CAPITOLO QUINTO

UGUAGLIANZA ED EQUIVALENZA DI POLIGONI

B

1 Poligoni uguali

Un modo per disegnare poligoni uguali

Per disegnare dei poligoni uguali basta realizzare un poligono P ritagliando un cartoncino (fig. 1); quindi si procede così:

1. si fissa P sul foglio in una prima posizione e se ne ricalca il contorno; si ottiene un poligono ABCD;
2. si fa scivolare P sul foglio, per esempio lungo la retta AB, e se ne ricalca il contorno; si ottiene un secondo poligono A'B'C'D';
3. si fa ruotare P sul foglio, per esempio intorno ad A', e se ne ricalca il contorno; si ottiene un terzo poligono A"B"C"D" ;
4. si ribalta P, per esempio intorno ad A"B", e se ne ricalca il contorno; si ottiene un altro poligono A*B*C*D*.

In questo modo si trovano disegnati sul foglio tanti poligoni uguali: si potrebbe anche dire che è sempre lo stesso poligono, però disegnato in quattro diverse posizioni.

Figura 1
Un modo di disegnare tanti poligoni uguali

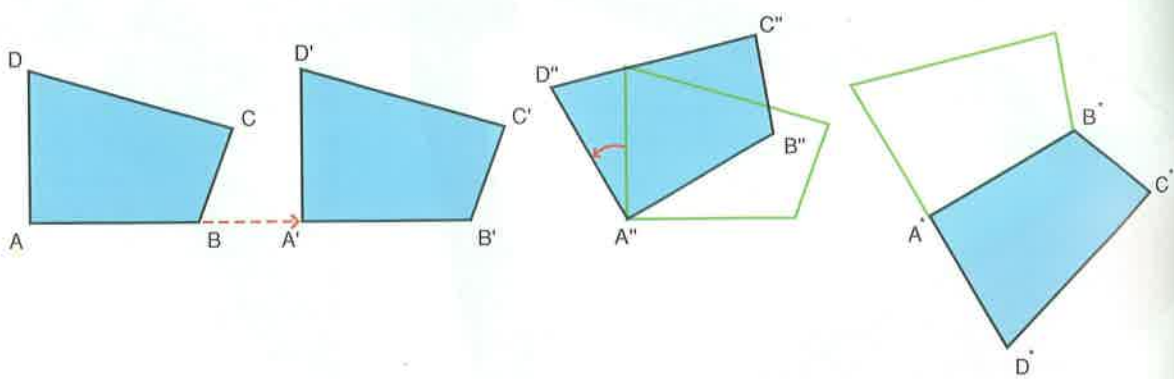
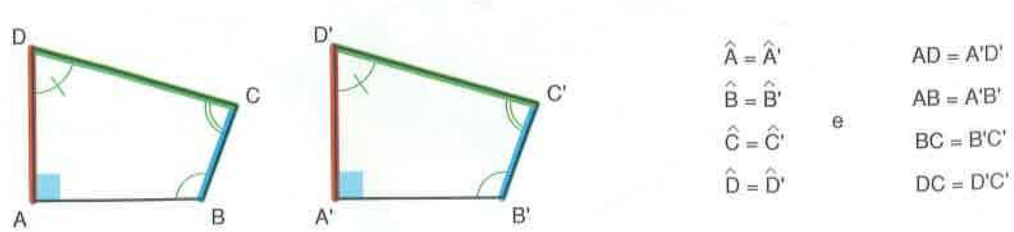


Figura 2
Riconoscere due poligoni uguali



Un criterio per riconoscere poligoni uguali

Il precedente metodo per disegnare tanti poligoni uguali è senz'altro semplice, ma sembra privo di applicazioni. Nelle scienze (cfr. anche la scheda «I criteri di uguaglianza dei triangoli nello studio della riflessione della luce», p. 190) è invece importante un altro risultato: saper decidere se due poligoni sono uguali senza dover ricorrere ad un movimento che porta a sovrapporli.

Per questo conviene riprendere due dei poligoni disegnati prima, per esempio il primo ed il secondo (fig. 2) ed osservare che, ovviamente, gli elementi corrispondenti sono uguali; risulta cioè:

$$\hat{A}=\hat{A}' \qquad \hat{B}=\hat{B}'$$
$$\hat{C}=\hat{C}' \qquad \hat{D}=\hat{D}'$$
$$AB=A'B' \qquad BC=B'C'$$
$$CD=C'D' \qquad DA=D'A'$$

Questa osservazione suggerisce di decidere se due poligoni sono uguali esaminandone i lati e gli angoli; si ha dunque che: *due poligoni sono uguali se hanno lati ed angoli ordinatamente uguali.*

Perché bisogna confrontare sia i lati che gli angoli per decidere se due poligoni sono uguali

È facile capire che non basta confrontare i soli angoli per essere certi che due poligoni sono uguali: i due poligoni di fig. 3 hanno gli angoli uguali, ma non sono certamente uguali. Sono invece simili; il poligono più grande si può ottenere proiettando quello più piccolo con un proiettore per diapositive (fig. 4).

E così non basta confrontare solo i lati per decidere se due poligoni sono uguali: i due quadrilateri di fig. 5 hanno i lati uguali, ma non sono uguali. Si può costruire una delle due figure con sbarrette (fig. 6); il quadrilatero non è rigido, è invece articolato: con una pressione sui lati si può ottenere l'altra figura.

Figura 3
Due poligoni che hanno gli angoli uguali ma non sono uguali

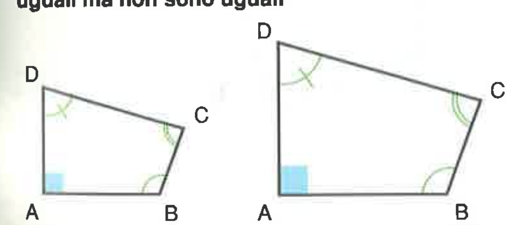


Figura 5
Due poligoni che hanno i lati uguali, ma non sono uguali

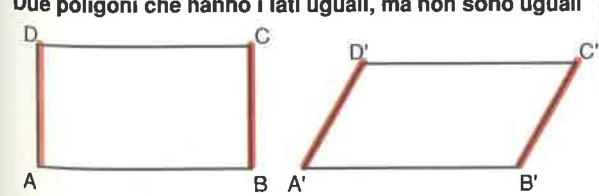


Figura 6
Come ottenere due quadrilateri con i lati uguali

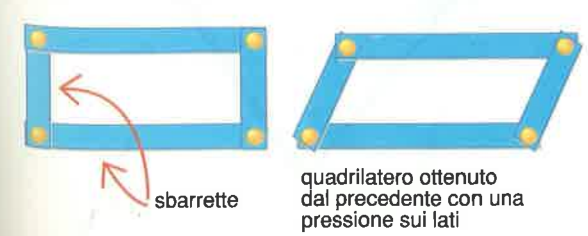
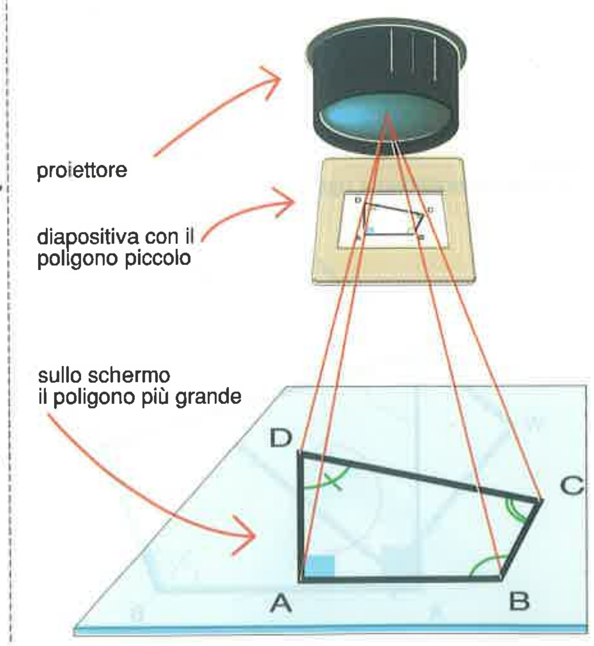


Figura 4
Come ottenere due poligoni con gli angoli uguali



Come si trovano «lati ed angoli ordinatamente uguali»

La fig. 7 porta a riflettere su un problema: come organizzare il confronto di lati ed angoli per decidere se due poligoni sono uguali?

Conviene procedere nel modo seguente:

1. si fissa l'attenzione su una coppia di elementi certamente uguali (per esempio, gli angoli $\hat{A}$ e $\hat{E}$ nella fig. 7);
2. si percorre *ordinatamente* il perimetro dei due poligoni, verificando che gli elementi corrispondenti risultino uguali.

Così, percorrendo il perimetro dei due poligoni di fig. 7 in senso orario, si trova:

1. $\hat{A}=\hat{E}$	2. AD=EF	3. $\hat{D}=\hat{F}$
4. DC=FG	5. $\hat{C}=\hat{G}$	6. CB=GH
7. $\hat{B}=\hat{H}$	8. BA=HE	

Si trovano dunque nei due poligoni *elementi ordinatamente* uguali e perciò i due poligoni sono uguali.

In modo analogo si può verificare che sono uguali i due poligoni di fig. 8; in questo caso però, per trovare elementi uguali, bisogna percorrere i perimetri dei due poligoni in senso inverso. Per questo si dice che *i due poligoni sono inversamente uguali.*

Figura 7
Cercare lati ed angoli ordinatamente uguali

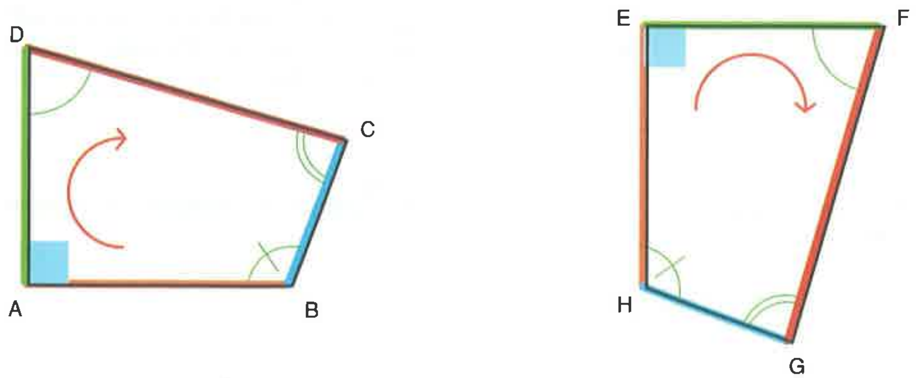
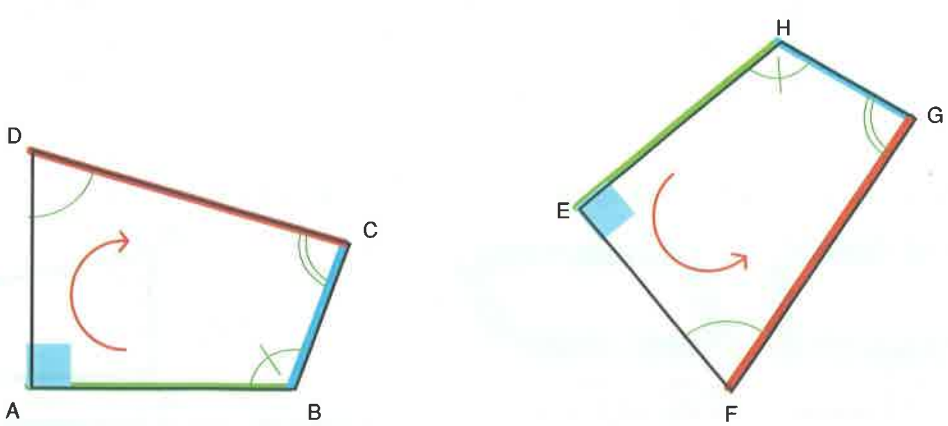


Figura 8
Poligoni inversamente uguali



Verifiche

Conoscenze

① Come si può ottenere un disegno di quattro poligoni uguali?

② Qual è il criterio per decidere se due poligoni sono uguali?

Comprensione

① Spiegare perché non basta confrontare i lati di due poligoni per decidere se le due figure sono uguali; portare un esempio diverso da quello indicato nel testo.

② Spiegare perché non basta confrontare gli angoli di due poligoni per decidere se le due figure sono uguali; portare un esempio diverso da quello indicato nel testo.

Applicazioni

① Esaminare i tre poligoni di fig. 9 e verificare che sono uguali fra loro, spiegando il procedimento seguito.

② Esaminare i poligoni di fig. 10 e stabilire quali sono uguali fra loro, spiegando il procedimento seguito.

Figura 9
Verificare che i tre poligoni sono uguali

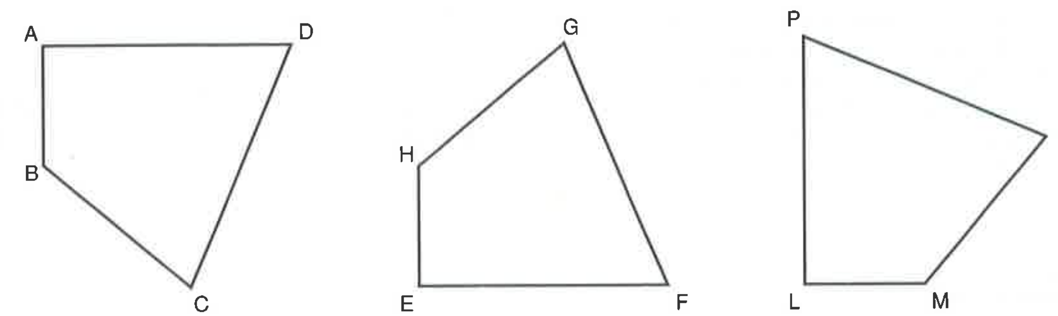
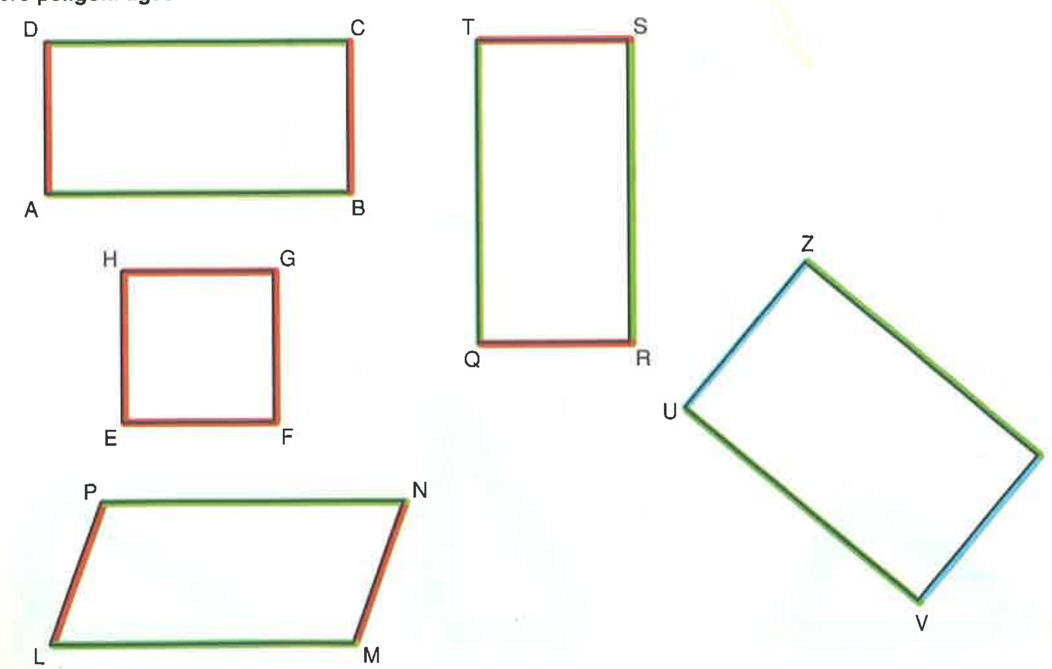


Figura 10
Scegliere poligoni uguali



2 Triangoli uguali. Due criteri di uguaglianza

Triangoli uguali

I triangoli sono i poligoni più semplici; si ha dunque che *due triangoli sono uguali se i lati e gli angoli dell'uno sono ordinatamente uguali ai lati e agli angoli dell'altro.*
Per esempio, sono uguali i due triangoli di fig. 1, dato che risulta:

$\hat{A}=\hat{A}'$	$AB=A'B'$
$\hat{B}=\hat{B}'$	$BC=B'C'$
$\hat{C}=\hat{C}'$	$CA=C'A'$

Per scoprire se due triangoli sono uguali bisognerebbe dunque effettuare 12 misure: i 6 elementi – 3 lati e 3 angoli – del primo triangolo, da confrontare con i corrispondenti 6 elementi del secondo triangolo.
Per i triangoli però non è necessario effettuare tutte queste misure: appositi criteri permettono di riconoscere due triangoli uguali effettuando solo 6 misure.

Basta confrontare i lati per decidere se due triangoli sono uguali

Si scopre facilmente un criterio di uguaglianza provando a costruire un triangolo con tre sbarrette (fig. 2): si ottiene una struttura rigida, che non si altera premendo sui lati; le tre sbarrette realizzano dunque un solo triangolo, che può essere ovviamente disposto in tante posizioni differenti.
Anche il disegno di un triangolo eseguito con riga e compasso (fig. 3) conferma questo risultato e conduce al seguente ***criterio di uguaglianza dei triangoli:*** *due triangoli sono uguali se hanno i lati uguali.*
Questo criterio garantisce che, per decidere se due triangoli sono uguali, basta confrontare solo i lati, senza dover misurare anche gli angoli.

Per decidere se due triangoli sono uguali non basta confrontare gli angoli, bisogna confrontare anche un lato

Il risultato raggiunto conduce a provare un'altra costruzione: costruire un triangolo conoscendo solo l'ampiezza degli angoli (senza avere alcuna informazione sulla lunghezza dei lati).
Si scopre subito che in questo modo il triangolo non è determinato: la fig. 4 mostra dei triangoli che hanno gli angoli corrispondenti uguali e non sono certo uguali; sono invece simili, cioè hanno la stessa forma, ma dimensioni diverse.
Si trova inoltre che è stata data un'informazione inutile: fissata l'ampiezza di due angoli – per esempio $\beta=60°$ e $\gamma=30°$ come in fig. 4 – si conosce anche il terzo angolo α, dato che deve risultare:

$$\alpha+60°+30°=180° \quad \text{e quindi} \quad \alpha=90°$$

Tuttavia, fra tutti i triangoli che hanno gli angoli uguali, è facile fissare un ben determinato triangolo: basta indicare la lunghezza di un lato. Per esempio, fra i triangoli di fig. 4, solo ABC ha il lato BC lungo 4 cm.

Figura 1
Due triangoli uguali

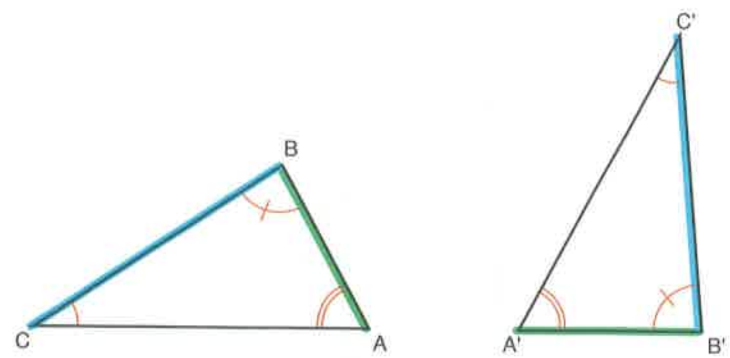


Figura 2
Con tre sbarrette si può costruire un solo triangolo

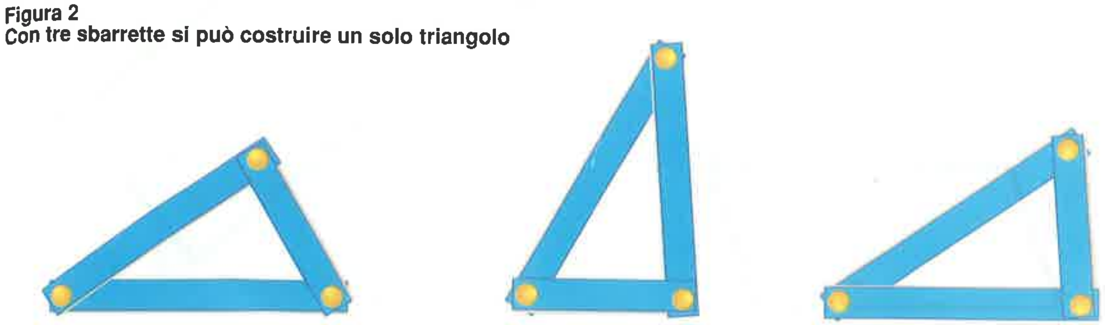
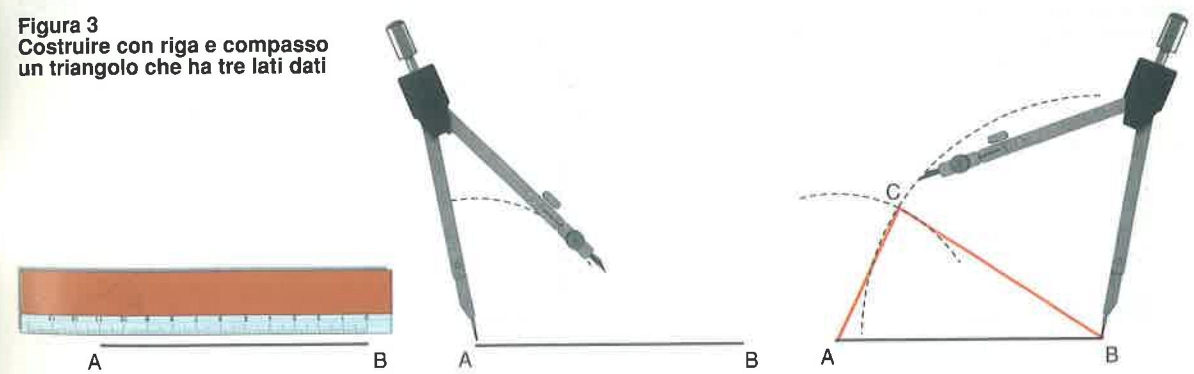
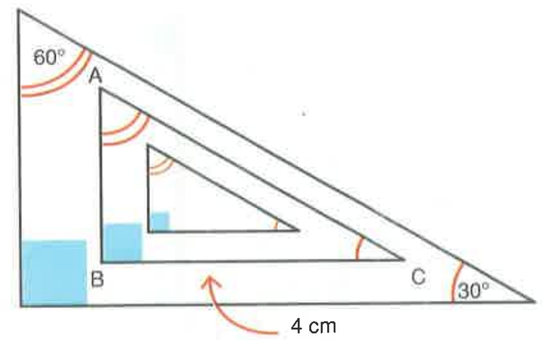


Figura 3
Costruire con riga e compasso un triangolo che ha tre lati dati



1. Si disegna il primo lato.
2. Si punta il compasso in A con raggio il secondo lato.
3. Si punta il compasso in B con raggio il terzo lato.

Figura 4
Tanti triangoli che hanno gli stessi angoli



Si conclude allora che per fissare un unico triangolo basta assegnare due angoli – per esempio B̂ e Ĉ – e il lato BC comune ai due angoli.

Si trova così ***un altro criterio di uguaglianza:*** *due triangoli sono uguali se hanno uguali due angoli ed il lato comune ai due angoli.*

Perché bisogna fissare la posizione del lato da confrontare

Quest'ultimo criterio di uguaglianza può far nascere una domanda: perché bisogna fissare la posizione del lato da confrontare?

La fig. 5 suggerisce una risposta a questa domanda: i due triangoli ABC e A'B'C' hanno un lato lungo 4 cm, un angolo ampio 30° e un altro ampio 90°, tuttavia non sono uguali. Ed è chiaro il perché:

- nel triangolo ABC il lato lungo 4 cm è comune agli angoli di 30° e 90°;
- nel triangolo A'B'C' il lato lungo 4 cm è in una diversa posizione rispetto agli angoli ampi 30° e 90°.

Sono invece uguali i triangoli ABC e A'B'C' in fig. 6: hanno un angolo ampio 30° e un altro ampio 90°, mentre il lato lungo 4 cm è, in tutti e due i triangoli, opposto all'angolo di 30°; in tal caso infatti il lato lungo 4 cm è sempre comune a due angoli ordinatamente uguali, ampi 60° e 90°.

