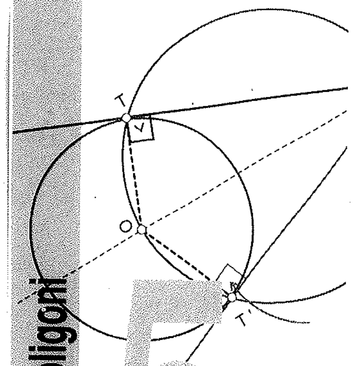


5 Uguaglianza ed equivalenza di poligoni

Poligoni uguali

1. Dire quali elementi bisogna confrontare per stabilire se sono uguali due poligoni regolari con lo stesso numero di lati.
2. Spiegare perché basta confrontare i lati di due rettangoli per decidere se due rettangoli sono uguali.
3. Dire quali elementi bisogna confrontare per decidere se sono uguali due rombi.
4. Dire quali elementi bisogna confrontare per decidere se sono uguali due deltoidi.
5. Dire quali elementi bisogna confrontare per decidere se sono uguali due trapezi isosceli.
6. Dire quali elementi bisogna confrontare per decidere se sono uguali due trapezi rettangoli.
7. Dire quali elementi bisogna confrontare per decidere se sono uguali due trapezi.
8. Dire quali elementi bisogna confrontare per decidere se sono uguali due quadrilateri inscritti in due cerchi con lo stesso raggio.
9. Dire quali elementi bisogna confrontare per decidere se due cerchi sono uguali.

Triangoli uguali

Criteri di uguaglianza dei triangoli

10. Spiegare perché sono uguali due triangoli isosceli che hanno uguali le basi e gli angoli al vertice.
11. Spiegare perché sono uguali due triangoli isosceli che hanno uguali gli angoli al vertice e le mediane relative alle basi.
12. Dire quali elementi bisogna confrontare per decidere se sono uguali due triangoli isosceli.
13. Dire quali eleménti bisógna confrontare per decidere se sono uguali due triangoli equilateri.
14. Spiegare perché congiungendo i punti medi dei lati di un triangolo equilatero si ottiene un altro triangolo equilatero.
15. In un triangolo ABC la bisettrice AM dell'angolo $\hat{A}$ divide in due parti uguali il lato opposto BC. Risolvere i seguenti quesiti:
    a. spiegare perché sono uguali i due triangoli ABM e ACM;
    b. spiegare perché il triangolo ABC è certamente isoscele.
16. Su un lato di un angolo di vertice O prendere i punti A e B in una posizione qualunque; sull'altro lato dell'angolo prendere i punti A' e B' in modo che risulti:

    OA=OA' e OB=OB'

    Unire A con B' e B con A' e chiamare P il punto d'intersezione di AB' con A'B. Risolvere i seguenti quesiti:
    a. spiegare perché sono uguali i triangoli OA'B e OAB';
    b. spiegare perché sono uguali i triangoli A'PB' e APB;
    c. spiegare perché la retta OP divide l'angolo dato in due parti uguali.

17. Dato un triangolo equilatero ABC, procedere nel modo seguente:
    - prolungare il lato AB dalla parte di B di un segmento BD;
    - prolungare il lato BC dalla parte di C di un segmento CE=BD;
    - prolungare il lato CA dalla parte di A di un segmento AF=BD.

    Risolvere i seguenti quesiti:
    a. spiegare perché sono uguali i triangoli EBD, ECF, FAD;
    b. spiegare perché il triangolo DEF è ancora equilatero.
18. Dato un triangolo equilatero ABC, procedere nel modo seguente:
    - sul lato AB considerare un segmento AD;
    - sul lato BC considerare un segmento BE=AD;
    - sul lato CA considerare un segmento CF=AD.

    Risolvere i seguenti quesiti:
    a. spiegare perché sono uguali i triangoli EBD, ECF, FAD:
    b. spiegare perché il triangolo DEF è ancora equilatero.

Criteri di uguaglianza dei triangoli rettangoli

19. Spiegare perché sono uguali due triangoli rettangoli isosceli che hanno le ipotenuse uguali.
20. Dire quali elementi bisogna confrontare per stabilire se sono uguali due triangoli rettangoli e isosceli.
21. Spiegare perché sono uguali due triangoli isosceli che hanno uguali gli angoli alla base e le altezze relative alle basi.
22. Disegnare un angolo di vertice O e la bisettrice dell'angolo; da un punto P della bisettrice condurre le perpendicolari PH e PK ai lati dell'angolo. Risolvere i seguenti quesiti:
    a. spiegare perché sono uguali i triangoli OPH e OPK;
    b. spiegare perché i punti della bisettrice sono equidistanti dai lati dell'angolo.
23. Un triangolo ABC ha uguali le altezze BH e CK relative ai lati AC e AB. Risolvere i seguenti quesiti:
    a. spiegare perché sono uguali i due triangoli ABH e ACK;
    b. spiegare perché il triangolo ABC è certamente isoscele.
24. È dato un triangolo ABC, che presenta la seguente caratteristica: la bisettrice AH dell'angolo di vertice A cade perpendicolarmente al lato opposto BC. Risolvere i seguenti quesiti:
    a. spiegare perché sono uguali i due triangoli ABH e ACH;
    b. spiegare perché il triangolo ABC è certamente isoscele.
25. Disegnare un triangolo ABC rettangolo ed isoscele sulla base BC; per il vertice A dell'angolo retto tracciare una retta *r* che non tagli il triangolo. Dal punto B tracciare la perpendicolare a *r*, fino ad incontrare la retta in D; analogamente, da C tracciare la perpendicolare CE a *r*. Risolvere i seguenti quesiti:
    a. spiegare perché sono uguali i due triangoli ACE e ADB;
    b. spiegare perché risulta:

    DE=BD+CE

Angoli uguali

26. Disegnare un angolo qualunque; prolungare i lati dell'angolo dalla parte del vertice e risolvere i seguenti quesiti:
    a. indicare tutte le coppie di angoli uguali presenti nel disegno;
    b. indicare gli angoli adiacenti all'angolo iniziale;
    c. indicare l'angolo uguale all'angolo iniziale.

27. Disegnare due rette qualunque a e b tagliate da una trasversale r. Risolvere i seguenti quesiti:
a. indicare tutte le coppie di angoli uguali presenti nel disegno;
b. indicare tutte le coppie di angoli supplementari;
c. indicare gli angoli alterni interni ed alterni esterni;
d. indicare gli angoli corrispondenti e gli angoli coniugati.

28. Disegnare due rette parallele a e b tagliate da una trasversale r. Risolvere i seguenti quesiti:
a. indicare tutte le coppie di angoli uguali presenti nel disegno;
b. indicare tutte le coppie di angoli supplementari;
c. indicare gli angoli alterni interni ed alterni esterni;
d. indicare gli angoli corrispondenti e gli angoli coniugati.

29. Disegnare un qualunque triangolo ABC isoscele sulla base AB e condurre per il vertice C la retta r parallela ad AB; prolungare il lato BC dalla parte di B e risolvere i seguenti quesiti:
a. esaminare le rette parallele r ed AB, tagliate dalla trasversale BC e indicare gli angoli corrispondenti;
b. esaminare le rette parallele r ed AB, tagliate dalla trasversale AC e indicare gli angoli alterni interni;
c. spiegare perché la retta r divide l'angolo esterno di vertice C in due parti uguali.

30. In un triangolo ABC, isoscele sulla base BC, è tracciata l'altezza BH relativa al lato AC. Da un punto P della base BC si conducono le seguenti rette:
- la perpendicolare ad AC, fino a incontrare AC in R;
- la perpendicolare ad AB, fino a incontrare AB in S;
la perpendicolare a BH, fino a incontrare BH in M.
Risolvere i seguenti quesiti:
a. esaminare le rette parallele AC e PM e spiegare perché sono uguali i due angoli $A\hat{C}B$ e $M\hat{P}B$;
b. spiegare perché sono uguali i due triangoli SPB e BMP;
c. spiegare perché vale la seguente uguaglianza:

PR+PS=BH

31. Ripetere il problema precedente considerando il punto P sul prolungamento della base BC. Esaminare poi il problema nel caso in cui P coincide con B o con C.

32. In un triangolo ABC, isoscele sulla base AB, è tracciata l'altezza CH relativa alla base. Da un punto P della base BC si traccia la perpendicolare alla base stessa, fino a incontrare in N la retta BC e in M la retta BC. Risolvere i seguenti quesiti:
a. esaminare le rette parallele PM e CH tagliate dalla trasversale AC e spiegare perché sono uguali i due angoli $A\hat{C}H$ e $M\hat{N}C$;
b. esaminare le rette parallele PM e CH tagliate dalla trasversale BC e spiegare perché sono uguali i due angoli $B\hat{C}H$ e $N\hat{M}C$;
c. spiegare perché è isoscele il triangolo MNC e indicarne i due lati uguali.

33. In un qualunque triangolo ABC, dal punto medio E del lato BC si tracciano:
- la retta parallela al lato AB, fino a intersecare il lato AC in F;
- la retta parallela al lato AC, fino a intersecare il lato AB in D.
Risolvere i seguenti quesiti:
a. esaminare le rette parallele AB e EF e spiegare perché sono uguali i due angoli $A\hat{B}C$ e $F\hat{E}C$;
b. esaminare le rette parallele AC e DE e spiegare perché sono uguali i due angoli $A\hat{C}B$ e $D\hat{E}B$;
c. spiegare perché sono uguali i due triangoli BDE e EFC;
d. spiegare perché vale la seguente uguaglianza:

AB+AC=BD+DE+EF+FC

34. In un qualunque triangolo ABC si tracciano le seguenti rette:
- la bisettrice r dell'angolo di vertice B;
- la bisettrice dell'angolo di vertice C, fino a incontrare r in D;
- per D la parallela a BC, fino a incontrare AB in E e AC in F.
Risolvere i seguenti quesiti:
a. esaminare le rette parallele BC e EF tagliate dalla trasversale BD e spiegare perché sono uguali i due angoli $C\hat{B}D$ e $E\hat{D}B$;
b. esaminare le rette parallele BC e EF tagliate dalla trasversale DC e spiegare perché sono uguali i due angoli $B\hat{C}D$ e $F\hat{D}C$;
c. spiegare perché sono isosceli i triangoli BDE e DFC e indicarne i lati uguali;
d. spiegare perché vale l'uguaglianza seguente:

BE+CF=EF

35. Ripetere il problema precedente a partire dalle bisettrici degli angoli esterni di vertici B e C, considerando le semirette che giacciono dalla parte opposta di A rispetto a BC.

