

Derivate di funzioni elementari II. Esercizi

1. Completa la tabella seguente

Funzione	Derivata	Ascissa a	Derivata nel punto di ascissa a
$y = x$		$a = \frac{2}{5}$	
$y = x^2$		$a = \frac{3}{2}$	
$y = 2^3$		$a = -5$	
$y = x^3$		$a = -3$	
$y = x^4$		$a = -\frac{1}{3}$	

2. È data la funzione $y = x^2$.

a. Calcola la derivata della funzione.

b. Rappresenta qui sotto la funzione e la sua derivata.

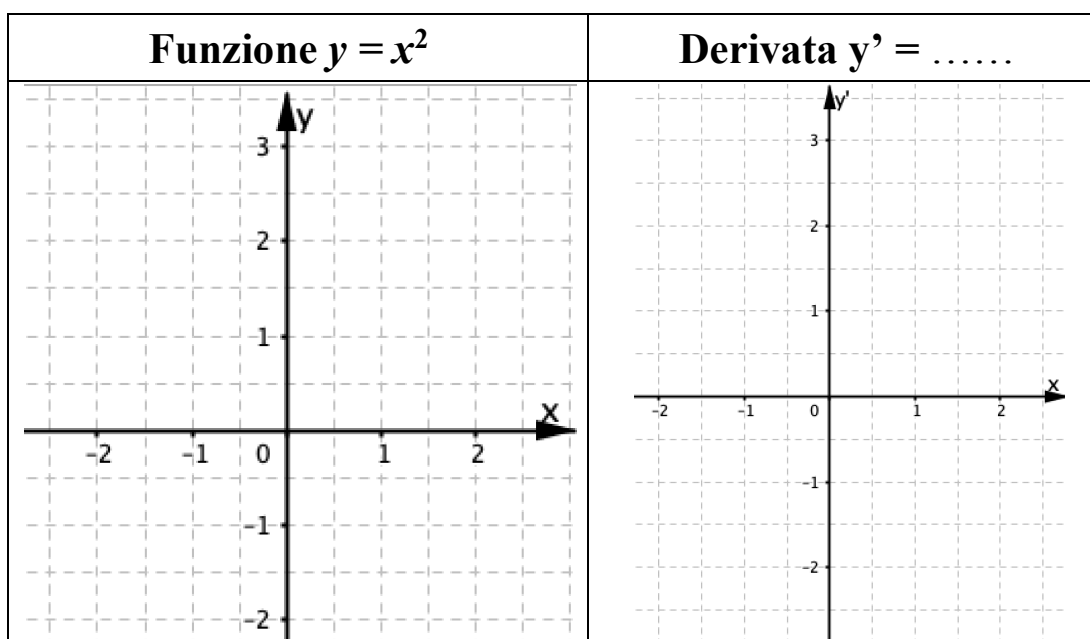
c. Calcola i seguenti valori di funzione e derivata e rappresentali sui grafici:

$$f(1) = \dots\dots f'(1) = \dots\dots f(-1) = \dots\dots f'(-1) = \dots\dots$$

$$f(\sqrt{2}) = \dots\dots f'(\sqrt{2}) = \dots\dots f(-\sqrt{2}) = \dots\dots f'(-\sqrt{2}) = \dots\dots$$

d. Indica sul grafico della funzione il punto che ha la tangente parallela alla retta d'equazione $y = x + 3$.

e. Può succedere che due punti del grafico di $y = x^2$ abbiano tangenti parallele? Motiva la tua risposta.



3. È data $y = x^3$.

a. Calcola la derivata della funzione.