Dunque, *per stabilire se due triangoli sono uguali, basta confrontare due angoli ed un lato, ma è indispensabile fissare la posizione del lato rispetto agli angoli.*

Verifiche

Conoscenze

① Esporre i due criteri di uguaglianza dei triangoli presentati in questo paragrafo.

Comprensione

① Spiegare perché, per verificare che due triangoli sono uguali, basta confrontare i lati, mentre questo non basta per i quadrilateri.

② Spiegare perché, per verificare che due triangoli sono uguali, non basta confrontare gli angoli.

③ I due triangoli di fig. 7 hanno ordinatamente uguali gli angoli Â e Â', Ĉ e Ĉ' e i lati AB e A'B'.
Cosa si può dire dei due angoli B̂ e B̂'?
In base a quale criterio i due triangoli sono uguali?

Applicazioni

① Fra i triangoli di fig. 8 scegliere quelli uguali, spiegando il procedimento seguito.

② Due triangoli isosceli hanno la base ed un lato ordinatamente uguali; questo basta per essere certi che sono uguali? Motivare la risposta.

③ Due triangoli isosceli hanno la base ed un angolo alla base ordinatamente uguali; questo basta per essere certi che sono uguali? Motivare la risposta.

Collegamento con il capitolo precedente

① In questo paragrafo si è detto che, per fissare un triangolo, basta fissare i tre lati; questi tre lati possono essere scelti liberamente?

(*Vedere il capitolo 4, paragrafo 4*)

Ecco due esempi su cui riflettere:

a. si può costruire il triangolo con i lati lunghi 2, 3, 6?

b. si può costruire il triangolo con i lati lunghi 2, 3, 5?

② In questo paragrafo si è detto che, per fissare un triangolo, basta fissare due angoli ed il lato comune; i due angoli possono essere scelti liberamente?

(*Vedere il capitolo 4, paragrafo 3*)

Ecco due esempi su cui riflettere:

a. si può costruire il triangolo con due angoli retti ed il lato comune lungo 1 cm?

b. si può costruire il triangolo con due angoli ampi 100° ed il lato comune lungo 2 cm?

Figura 5
Due triangoli che non sono uguali pur avendo un lato e due angoli uguali

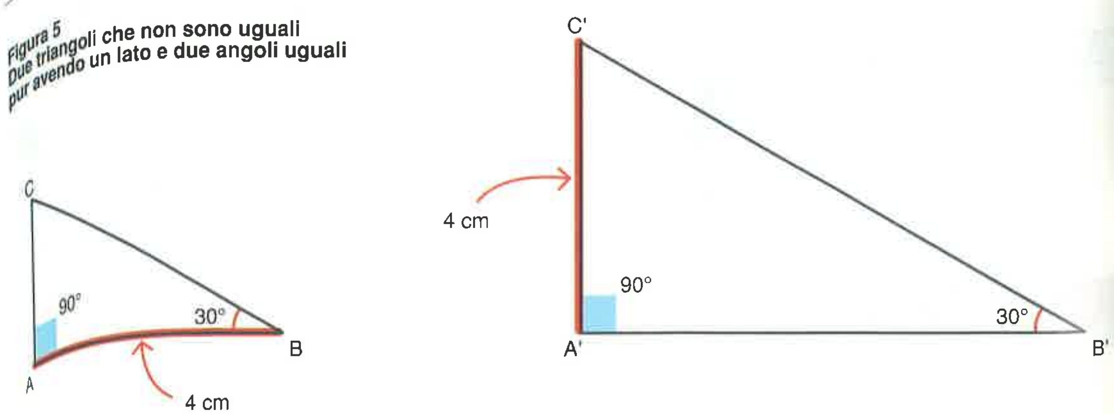


Figura 6
Due triangoli che sono uguali

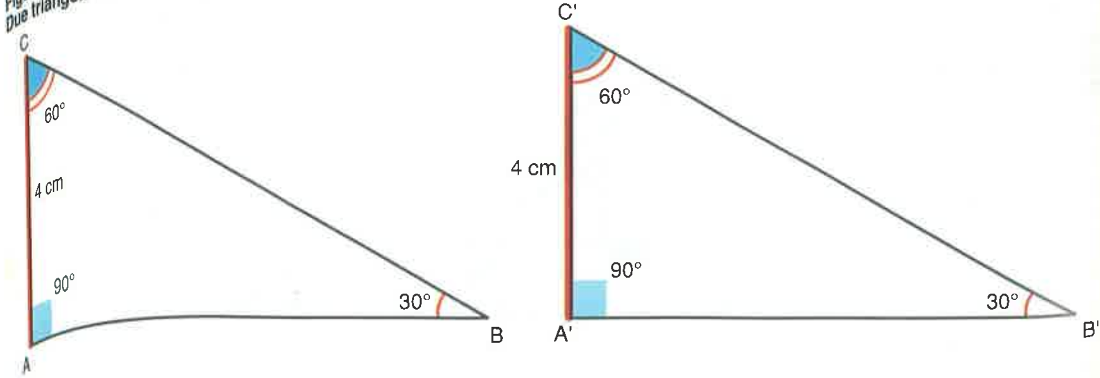


Figura 7
Due triangoli da esaminare

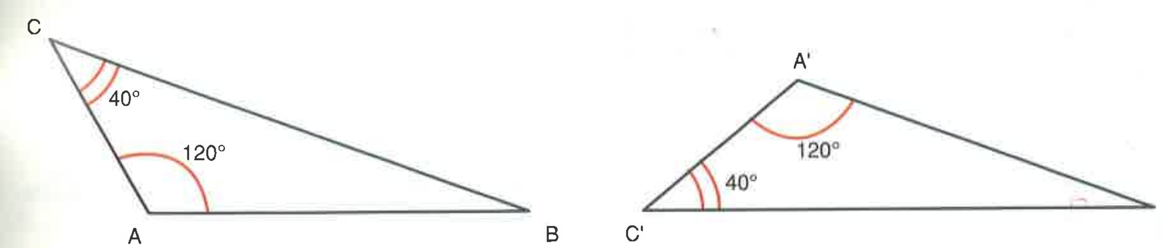
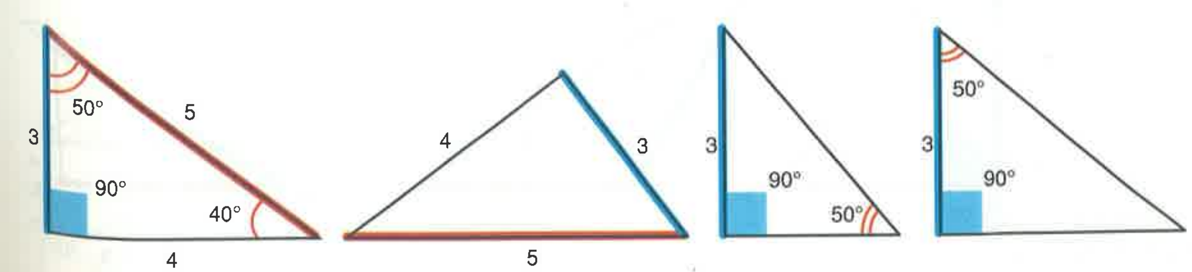


Figura 8
Quali triangoli sono uguali?



3

I tre criteri di uguaglianza dei triangoli

Per decidere se due triangoli sono uguali basta confrontare due lati e l'angolo compreso

Nel paragrafo precedente si è trovato che si può costruire un solo triangolo con i tre lati fissati (fig. 1); che cosa succede, invece, quando si fissa solo la lunghezza di due lati? Basta osservare la fig. 2 per rendersi conto che il triangolo non è determinato: dati due lati, per esempio AB e BC, si possono costruire tanti triangoli.

Figura 1
Si può costruire un solo triangolo con i tre lati fissati

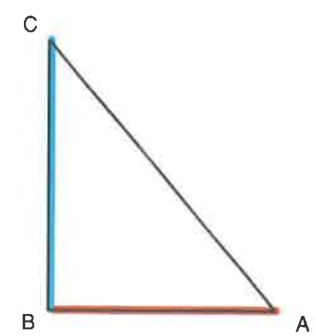
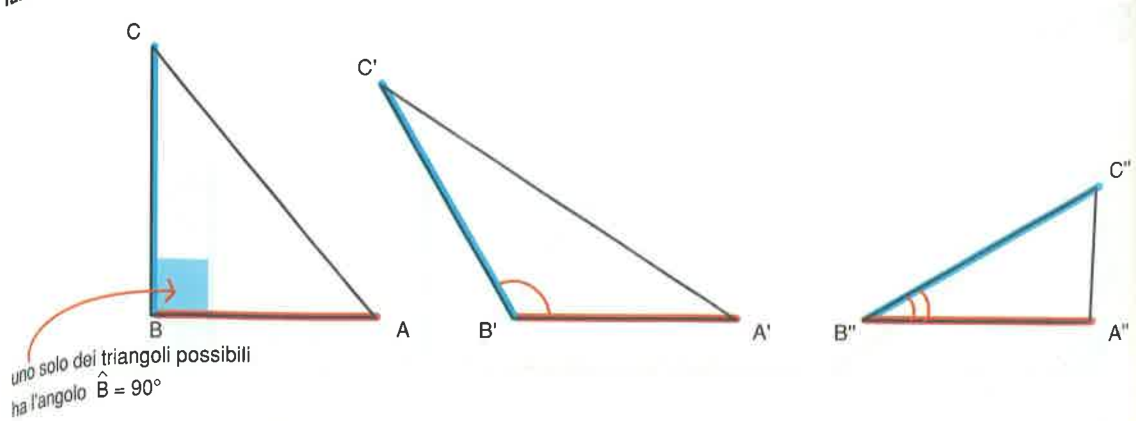


Figura 2
Tanti triangoli che hanno solo due lati fissi



Questi triangoli non sono certamente uguali: variando l'ampiezza dell'angolo $\hat{B}$, varia anche la lunghezza del terzo lato AC, che serve per chiudere il triangolo.
Tuttavia, fra i triangoli che hanno due lati fissi è facile scegliere un determinato triangolo: basta fissare l'ampiezza dell'angolo $\hat{B}$. Per esempio, fra i triangoli di fig. 2, solo ABC ha l'angolo $\hat{B}$ ampio 90°.
Si conclude allora che, per fissare un unico triangolo, non basta assegnare due lati – per esempio AB e BC – ma bisogna fissare anche l'angolo $\hat{B}$, compreso fra i due lati.
Si trova così un altro ***criterio di uguaglianza:*** *due triangoli sono uguali se hanno uguali due lati e l'angolo compreso.*

Perché bisogna fissare l'angolo compreso fra due lati uguali

Anche quest'ultimo criterio di uguaglianza può far nascere una domanda: che cosa succede quando di un triangolo si fissano due lati e un angolo non compreso fra i due lati?
È l'effettiva costruzione che può rispondere; in fig. 3 si organizza la costruzione di un triangolo che ha gli elementi seguenti:

AB=12 cm BC=8 cm $\hat{A}$=30°

La costruzione procede così:

1. si fissano due sbarrette *r* e *s* in modo da delimitare l'angolo:
   $\hat{A}$=30°
2. sulla sbarretta *r* si fissa il punto B, che dista 12 cm da A, e in B si impernia un'altra sbarretta *t* lunga 8 cm;
3. si ruota quest'ultima sbarretta intorno a B fino ad incontrare l'altra sbarretta *s*, in modo da chiudere il triangolo.

Proprio questo procedimento porta a costruire due triangoli del tutto diversi, dato che *t* si può appoggiare a *s* in due modi diversi.
Allo stesso risultato si può arrivare con una costruzione con riga e compasso come quella descritta in fig. 4.
Si arriva dunque alla seguente conclusione: *due triangoli possono avere ordinatamente uguali due lati e l'angolo non compreso senza essere uguali.*

Figura 3
Costruire un triangolo con sbarrette, dati due lati e l'angolo non compreso

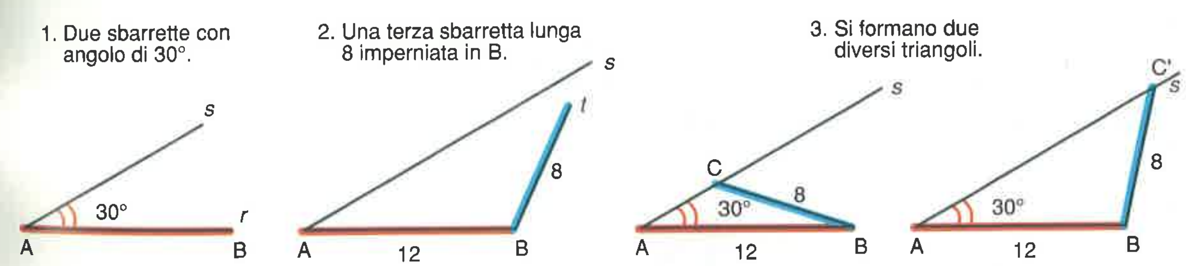
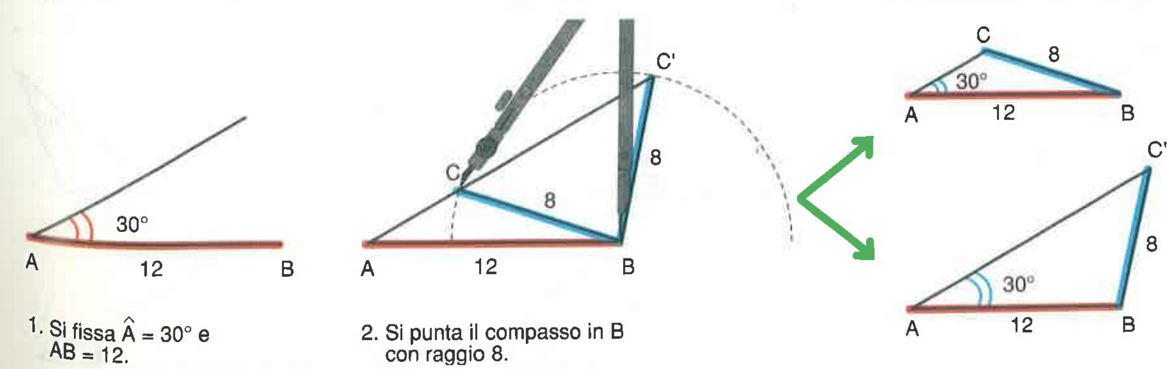


Figura 4
Costruire un triangolo con riga e compasso, dati due lati e l'angolo non compreso



I tre criteri di uguaglianza dei triangoli

I criteri di uguaglianza dei triangoli si presentano di solito nell'ordine seguente (fig. 5):

I. *Due triangoli sono uguali se hanno uguali due lati e l'angolo fra essi compreso.*

II. *Due triangoli sono uguali se hanno uguali due angoli e il lato fra essi compreso.*

III. *Due triangoli sono uguali se hanno uguali i tre lati.*

V e r i f i c h e

Conoscenze

① Esporre i tre criteri di uguaglianza dei triangoli.

Comprensione

① Spiegare perché il primo criterio di uguaglianza dei triangoli chiede di esaminare l'angolo compreso fra i due lati uguali.

② Disegnare due triangoli che hanno uguali due lati e l'angolo non compreso senza essere uguali.

③ Spiegare perché il secondo criterio di uguaglianza dei triangoli chiede di esaminare il lato compreso fra i due angoli uguali.

④ Disegnare due triangoli che hanno uguali due angoli e il lato non compreso senza essere uguali.

Applicazioni

① Fra i triangoli disegnati in fig. 6 indicare quelli uguali fra loro, spiegando il procedimento seguito.

② Due triangoli isosceli hanno uguali l'angolo al vertice ed un lato obliquo; questo basta per essere certi che sono uguali?

③ Due triangoli rettangoli hanno uguali i due cateti; questo basta per essere certi che sono uguali?

Figura 5
I criteri di uguaglianza dei triangoli

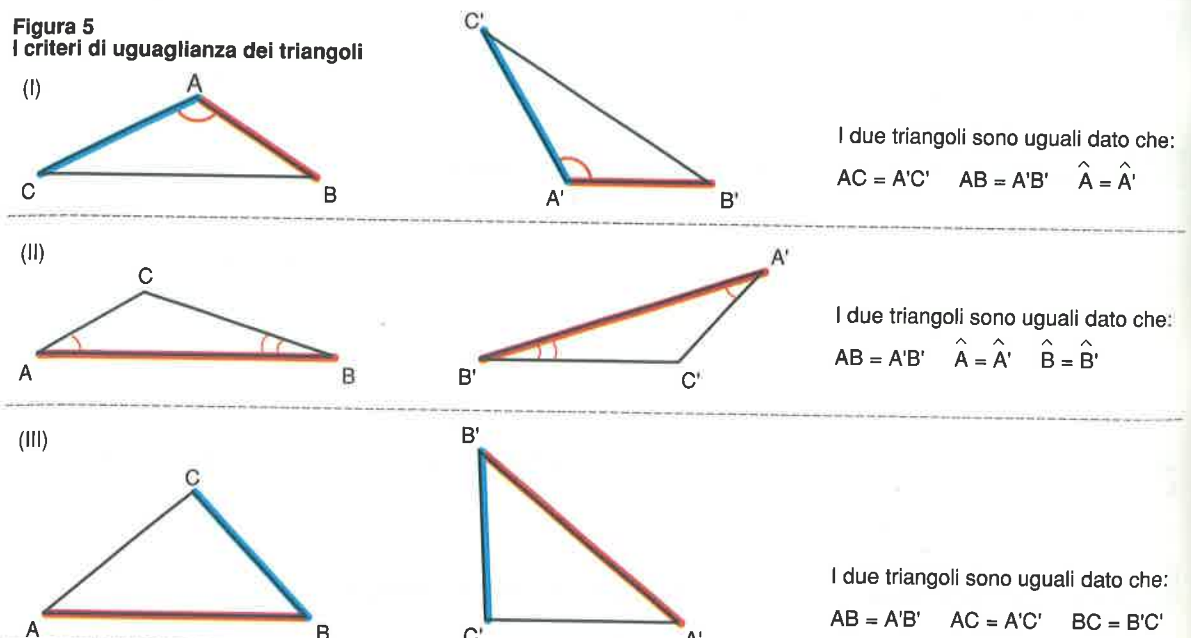
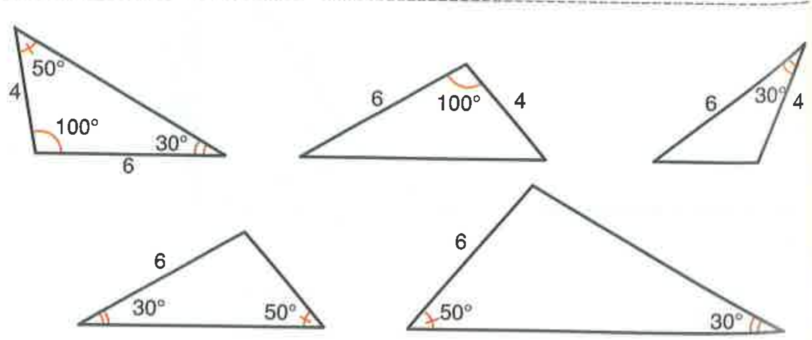


Figura 6
Riconoscere triangoli uguali



4

I criteri di uguaglianza dei triangoli rettangoli

I tre criteri di uguaglianza nel caso dei triangoli rettangoli

I criteri di uguaglianza dei triangoli si possono applicare, in particolare, per decidere se due triangoli rettangoli sono uguali; ma in questo caso ci sono sempre due elementi che sono sicuramente uguali: l'angolo retto del primo triangolo è sempre uguale all'angolo retto del secondo triangolo. Così si trova che (fig. 1):

- in base al primo criterio, per decidere se due triangoli rettangoli sono uguali, basta verificare se hanno uguali i due cateti (l'angolo compreso è retto);
- in base al secondo criterio, per decidere se due triangoli rettangoli sono uguali, basta verificare se hanno ordinatamente uguali un lato ed un angolo acuto (l'altro angolo è sempre retto).

Un criterio di uguaglianza valido solo per i triangoli rettangoli

Da quanto visto finora, sembra di dover applicare raramente il terzo criterio di uguaglianza per riconoscere se due triangoli rettangoli sono uguali: due triangoli che hanno uguali due cateti sono certamente uguali, senza dover confrontare anche il terzo lato.

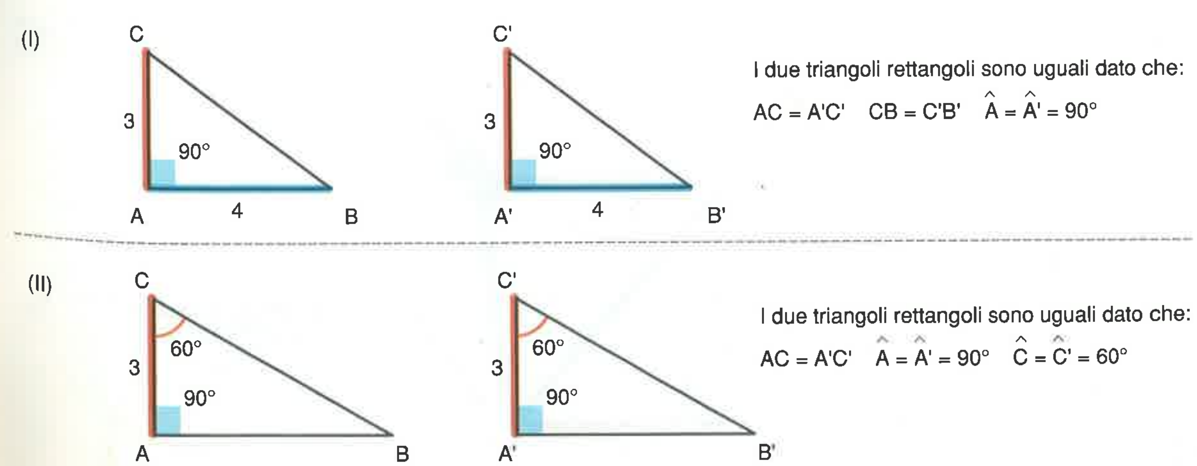
Che cosa succede se, invece, due triangoli rettangoli hanno ordinatamente uguali un cateto e l'ipotenusa?

È ancora l'effettiva costruzione che riesce a rispondere; per esempio, si costruisce un triangolo che ha gli elementi seguenti:

AC=8 cm BC=12 cm Â=90°

La costruzione procede così (fig. 2):

Figura 1
Il primo e il secondo criterio di uguaglianza nel caso di triangoli rettangoli



1. si fissano due sbarrette r e s in modo da delimitare l'angolo:
   $\hat{A}=90°$
2. sulla sbarretta r si fissa il punto C, che dista 8 cm da A, e in C si impernia un'altra sbarretta BC, lunga 12 cm;
3. si ruota quest'ultima sbarretta intorno a C fino ad incontrare l'altra sbarretta s, in modo da chiudere il triangolo ABC.

Questo procedimento porta a costruire un solo triangolo, dato che BC si può appoggiare a s in un solo modo.

Allo stesso risultato si può arrivare con una costruzione con riga e compasso come quella descritta in fig. 3.

Si conclude allora che, per fissare un unico triangolo rettangolo, basta assegnare l'ipotenusa ed un cateto.