36. Disegnare un triangolo ABC isoscele sulla base AB e condurre una retta r parallela a AB, fino a incontrare BC in D e AC in E; spiegare perché il triangolo CDE è certamente isoscele sulla base DE.

37. Dai vertici A, B, C di un qualunque triangolo si tracciano le parallele ai lati opposti, determinando un altro triangolo DEF; spiegare perché il triangolo è composto di quattro triangoli uguali a quello di partenza.

38. Disegnare un triangolo ABC rettangolo in A; condurre per il vertice C la retta r parallela ad AB e prendere sulla retta, da parti opposte di C, due segmenti BM e BN entrambi uguali a BC.
Spiegare perché le rette BM e BN sono bisettrici una dell'angolo interno e l'altra dell'angolo esterno di vertice B.

39. Disegnare un trapezio isoscele ABCD che ha i lati obliqui AD e CB uguali alla base minore DC; spiegare perché ogni diagonale divide a metà uno degli angoli adiacenti alla base maggiore.

Proprietà dei parallelogrammi

40. Quale criterio di uguaglianza dei triangoli garantisce che un rettangolo ha le diagonali uguali?

41. Disegnare un rombo ABCD e le sue diagonali AC e BD, che si incontrano in un punto O. Risolvere i seguenti quesiti:
a. spiegare perché sono uguali i triangoli BDC e ABD e indicarne gli angoli uguali;
b. spiegare perché sono uguali i triangoli ABC e ACD e indicarne gli angoli uguali;
c. spiegare perché sono tutti uguali i quattro triangoli AOC, BOC, COD, AOD.

42. Dopo aver svolto il problema precedente, risolvere i seguenti quesiti:
a. spiegare perché le diagonali del rombo sono perpendicolari;
b. spiegare perché il punto d'incontro delle diagonali è centro di simmetria del rombo.

43. Spiegare perché un quadrato ha le diagonali uguali e perpendicolari.

44. Disegnare un rombo ABCD e indicare il suo centro di simmetria O (vedi anche l'esercizio 42).
Determinare i seguenti punti:
- A' simmetrico di O rispetto a A;
- B' simmetrico di O rispetto a B;
- C' simmetrico di O rispetto a C;
- D' simmetrico di O rispetto a A.
Spiegare perché il quadrilatero A'B'C'D' è un rombo.

45. Disegnare un rettangolo ABCD e indicare il suo centro di simmetria O; determinare quindi i seguenti punti:
- E simmetrico di O rispetto alla retta DC;
- F simmetrico di O rispetto alla retta BC;
- G simmetrico di O rispetto alla retta AB;
- H simmetrico di O rispetto alla retta DA;
Risolvere i seguenti quesiti:
a. spiegare perché il quadrilatero EFGH è un rombo;
b. spiegare perché i vertici del rettangolo sono i punti medi dei lati del rombo.

46. Congiungere i punti medi dei lati di un rettangolo; spiegare perché il quadrilatero così costruito è un rombo.

47. Congiungere i punti medi dei lati di un rombo; spiegare perché il quadrilatero così costruito è un rettangolo.

48. Disegnare un parallelogramma con le diagonali perpendicolari; spiegare perché il parallelogramma così disegnato è certamente un rombo.

49. Disegnare un parallelogramma con le diagonali che dividono a metà gli angoli; spiegare perché il parallelogramma così disegnato è certamente un rombo.

50. Disegnare un qualunque triangolo ABC, isoscele sulla base AB; indicare il punto C' simmetrico di C rispetto al punto medio M di AB. Spiegare perché il quadrilatero ACBC' è un rombo.
In quale caso ACBC' è un quadrato?

51. Disegnare un parallelogramma ABCD e la sua diagonale BD; tracciare quindi le seguenti rette:
- da A la perpendicolare a BD, fino a incontrare BD in E;
- da C la perpendicolare a BD, fino a incontrare BD in F.
Risolvere i seguenti quesiti:
a. spiegare perché sono uguali i due triangoli AED e CMF;
b. spiegare perché l'altra diagonale AC divide a metà il segmento EF.

52. Un parallelogramma ABCD ha un angolo di 50°
Risolvere i seguenti quesiti:
a. determinare tutti gli angoli del parallelogramma;
b. disegnare le bisettrici dei quattro angoli del parallelogramma, semirette che incontrandosi determinano un quadrilatero convesso PQRS; calcolare l'ampiezza degli angoli di quest'ultimo quadrilatero.

53. Ripetere il problema precedente in generale, a partire da un parallelogramma che ha un angolo ampio α.
Risolvere i seguenti quesiti:
a. spiegare perché gli angoli del quadrilatero PQRS non dipendono dalla scelta di α;
b. dire in quale caso il quadrilatero PQRS si riduce a un punto.

54. Per un punto P di un lato di un rettangolo condurre le parallele alle diagonali; spiegare perché il parallelogramma delimitato da queste parallele e dalle diagonali ha il perimetro lungo quanto una diagonale.

55. Disegnare un parallelogramma ABCD con il lato AB uguale alla diagonale AC; congiungere il vertice A con il punto medio M del lato BC e, sulla semiretta AM, considerare un segmento ME uguale a AM. Risolvere i seguenti quesiti:
a. spiegare perché il quadrilatero ABEC è un rombo;
b. spiegare perché il punto E è allineato con D e C.