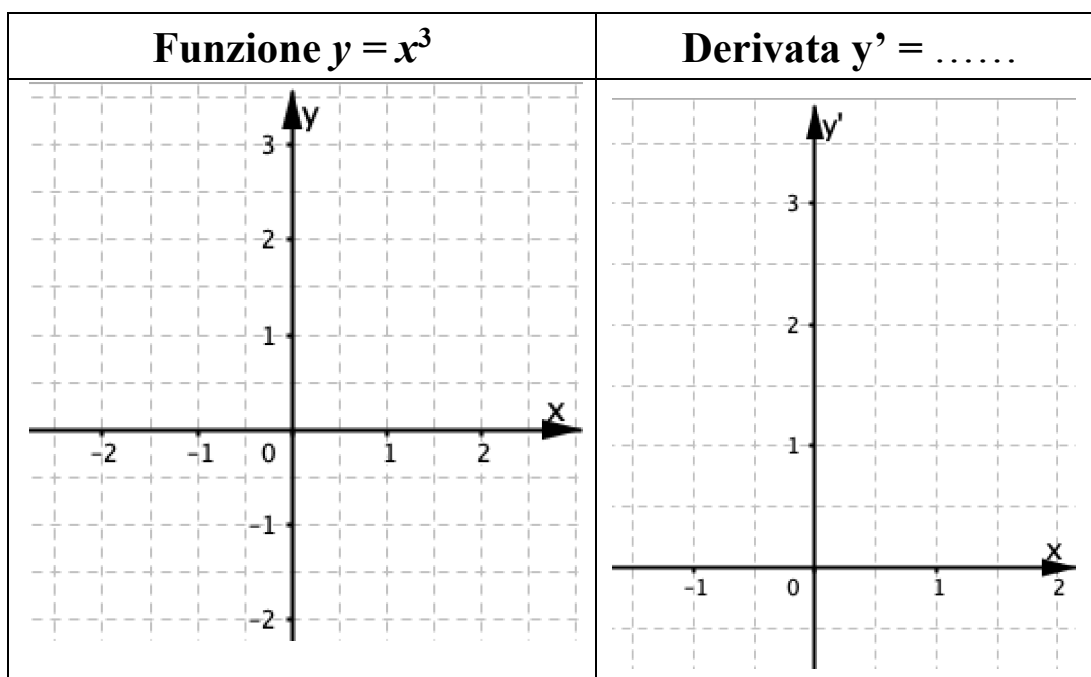
b. Rappresenta qui sotto la funzione e la sua derivata.

c. Calcola i seguenti valori di funzione e derivata e rappresentali sui grafici:

$$f(0) = \dots\dots\dots f'(0) = \dots\dots\dots f(1) = \dots\dots\dots f'(-1) = \dots\dots\dots$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \dots\dots\dots f'\left(\frac{1}{2}\right) = \dots\dots\dots f\left(-\frac{1}{2}\right) = \dots\dots\dots f'\left(-\frac{1}{2}\right) = \dots\dots\dots$$

d. Indica sul grafico della funzione il punto che ha la tangente parallela alla retta d'equazione $y = 3x + 4$. Trovi un solo punto?



4. È data $y = x^2$. Calcola i seguenti rapporti incrementali.

- il rapporto incrementale, relativo all'ascissa $x=1$, con h variabile;
- il rapporto incrementale, relativo ad un'ascissa generica x , con $h=1$;
- il rapporto incrementale, relativo ad un'ascissa x , con h variabile.

Confronta i rapporti ottenuti, indicando in particolare:

- a) il rapporto di cui valutare il limite per $h \rightarrow 0$, per ottenere $f'(1)$;
- b) il rapporto di cui valutare il limite per $h \rightarrow 0$, per ottenere $f'(x)$.

5. È data $y = x^3$. Calcola i seguenti rapporti incrementali.

- il rapporto incrementale, relativo all'ascissa $x=1$, con h variabile;
- il rapporto incrementale, relativo ad un'ascissa generica x , con $h=1$;
- il rapporto incrementale, relativo ad un'ascissa x , con h variabile.

Confronta i rapporti ottenuti, indicando in particolare:

- a) il rapporto di cui valutare il limite per $h \rightarrow 0$, per ottenere $f'(1)$;
- b) il rapporto di cui valutare il limite per $h \rightarrow 0$, per ottenere $f'(x)$.

6. Ricorda la formula per sviluppare la potenza di un binomio, scritta qui sotto:

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2} a^{n-2}b^2 + \dots + b^n$$

a. Completa i calcoli seguenti per calcolare la derivata di $y = x^4$ con il limite del rapporto incrementale.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x+h)^4 - x^4}{h} = \frac{x^4 + \dots x^3 h + \dots x^2 h^2 + \dots h^4 - x^4}{h} = \dots x^3 + \dots x^2 h + \dots h^4$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \rightarrow 0} (\dots x^3 + \dots x^2 h + \dots h^4) = \dots x^3$$

b. Spiega perché basta scrivere i primi tre termini e l'ultimo termine dello sviluppo della potenza del binomio per completare il calcolo.

7. Basati sull'esercizio precedente per calcolare con il limite del rapporto incrementale la derivata di $y = x^n$, con n numero naturale maggiore di 1.

8. Qui sotto è disegnato il grafico di $y = e^x$, che ha per derivata $y' = e^x$. Completa le frasi e rispondi ai quesiti seguenti:

a. Il punto A della curva esponenziale ha ascissa 1; completa le seguenti frasi:

- L'ordinata del punto A è data da
- La pendenza m_A della tangente t_A alla curva in A è $m_A = \dots$

b. traccia il grafico della retta t_A .

c. Puoi trovare sulla curva esponenziale punti con la tangente parallela alla retta $y = -3x + 1$?

d. Motiva la tua risposta.