Si trova così un altro ***criterio di uguaglianza dei triangoli rettangoli:*** *due triangoli rettangoli sono uguali se hanno ordinatamente uguali un cateto e l'ipotenusa.*

I criteri di uguaglianza dei triangoli rettangoli

I criteri di uguaglianza dei triangoli assumono dunque una forma particolare nel caso dei triangoli rettangoli. Si ha che (fig. 4):

I. *Due triangoli rettangoli sono uguali se hanno ordinatamente uguali due lati.*

II. *Due triangoli rettangoli sono uguali se hanno ordinatamente uguali un lato ed un angolo.*

Figura 2
Costruire un triangolo rettangolo di cui è dato un cateto e l'ipotenusa

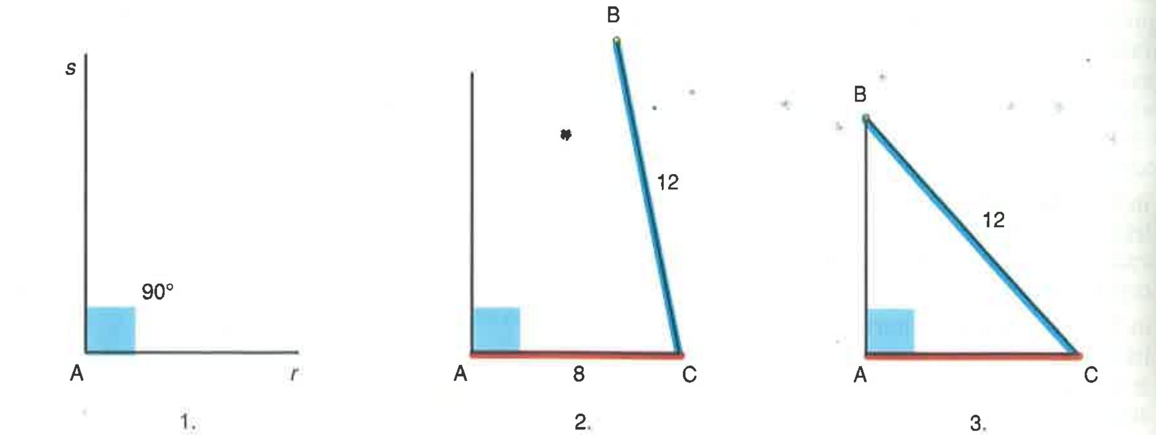
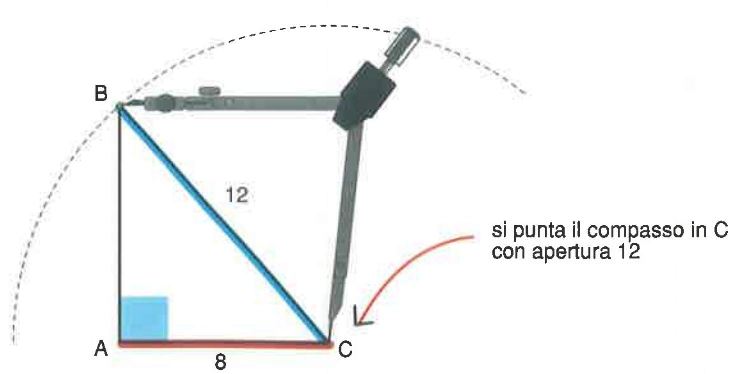


Figura 3
Costruire un triangolo rettangolo con riga e compasso, dati un cateto e l'ipotenusa



Verifiche

Conoscenze

① Esporre i criteri di uguaglianza dei triangoli rettangoli.

② Quali elementi di un triangolo rettangolo debbono essere dati per fissare un solo triangolo?

Comprensione

① Spiegare perché sono uguali due triangoli rettangoli che hanno uguali i due cateti.

② Spiegare perché sono uguali due triangoli rettangoli che hanno ordinatamente uguali un cateto e l'ipotenusa.

③ Spiegare perché sono uguali due triangoli rettangoli che hanno ordinatamente uguali un lato ed un angolo acuto.

Applicazioni

① Nella fig. 5 sono disegnate tre coppie di triangoli rettangoli, di cui sono indicate le misure degli angoli. Indicare le coppie formate da due triangoli uguali, motivando la scelta.

② Due triangoli rettangoli isosceli hanno le ipotenuse uguali; questo basta per essere certi che i due triangoli sono uguali?

Figura 4
I criteri di uguaglianza dei triangoli rettangoli

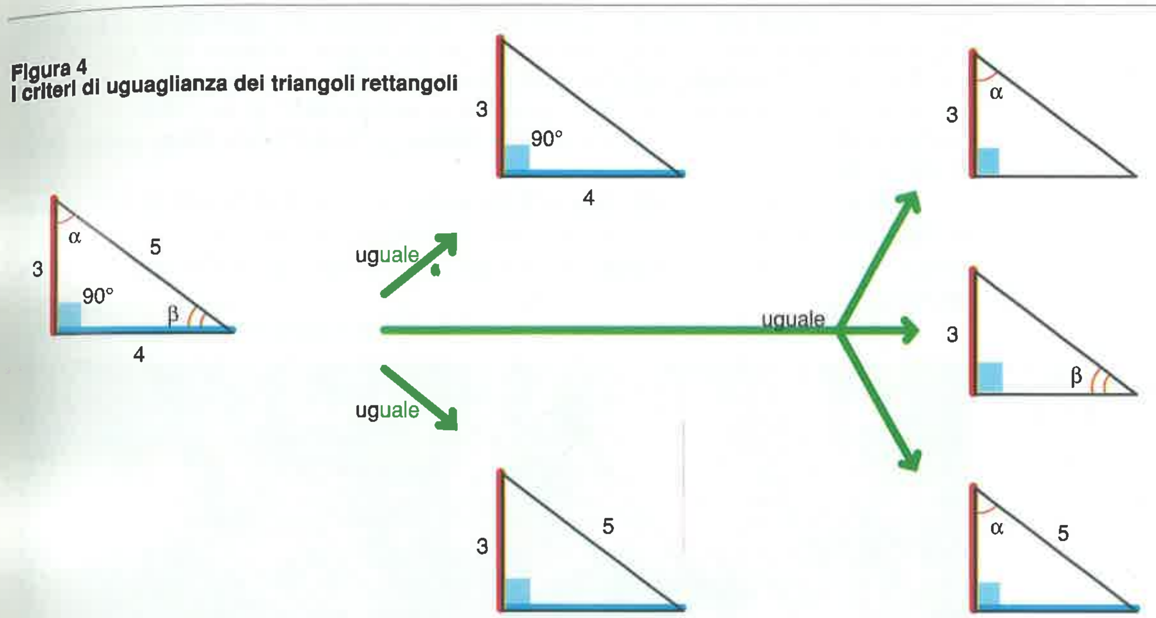
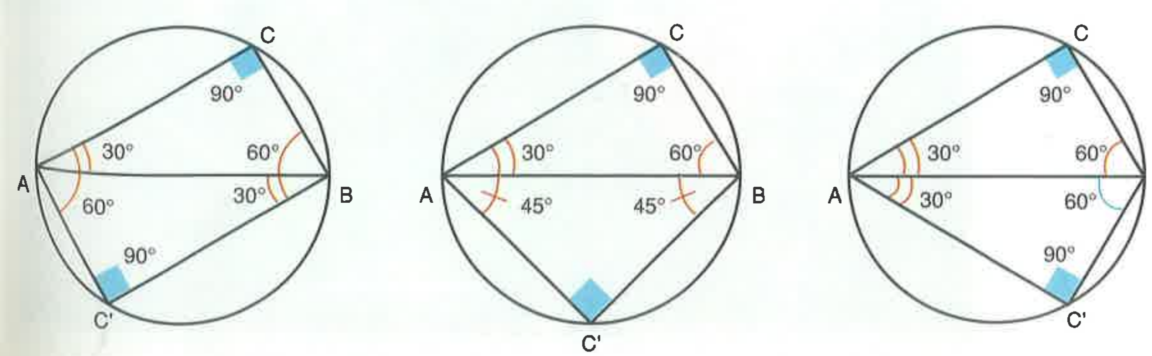


Figura 5
Riconoscere una coppia di triangoli uguali



I criteri di uguaglianza dei triangoli nello studio della riflessione della luce

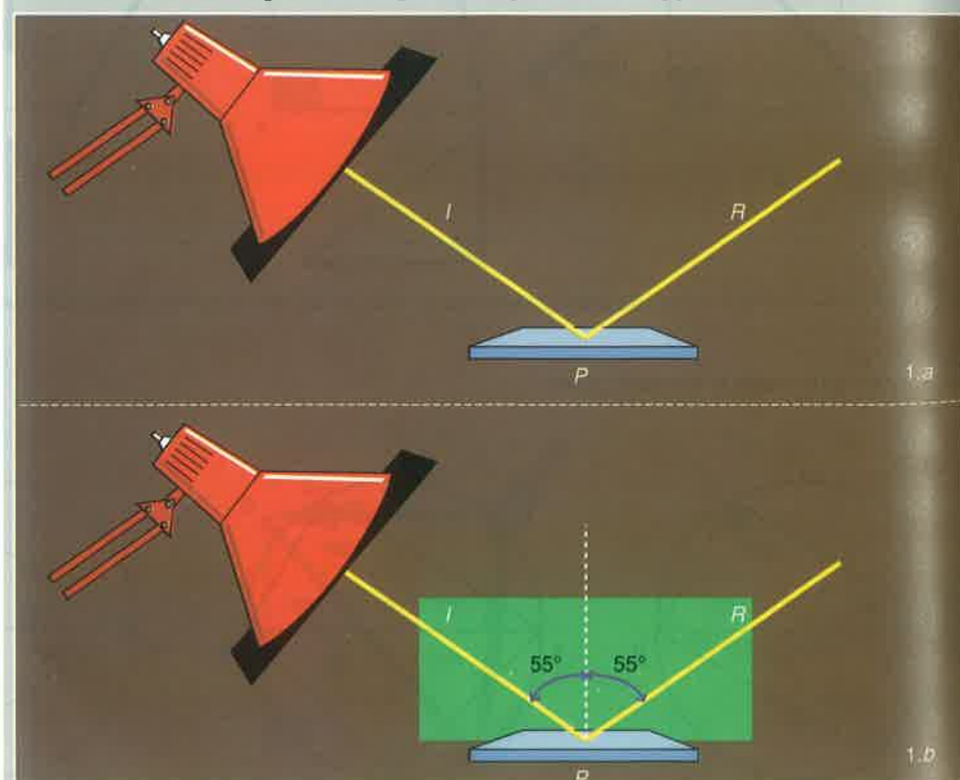
La riflessione della luce e le sue leggi

In fig. 1*a* è rappresentato un esperimento organizzato per studiare la riflessione della luce: un raggio di luce emesso da un proiettore colpisce uno specchio e viene riflesso. Per capire meglio la situazione, in fig. 1*b* un cartoncino bianco è disposto perpendicolarmente allo specchio e, nel punto P in cui cade la luce, è tracciata la perpendicolare allo specchio; questa perpendicolare viene anche chiamata *normale*.

In questo modo si può seguire il cammino della luce: il raggio di luce emesso dal proiettore (detto *raggio incidente*) e il raggio di luce che rimbalza (detto *raggio riflesso*) sfiorano sempre il cartoncino, cioè sono nello stesso piano della normale.

Si esaminano poi due angoli: l'angolo $\hat{i}$ fra raggio incidente e normale, chiamato *angolo d'incidenza*, e l'angolo $\hat{r}$ fra raggio riflesso e normale, chiamato anche *angolo di riflessione*; si trova che questi due angoli sono sempre uguali.

Figura 1
Un esperimento per studiare la riflessione della luce



La riflessione della luce è dunque regolata dalle seguenti leggi:

I. raggio incidente, raggio riflesso e normale si trovano sempre sullo stesso piano;

II. l'angolo di riflessione è sempre uguale all'angolo di incidenza, cioè risulta sempre:

$$\hat{r} = \hat{i}$$

L'immagine data da uno specchio

L'esperimento descritto prima è progettato appositamente per studiare come si comporta la luce che incontra uno specchio. Nella realtà di tutti i giorni, davanti ad uno specchio vediamo una «copia» di noi stessi, come se «dietro» ci fosse un'altra persona. Come si spiega quest'effetto?

Ecco come si può ragionare (fig. 2).

Si immagina di porre una piccola lampadina in un punto A davanti allo specchio *s*; la lampadina emette tanti raggi di luce:

- il raggio *n* perpendicolare allo specchio, che colpisce lo specchio in N e si riflette su se stesso;
- il raggio *a*, che colpisce lo specchio in P e viene riflesso dallo specchio formando il raggio *a'*;
- il raggio *b*, che colpisce lo specchio in Q e viene riflesso dallo specchio formando il raggio *b'*, e così via.

Tutti questi raggi riflessi non si incontrano davanti allo specchio, ma i loro prolungamenti si incontrano «dietro» allo specchio, nel punto A'. Quali caratteristiche presenta questo punto A'?

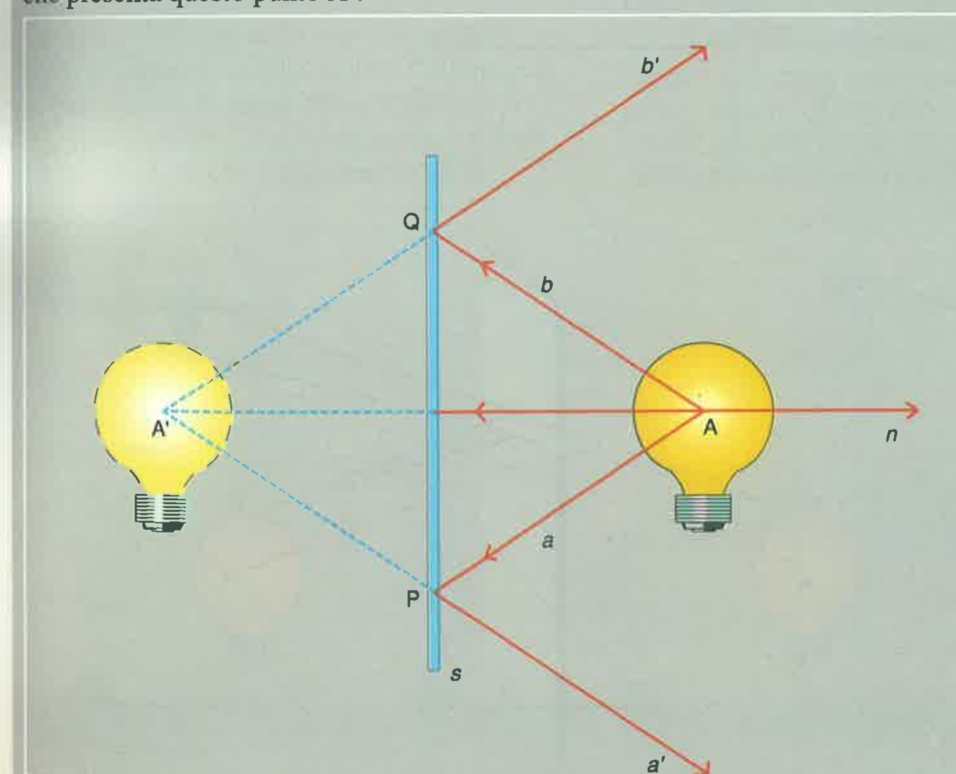


Figura 2
Una costruzione per spiegare come funziona lo specchio

Per rispondere conviene fissare l'attenzione sulla fig. 3, dove, oltre alla normale n, si trova anche la normale n', tracciata dal punto P: si osservano i due triangoli rettangoli NAP e NA'P, che hanno un cateto e un angolo acuto ordinatamente uguali. I due triangoli sono uguali per il secondo criterio di uguaglianza dei triangoli e perciò risulta sempre che:

- AA' è perpendicolare allo specchio;
- NA=NA'.

Questo vuol dire che A' è il simmetrico di A rispetto al piano dello specchio.

In conclusione, *i raggi emessi da una lampadina A vengono riflessi dallo specchio in modo che i loro prolungamenti convergono nel punto A', simmetrico di A rispetto al piano dello specchio.*

Questi raggi riflessi sono percepiti dall'occhio, che vede la luce come se provenisse da A'.

Per un oggetto qualunque, che emette luce da tanti suoi punti, l'effetto è lo stesso, ripetuto per ogni singolo punto (fig. 4); è per questo che, davanti ad uno specchio, vediamo gli oggetti come se fossero «dietro» o «dentro» lo specchio.

Figura 3
Caratteristiche del punto A'

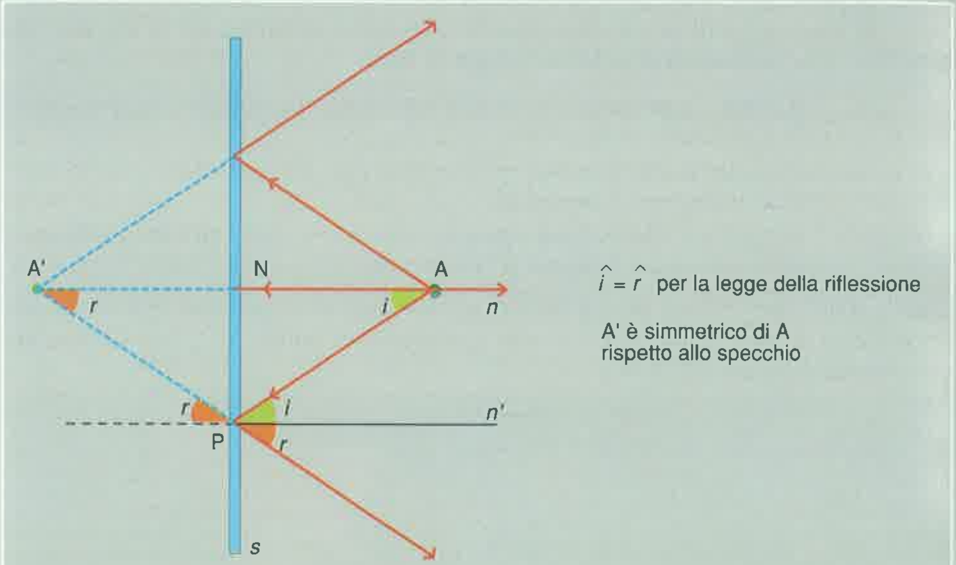
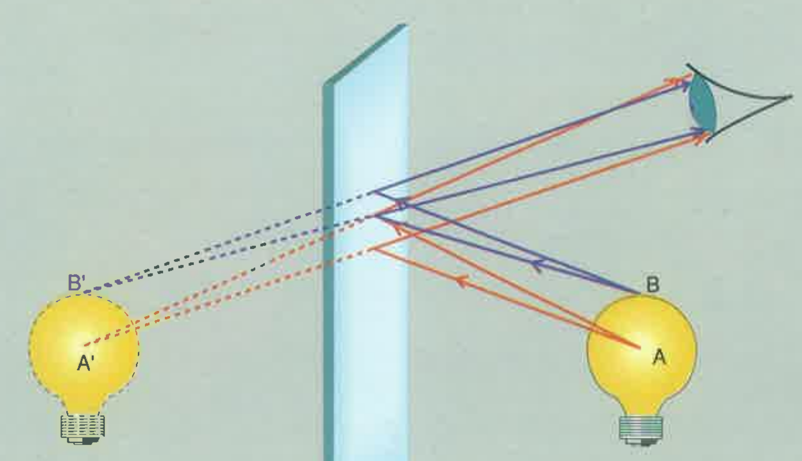


Figura 4
Perché sembra di vedere un oggetto «dietro» lo specchio



5 Come riconoscere angoli uguali

I criteri di uguaglianza dei triangoli conducono anche a riflettere su alcune costruzioni geometriche che spesso ricorrono nelle applicazioni; in questo paragrafo si trovano, in particolare, alcuni semplici procedimenti per riconoscere angoli uguali.

Angoli adiacenti di angoli uguali sono uguali

In fig. 1 sono disegnati due triangoli uguali ABC e A'B'C'; in particolare i due triangoli hanno gli angoli interni uguali.

Che cosa si può dire degli angoli esterni?

Per rispondere, conviene fissare l'attenzione, per esempio, sugli angoli esterni $D\hat{A}C$ e $D'\hat{A}'C'$; così si osserva che $D\hat{A}C$ è adiacente a $C\hat{A}B$ e, analogamente, $D'\hat{A}'C'$ è adiacente a $C'\hat{A}'B'$.

Ora, basta ricordare che, in un triangolo, un angolo esterno è sempre uguale alla somma dei due angoli interni non adiacenti (vedi p. 122), per arrivare a due conclusioni strettamente legate fra loro:

I. *Due triangoli uguali hanno gli angoli esterni ordinatamente uguali.*

II. *Angoli adiacenti di angoli uguali sono uguali.*

Angoli opposti al vertice sono uguali

Gli angoli $a\hat{O}b$ e $c\hat{O}d$, disegnati in fig. 2, sono opposti al vertice; essi risultano adiacenti allo stesso angolo $a\hat{O}c$ e perciò sono certamente uguali. Si ritrova così una nota proprietà: *due angoli opposti al vertice sono uguali.*

Figura 1
Angoli esterni di triangoli uguali

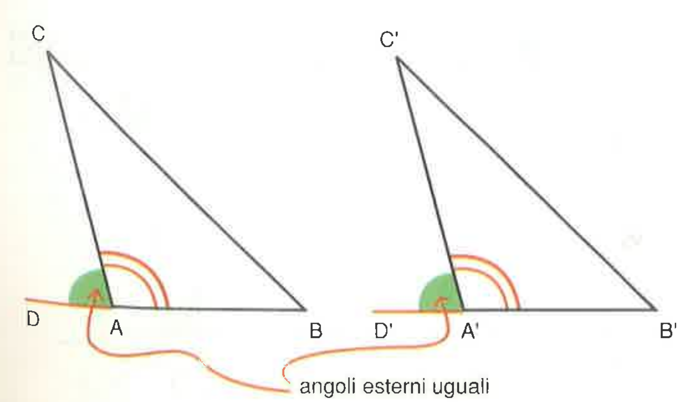
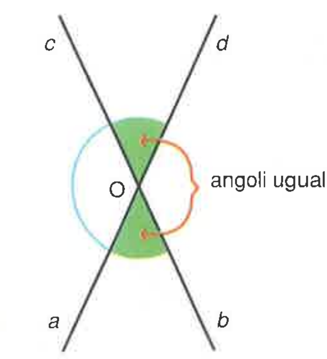


Figura 2
Angoli opposti al vertice



Angoli formati da due rette tagliate da una trasversale

Nel triangolo ABC di fig. 3 le lettere α, β, γ indicano le ampiezze degli angoli interni del triangolo, β' e γ' le ampiezze degli angoli esterni di vertice B e C.
In fig. 4 sono stati prolungati i lati del triangolo ABC, fino ad ottenere una classica costruzione geometrica: due rette *a* e *b*, tagliate da una terza retta *c*, chiamata *trasversale*. Si ottengono così otto angoli, a cui si assegnano di solito i seguenti nomi (fig. 4):

- angoli *alterni interni*;
- angoli *alterni esterni*;
- angoli *corrispondenti*.

Angoli formati da due rette parallele tagliate da una trasversale

La fig. 5 conduce a fissare l'attenzione su una coppia di angoli alterni interni: gli angoli ampi γ' e β. Si tratta di un angolo esterno e dell'angolo interno non adiacente nel triangolo ABC; perciò risulta:

$$\gamma'=\beta+\alpha \quad \text{e perciò} \quad \gamma'>\beta$$

Si immagina ora di far scivolare verso sinistra il vertice A e di osservare la fig. 6 in movimento; si trova che:

- l'angolo α diventa sempre più piccolo;
- perciò l'angolo β ha un'ampiezza sempre più vicina a γ'.

Al limite, quando le due rette *a* e *b* sono diventate parallele (fig. 7), si trova:

$$\gamma'=\beta$$

Nella fig. 8 la retta *a*, che in fig. 7 era parallela alla retta *b*, si è inclinata in modo da incontrare di nuovo la retta *b*, ma a destra della trasversale *c*; così ora risulta:

$$\gamma'+\alpha=\beta \quad \text{e perciò} \quad \gamma'<\beta$$

L'uguaglianza dei due angoli alterni interni caratterizza dunque due rette parallele; si può così concludere che *due rette parallele formano con una trasversale angoli alterni interni uguali.*

Figura 3
Angoli interni ed esterni di un triangolo

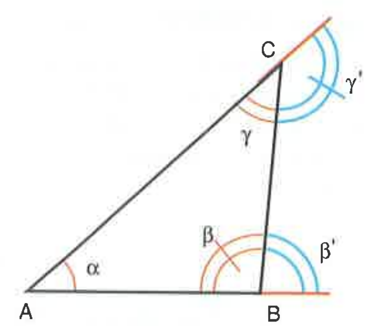


Figura 4
Due rette tagliate da una trasversale

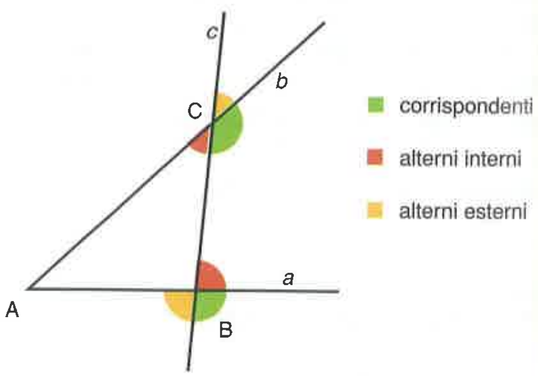


Figura 5
Due angoli disuguali

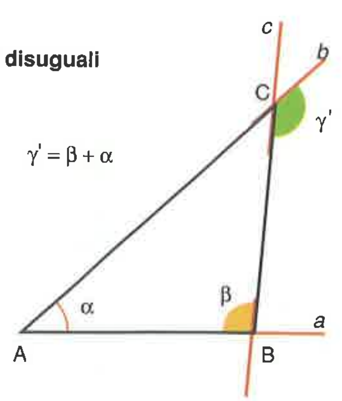
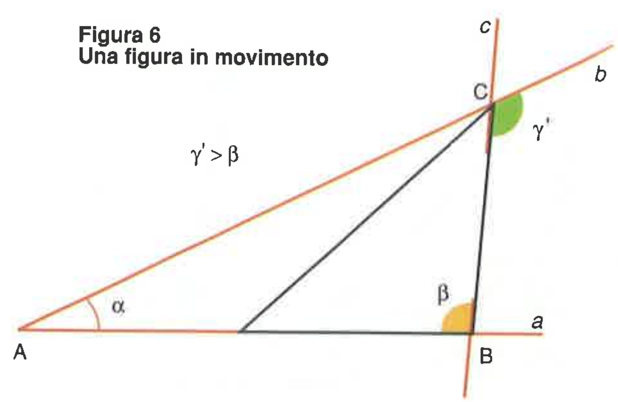


Figura 6
Una figura in movimento



Procedimenti per ottenere angoli uguali

In conclusione, si hanno i seguenti *procedimenti per ottenere due angoli uguali:*

I. *disegnare angoli adiacenti a due angoli uguali;*
II. *disegnare angoli opposti al vertice;*
III. *disegnare due rette parallele tagliate da una trasversale e considerare due angoli alterni interni.*

V e r i f i c h e

Conoscenze

① Elencare i procedimenti per ottenere angoli uguali.
② Disegnare due rette tagliate da una trasversale ed indicare gli angoli alterni interni, alterni esterni e corrispondenti; quali angoli risultano uguali?