Proprietà delle tangenti a una circonferenza

56. Disegnare una circonferenza di centro O e diametro AB e condurre le due tangenti alla circonferenza in A e in B; disegnare poi una terza tangente, che tocca la circonferenza nel punto T e interseca le prime due tangenti nei punti M e N. Risolvere i seguenti quesiti:
a. spiegare perché sono uguali i triangoli OTN e OBN;
b. spiegare perché sono uguali i triangoli OTM, OMA;
c. spiegare perché il triangolo MON è sempre rettangolo in O.

57. Disegnare due circonferenze che hanno lo stesso centro O e una raggio doppio del raggio dell'altra; da un punto A della circonferenza più grande tracciare le due tangenti alla più piccola, chiamando B e C i punti di tangenza. Risolvere i seguenti quesiti:
a. spiegare perché i due triangoli ABO e ACO sono entrambi metà di uno stesso triangolo equilatero;
b. spiegare perché il triangolo ABC è equilatero.

58. Disegnare due circonferenze che hanno lo stesso centro O; da un punto P esterno a entrambe condurre le seguenti rette:
- la retta PO;
- le tangenti PA e PB alla circonferenza più grande;
- le tangenti PC e PD alla circonferenza più piccola (chiamando A e C i due punti dalla stessa parte di PO).
Risolvere i seguenti quesiti:
a. spiegare perché sono uguali i due angoli $A\hat{P}C$ e $B\hat{P}D$;
b. spiegare perché PO è asse di simmetria di ABDC;
c. spiegare perché il quadrilatero ABDC è un trapezio isoscele.

59. Disegnare un qualunque triangolo ABC; tracciare la bisettrice dell'angolo interno di vertice B e la bisettrice dell'angolo esterno di vertice C. Indicato con D il punto di intersezione di queste due bisettrici, tracciare da D le seguenti rette:
- la perpendicolare alla retta AC, fino ad incontrare la retta in H;
- la perpendicolare alla retta AB, fino ad incontrare la retta in K;
- la perpendicolare alla retta BC, fino ad incontrare la retta in M.
Risolvere i seguenti quesiti:
a. spiegare perché sono uguali i triangoli DHC e DMC;
b. spiegare perché sono uguali i triangoli BKD e BDM;
c. spiegare perché la circonferenza che ha centro in D ed è tangente a AC è tangente pure a AB e BC.

60. È dato un triangolo ABC, rettangolo in A. Risolvere i seguenti quesiti:
a. spiegare come si deve procedere per tracciare la circonferenza che ha il centro in A ed è tangente all'ipotenusa BC in H;
b. da B tracciare l'altra tangente alla circonferenza indicando con M il punto di contatto e, analogamente, condurre da C l'altra tangente alla circonferenza indicando con N il punto di contatto; spiegare perché MN è sempre un diametro della circonferenza;
c. spiegare perché il quadrilatero MNBC è un trapezio rettangolo.

61. Sono date due circonferenze di centri O e O', tangenti esternamente in un punto A, in cui la retta r è la tangente comune. Tracciare una retta t che sia tangente ad entrambe le circonferenze; la retta t tocca la circonferenza di centro O in M, interseca la retta r in N e tocca l'altra circonferenza in P. Risolvere i seguenti quesiti:
a. spiegare perché il punto N divide il segmento MP in due parti uguali;
b. spiegare perché sono uguali i triangoli OMN e OAN;
c. spiegare perché sono uguali i triangoli O'NP e O'AN;
d. spiegare perché l'angolo $\widehat{ONO'}$ è retto.

62. A partire dalla stessa costruzione eseguita nell'esercizio precedente, risolvere i seguenti quesiti:
a. spiegare perché MO è l'asse di simmetria del triangolo AMN;
b. spiegare perché NO è l'asse di simmetria del triangolo ANP;
c. spiegare perché l'angolo $\widehat{MAP}$ è retto;
d. spiegare perché la circonferenza di diametro MP è tangente in A alla retta OO'.

Poligoni circoscritti ad un cerchio

63. Spiegare perché un quadrato è sempre circoscrittibile ad un cerchio.

64. Spiegare perché un rombo è sempre circoscrittibile ad un cerchio.

65. Spiegare perché un deltoide è sempre circoscrittibile ad un cerchio.

66. Spiegare perché un parallelogramma in generale non è circoscrittibile ad un cerchio; in quale caso particolare può essere circoscrittibile?

67. Spiegare perché un rettangolo in generale non è circoscrittibile ad un cerchio; in quale caso particolare può essere circoscrittibile?

68. Spiegare perché un trapezio in generale non è circoscrittibile ad un cerchio; in quale caso particolare può essere circoscrittibile?

69. Spiegare perché un trapezio isoscele in generale non è circoscrittibile ad un cerchio; in quale caso particolare può essere circoscrittibile?

70. Spiegare perché un trapezio rettangolo in generale non è circoscrittibile ad un cerchio; in quale caso particolare può essere circoscrittibile?

71. Disegnare un trapezio ABCD circoscritto ad una circonferenza di centro O. Considerare i due triangoli che si ottengono congiungendo il centro O con gli estremi dei lati obliqui; spiegare perché questi due triangoli sono sempre rettangoli.

