mathbf{c^2=a^2+b^2}$$

Questa è una famosa relazione che collega i cateti e l'ipotenusa di un triangolo rettangolo (fig. 2): è il **teorema di Pitagora**, che può essere interpretato geometricamente nel modo seguente:

c^2 è l'area del quadrato di lato c, che è il quadrato costruito sull'ipotenusa;
a^2 è l'area del quadrato di lato a, che è il quadrato costruito su un cateto;
b^2 è l'area del quadrato di lato b, che è il quadrato costruito sull'altro cateto.

Perciò si può dire che *il quadrato costruito sull'ipotenusa è equivalente alla somma dei quadrati costruiti sui cateti.*

Attività 6. Il teorema di Pitagora per un triangolo rettangolo isoscele

Come si modifica il problema precedente se il triangolo rettangolo è isoscele?

Si può ripetere il ragionamento seguito prima con un solo cambiamento: ora i due cateti hanno la stessa lunghezza, che dovrà essere indicata dalla stessa lettera, per esempio a *(fig. 3).*

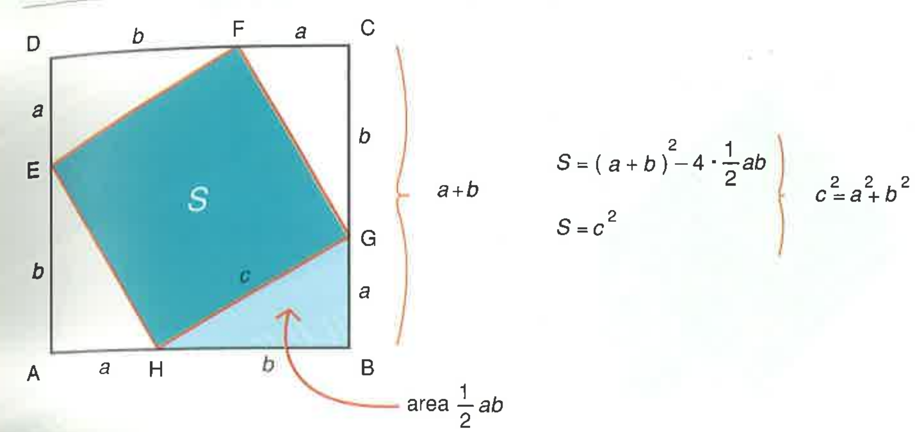


Figura 1
L'area *S* calcolata in due modi

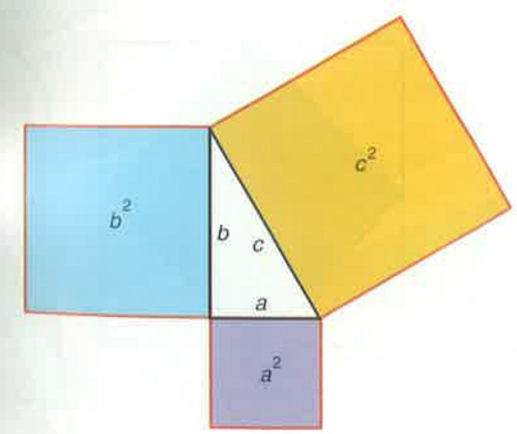


Figura 2
Il teorema di Pitagora

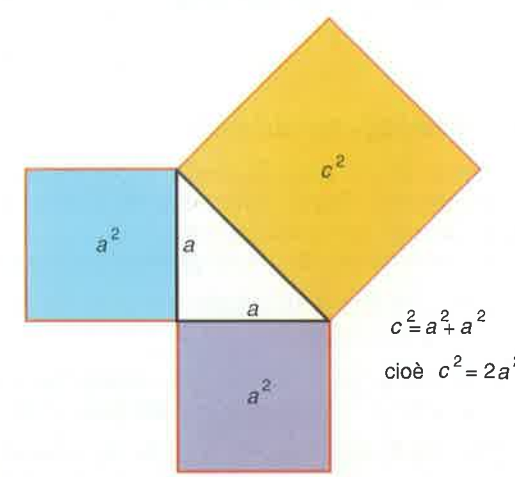


Figura 3
Il teorema di Pitagora per un triangolo isoscele

A partire dalla fig. 4 si ottiene in questo caso:

$$c^2=(2a)^2-2a^2=4a^2-2a^2$$

Si ha dunque:

$$\boldsymbol{c^2=2a^2}$$

Risulta dunque che *in un triangolo rettangolo isoscele il quadrato costruito sull'ipotenusa è il doppio del quadrato costruito su un cateto.*

Il problema geometrico ora esaminato conduce anche a fissare l'attenzione sul diverso significato delle due seguenti espressioni:

$(2a)^2$, che è l'area del quadrato di lato $2a$ (fig. 5);

$2a^2$, che è il doppio dell'area del quadrato di lato a (fig. 6).

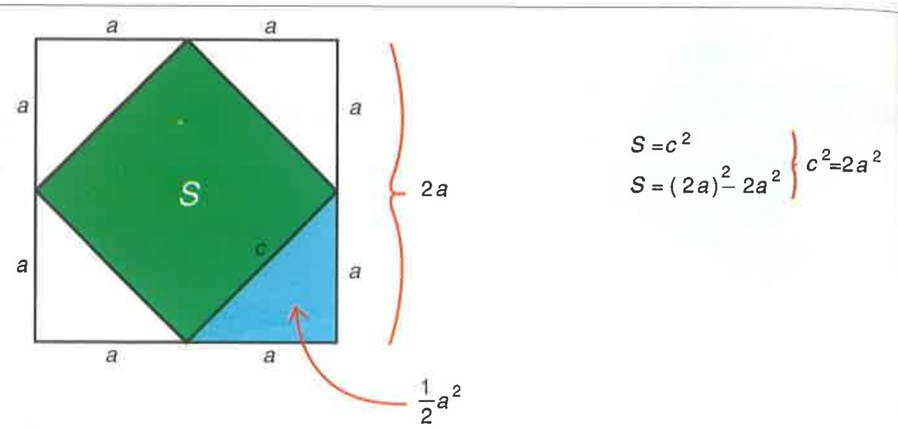
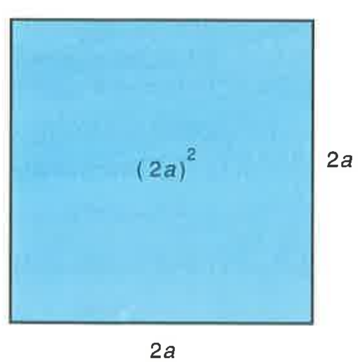


Figura 4
L'area *S* calcolata in due modi



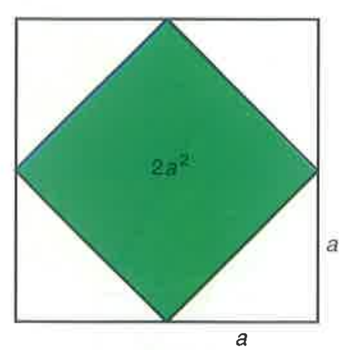


Figura 5 (a sinistra)
L'espressione $(2a)^2$

Figura 6 (a destra)
L'espressione $2a^2$

Osservazioni sugli esercizi svolti

Problemi analoghi a quelli svolti si presentano anche nei più vari rami scientifici (scienze naturali, fisica, economia, etc.) come si può trovare nelle schede applicative proposte nel corso del capitolo.

La risoluzione di questi problemi si basa su poche regole fondamentali:

I. scegliere delle lettere per indicare alcuni numeri, di cui non si vuole fissare il valore;

II. tenere presente che uno stesso numero deve essere indicato dalla stessa lettera e numeri diversi debbono essere indicati con lettere diverse;

III. applicare le regole del calcolo letterale per svolgere i calcoli.