Comprensione

① Spiegare perché angoli adiacenti di angoli uguali sono uguali.
② Spiegare perché l'uguaglianza degli angoli alterni interni caratterizza due rette parallele.

Applicazioni

① Applicare le proprietà presentate in questo paragrafo per completare la fig. 9, indicando le misure di tutti gli angoli.
② Applicare le proprietà presentate in questo paragrafo per completare le seguenti frasi.
Due rette parallele formano con una trasversale:
- angoli alterni interni ....;
- angoli alterni esterni ....;
- angoli corrispondenti ....
③ In fig. 10 è indicata una coppia di *angoli coniugati* α e β formati da due rette parallele tagliate da una trasversale. Valutare la somma di questi due angoli, ricordando che l'angolo piatto misura 180°.

Figura 7
Le rette *a* e *b* sono parallele

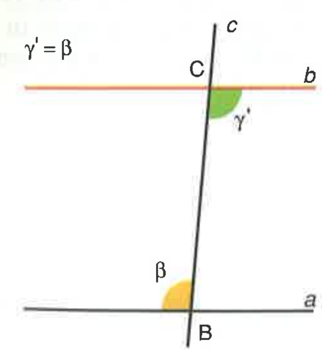


Figura 8
Le rette *a* e *b* si incontrano di nuovo

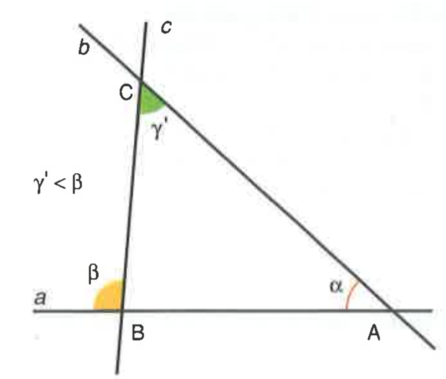


Figura 9
Indicare le misure di tutti gli angoli

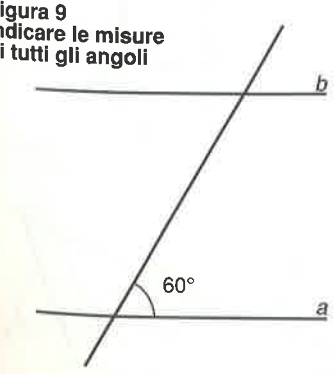
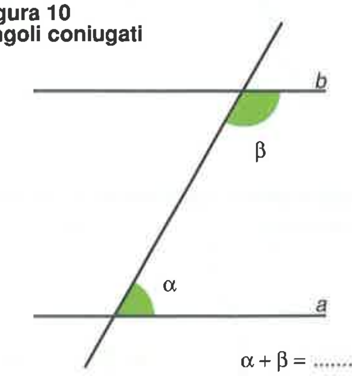


Figura 10
Angoli coniugati



6

Dai criteri di uguaglianza dei triangoli alle proprietà dei parallelogrammi

I criteri di uguaglianza dei triangoli vengono applicati in vari campi scientifici. La scheda di p. 190 presenta un'applicazione di questi criteri alla fisica, per studiare il comportamento della luce; in questo paragrafo e nel seguente si rimane invece nel campo della matematica. In particolare questo paragrafo è dedicato a scoprire le proprietà dei parallelogrammi, basandosi appunto sui criteri di uguaglianza dei triangoli.

Che cos'è un parallelogramma

Il termine *parallelogramma* proviene dal greco: si costruisce un parallelogramma a partire da due coppie di rette parallele (fig. 1). Perciò *si chiama parallelogramma un quadrilatero che ha i lati opposti paralleli.*
Fra i parallelogrammi si trovano, in particolare:

- i rettangoli, in cui una coppia di lati è perpendicolare all'altra;
- i quadrati, che sono rettangoli con i lati tutti uguali fra loro.

Dividere un parallelogramma in due triangoli uguali

Una prima proprietà dei parallelogrammi si trova tracciando una diagonale, come in fig. 2. In un qualunque parallelogramma ABCD una diagonale AC divide il quadrilatero in due triangoli ABC e ACD, che presentano sempre le stesse caratteristiche:

- il lato AC è in comune;
- gli angoli α ed α' sono alterni interni rispetto alle due parallele DC ed AB, tagliate dalla trasversale AC;
- gli angoli γ e γ' sono alterni interni rispetto alle due parallele AD e BC, tagliate dalla trasversale AC.

Basta allora ricordare che gli angoli alterni interni sono uguali per concludere che risulta:

$$\alpha=\alpha' \qquad \gamma=\gamma'$$

Perciò i triangoli ABC e ACD hanno due angoli ed il lato comune ordinatamente uguali; il secondo criterio di uguaglianza garantisce che questi due triangoli sono sempre uguali in qualunque parallelogramma.
Si conclude dunque che *una diagonale divide un parallelogramma in due triangoli uguali.*

Prime proprietà di un parallelogramma

Dividere un parallelogramma in due triangoli uguali porta a scoprire varie proprietà, fra le quali si segnalano le due seguenti (fig. 3)

I.	DC=AB	cioè DC è uguale al lato opposto AB
	AD=BC	cioè AD è uguale al lato opposto BC

In sintesi, si trova che *in un parallelogramma i lati opposti sono uguali.*

II.	$\delta=\delta'$	cioè $A\hat{D}C$ è uguale all'angolo opposto $A\hat{B}C$
	$\alpha'+\gamma=\alpha+\gamma'$	cioè $D\hat{A}B$ è uguale all'angolo opposto $D\hat{C}B$

In sintesi, si trova che *in un parallelogramma gli angoli opposti sono uguali.*

Una proprietà del punto di incontro delle due diagonali

Un'altra proprietà dei parallelogrammi si scopre tracciando le due diagonali, che si incontrano in un punto O (fig. 4); si ottengono quattro triangoli, che hanno un vertice in O e sono uguali a coppie.
È sempre il secondo principio di uguaglianza dei triangoli che garantisce questo risultato; infatti, esaminando i triangoli AOB e DOC si trova:

- DC=AB perché lati opposti del parallelogramma;
- gli angoli α e α' uguali perché alterni interni rispetto alle due parallele DC ed AB, tagliate dalla trasversale AC;
- gli angoli β e β' uguali perché alterni interni rispetto alle due parallele DC ed AB, tagliate dalla trasversale DB.

I triangoli AOB e DOC hanno dunque due angoli ed il lato comune ordinatamente uguali e perciò sono sempre uguali in qualunque parallelogramma.

In modo analogo, il secondo criterio di uguaglianza dei triangoli garantisce che sono uguali fra loro anche i triangoli AOD e BOC.
Un'immediata conseguenza di questi risultati è che si ha:

$$DO=OB \quad e \quad AO=OC$$

cioè *le diagonali di un parallelogramma si tagliano a metà.*

Figura 1
Il parallelogramma è un quadrilatero con i lati paralleli due a due

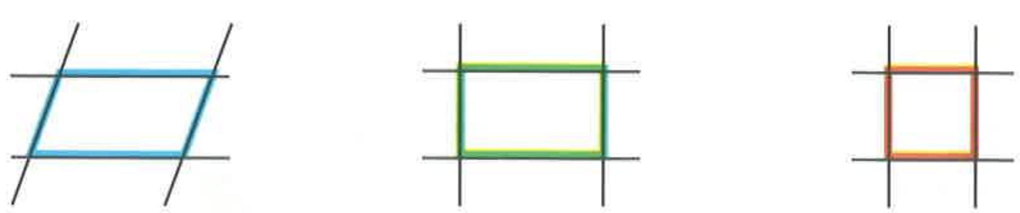


Figura 2
Una diagonale divide il parallelogramma in due triangoli uguali

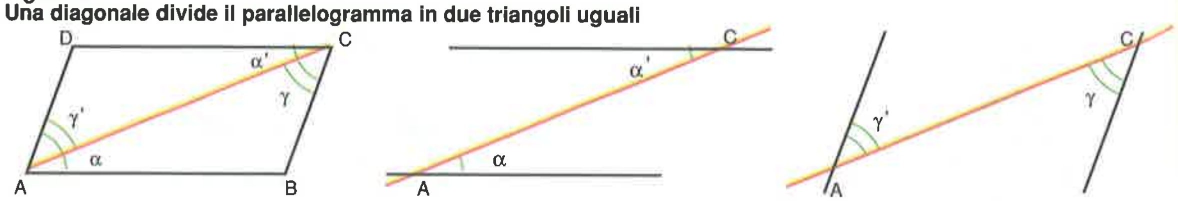


Figura 3
Una proprietà del parallelogramma

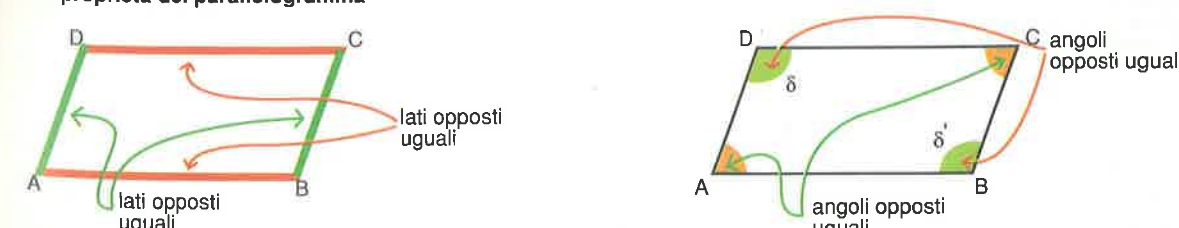
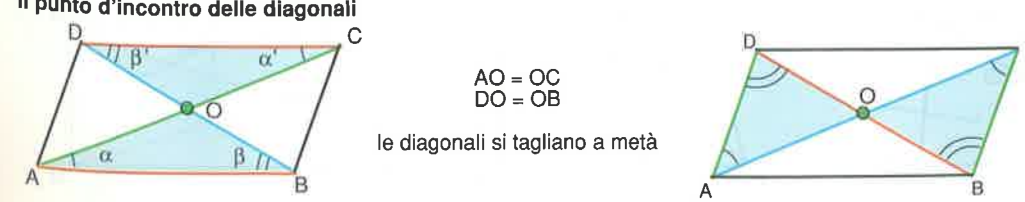


Figura 4
Il punto d'incontro delle diagonali



Il punto d'incontro delle diagonali è il centro di simmetria del parallelogramma

Il punto di incontro delle due diagonali è caratterizzato da un'altra proprietà, che si può scoprire nel modo seguente (fig. 5): si immagina di «sganciare» la diagonale DB dai vertici e di ruotarla intorno ad O, appoggiandola sempre a due lati del parallelogramma.
Si ottiene un segmento PP', che non è più una diagonale, ma forma due triangoli POC e AOP' con due angoli ed il lato comune ordinatamente uguali, dato che risulta sempre:

- AO=OC perché O divide la diagonale a metà;
- gli angoli α ed α' uguali perché alterni interni rispetto alle due parallele DC ed AB, tagliate dalla trasversale AC;
- gli angoli PÔC e P'ÔA uguali perché opposti al vertice.

Ancora una volta il secondo criterio di uguaglianza dei triangoli garantisce che i triangoli POC e AOP' sono sempre uguali.
Dall'uguaglianza dei due triangoli POC e AOP' segue che risulta sempre:

OP=OP'

Questo vuol dire che, *nel parallelogramma, ad ogni punto P corrisponde un punto P', caratterizzato dalle seguenti proprietà:*

- *P e P' sono allineati con O;*
- *risulta OP=OP'.*

Questo vuol dire (cfr. anche pp. 136-139) che *il punto O è il centro di simmetria del parallelogramma.*
Si ha dunque che *il parallelogramma ha come centro di simmetria il punto d'incontro delle diagonali.*

Fra tutte le proprietà scoperte finora quest'ultima è forse la meno immediata: il parallelogramma, pur essendo una figura molto diversa dal cerchio, è, come il cerchio, una figura con un centro di simmetria.

Verifiche

Conoscenze

① Elencare le proprietà dei parallelogrammi presentate in questo paragrafo.
② Qual è il centro di simmetria di un parallelogramma?

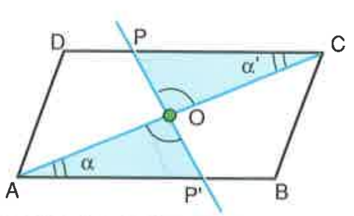
Comprensione

① Spiegare come si verifica che in un parallelogramma i lati opposti sono uguali.
② Spiegare come si verifica che in un parallelogramma gli angoli opposti sono uguali.
③ Spiegare come si verifica che in un parallelogramma le diagonali si tagliano a metà.
④ Spiegare che cosa vuol dire che un parallelogramma ha un centro di simmetria.

Applicazioni

① In un rettangolo e in un quadrato le diagonali si tagliano a metà?
② Nei quadrilateri di fig. 6 le diagonali si tagliano a metà?
③ Verificare che un rettangolo ha le diagonali uguali, indicando il procedimento seguito ed il criterio di uguaglianza dei triangoli applicato.

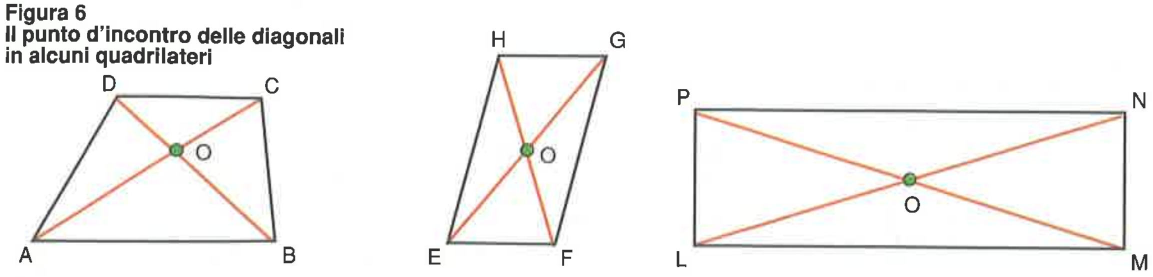
Figura 5
Il parallelogramma ha un centro di simmetria



Ad ogni P del parallelogramma corrisponde un P' tale che:

- P e P' sono allineati con O;
- PO = OP'.

Figura 6
Il punto d'incontro delle diagonali in alcuni quadrilateri



7

Dai criteri di uguaglianza dei triangoli alle proprietà delle tangenti ad una circonferenza

Tangenti ad una circonferenza condotte da un punto

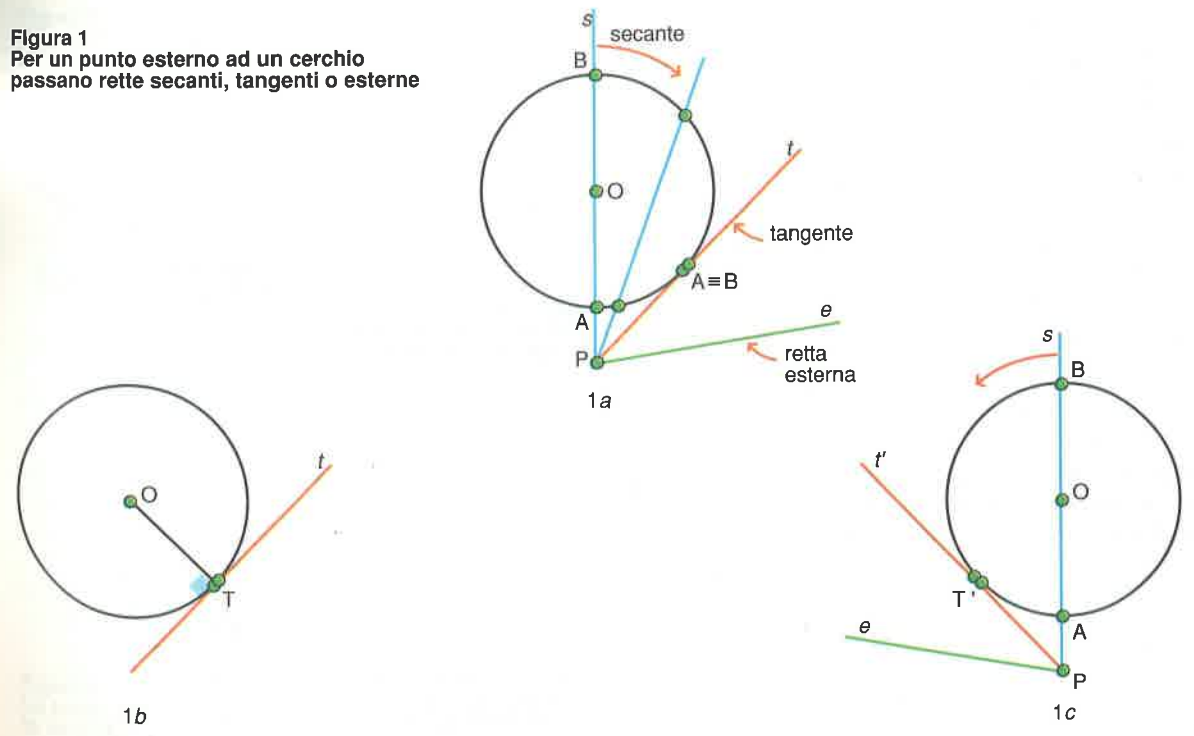
In fig. 1*a* è disegnato un cerchio di centro O, un punto P esterno al cerchio e la retta *s* che congiunge P con O. La retta, che è una *secante*, incontra la circonferenza in due punti distinti A e B (cfr. anche cap. 4, par. 6, pp. 140-143).
Si immagina ora di ruotare la retta *s* intorno a P in senso orario; i due punti di intersezione – A e B – si avvicinano sempre di più, fino a che la retta diventa *tangente* alla circonferenza.

Se poi la retta continua a ruotare non incontra più la circonferenza, cioè diventa *esterna.*
La tangente *t* è caratterizzata da due proprietà (fig. 1*b*):

- incontra la circonferenza in due punti coincidenti nel punto di contatto T;
- è perpendicolare al raggio nel punto T.

A partire dalla fig. 1*a*, si può ovviamente eseguire la rotazione in verso antiorario; si trova così un'altra tangente *t'*, che tocca la circonferenza in un punto T', e tante altre rette esterne (fig. 1*c*).

Figura 1
Per un punto esterno ad un cerchio passano rette secanti, tangenti o esterne



Si trova dunque che (fig. 2) *da un punto esterno si possono condurre due tangenti ad una circonferenza.*

Immaginiamo ora di avvicinare il punto P ad O (fig. 3): l'angolo T$\hat{P}$T' diventa sempre più grande, fino a che P si viene a trovare sulla circonferenza, l'angolo diventa piatto e le due tangenti coincidono in un'unica tangente.
Si trova dunque che *si può condurre una sola tangente ad una circonferenza in un suo punto.*

Se poi il punto P continua ad avvicinarsi a O, diventa un punto interno e tutte le rette che passano per P sono secanti (fig. 4). Si ha dunque che *da un punto interno non si possono condurre tangenti ad una circonferenza.*

Proprietà delle tangenti ad una circonferenza

Nella fig. 2 immaginiamo ora di allontanare P da O (fig. 5*a*): i segmenti di tangenti PT e PT' variano al variare della posizione di P. La figura mantiene però sempre due caratteristiche (fig. 5*b*):

- l'angolo P$\hat{T}$O è retto perché formato dalla tangente *t* e dal raggio OT e, analogamente, è retto l'angolo P$\hat{T}$'O;
- i segmenti OT e OT' sono sempre uguali perché raggi della stessa circonferenza.

Si trovano così due triangoli PTO e PT'O che hanno:

- l'ipotenusa PO in comune;
- i cateti OT e OT' uguali.

I due triangoli sono dunque sempre uguali per il criterio di uguaglianza dei triangoli rettangoli (cfr. p. 188).
Questa uguaglianza fra i triangoli PTO e PT'O ha due conseguenze:

I. *sono sempre uguali i segmenti PT e PT'*, ossia *una circonferenza determina sulle tangenti condotte da un punto esterno due segmenti uguali.*

II. *sono sempre uguali gli angoli O$\hat{P}$T e O$\hat{P}$T*, cioè *OP divide l'angolo T$\hat{P}$T' in due parti uguali* e quindi *OP è la bisettrice dell'angolo T$\hat{P}$T'.*

Quest'ultima proprietà porta a concludere che *il centro del cerchio si trova sulla bisettrice dell'angolo formato da due tangenti.*

V e r i f i c h e

Conoscenze

① Quante tangenti ad una circonferenza si possono condurre da un punto esterno?

② Quali proprietà caratterizzano una tangente ad una circonferenza?

③ Disegnare una circonferenza di centro O, un punto P ad essa esterno e condurre per P le due tangenti *t* e *t'* alla circonferenza; esporre le proprietà che presenta la figura.

Comprensione

① Spiegare perché sono sempre uguali i segmenti di tangenti condotte ad una circonferenza da un punto esterno ad essa.

② Spiegare perché il centro di un cerchio si trova sempre sulla bisettrice dell'angolo formato da due tangenti.

Applicazioni

① In fig. 6 è schematizzato il procedimento per disegnare esattamente le tangenti ad una data circonferenza, a partire da un dato punto P. Ripetere il procedimento per disegnare le tangenti a partire da un altro punto.

② Disegnare due rette che si incontrano in un punto P; descrivere un procedimento per disegnare una circonferenza tangente alle due rette.