Poligoni equivalenti

72. Disegnare un quadrato ed un triangolo equilatero che ha il lato uguale a quello del quadrato; disegnare poi il poligono somma dei due. Con la costruzione indicata si possono ottenere due poligoni P e P' equiscomponibili, ma non uguali?

73. Disegnare un esagono regolare e due triangoli equilateri con il lato uguale a quello dell'esagono; disegnare poi almeno due poligoni P e P' che si ottengono sommando i tre poligoni iniziali.
Con la costruzione indicata si possono ottenere due poligoni P e P' equiscomponibili, ma non uguali?

74. Disegnare un esagono regolare e tre triangoli equilateri con il lato uguale a quello dell'esagono; disegnare poi almeno due poligoni P e P' che si ottengono sottraendo all'esagono i tre triangoli.
Spiegare perché P e P' sono equivalenti.
Con la costruzione indicata si possono ottenere due poligoni P e P' equivalenti, ma non uguali?

75. Disegnare un esagono regolare e un quadrato con il lato uguale a quello dell'esagono; disegnare poi il poligono somma dei due poligoni.
Con la costruzione indicata si possono ottenere due poligoni P e P' equiscomponibili, ma non uguali?

76. Disegnare un esagono regolare e un quadrato con il lato uguale a quello dell'esagono; disegnare poi il poligono che si ottiene sottraendo all'esagono il quadrato.
Con la costruzione indicata si possono ottenere due poligoni P e P' equiscomponibili, ma non uguali?

77. Disegnare almeno tre poligoni equiscomponibili perché somme di poligoni uguali.

78. Disegnare almeno tre poligoni equiscomponibili perché differenze di poligoni uguali.

79. Disegnare un parallelogramma ABCD; da un punto P della diagonale AC si tracciano le seguenti rette:
- la parallela al lato AB, fino ad incontrare in E il lato BC e in F il lato AD;
- la parallela al lato AD, fino ad incontrare in G il lato AB e in H il lato DC.
Risolvere i seguenti quesiti:
a. spiegare perché sono uguali i triangoli ABC e ACD;
b. spiegare perché sono uguali i triangoli EPC e CPH;
c. spiegare perché sono uguali i triangoli APG e APF;
d. spiegare perché sono equivalenti i due parallelogrammi BEPG e FPHD.

80. Ripetere l'esercizio precedente nel caso in cui il parallelogramma è un rettangolo. Che cosa cambia?

81. Disegnare un parallelogramma ABCD e le sue diagonali AC e DB che si incontrano in O; tracciare per O una qualunque retta che incontra il lato DC in E e il lato AB in F.
Risolvere i seguenti quesiti:
a. spiegare perché sono uguali i triangoli ODE e FOB;
b. spiegare perché sono uguali i triangoli AOF e EOC;
c. spiegare perché sono uguali i triangoli AOD e BOC;
d. spiegare perché sono equivalenti i due trapezi ADEF e FBCE.

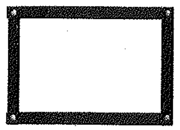
82. Ripetere l'esercizio precedente nel caso in cui il parallelogramma è un rettangolo. Che cosa cambia?

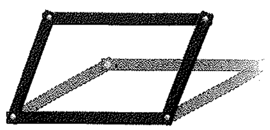
83. Disegnare un parallelogramma ABCD. Nella striscia di piano delimitata dalle due rette parallele AD e BC disegnare un segmento EF parallelo e uguale a AD.
Risolvere i seguenti quesiti:
a. spiegare perché sono uguali i due triangoli ABE e DCF;
b. esaminare il poligono che si ottiene sottraendo al pentagono ABCFD il triangolo DFC;
c. esaminare il poligono che si ottiene sottraendo al pentagono ABCFD il triangolo ABE;
d. spiegare perché il parallelogramma di partenza è equivalente alla somma dei due parallelogrammi ADEF e EFBC.

84. Ripetere l'esercizio precedente nel caso in cui il parallelogramma è un rettangolo. Che cosa cambia?

Area di parallelogrammi, triangoli e trapezi

Figura 1
Un parallelogramma articolabile





85. Un rettangolo articolabile è costruito con sbarrette collegate ai vertici per mezzo di viti e dadi; inclinando un lato rispetto all'altro si passa dal rettangolo ad un parallelogramma (fig. 1). Risolvere i seguenti quesiti:
a. il rettangolo ed il parallelogramma hanno la stessa area?
b. basta conoscere le lunghezza dei lati di un parallelogramma per calcolarne l'area?

86. Spiegare perché il rettangolo ed il parallelogramma di fig. 2 sono equivalenti. Si potrebbe ottenere il parallelogramma articolando il rettangolo come in fig. 1?

87. Spiegare perché i due triangoli di fig. 3 sono equivalenti. Nel triangolo ABC' qual è l'altezza relativa al lato AB?

88. Spiegare perché i due trapezi di fig. 4 sono equivalenti. Qual è l'altezza del trapezio ABC'D'?

89. Spiegare perché in un qualunque triangolo ABC la mediana relativa ad un lato divide il triangolo in due parti equivalenti.

90. Disegnare un trapezio ABCD, considerare il punto medio M della base AB ed il punto medio N della base DC; spiegare perché i due trapezi AMND e MBCN sono equivalenti.

91. Disegnare un parallelogramma ABCD e considerare un punto E sul prolungamento di AB; spiegare perché sono equivalenti i due triangoli BED e BEC.