Collegamento con il capitolo precedente

① Disegnare un cerchio di centro O e le due tangenti *t* e *t'* condotte da un punto esterno P, indicando con T e T' i punti di contatto. Considerare il triangolo isoscele OTT' ed indicare con α l'ampiezza degli angoli alla base; calcolare l'ampiezza dell'angolo TPT'.
(*Vedere il capitolo 4, paragrafo 3*)

② Disegnare un cerchio di centro O e le due tangenti *t* e *t'* condotte da un punto esterno P, indicando con T e T' i punti di contatto; quali caratteristiche e quali assi di simmetria presenta il quadrilatero TOT'P?
(*Vedere il capitolo 4, paragrafo 5*)

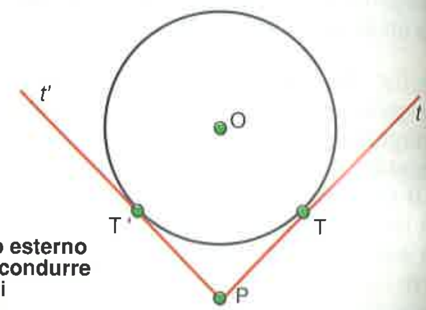


Figura 2
Da un punto esterno si possono condurre due tangenti

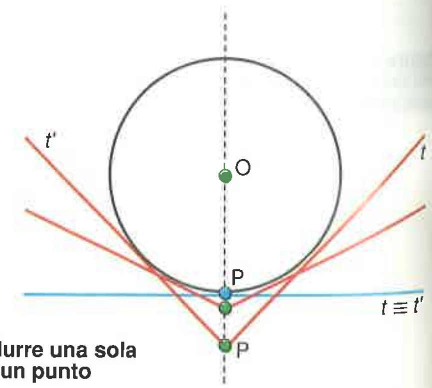


Figura 3
Si può condurre una sola tangente in un punto

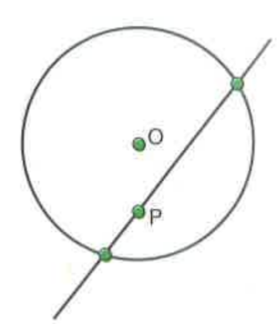


Figura 4
Da un punto interno non si possono condurre tangenti

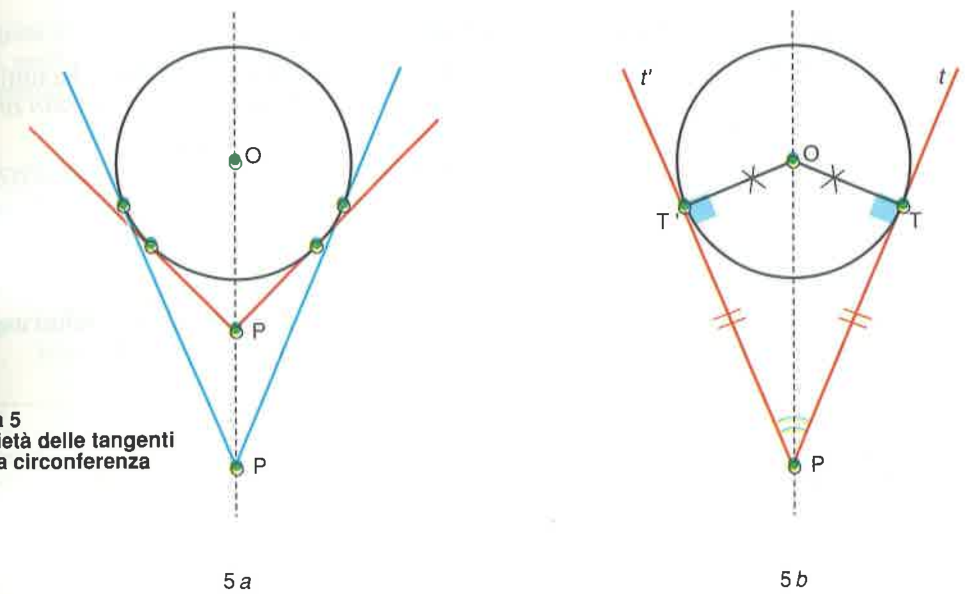


Figura 5
Proprietà delle tangenti ad una circonferenza

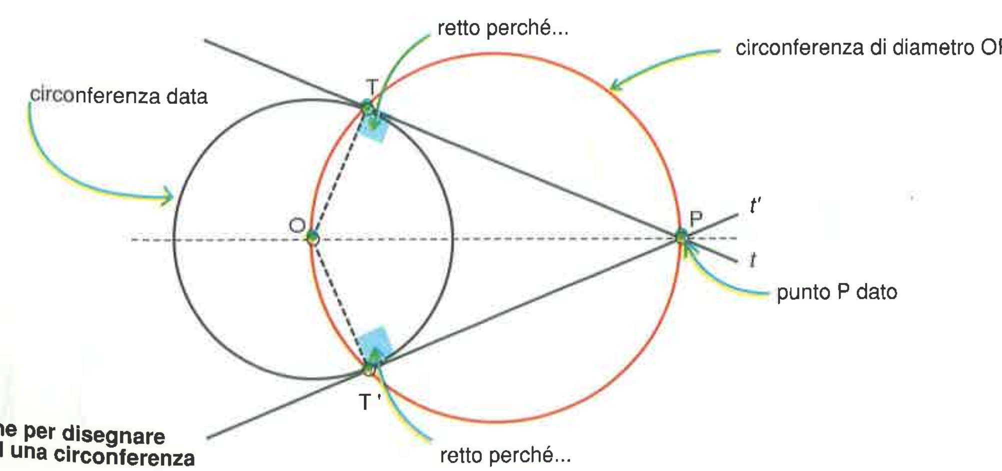


Figura 6
La costruzione per disegnare le tangenti ad una circonferenza

Poligoni circoscritti ad un cerchio

Che cosa vuol dire poligono circoscritto ad un cerchio

In fig. 1 è rappresentato un poligono con una caratteristica particolare: ha tutti i lati tangenti ad un cerchio. In questo caso si dice che *il poligono è circoscritto al cerchio* o anche che *il cerchio è inscritto nel poligono*. Si ha dunque che:

I. *Un poligono circoscritto ad un cerchio ha tutti i lati tangenti al cerchio.*
II. *Un cerchio inscritto in un poligono è tangente a tutti i lati del poligono.*

Attività 1
Esaminare la fig. 2 e indicare i poligoni che sono circoscritti ad un cerchio e quelli che non sono circoscritti ad un cerchio, motivando la scelta.

Figura 1
Poligono circoscritto ad un cerchio

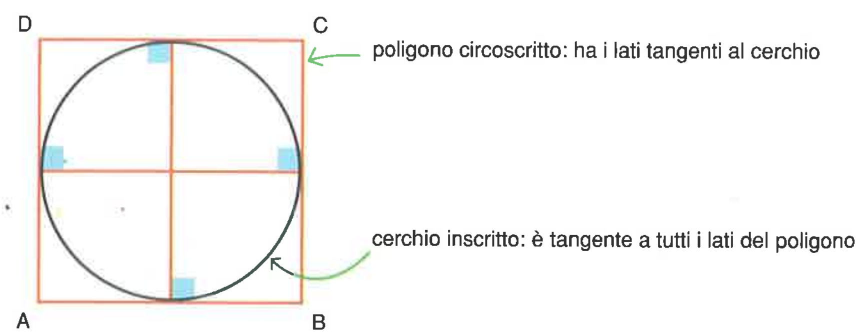
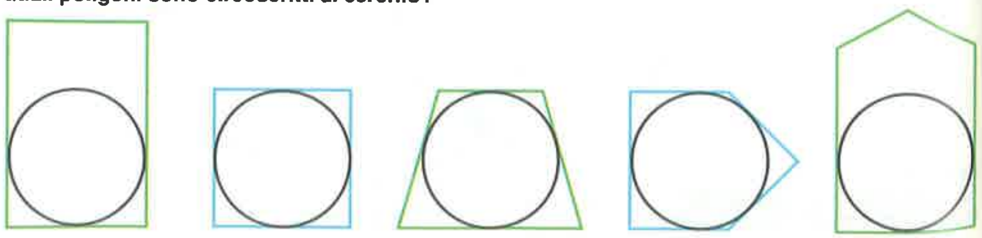


Figura 2
Quali poligoni sono circoscritti al cerchio?



Si può sempre inscrivere un cerchio in un triangolo

Nel capitolo 4 (p. 148) si è trovata una proprietà del triangolo: si può sempre trovare la circonferenza circoscritta ad un triangolo (fig. 3). Questa proprietà è evidente, dato che per tre punti non allineati passa sempre una circonferenza.

Non è invece altrettanto evidente che si possa inscrivere un cerchio in un triangolo. Si può allora disegnare un qualunque triangolo ABC e provare a costruire la circonferenza inscritta, ragionando nel modo seguente (fig. 4):

- la circonferenza deve essere tangente alle due rette AB e AC, perciò il suo centro O si deve trovare sulla bisettrice *b* dell'angolo $B\hat{A}C$;
- la circonferenza deve essere tangente anche alle due rette AB e BC, perciò il suo centro O si deve trovare sulla bisettrice *b'* dell'angolo $A\hat{B}C$;
- il centro O della circonferenza inscritta sarà dunque il punto di incontro delle due bisettrici *b* e *b'*;
- il raggio della circonferenza sarà la distanza di O da uno dei lati del triangolo.

Attività 2
Dal punto O di fig. 4 tracciare le tre perpendicolari OH, OK, OL ai tre lati del triangolo e verificare che risulta sempre:

OH=OK=OL

Risulta così verificato che si può scegliere come raggio della circonferenza inscritta la distanza di O da uno qualunque dei lati del triangolo.

Attività 3
Riprendere la fig. 4 e disegnare il segmento CO; verificare che CO è sempre la bisettrice dell'angolo $B\hat{C}A$.

Risulta così verificato che si può scegliere come centro della circonferenza

Figura 3
Si può sempre inscrivere un triangolo in un cerchio

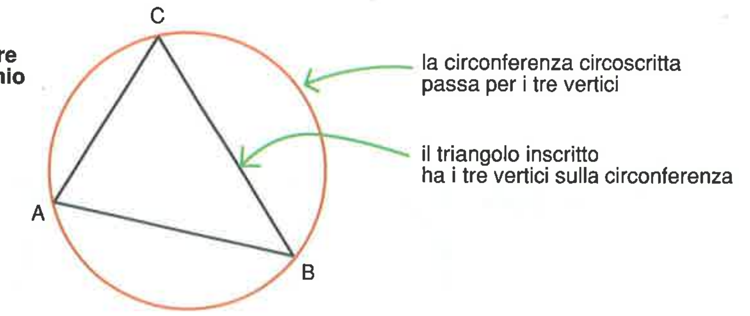
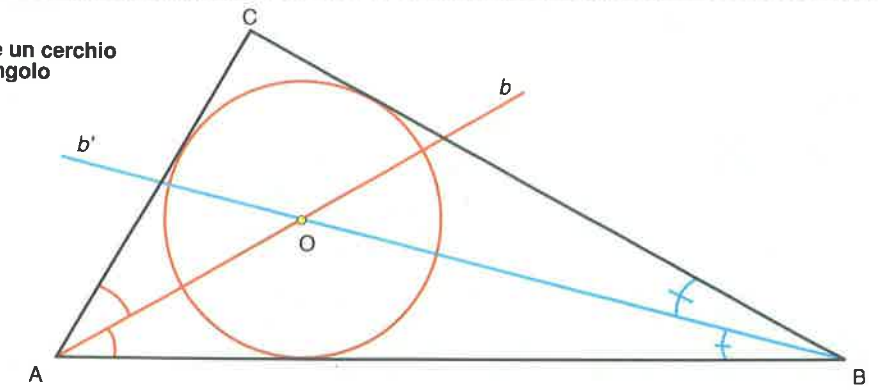


Figura 4
Inscrivere un cerchio in un triangolo



inscritta il punto O di incontro di due qualunque bisettrici visto che tutte e tre le bisettrici si incontrano nello stesso punto O.

In conclusione: *dato un triangolo ABC, si può sempre inscrivere nel triangolo un cerchio che ha:*

- *il punto di incontro di due bisettrici come centro O;*
- *la distanza di O da un qualunque lato come raggio.*

Attività 4

Disegnare un triangolo rettangolo isoscele e inscrivervi una circonferenza.

Non sempre si può inscrivere un cerchio in un quadrilatero

Passando dai triangoli ai quadrilateri, si trovano delle figure in cui è possibile inscrivere un cerchio (fig. 5), ma anche figure in cui non è possibile inscrivere un cerchio (fig. 6).

Quali caratteristiche presenta un quadrilatero circoscritto ad un cerchio?

Attività 5

In fig. 7 è disegnato un quadrilatero circoscritto ad una circonferenza; nella figura sono anche indicati i segmenti uguali fra loro. Calcolare la somma dei lati opposti del quadrilatero; che cosa si ottiene?

Si arriva alla seguente conclusione: *in un quadrilatero circoscritto ad un cerchio sono uguali le somme dei lati opposti.*

Figura 5
Quadrilateri circoscritti ad un cerchio

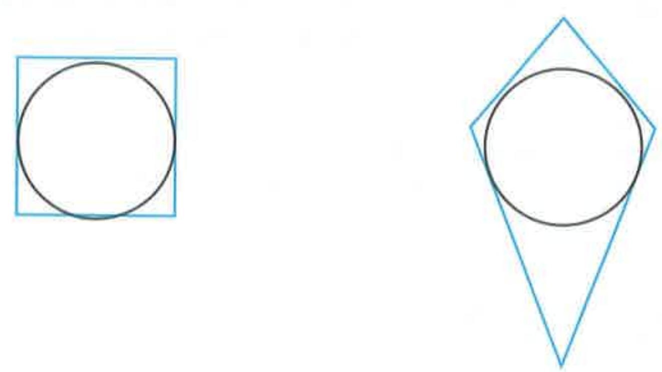
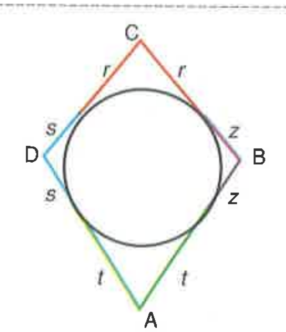


Figura 6
Quadrilateri in cui non si può inscrivere un cerchio

Figura 7
Proprietà di un quadrilatero circoscritto ad un cerchio



AD + CB = ...

DC + AB = ...

8 Poligoni equivalenti

Un modo per realizzare tanti poligoni equivalenti

Due poligoni uguali occupano ovviamente parti di piano di uguale area (fig. 1); si dice allora che i due poligoni uguali sono anche *equivalenti*.

Si possono però realizzare dei poligoni che sono equivalenti senza essere uguali; basta ritagliare un poligono da un cartoncino e procedere così (fig. 2): si suddivide il poligono in parti e si accostano le parti in vari modi.

Si ottengono così dei poligoni costruiti con la stessa quantità di cartoncino, disposta però secondo forme diverse: non sono uguali a quello dato, ma hanno uguale area, cioè sono *equivalenti*.

Un criterio per riconoscere poligoni equivalenti

Ottenere dei poligoni equivalenti ritagliando un cartoncino può anche suggerire un criterio per riconoscere dei poligoni equivalenti senza più ricorrere al cartoncino e alle forbici.

Figura 1
Poligoni uguali sono equivalenti

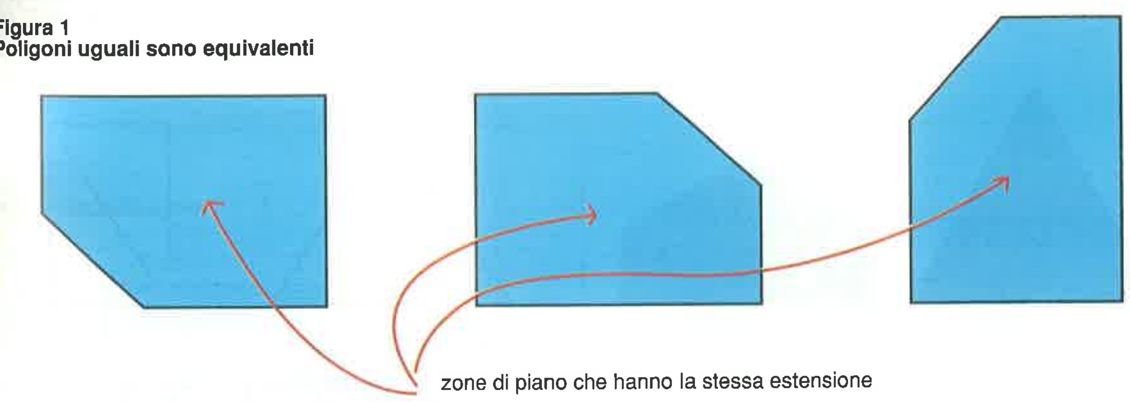
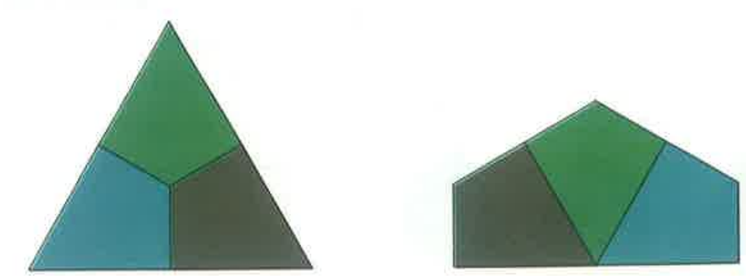


Figura 2
Poligoni che sono equivalenti senza essere uguali



Per questo conviene riprendere i due poligoni equivalenti realizzati prima ed osservare che essi sono somma di poligoni uguali, cioè sono ottenuti disponendo gli stessi poligoni secondo forme diverse.
D'altra parte, togliendo da questi due poligoni delle parti uguali, rimangono due poligoni ancora equivalenti.

Le precedenti osservazioni suggeriscono il seguente criterio per stabilire se due poligoni sono equivalenti (fig. 3):

- *due poligoni sono equivalenti se sono somma o differenza di poligoni uguali.*

I poligoni che sono somma o differenza di poligoni uguali vengono chiamati *equiscomponibili* (cioè che si possono scomporre in parti uguali); così si dice che *due poligoni sono equivalenti se sono equiscomponibili.*

Questo criterio per riconoscere due poligoni equivalenti è alla base di un procedimento per calcolare l'area di molti poligoni. Di questo procedimento si occupa il paragrafo seguente.

Altri procedimenti per calcolare l'area di figure piane sono invece esposti nella scheda informativa di p. 220.

Verifiche

Conoscenze

① Come si possono ottenere due poligoni equivalenti?

② Qual è il criterio per riconoscere due poligoni equivalenti?

Comprensione

① Che cosa vuol dire che due poligoni sono equiscomponibili?

② Due poligoni uguali sono anche equiscomponibili?

③ Due poligoni possono essere equiscomponibili senza essere uguali? Portare qualche esempio.

④ Due poligoni possono essere equiscomponibili senza essere equivalenti?

Applicazioni

① Fra i poligoni di fig. 4 indicare quelli che sono equivalenti e quelli che non lo sono, spiegando il procedimento seguito.

② Disegnare almeno tre poligoni equiscomponibili.

Figura 3
Poligoni che sono somma o differenza di poligoni uguali

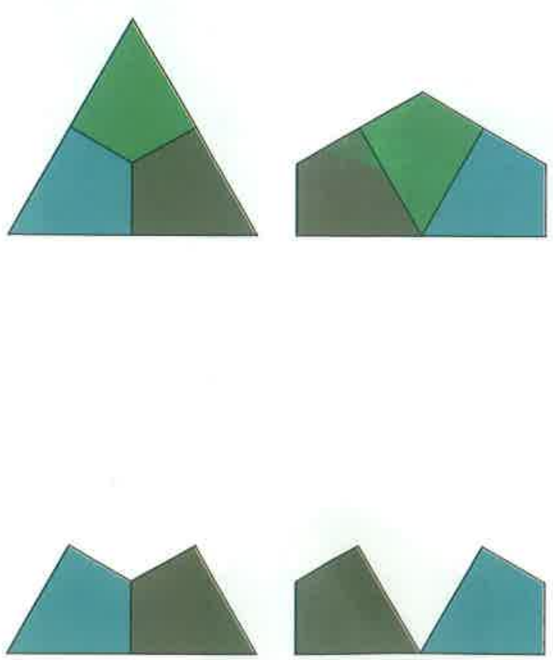
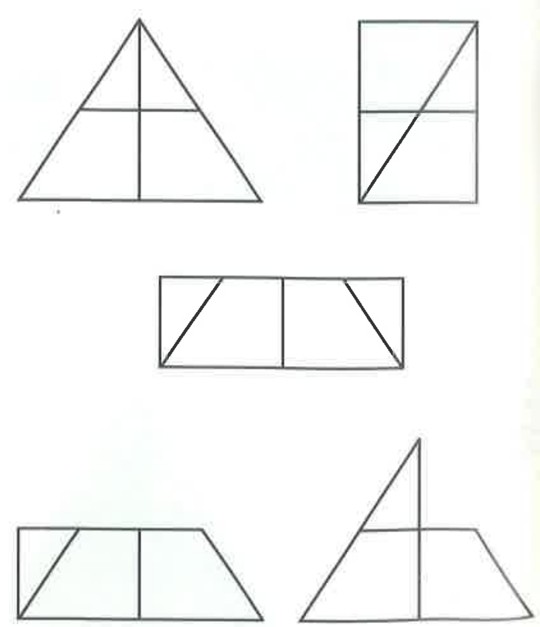


Figura 4
Quali poligoni sono equivalenti?



9 Dall'area del rettangolo all'area del parallelogramma, del triangolo e del trapezio

L'area di un rettangolo

Il procedimento per calcolare l'area di un rettangolo è ben noto. Alla scuola elementare e alla scuola media, per calcolare l'area di un rettangolo ABCD, per esempio con AB lungo 3 cm e AD lungo 2 cm (fig. 1*a*), si procede così:

- si divide il lato AB in tre parti uguali, ciascuna lunga 1 cm, e dai punti di divisione si tracciano le parallele all'altro lato;
- si divide anche il lato AD in due parti uguali, ciascuna lunga 1 cm, e dai punti di divisione si tracciano le parallele all'altro lato.

In questo modo il rettangolo viene riempito con 2 strati formati da 3 quadratini, cioè con 6 quadratini, che hanno il lato lungo 1 cm e l'area di 1 cm^2.

Si dice allora che l'area S del rettangolo, misurata in cm^2, vale:

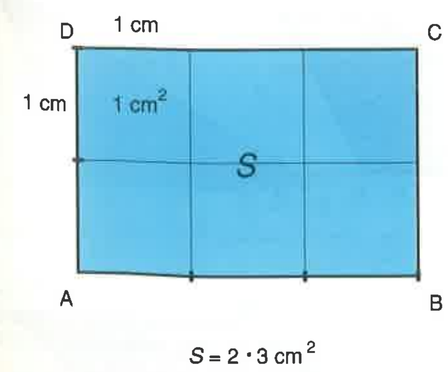
$$S=3\cdot 2=6$$

Lo stesso procedimento si può ripetere quando sono date le misure b e c dei due lati del rettangolo (fig. 1*b*): si troveranno nel rettangolo c strati formati da b quadratini, cioè in tutto $b\cdot c$ quadratini di lato unitario.
In conclusione si trova che:

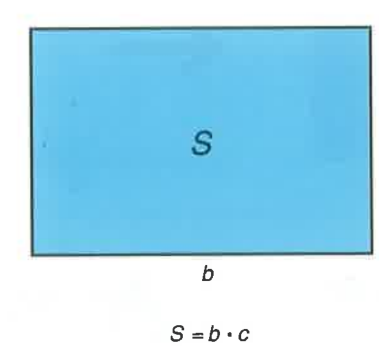
- *l'area* S *di un rettangolo indica il numero di quadrati di lato unitario contenuti nel rettangolo;*
- *un rettangolo con i lati lunghi* b *e* c *ha l'area* S *data da:*

$$\boldsymbol{S=b\cdot c}$$

Figura 1
L'area di un rettangolo



1*a*



1*b*

Il metodo per determinare l'area degli altri poligoni

Per determinare l'area degli altri poligoni non si può seguire lo stesso procedimento: per esempio, non si riesce a ricoprire completamente con quadratini unitari il poligono di fig. 2.
Questa difficoltà può essere superata con vari metodi, fra i quali si segnala il seguente:
- *invece di calcolare l'area del poligono, si calcola l'area di un rettangolo equivalente.*

In questo modo si segue per tutti i poligoni lo stesso procedimento, basato sull'equiscomponibilità.
Ecco qualche applicazione di questo procedimento.

L'area del parallelogramma

In fig. 3 è disegnato un parallelogramma ABCD; dai vertici D e C sono tracciate le perpendicolari ad AB, ottenendo il rettangolo DHKC.

Così si osserva subito che:
- il rettangolo è somma del trapezio DHBC e del triangolo BCK;
- il parallelogramma è somma dello stesso trapezio e del triangolo DAH;
- i triangoli rettangoli BCK e DAH sono uguali per avere ordinatamente uguali un cateto e l'ipotenusa.

Il parallelogramma assegnato è dunque equivalente al rettangolo DHKC che ha:
- il lato HK uguale al lato AB del parallelogramma;
- l'altro lato DH, che è l'altezza del parallelogramma relativa al lato AB.

Con questo procedimento, invece di calcolare l'area del parallelogramma, si può calcolare l'area di un rettangolo: basta scegliere come lati del rettangolo un lato del parallelogramma e l'altezza relativa a quel lato.
Si arriva dunque alle seguenti conclusioni (figure 3 e 4):

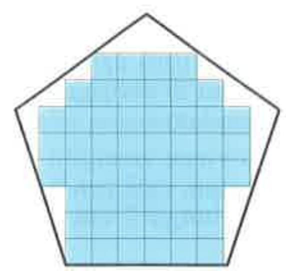


Figura 2
Un poligono che non si ricopre con quadratini unitari

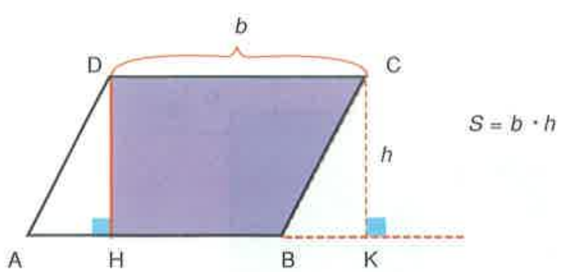


Figura 3
L'area di un parallelogramma

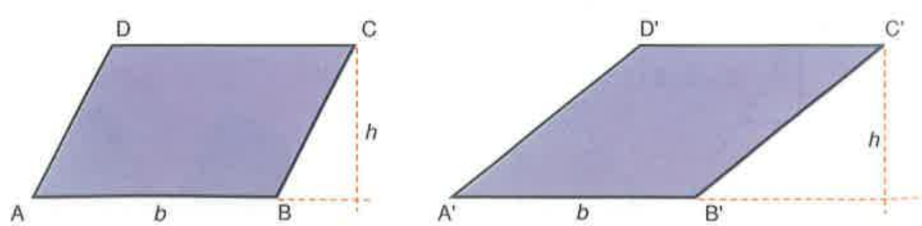


Figura 4
Parallelogrammi equivalenti

I. *l'area* S *di un parallelogramma che ha un lato lungo* b *e l'altezza relativa a quel lato lunga* h *è:*

$$S = b \cdot h$$

II. *due parallelogrammi che hanno uguali un lato e l'altezza relativa a quel lato hanno la stessa area, perciò sono equivalenti.*

L'area del triangolo

In fig. 5 si è disegnato un qualunque triangolo ABC; dal punto medio M del lato AB si è condotta la parallela al lato CA, che incontra CB in O, e dal vertice C si è tracciata la parallela al lato AB.
Si ottiene così il parallelogramma AMPC, che ha:
- un lato coincidente col lato AC del triangolo;
- l'altro lato AM che è metà del lato AB del triangolo dato.

Ora si osserva che:
- il triangolo è somma del quadrilatero AMOC e del triangolo OMB;
- il parallelogramma è somma dello stesso quadrilatero e del triangolo OCP.
- i triangoli OMB e OCP sono uguali per avere ordinatamente uguali due angoli ed il lato comune.

Il parallelogramma AMPC è dunque equivalente al triangolo ABC; perciò, invece di calcolare l'area del triangolo, si può calcolare l'area di un parallelogramma: basta scegliere per lati del parallelogramma un lato del triangolo e metà di un altro lato.
Riconducendo poi il parallelogramma ad un rettangolo, si arriva alle seguenti conclusioni:

I. *l'area* S *di un triangolo che ha un lato lungo* b *e l'altezza relativa a quel lato lunga* h *è* (fig. 6):

$$S = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h$$

II. *due triangoli che hanno uguali un lato e l'altezza relativa a quel lato hanno la stessa area, perciò sono equivalenti* (fig. 7).

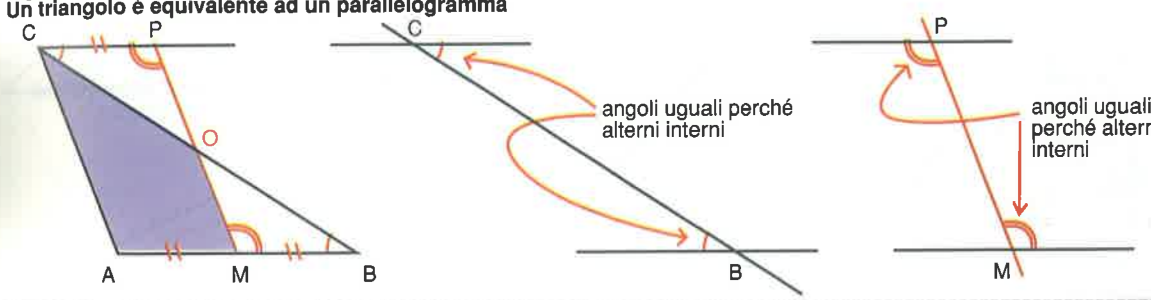


Figura 5
Un triangolo è equivalente ad un parallelogramma

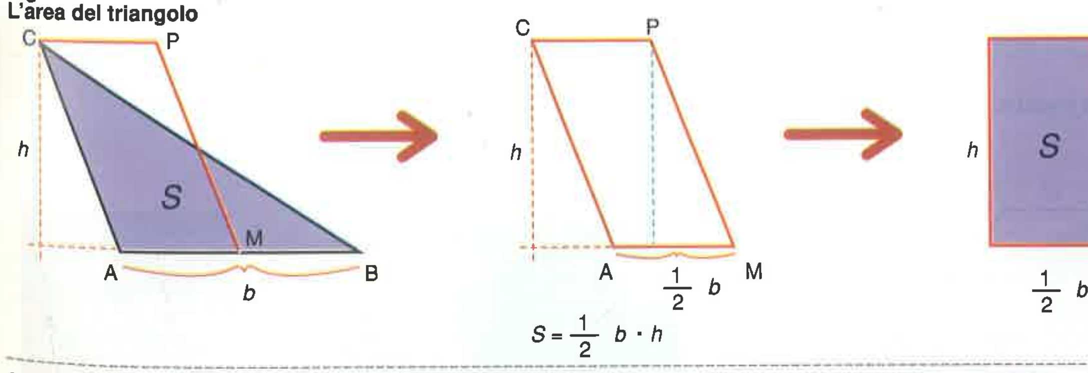


Figura 6
L'area del triangolo

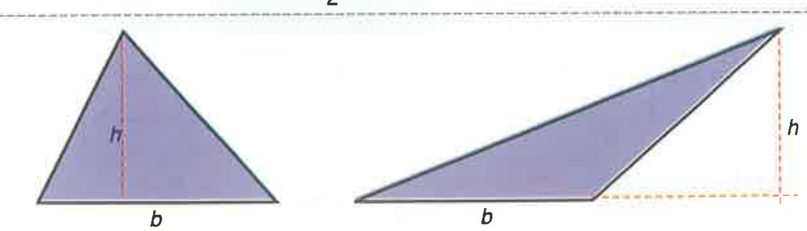


Figura 7
Triangoli equivalenti

L'area del trapezio

In fig. 8 si è disegnato un trapezio ABCD, che ha la base maggiore AB e la base minore CD. Sul prolungamento di AB si è riportato un segmento BM uguale a DC, si è quindi unito M con D, intersecando CB in O.
Si è così ottenuto il triangolo ADM, che ha:

- il lato AM, che è la somma delle basi del trapezio;
- l'altezza relativa ad AM che è uguale all'altezza del trapezio.

Ora si osserva che:

- il trapezio è somma del quadrilatero ADOB e del triangolo DOC;
- il triangolo è somma dello stesso quadrilatero e del triangolo OBM;
- i triangoli DOC e OBM sono uguali per avere ordinatamente uguali due angoli ed il lato comune.

Il triangolo ADM è dunque equivalente al trapezio dato e perciò, invece di calcolare l'area del trapezio ABCD, si può calcolare l'area del triangolo equivalente ADM.
Risalendo poi dal triangolo al parallelogramma equivalente e infine al rettangolo equivalente (fig. 9), si conclude che:

- *l'area* S *di un trapezio con le basi lunghe* b, b' *e l'altezza lunga* h *è data da:*

$$S = \frac{1}{2} \cdot (b+b') \cdot h$$

Verifiche

Conoscenze

① Come si calcola l'area di un rettangolo?
② Come si calcola l'area di un parallelogramma?
③ Come si calcola l'area di un triangolo?
④ Come si calcola l'area di un trapezio?

Comprensione

① Scrivere la formula data nel testo a proposito dell'area del parallelogramma e spiegare il significato delle lettere.
Basarsi anche sulla fig. 10 per spiegare perché l'area di un parallelogramma può essere calcolata in due modi diversi.

② Scrivere la formula data nel testo a proposito dell'area del triangolo e spiegare il significato delle lettere.
Basarsi anche sulla fig. 11 per spiegare perché l'area di un triangolo può essere calcolata in tre modi diversi.

③ L'area di un trapezio può essere calcolata in più modi diversi?

④ In fig. 12 è disegnato un parallelogramma ABCD; dai vertici D e A sono state tracciate le perpendicolari alla retta BC, ottenendo il rettangolo ADFE.
Basarsi sulla figura per spiegare perché il parallelogramma ed il rettangolo sono equivalenti.

Applicazioni

① Calcolare l'area dei poligoni disegnati in fig. 13; calcolare le lunghezze delle altezze (indicate con la lettera *h*).

② Calcolare l'area del parallelogramma di fig. 10 in due modi diversi; disegnare almeno tre parallelogrammi equivalenti a quello dato.

③ Calcolare l'area del triangolo di fig. 11 in tre modi diversi; disegnare almeno due triangoli equivalenti a quello dato.

Figura 8
Il trapezio è equivalente ad un triangolo

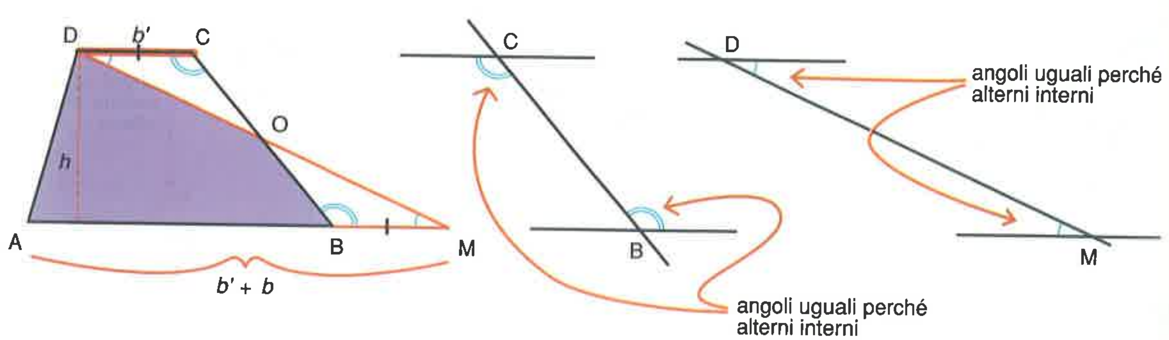
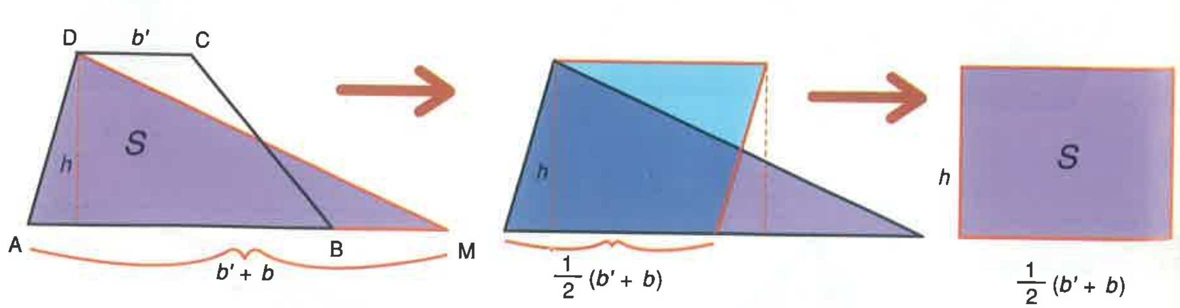


Figura 9
L'area del trapezio



$S = \frac{1}{2}(b' + b) \cdot h$

Figura 10
Calcolare l'area di un parallelogramma in due modi

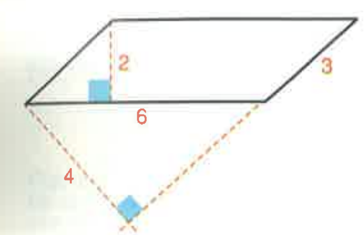


Figura 11
Calcolare l'area di un triangolo in tre modi

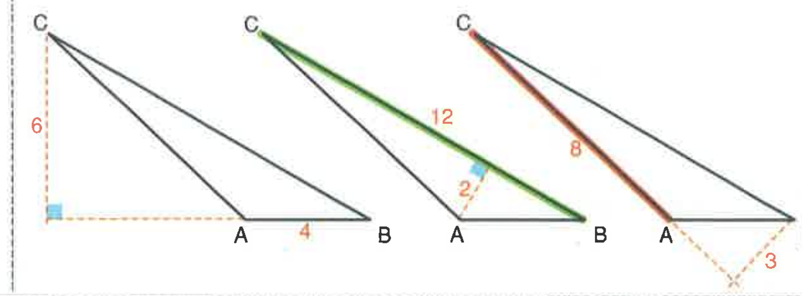


Figura 12
Perché parallelogramma e rettangolo sono equivalenti?

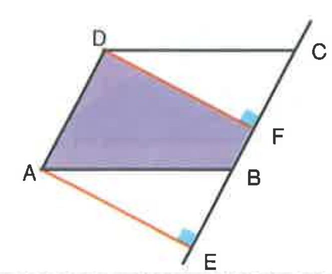
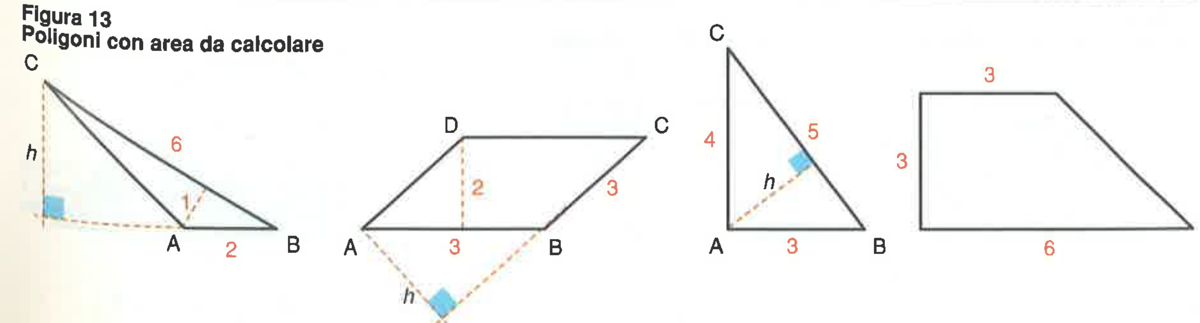


Figura 13
Poligoni con area da calcolare



10 L'area dei poligoni

Si sa calcolare l'area di un qualunque triangolo

Nel paragrafo precedente si è trovato il procedimento per calcolare l'area di alcuni poligoni. Si è ottenuto, in particolare, che l'area S di un qualunque triangolo è data da:

$$S = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h$$

dove b e h sono le misure di un lato e dell'altezza relativa a quel lato (fig. 1).

Si sa calcolare l'area solo di particolari quadrilateri

Dei quadrilateri, invece, si riesce a calcolare l'area solo in alcuni casi particolari e cioè (fig. 2):

- nel caso dei parallelogrammi;
- nel caso dei trapezi.

Ma, per risolvere vari problemi geometrici o scientifici, si ha spesso bisogno di valutare anche l'area S di quadrilateri che non sono né parallelogrammi né trapezi (fig. 3); come si può procedere in questi casi?

Figura 1
Si riesce sempre a calcolare l'area di un triangolo

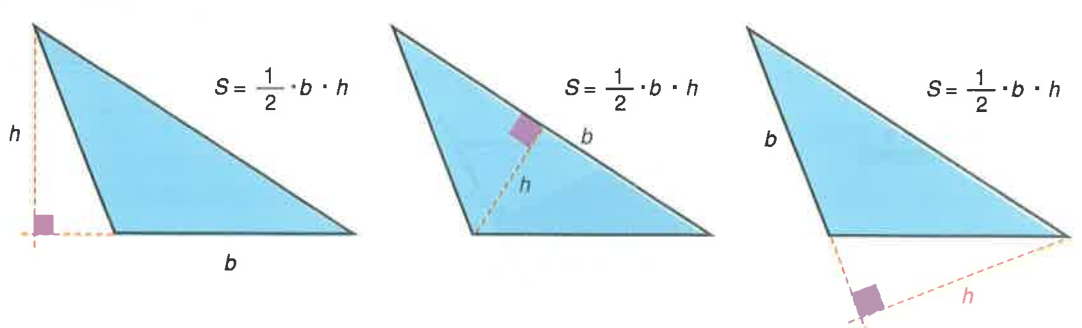
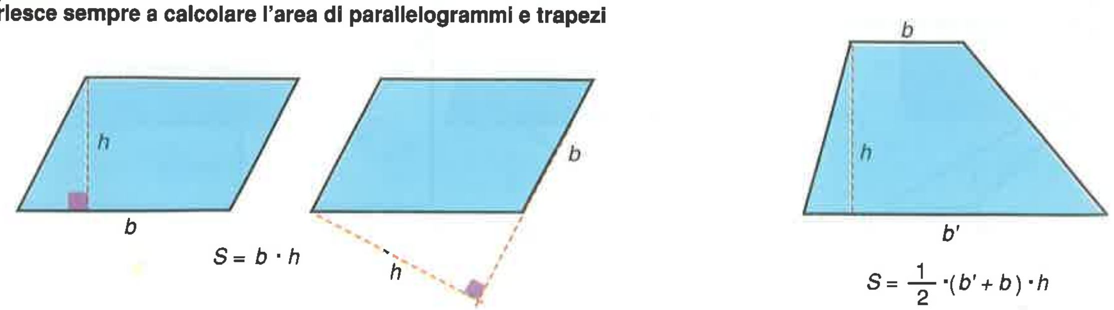


Figura 2
Si riesce sempre a calcolare l'area di parallelogrammi e trapezi



Due metodi per calcolare l'area di un quadrilatero

Per calcolare l'area di un quadrilatero, conviene calcolare l'area di opportuni triangoli. Ecco come si può procedere.

***Primo metodo**. Si divide il quadrilatero in due triangoli per mezzo di una diagonale.*

In questo modo (fig. 4) ci si riduce a calcolare le aree S' e S'' di due triangoli; si ottiene così l'area S del quadrilatero data da:

$$S = S' + S''$$

***Secondo metodo**. Si disegna un triangolo equivalente al quadrilatero dato.*

Per ottenere un triangolo equivalente ad un quadrilatero, per esempio ABCD di fig. 5, si procede così:

- si traccia una diagonale (per esempio AC);
- si fa scorrere il vertice D sulla retta r parallela ad AC, fino ad incontrare la retta BC in E.

In questo modo si hanno due figure – ABCD e ABE – che sono composte da:

- una parte comune (ABC);
- due triangoli (ACD e ACE) che sono diversi, ma equivalenti per avere la stessa base e la stessa altezza.

Si conclude che il triangolo ABE è equivalente al quadrilatero assegnato; perciò, invece di calcolare l'area del quadrilatero ABCD, si può calcolare l'area del triangolo ABE.

Due metodi per calcolare l'area di un poligono qualunque

I due metodi indicati prima si possono facilmente estendere per calcolare l'area di poligoni qualunque.

***Primo metodo**. Si divide il poligono in tanti triangoli per mezzo di un adeguato numero di diagonali.*

In questo modo (fig. 6) l'area del poligono è data dalla somma delle aree dei vari triangoli ottenuti.

***Secondo metodo**. Si disegna un triangolo equivalente al poligono dato.*

In questo caso si deve procedere in più passi

Figura 3
Un quadrilatero che non è né un parallelogramma né un trapezio

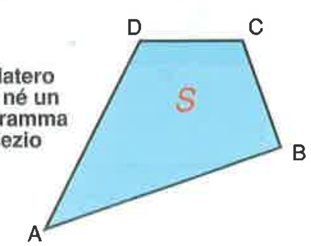


Figura 4
L'area di un quadrilatero diviso in triangoli

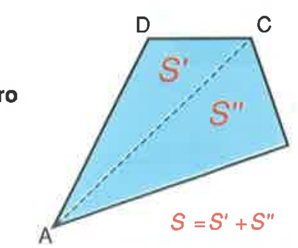
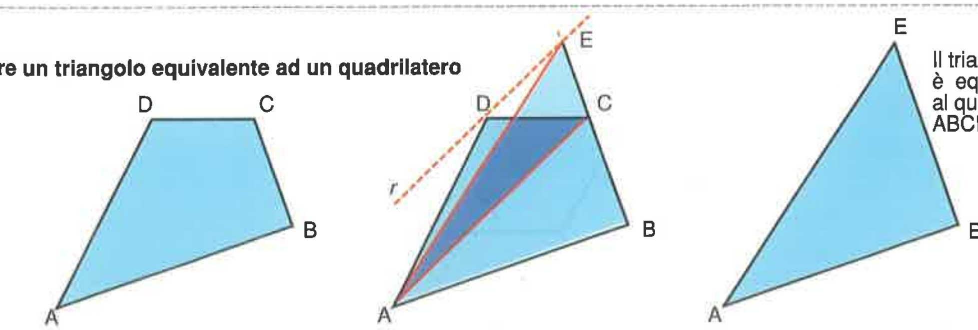
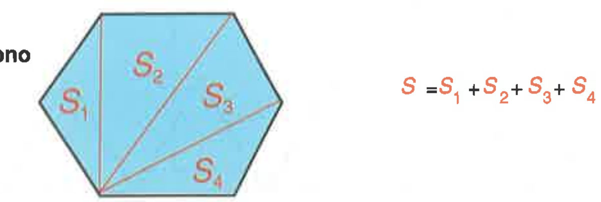


Figura 5
Disegnare un triangolo equivalente ad un quadrilatero



Il triangolo ABE è equivalente al quadrilatero ABCD.

Figura 6
L'area di un poligono diviso in triangoli



successivi; per esempio, nel caso di un esagono, si procede così (fig. 7):

1. si disegna un pentagono equivalente all'esagono dato;
2. si disegna un quadrilatero equivalente al pentagono precedente;
3. si disegna un triangolo equivalente al quadrilatero precedente.

L'area dei poligoni regolari

Nel caso dei poligoni regolari si può organizzare un metodo basato sulla simmetria di queste figure (fig. 8):

1. si traccia un adeguato numero di assi di simmetria per dividere il poligono in tanti triangoli quanti sono i lati;
2. si osserva che i triangoli così ottenuti presentano le seguenti caratteristiche:
   - sono isosceli e tutti uguali fra loro;
   - hanno come base il lato b del poligono;
   - hanno tutti la stessa altezza a, che prende il nome di *apotema*;
3. si osserva che gli stessi triangoli, disposti in altro modo, generano la figura rappresentata in fig. 9;
4. si trova che la figura è equivalente al triangolo isoscele di fig. 10 che ha:
   - la base lunga quanto il perimetro $2p$ del poligono;
   - per altezza l'apotema a.

Si conclude che *l'area S di un poligono regolare è data da:*

$$S = p \cdot a$$

dove p è la lunghezza del semiperimetro e a è la lunghezza dell'apotema.

Figura 7
Un triangolo equivalente ad un esagono

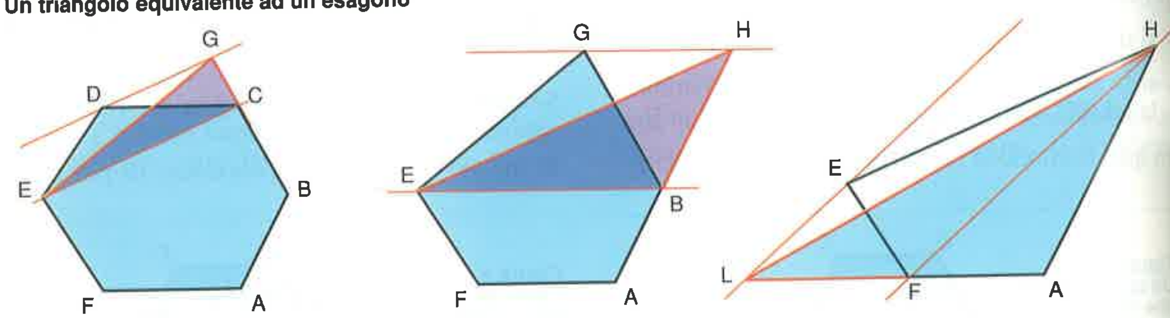


Figura 8
L'area di un poligono regolare

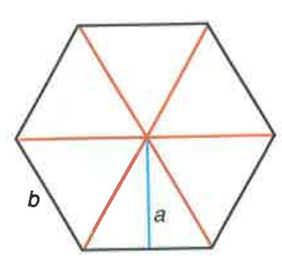
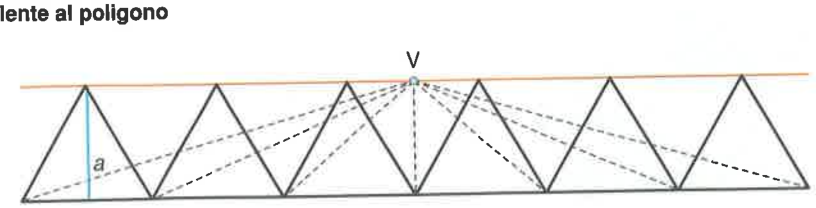


Figura 9
Una figura equivalente al poligono



Verifiche

Conoscenze

① Disegnare un parallelogramma, un trapezio e un quadrilatero qualunque; come si trova l'area di queste tre figure?

② Disegnare un pentagono regolare e un pentagono qualunque; come si trova l'area di queste figure?

Comprensione

① Elencare i quadrilateri di cui si può calcolare l'area con la formula:

$S = b \cdot h$

Che cosa significano le lettere b e h?