92. Disegnare un qualunque triangolo ABC e considerare il punto medio M del lato AC; da M condurre la retta *r* parallela a AB e indicare su *r* un segmento ED=AB. Risolvere i seguenti quesiti:
a. spiegare perché il quadrilatero ABED è un parallelogramma.
b. spiegare perché ABED è equivalente al triangolo ABC.

93. Disegnare un triangolo ABC rettangolo in A e prolungare il cateto AB dalla parte di B di un segmento BE=AB; dal punto M che divide a metà il cateto AC condurre la retta *r* parallela a AB. Considerare su *r* un punto qualunque F e spiegare perché il triangolo AEF è equivalente al triangolo ABC.

94. Disegnare un quadrato ABCD e prolungare il lato AB dalla parte di B di un segmento BE=AB. Considerare un punto qualunque F sulla retta CD e spiegare perché AEF è equivalente al quadrato.

Figura 2
Un rettangolo e un parallelogramma equivalenti

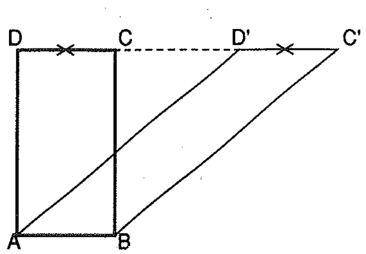


Figura 3
Due triangoli equivalenti

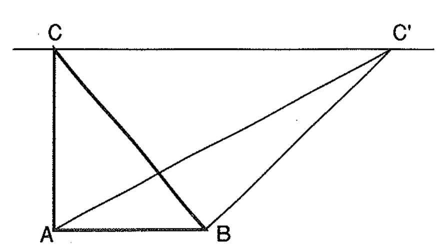
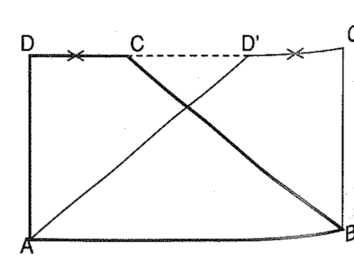


Figura 4
Due trapezi equivalenti



95. Disegnare un triangolo equilatero e congiungere i punti medi dei suoi lati; si otterrà un secondo triangolo equilatero.
Spiegare perché quest'ultimo triangolo equilatero ha il perimetro che è la metà del perimetro iniziale, ma l'area che è la quarta parte di quella iniziale.

96. Disegnare un qualunque trapezio ABCD e indicare con AB e CD le sue basi; tracciare le sue diagonali DB e AC e risolvere i seguenti quesiti:
a. spiegare perché sono equivalenti i due triangoli ABC e ABD;
b. indicare con O il punto d'incontro delle diagonali e spiegare perché sono equivalenti i due triangoli ADO e COB.

97. Disegnare un qualunque quadrilatero ABCD e condurre dai vertici le parallele alle diagonali; queste rette determinano un parallelogramma. Spiegare perché il parallelogramma così ottenuto ha area doppia del quadrilatero di partenza.

98. Disegnare un parallelogramma ABCD e considerare un punto P su una sua diagonale, per esempio BD. Congiungendo P con i vertici del parallelogramma si ottengono quattro triangoli: DPC, APD, APB e CPB. Risolvere i seguenti quesiti:
a. fissare l'attenzione sul lato DP dei triangoli ADP e DPC e sulle corrispondenti altezze nei due triangoli e spiegare perché i due triangoli sono equivalenti;
b. fissare l'attenzione sul lato PB dei triangoli PBC e PBA e sulle corrispondenti altezze nei due triangoli e spiegare perché i due triangoli sono equivalenti.

99. Ripetere l'esercizio precedente nel caso in cui il parallelogramma è un rettangolo. Che cosa cambia?

100. Disegnare un parallelogramma ABCD e le sue diagonali AC e BD che si incontrano in un punto O. Spiegare perché le diagonali dividono il parallelogramma in quattro triangoli equivalenti.

Area di poligoni

101. Disegnare un deltoide ABCD, con i lati AB e AD uguali fra loro ed i lati BC e DC pure uguali fra loro; disegnare le due diagonali AC e DB indicando con d e d' la loro lunghezza; risolvere i seguenti quesiti:
a. spiegare perché i due triangoli CDA e CBA sono uguali;
b. spiegare perché l'area S del deltoide è data da:

$$S=\frac{1}{2}\,d{\cdot}d'$$

102. Disegnare un rombo ABCD e le due diagonali AC e DB indicando con d e d' la loro lunghezza; spiegare perché l'area del rombo è data da:

$$S=\frac{1}{2}\,d{\cdot}d'$$

103. Spiegare perché l'area di un quadrato si può calcolare dividendo per due il prodotto delle diagonali.

104. Disegnare un qualunque quadrilatero e calcolarne l'area nei due modi seguenti, servendosi di un righello per misurare le lunghezze dei segmenti:
a. dividere il quadrilatero in due triangoli per mezzo di una diagonale e sommare le aree dei due triangoli;
b. disegnare un triangolo equivalente al quadrilatero e poi calcolare l'area del triangolo.

105. Disegnare un qualunque pentagono e calcolarne l'area nei due modi seguenti, servendosi di un righello per misurare le lunghezze dei segmenti:
a. dividere il pentagono in tre triangoli per mezzo delle diagonali uscenti da un vertice e sommare le aree dei triangoli;
b. disegnare un quadrilatero e poi un triangolo equivalenti al pentagono e calcolare l'area del triangolo.

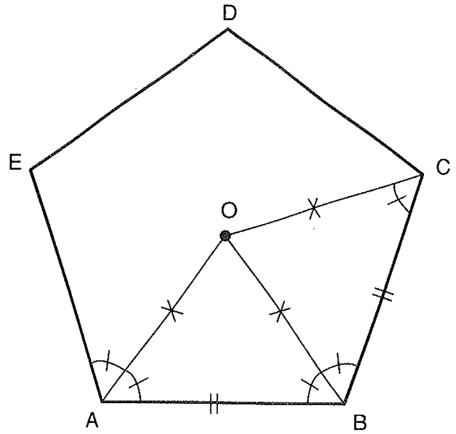
106. Disegnare un qualunque esagono e calcolarne l'area nei due modi seguenti, servendosi di un righello per misurare le lunghezze dei segmenti:
a. dividere l'esagono in quattro triangoli per mezzo delle diagonali uscenti da un vertice e sommare le aree dei triangoli;
b. disegnare un pentagono, un quadrilatero e poi un triangolo equivalenti all'esagono e calcolare l'area del triangolo.

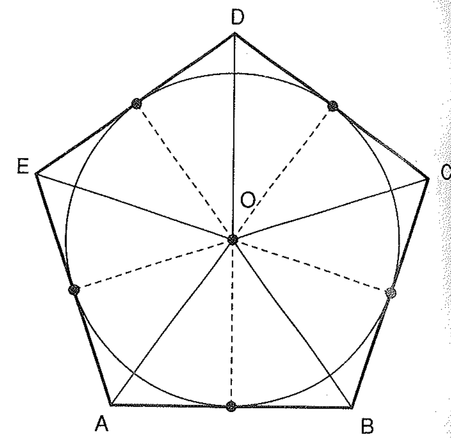
107. Disegnare un pentagono regolare ABCDE e costruire la circonferenza inscritta nel modo seguente (fig. 5):
- disegnare le bisettrici degli angoli $\hat{A}$ e $\hat{B}$, indicando con O il loro punto di intersezione;
- spiegare perché i triangoli AOB, BOC, COD, DOE e EAO sono tutti isosceli e uguali fra loro;
- disegnare in tutti i triangoli precedenti le altezze uscenti dal vertice O, spiegando perché sono tutte uguali fra loro e chiamare r la loro lunghezza;
- spiegare perché la circonferenza di centro O e raggio r è la circonferenza inscritta nel pentagono;
- spiegare perché l'area S del pentagono è data da:

$S=p \cdot r$

dove p è la misura del semiperimetro mentre l'altezza r di ogni triangolo viene chiamata apotema del poligono regolare.

Figura 5
Inscrivere una circonferenza in un pentagono regolare





108. Ripetere l'esercizio precedente a partire da un esagono regolare, spiegando perché tutti i triangoli ottenuti sono equilateri.

109. Spiegare perché la costruzione eseguita nei due esercizi precedenti per il pentagono e l'esagono può essere ripetuta per tutti i poligoni regolari.

110. Disegnare un quadrilatero ABCD circoscritto ad una circonferenza di raggio r. Indicare con a, b, c, d le lunghezze dei lati del triangolo, con $2p$ il suo perimetro e con S la sua area; verificare che valgono le seguenti due uguaglianze:

(I) $S=\frac{1}{2}(a+b+c+d)r$ (II) $S=p \cdot r$

111. Disegnare un triangolo ABC circoscritto ad una circonferenza di raggio r. Indicare con a, b, c le lunghezze dei lati del triangolo, con $2p$ il suo perimetro e con S la sua area; verificare che valgono le seguenti due uguaglianze:

(I) $S=\frac{1}{2}(a+b+c)r$ (II) $S=p \cdot r$

Esercizi riassuntivi dei capitoli 4 e 5

Sui parallelogrammi

112. Disegnare un triangolo ABC, isoscele sulla base AB; da un qualunque punto P della base AB condurre le seguenti rette:
- la parallela a BC, fino ad incontrare AC in E;
- la parallela a AC, fino ad incontrare BC in D.

Risolvere i seguenti quesiti:
a. spiegare perché sono isosceli i triangoli AEP e PDB e determinarne i segmenti uguali;
b. spiegare perché il quadrilatero EPDC è un parallelogramma ed individuarne i lati uguali;
c. spiegare perché la somma dei segmenti EP e PD è sempre uguale al lato obliquo del triangolo.

113. Ripetere il problema precedente con il punto P sul prolungamento della base BC, spiegando perché in questo caso per ottenere il lato obliquo bisogna considerare la differenza dei segmenti PE e PD.
Esaminare i casi particolari in cui P coincide con B o con C.

114. Le bisettrici degli angoli di un rettangolo ABCD si incontrano determinando un quadrilatero convesso PQRS; risolvere i seguenti quesiti:
a. calcolare l'ampiezza degli angoli di PQRS;
b. dire se il quadrilatero può essere inscritto in una circonferenza.

115. Indicare quali sono i parallelogrammi che si possono inscrivere in una circonferenza e quali sono quelli che si possono circoscrivere.