② Descrivere i poligoni di cui si può calcolare l'area con la formula:

$S = p \cdot a$

Che cosa significano le lettere p e a?

③ Quale fra i quadrilateri rappresentati in fig. 11 ha l'area che vale 6?

Applicazioni

① Determinare l'area dei quadrilateri disegnati in fig. 12.

② Determinare l'area dei poligoni disegnati in fig. 13.

Figura 10
Un triangolo equivalente al poligono

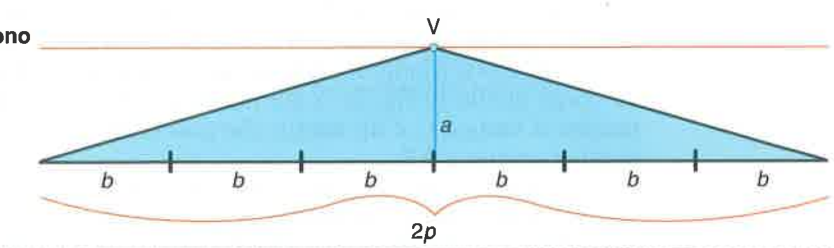


Figura 11
Quale quadrilatero

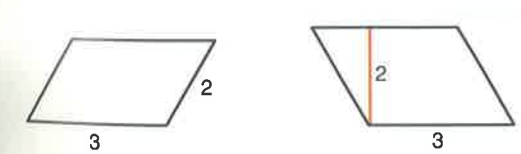


Figura 12
Calcolare l'area

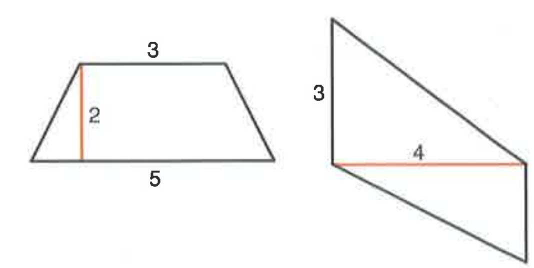
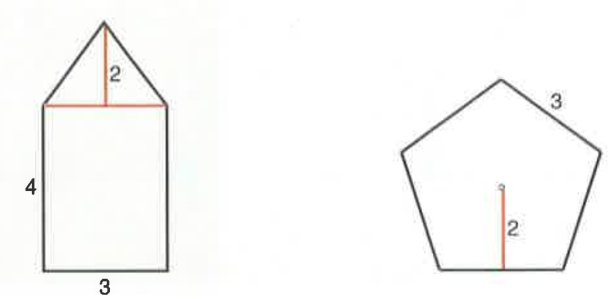


Figura 13
Calcolare l'area



Confrontare aree e perimetri dei poligoni

Un dispositivo per studiare il perimetro di triangoli equivalenti

In fig. 1 sono disegnati dei triangoli equivalenti: hanno uno stesso lato AB e i vertici C, C', C" su una parallela ad AB; le altezze relative al lato AB sono dunque uguali e perciò tutti i triangoli hanno la stessa area.

Gli stessi triangoli equivalenti si possono ottenere con un semplice dispositivo come quello di fig. 2: i lati del triangolo ABC sono realizzati con un elastico, mentre il vertice C è un anello che può scorrere lungo un fil di ferro che è fissato parallelamente a AB.

L'apparecchio suggerisce un'osservazione: per spostare C dalla posizione di vertice di un triangolo isoscele bisogna tendere l'elastico; così i lati del triangolo si allungano. Perciò il triangolo che ha i lati più corti è il triangolo isoscele.

Area e perimetro dei triangoli così realizzati sono dunque caratterizzati dalle seguenti proprietà:

Figura 1
Triangoli di uguale area

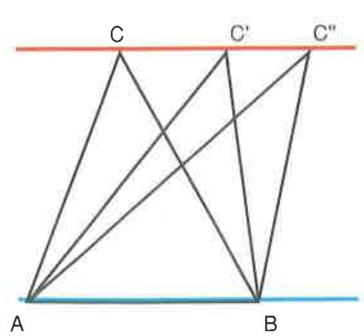
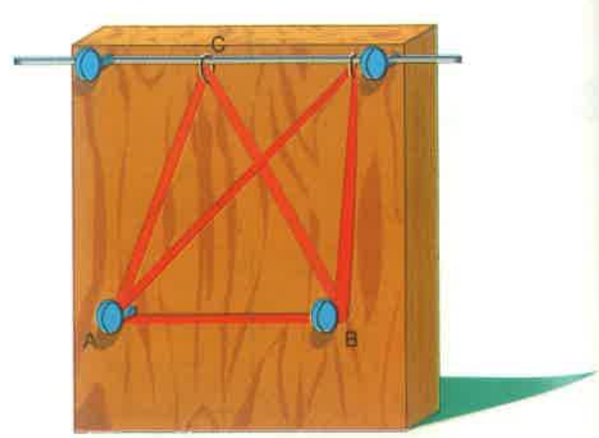


Figura 2
Un dispositivo per realizzare triangoli di uguale area



I. *triangoli che hanno uguali un lato e l'altezza relativa a quel lato sono equivalenti, cioè hanno la stessa area, ma non hanno lo stesso perimetro;*
II. *fra i triangoli equivalenti di uguale base, il triangolo isoscele è quello che ha perimetro minimo.*

Il perimetro di poligoni equivalenti con lo stesso numero di lati

In fig. 3 sono rappresentati due pentagoni sovrapposti:
- ABCDE è regolare, perciò i lati ED e DC sono uguali fra loro;
- ABCD'E è ottenuto spostando D lungo la parallela a AB.

Attività 1
Esaminare la fig. 3 e risolvere i seguenti quesiti:
a. spiegare perché i due pentagoni hanno la stessa area;
b. spiegare perché i due poligoni non hanno lo stesso perimetro;
c. stabilire qual è il poligono che ha perimetro minimo.

Attività 2
Ripetere il procedimento seguito prima a partire da un quadrato e da un esagono regolare.

Si arriva alla seguente conclusione: *fra tutti i poligoni equivalenti con lo stesso numero di lati, il poligono regolare è quello che ha perimetro minimo.*

Un dispositivo per studiare l'area di triangoli di uguale perimetro

Dei triangoli che mantengono lo stesso perimetro possono essere realizzati con il dispositivo di fig. 4. Gli estremi di uno spago sono fissati a due chiodi A, B e si fa scorrere una matita che tiene ben teso lo spago; la punta della matita realizza il terzo vertice C del triangolo.

Figura 3
Due poligoni equivalenti con lo stesso numero di lati

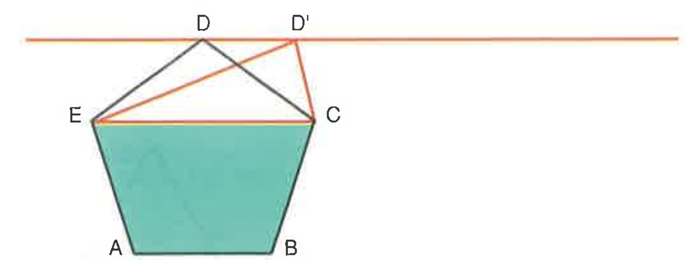
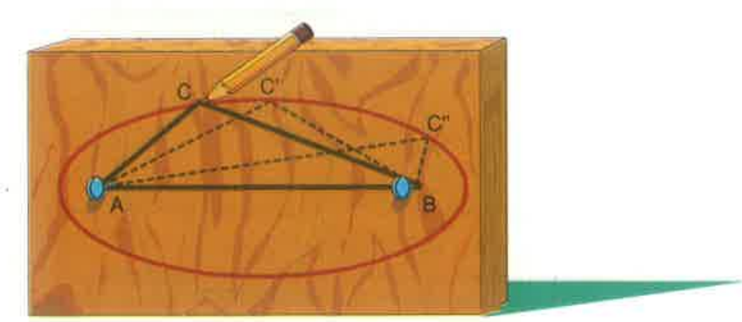


Figura 4
Un dispositivo per realizzare triangoli di uguale perimetro



L'apparecchio suggerisce un'osservazione: quando si sposta C dalla posizione di vertice di un triangolo isoscele, l'altezza del triangolo diminuisce; così l'area del triangolo diminuisce. Perciò il triangolo che ha l'area più grande è il triangolo isoscele.

Area e perimetro dei triangoli così realizzati sono dunque caratterizzati dalle seguenti proprietà:

I. *triangoli di ugual base che hanno lo stesso perimetro non hanno la stessa area;*

II. *fra i triangoli di uguale base e uguale perimetro, il triangolo isoscele è quello che ha area massima.*

L'area di poligoni che hanno lo stesso numero di lati e lo stesso perimetro

In fig. 5 sono rappresentati due pentagoni sovrapposti con lo stesso perimetro; ma solo ABCDE è regolare, cioè ha tutti i lati uguali.

Attività 3

Esaminare la fig. 5 e risolvere i seguenti quesiti:

a. spiegare perché i due poligoni non hanno la stessa area;

b. stabilire qual è il poligono che ha l'area più grande.

Attività 4

Ripetere il procedimento seguito prima a partire da un quadrato e da un esagono regolare.

Si arriva alla seguente conclusione: *fra tutti i poligoni che hanno lo stesso perimetro e lo stesso numero di lati, il poligono regolare è quello che ha area massima.*

Figura 5
Due poligoni di uguale perimetro

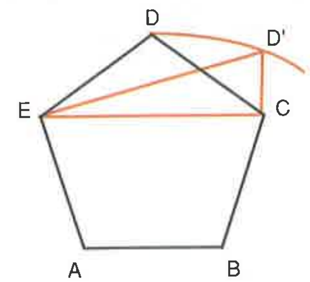
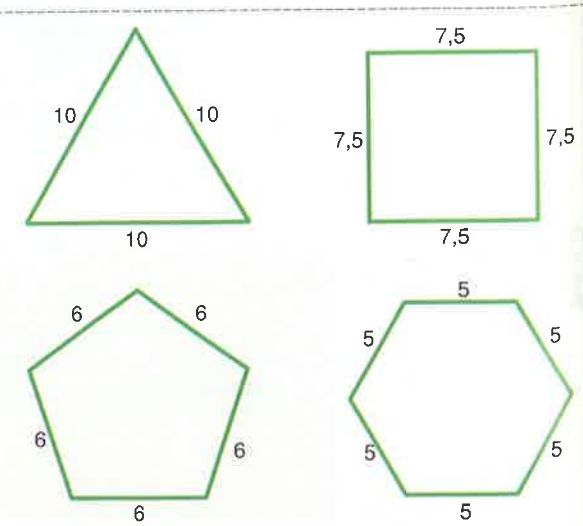


Figura 6
Poligoni regolari con lo stesso perimetro



L'area di poligoni regolari con lo stesso perimetro, ma diverso numero di lati

In fig. 6 sono realizzati alcuni poligoni regolari con lo stesso perimetro, ma diverso numero di lati.

Attività 5

Esaminare l'area dei poligoni di fig. 6, completando il ragionamento seguente:

- il triangolo equilatero ABC può essere considerato un quadrilatero irregolare ABCH (fig. 7);
- il quadrilatero irregolare ABCH ha l'area .... del quadrato DEFG che ha uguale perimetro.

Si conclude che *il quadrato ha l'area maggiore del triangolo equilatero di ugual perimetro.*

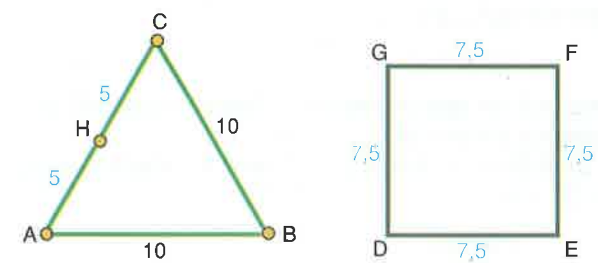
Attività 6

Ripetere il ragionamento precedente, a partire dal quadrato DEFG, considerato un pentagono irregolare DEFGK (fig. 8).

Si arriva così alla conclusione seguente: *poligoni regolari con lo stesso perimetro hanno l'area che aumenta al crescere del numero dei lati.*

Se poi si considera il cerchio come un poligono regolare con infiniti lati (cfr. il capitolo 4, par. 6), si può concludere che, *fra le figure di uguale perimetro, il cerchio è quella che racchiude l'area massima.*

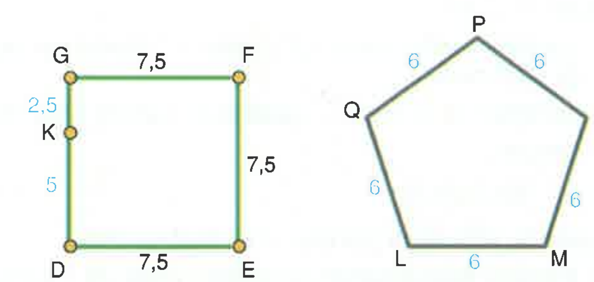
Figura 7
Confrontare l'area del triangolo equilatero e del quadrato con lo stesso perimetro



quadrilatero irregolare con il perimetro lungo 30

quadrato con perimetro lungo 30

Figura 8
Confrontare l'area del quadrato e del pentagono regolare con lo stesso perimetro



pentagono irregolare con il perimetro lungo 30

pentagono regolare con perimetro lungo 30

Area di zone con contorno curvilineo

Valutare l'area di una zona curvilinea con un reticolato quadrettato

Determinare l'area di zone a contorno curvilineo è un problema che si presenta nella realtà: i terreni da misurare, per esempio, hanno spesso un contorno curvilineo. Ecco allora come si può procedere:

- si esamina una pianta della zona;
- si sovrappone alla pianta un foglio di carta trasparente quadrettata (fig. 1);
- si conta il numero di quadretti interamente contenuti nella figura.

Così, all'interno della zona da misurare, si contano 7 quadretti con il lato lungo 1 cm (fig. 2); si trova allora che l'area S della figura vale, approssimativamente, 7 cm^2 e si scrive:

$$S \cong 7\ cm^2$$

Si osserva subito che in questo modo si ottiene *un'approssimazione per difetto*: all'interno della zona si trovano altri quadratini contenuti solo in parte; perciò l'area effettiva della zona vale più di 7 cm^2.

Se allora si contano anche i quadratini contenuti solo in parte nella zona se ne trovano in tutto 22 (fig. 3); si può quindi dire che l'area S vale approssimativamente 22 cm^2, cioè:

$$S \cong 22\ cm^2$$

Si trova così *un'approssimazione per eccesso* dell'area S, perché l'area effettiva è certamente più piccola di 22 cm^2.

In definitiva, si trova che l'area S, valutata in cm^2, è sicuramente compresa fra 7 e 22, cioè:

$$7 < S < 22$$

Per avere una migliore approssimazione si può utilizzare un reticolato con quadratini più piccoli, per esempio con il lato di 0,5 cm (fig. 4). In tal caso ogni quadratino ha l'area q data da:

$$q = 0{,}5 \cdot 0{,}5 = 0{,}25\ cm^2$$

e si trovano (fig. 4):

- contenuti all'interno della zona 42 quadratini, con un'area complessiva di 10,5 cm^2;
- contengono la zona 72 quadratini, con un'area complessiva di 18 cm^2.

Risulta dunque:

$$10{,}5 < S < 18$$

Scegliendo un reticolato più fitto si ha dunque che:

- il valore approssimato per difetto passa da 7 a 10,5, cioè aumenta;
- il valore approssimato per eccesso passa da 22 a 18, cioè diminuisce;
- l'area effettiva risulta compresa fra due valori più vicini; si ha perciò una migliore approssimazione dell'area richiesta.

E così, con un reticolato a quadretti ancora più piccoli, per esempio con il lato lungo 1 mm, si avrà un'approssimazione ancora migliore.

Il metodo dei trapezi

Nelle scienze si deve spesso valutare l'area di zone come quella di fig. 5; la zona è delimitata da:

- due rette parallele;
- una terza retta perpendicolare alle prime due;
- una linea curva.

Figura 1
Un reticolo a maglie quadrate per valutare l'area

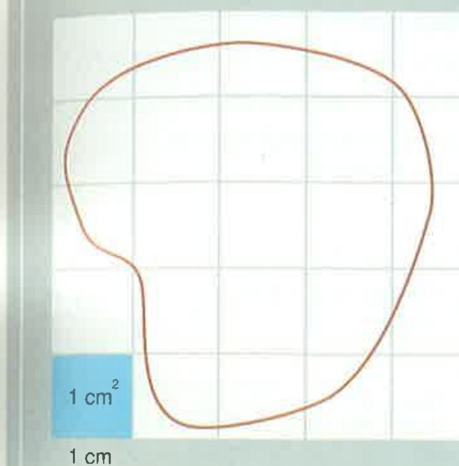


Figura 2
Area approssimata per difetto

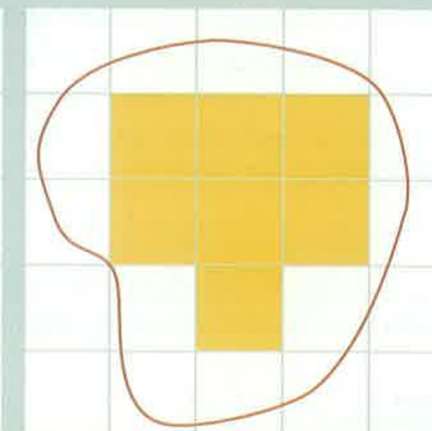


Figura 3
Area approssimata per eccesso

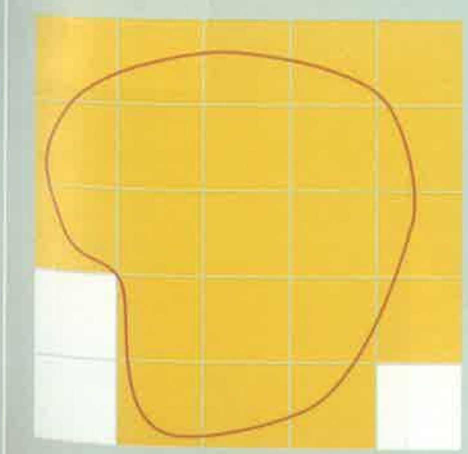
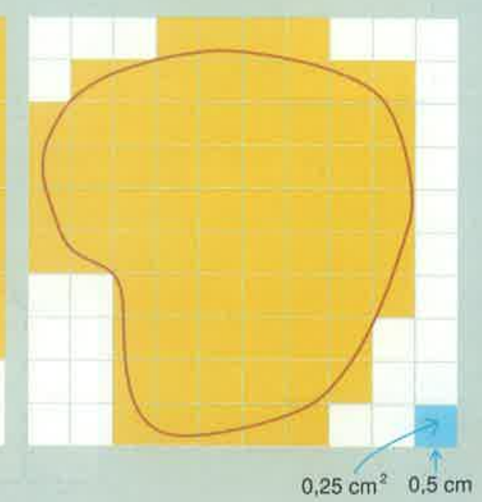


Figura 4
Un'approssimazione migliore



Si tratta dunque di una figura che ricorda un trapezio, perciò è detta *trapezoide*.

Una prima approssimazione dell'area di questa figura si può dunque ottenere congiungendo i punti A e B con un segmento (fig. 6); si ottiene, appunto, un trapezio, che ha:

- l'altezza lunga h;
- la lunghezza delle basi indicata dalle lettere b_0 e b_1;
- l'area S data da:

$$s = \frac{1}{2}(b_0+h_1)\cdot h$$

Si ottiene così una prima approssimazione dell'area richiesta; si tratta di un'approssimazione piuttosto grossolana, dato che nel trapezio è contenuta una notevole parte in più (in giallo in fig. 6).

Ecco come migliorare l'approssimazione (fig. 7):

1. si divide l'altezza HK in parti uguali;
2. dai punti di divisione si tracciano le perpendicolari a HK, fino ad incontrare la curva in altrettanti punti;
3. si congiungono i punti ottenuti fino ad ottenere tanti trapezi;
4. si calcola l'area complessiva di tutti questi trapezi.

In fig. 7, per esempio, HK è stata divisa in 2 parti tutte lunghe 1 cm; si sono così ottenuti 2 trapezi, che hanno un'area complessiva data da:

$$s' = \frac{1}{2}(b_0+b_1)+\frac{1}{2}(b_1+b_2)$$

Proprio dalla fig. 7 si evidenzia che l'approssimazione è migliorata, perché è diminuita la parte calcolata in più (sempre in giallo).

Figura 5
Un trapezoide

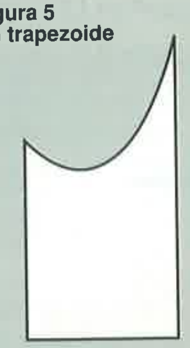
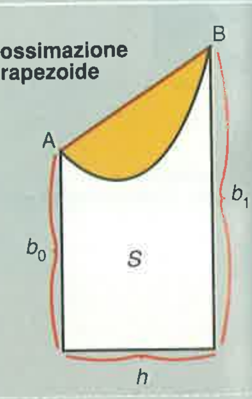


Figura 6
Una prima approssimazione dell'area di un trapezoide



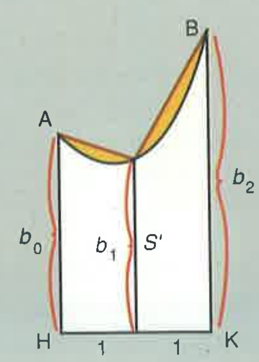


Figura 7
Un'approssimazione migliore

Il calcolo delle aree nella storia

In Egitto la geometria nasce per misurare la terra

«Geometria» significa *misura della terra*: è la traduzione in greco di una parola che, nella lingua dell'antico Egitto, aveva lo stesso significato.

Lo storico greco Erodoto (V secolo a.C.) attribuisce proprio agli egizi il merito di aver dato origine agli studi di geometria; ecco cosa scrive Erodoto: «Il re Sesostris (XIV secolo a.C.) aveva diviso la terra d'Egitto fra i suoi abitanti; ma il Nilo, con le sue piene, cancellava spesso i limiti fra campo e campo. Il re, allora, mandava degli esperti per misurare di nuovo i terreni. È da qui che nacque la geometria».

La geometria dell'antico Egitto è dunque una geometria pratica, quella che utilizzano ancora oggi i geometri, esperti nella rilevazione di terreni.

Euclide e lo studio delle figure

In Grecia, a partire dal VII secolo a.C., la geometria acquista un diverso significato: la figura geometrica si idealizza e si studiano le proprietà delle figure, staccandosi dai casi particolari e dai problemi pratici.

E così si arriva, nel III secolo a.C., agli *Elementi* di Euclide, dove l'area delle figure piane compare in problemi di questo tipo:

- dividere un triangolo in due parti di uguale area, tracciando una retta parallela ad un lato;
- dividere un trapezio in due parti di uguale area, tracciando una retta parallela alle basi.

Da questi problemi, trattati con eleganza e rigore, emerge una particolare visione della geometria, considerata un'attività intellettuale lontana dalle applicazioni pratiche.

Questo modo di considerare la geometria è sintetizzato in un famoso racconto che ha come protagonista proprio Euclide: un allievo chiese a che cosa servisse lo studio della geometria; Euclide allora allontanò l'allievo dalla scuola, dopo avergli dato una moneta, visto che il giovane aveva bisogno di trarre guadagno da ciò che imparava.

Archimede e il «peso» delle figure

Una mentalità completamente diversa sembra emergere invece dalle opere di Archimede (III secolo a.C.) e specialmente da uno dei trattati più importanti, *Il metodo*, arrivato a noi solo nel 1906, dopo che se ne erano perdute le tracce per circa 2000 anni.

In questo trattato, infatti, Archimede racconta di aver pensato di confrontare l'area di un triangolo e l'area di una figura dal contorno curvilineo con un procedimento «meccanico» (fig. 1): si ricoprono le due figure con tanti segmenti rettilinei e si «pesano» i segmenti ottenuti, sospendendoli ai due bracci di una leva.

Questa intuizione è alla base di molti procedimenti che sono poi sviluppati da Archimede con un rigore ed una precisione tali da rimanere ancora oggi sostanzialmente validi.

Il calcolo dell'area nella letteratura classica

Il problema di calcolare l'area di un terreno si trova anche nella letteratura classica: il poeta latino Virgilio (I secolo a.C.) racconta nell'*Eneide* che Didone, per costruire la città di Cartagine, aveva avuto una pelle di bove e, utilizzando solo questa, aveva il diritto di limitare il recinto della futura città; Didone allora tagliò la pelle in striscioline sottilissime e le dispose a cerchio.

Il racconto testimonia dunque che già si conosceva un'importante proprietà relativa alle aree: è il cerchio che, fra le varie figure di uguale perimetro, racchiude l'area maggiore.