Sui poligoni regolari

116. Prolungare i lati di un poligono regolare di uno stesso segmento e nello stesso verso; spiegare perché gli estremi dei segmenti sono i vertici di un altro poligono regolare con lo stesso numero di lati.

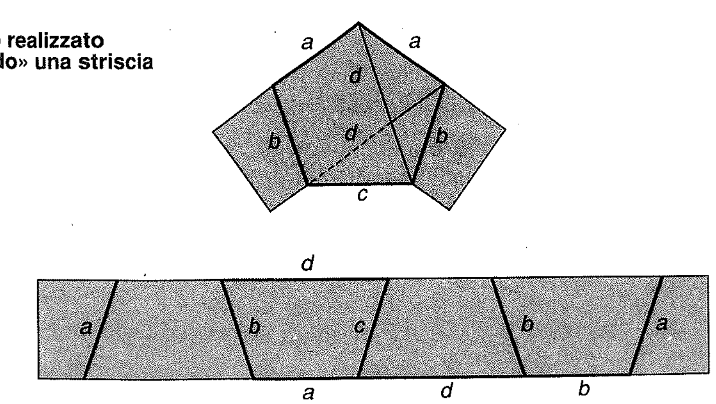
117. Internamente ai lati di un qualunque poligono regolare considerare uno stesso segmento disegnato nello stesso verso; spiegare perché gli estremi dei segmenti sono i vertici di un altro poligono regolare con lo stesso numero di lati.

118. Spiegare perché congiungendo i punti medi dei lati di un poligono regolare si ottiene un altro poligono regolare con lo stesso numero di lati.

119. Si parte da un poligono regolare con più di quattro lati e si uniscono due a due i vertici che sono separati da un solo vertice; spiegare perché si ottiene un altro poligono regolare.

120. Spiegare perché è regolare il pentagono ottenuto «annodando» una striscia di carta (fig. 6).

Figura 6
Pentagono realizzato «annodando» una striscia di carta



Sulla circonferenza

121. Spiegare perché in un cerchio corde uguali distano ugualmente dal centro.

122. Spiegare perché gli estremi di due diametri di una circonferenza sono sempre vertici di un rettangolo; in quale caso si ottiene un quadrato?

123. Disegnare una circonferenza di centro O e diametro AB e due corde AC e AD che formano con il diametro AB un angolo di uguale ampiezza; spiegare perché la corda CD è sempre perpendicolare ad AB.

124. Disegnare una circonferenza di centro O e diametro AB; per un punto M di AB condurre due corde DC e EF che formano con il diametro due angoli uguali. Risolvere i seguenti quesiti:

a. spiegare perché CEDF è un trapezio isoscele;
b. spiegare perché i prolungamenti dei lati obliqui si incontrano sulla retta AB.

125. Disegnare un pentagono regolare ABCDE e costruire la circonferenza circoscritta nel modo seguente (fig. 5, p. 574):

- disegnare le bisettrici degli angoli $\hat{A}$ e $\hat{B}$, indicando con O il loro punto di intersezione;
- spiegare perché i triangoli AOB, BOC, COD, DOE e EAO sono tutti isosceli e uguali fra loro;
- spiegare perché la circonferenza che ha centro in O e che passa per A passa anche per tutti gli altri vertici del pentagono e cioè è la circonferenza circoscritta al pentagono.

126. Spiegare perché il procedimento indicato nell'esercizio precedente può essere ripetuto a partire da qualunque altro poligono regolare.

127. Disegnare un segmento AB e l'asse *r* del segmento AB, cioè la perpendicolare nel suo punto di mezzo M; considerare un punto P sulla retta *r* e spiegare perché risulta sempre: PA=PB.
Tale proprietà si esprime in uno dei seguenti modi:

- «Sull'asse di un segmento si trovano tutti i punti che hanno uguale distanza dagli estremi del segmento»;
- «L'asse di un segmento è il luogo geometrico dei punti equidistanti dagli estremi del segmento».

128. Disegnare un angolo di vertice O e la semiretta *r* che divide l'angolo in due parti uguali, cioè la bisettrice dell'angolo; considerare un punto P sulla bisettrice *r* e da P condurre le perpendicolari PH e PK ai lati dell'angolo; spiegare perché risulta sempre: PH=PK.
Tale proprietà si esprime in uno dei seguenti modi:

- «Sulla bisettrice di un angolo si trovano tutti i punti che hanno uguale distanza dai lati dell'angolo»;
- «La bisettrice di un angolo è il luogo geometrico dei punti equidistanti dai lati dell'angolo».

129. Disegnare due rette parallele *a*, *b* e una perpendicolare alle due rette che incontra *a* nel punto A, *b* nel punto B; tracciare l'asse *r* del segmento AB e spiegare perché *r* è il luogo dei punti equidistanti dalle due rette *a*, *b*.

130. Disegnare due rette *a*, *b* che si incontrano in un punto O; disegnare le bisettrici degli angoli di vertice O e spiegare perché le bisettrici sono il luogo dei punti equidistanti dalle due rette *a*, *b*.

131. Disegnare un segmento AB e descrivere il luogo dei vertici dei triangoli che hanno un lato in AB e l'area costante.

132. Disegnare un segmento AB e descrivere il luogo dei vertici dei triangoli rettangoli che hanno AB come ipotenusa.