Galileo confronta aree e perimetri

Un salto di secoli e si trovano, ancora una volta, delle considerazioni sull'area di figure che hanno lo stesso perimetro in un trattato classico: *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze*, scritto da Galileo Galilei nel 1638.

Riferendosi alla maggior parte delle persone, Galileo dice: «...ignorano che può essere un recinto uguale ad un altro e la piazza contenuta da questo assai maggiore della piazza di quello».

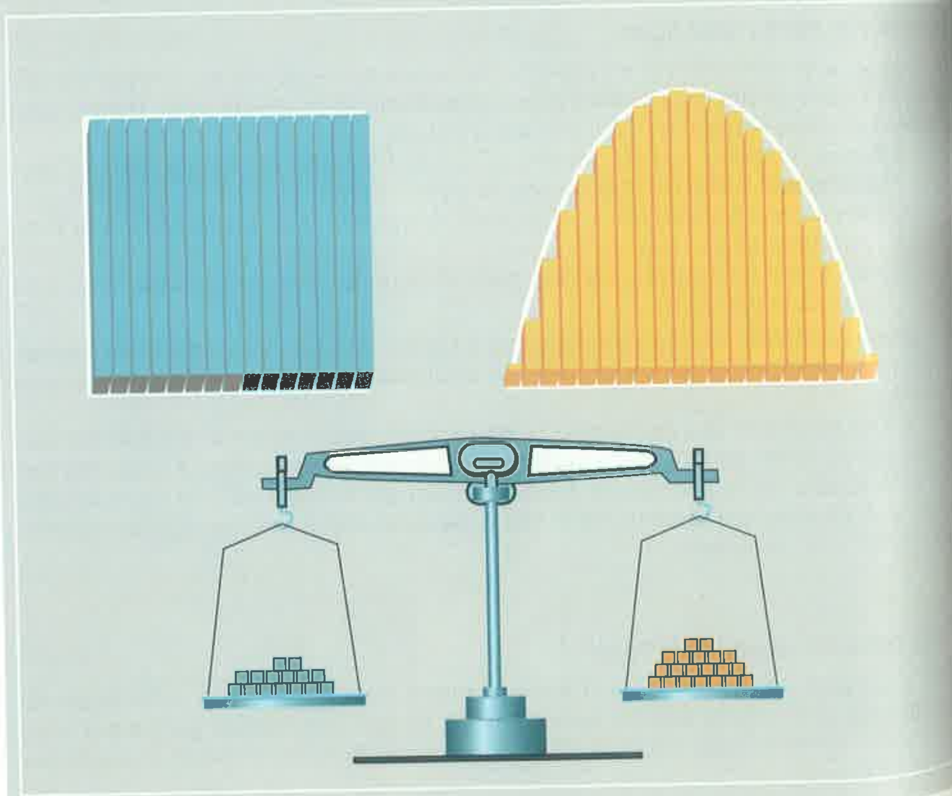


Figura 1
Due figure equivalenti secondo Archimede

Gli allievi di Galileo riprendono le idee di Archimede

Negli allievi di Galileo si ritrovano poi, a distanza di tanti secoli, le idee di Archimede. In particolare, Bonaventura Cavalieri pensa ad un'area composta di fili, che chiama *indivisibili*, proprio perché non possono essere ulteriormente assottigliati.

Per esempio, l'area del rettangolo può essere riempita di fili paralleli alla base (fig. 2); se questi fili vengono spostati in modo da rimanere sempre paralleli fra loro, si formano altre figure che sono tutte equivalenti al rettangolo perché «...è come se fossero costituite con la stessa quantità di materiale».

Gli indivisibili conducono dunque a considerare una figura piana come se fosse costituita da fili che si possono spostare in modo da ricondursi ad una figura di area nota.

Cavalieri certamente non conosceva l'opera in cui Archimede esponeva il suo metodo, poteva conoscere solo alcuni risultati del grande matematico greco. È riuscito tuttavia a ritrovare un analogo spirito di ricerca: le figure geometriche non sono idealizzate e immobili, ma sono concrete, si muovono e pesano.

I metodi per calcolare le aree dal '600 fino ad oggi

A partire dal XVII secolo, il problema di determinare l'area di una figura a contorno curvilineo compare sempre più spesso in matematica e nelle scienze sperimentali. Le brillanti intuizioni di Cavalieri danno così origine ad un gran numero di ricerche matematiche: da un lato si sviluppava il calcolo integrale, che arrivava a calcolare alcune aree come somma di infiniti rettangoli sottilissimi; dall'altro si sviluppavano dei metodi per calcolare le aree in modo approssimato.

In particolare, questi metodi approssimati, di cui viene data un'idea nella scheda di p. 220, sono ancora di grande attualità perché sono particolarmente adatti per valutare le aree con l'aiuto di un calcolatore elettronico.

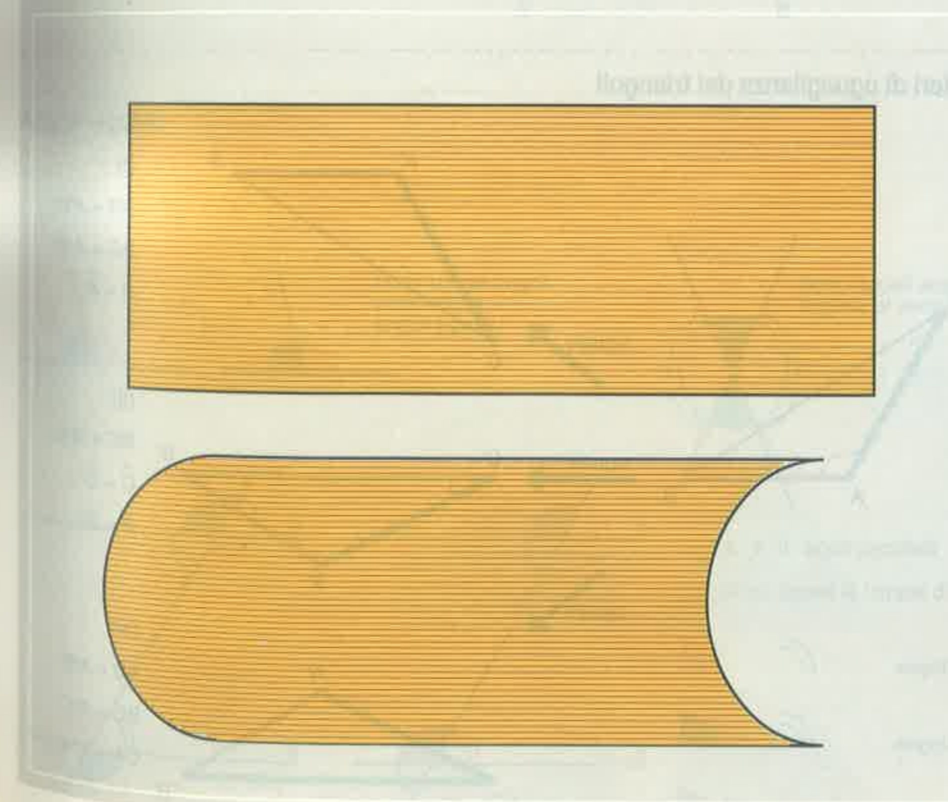
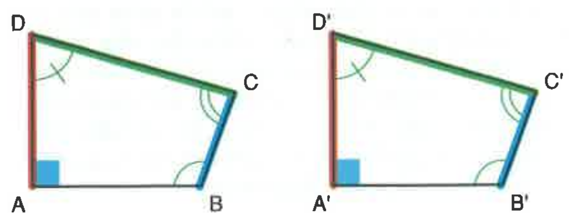


Figura 2
Due figure equivalenti secondo Bonaventura Cavalieri

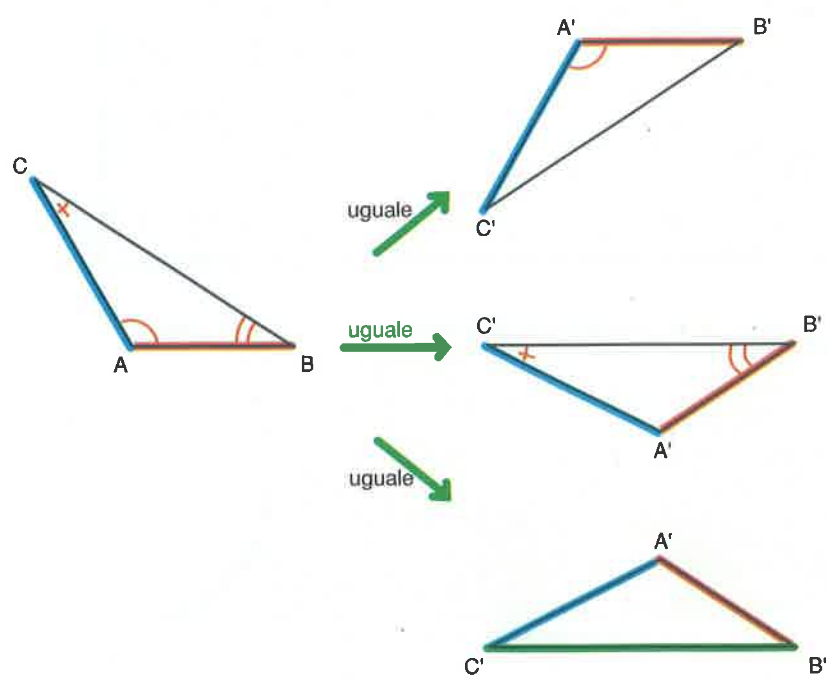
Che cosa bisogna sapere

Poligoni uguali



$\hat{A} = \hat{A}'$ | $AD = A'D'$
$\hat{B} = \hat{B}'$ | $AB = A'B'$
$\hat{C} = \hat{C}'$ e $BC = B'C'$
$\hat{D} = \hat{D}'$ | $DC = D'C'$

Criteri di uguaglianza dei triangoli

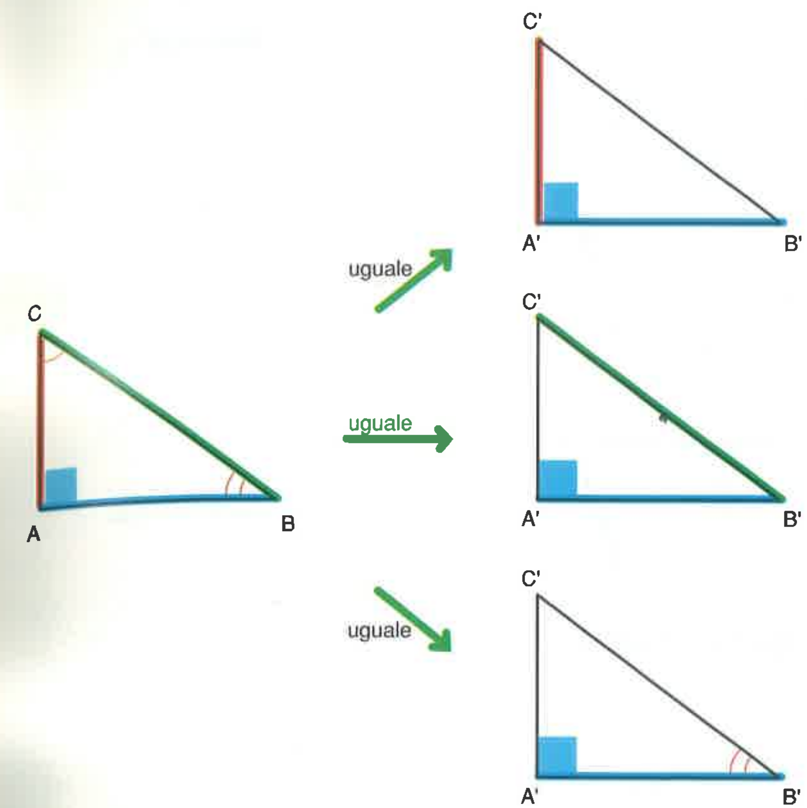


(I)
$AB = A'B'$
$AC = A'C'$
$\hat{A} = \hat{A}'$

(II)
$BC = B'C'$
$\hat{C} = \hat{C}'$
$\hat{B} = \hat{B}'$

(III)
$AB = A'B'$
$BC = B'C'$
$CA = C'A'$

Criteri di uguaglianza dei triangoli rettangoli



(I)
i due cateti uguali

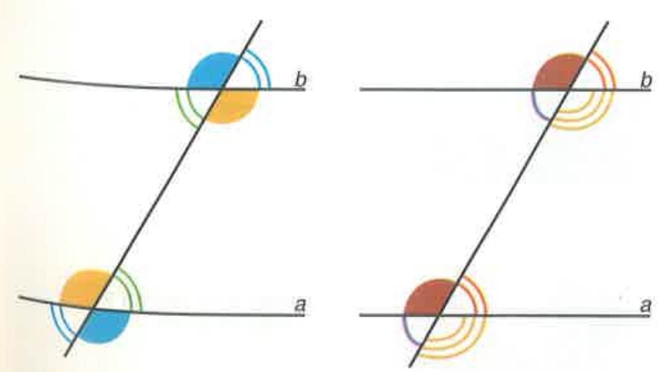
(II)
l'ipotenusa e un cateto uguali

(III)
un lato e un angolo uguali

Angoli uguali

Sono uguali angoli adiacenti di angoli uguali.

Sono uguali angoli opposti al vertice.



a e b sono parallele

Sono uguali le coppie di:

angoli alterni interni

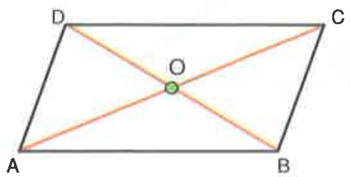
angoli alterni esterni

angoli corrispondenti

Proprietà di un parallelogramma

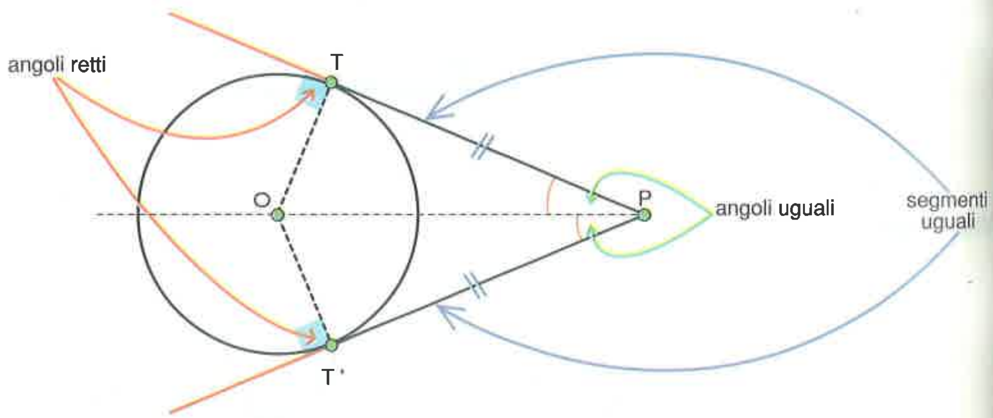
lati opposti uguali

angoli opposti uguali

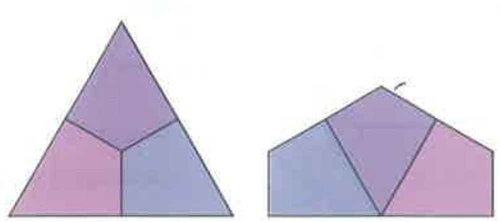


O centro di simmetria

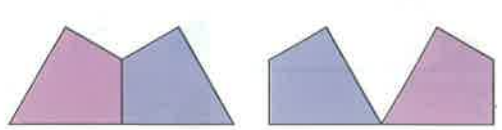
Proprietà delle tangenti ad un cerchio



Poligoni equivalenti

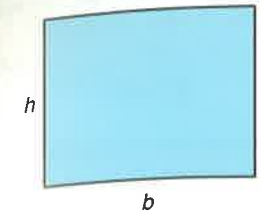


poligoni somma di poligoni uguali

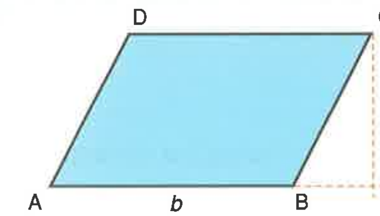


poligoni differenza di poligoni uguali

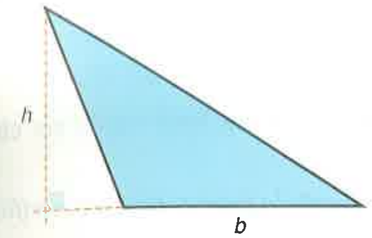
Area di poligoni



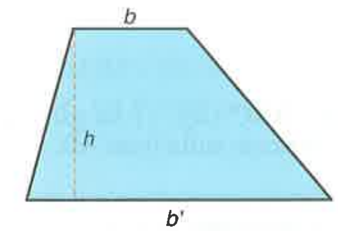
$S = b \cdot h$



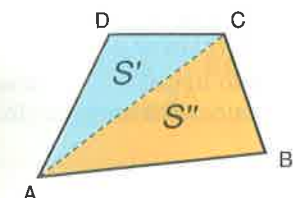
$S = b \cdot h$



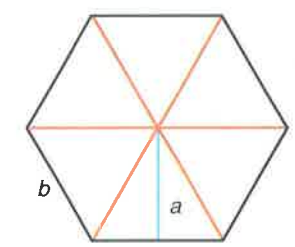
$S = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h$



$S = \frac{1}{2} \cdot (b' + b) \cdot h$



$S = S' + S''$



$S = p \cdot a$

(p = semiperimetro)

Che cosa bisogna saper fare

Attività 1

Un triangolo ABC (fig. 1) ha gli angoli Â e B̂ uguali fra loro; verificare che il triangolo è isoscele sulla base AB.

- *Rileggere attentamente il quesito, esaminando la figura: bisogna verificare che sono uguali fra loro i lati ....*
- *Per verificare l'uguaglianza di questi lati si cerca di applicare i criteri di uguaglianza dei triangoli; per questo bisogna cercare due triangoli su cui lavorare.*
- *Si può ricordare che i criteri di uguaglianza dei triangoli rettangoli sono particolarmente semplici e perciò conviene costruire due triangoli rettangoli all'interno di ABC, tracciando l'altezza CH, relativa al lato AB.*
- *I triangoli CHA e CHB sono uguali perché hanno uguali .... ; sono dunque uguali i lati .... e perciò il triangolo è sicuramente isoscele.*

Figura 1
Un triangolo con due angoli uguali

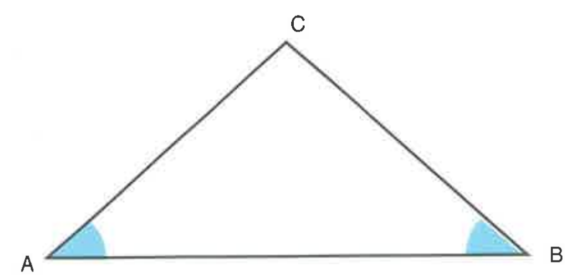
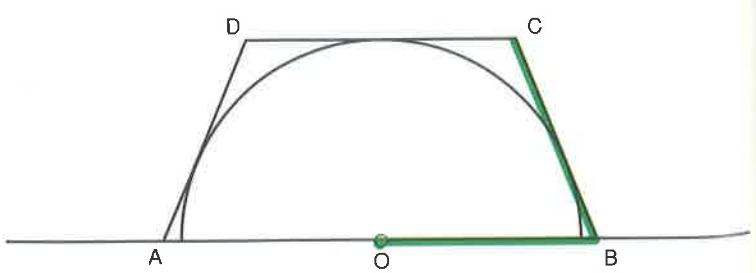


Figura 2
Un trapezio isoscele circoscritto ad una semicirconferenza



Attività 2

Esaminare il trapezio isoscele ABCD di fig. 2: ha i lati obliqui (AD e CB) e la base minore DC che sono tangenti alla semicirconferenza di centro O; si dice che il trapezio è *circoscritto alla semicirconferenza.*

Verificare che il lato obliquo è uguale alla metà della base maggiore e cioè risulta:

OB=CB

- *Rileggere attentamente il quesito, esaminando la figura:*
  OB e CB sono i due lati del triangolo .... ;
  bisogna allora verificare che il triangolo .... è isoscele sulla base ....
- *Basandosi sul risultato dell'attività 1, basta verificare che gli angoli BÔC e OĈB sono ....*
- *Per concludere seguire le indicazioni di fig. 3 per utilizzare le informazioni seguenti:*
- *ABCD è un trapezio, cioè CD è parallelo ad AB e OC è una trasversale;*
- *ABCD è circoscritto al semicerchio, cioè DC e CB sono tangenti alla circonferenza.*

Attività 3

Esaminare il trapezio isoscele ABCD di fig. 4: ha tutti i lati tangenti alla circonferenza di centro O; si dice che il trapezio è *circoscritto alla circonferenza.*

Verificare che il trapezio presenta le seguenti proprietà:

I. la somma delle due basi è uguale al doppio del lato obliquo, e cioè:

$$AB+DC=2\cdot BC$$

II. l'angolo BÔC è retto.

Figura 3
Proprietà delle tangenti ad una circonferenza

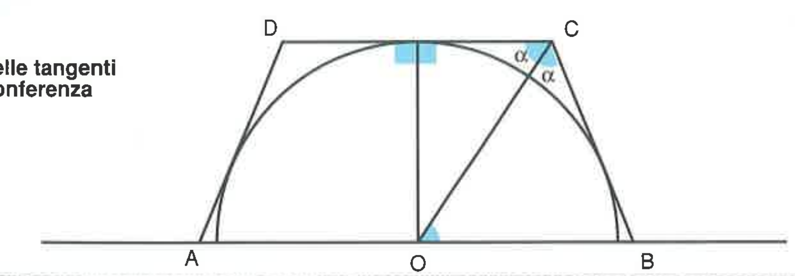
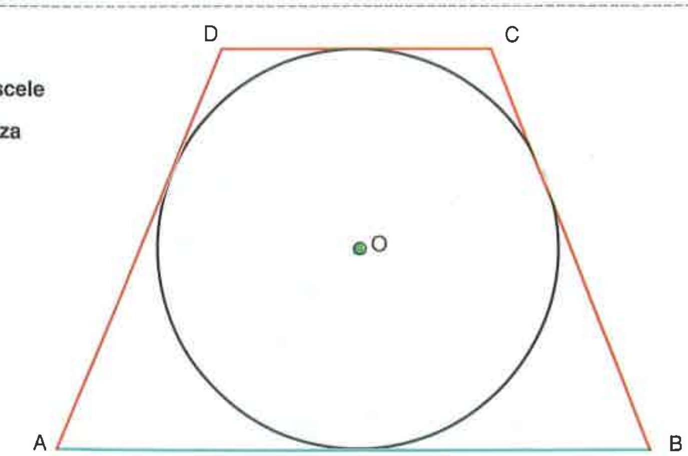


Figura 4
Un trapezio isoscele circoscritto ad una circonferenza



I. *Basta ricordare una proprietà delle tangenti ad una circonferenza, richiamata in fig. 5; si trova così che:*

BC= ....+ ....

AB+DC=2·.........+2·.........=2·(.........+.........)

II. *Le proprietà delle tangenti ad una circonferenza portano ad individuare due coppie di triangoli uguali (fig. 6); si trova così che:*

$B\hat{O}C=\alpha+\beta$

$180°=2\cdot\alpha+2\cdot\beta=2\cdot($.........+.........$)$ *e perciò* 90°=.................

Attività 4

Disegnare un parallelogramma ABCD e la sua diagonale DB; sulla diagonale fissare un qualunque punto P. Verificare che i triangoli APB e BPC sono equivalenti.

- *I due triangoli hanno il lato PB in comune; perciò per verificare che i due triangoli hanno la stessa area, basta verificare che sono uguali* ....
- *Tracciare nel triangolo APB l'altezza AH relativa al lato PB.*
- *Tracciare nel triangolo PBC l'altezza CK relativa al lato PB.*
- *I triangoli rettangoli AHD e CKD sono uguali perché hanno uguali* .... ; *perciò risultano sicuramente uguali* ....

Figura 5
Proprietà delle tangenti ad una circonferenza

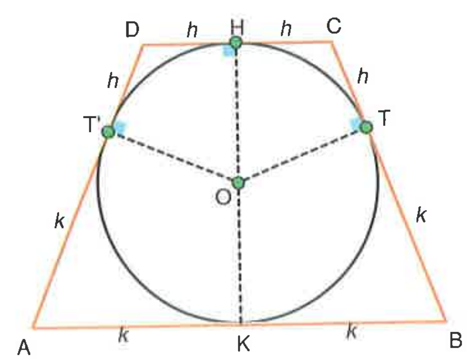


Figura 6
Triangoli uguali nel trapezio circoscritto