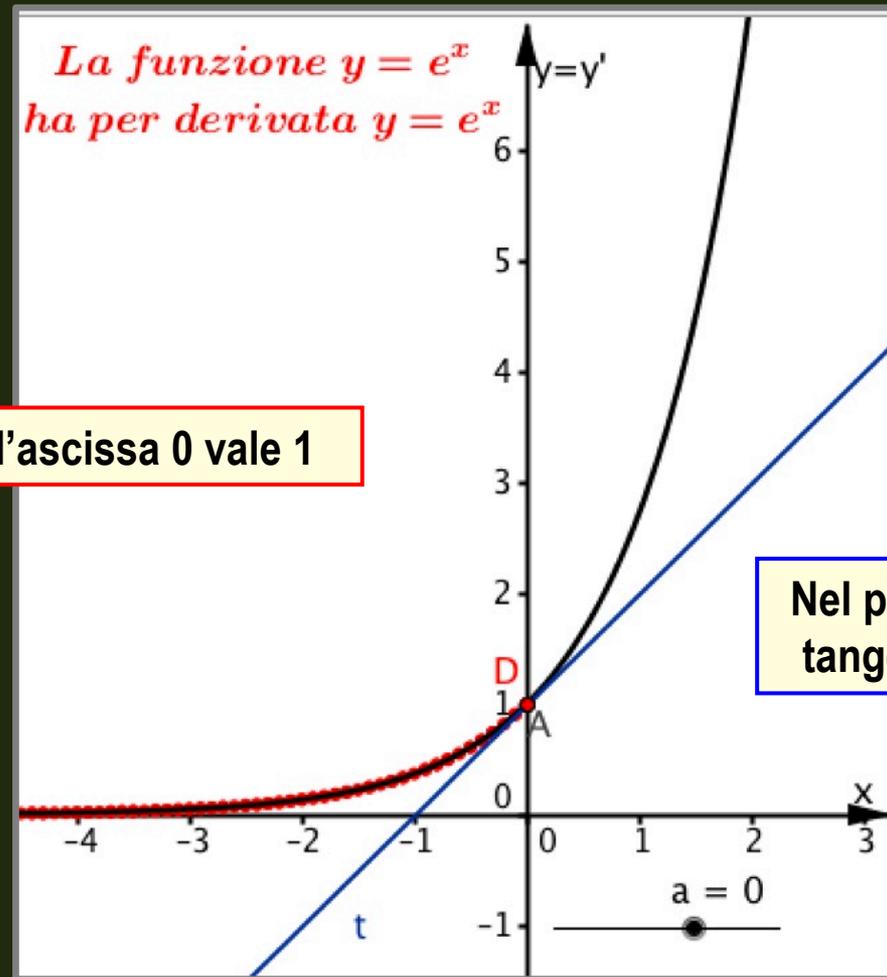


Derivate di funzioni elementari II



La derivata nel punto d'ascissa 0 vale 1

$A(0, 1)$

Nel punto A di ascissa 0 la tangente t ha pendenza 1

Come è organizzato il calcolo differenziale

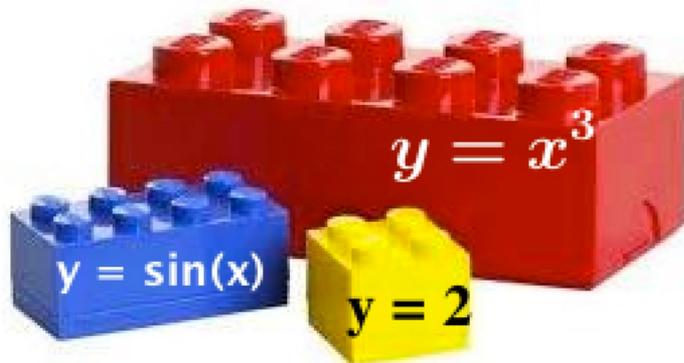
Il calcolo differenziale studia le derivate.

Pensa alla tante funzioni che hai incontrato finora: calcolare il limite del rapporto incrementale per tutte queste funzioni sarebbe un lavoro lunghissimo!

Ecco invece il percorso molto più rapido che seguirai:

1. Calcolo le derivate di poche funzioni elementari.
2. Studio le regole dell'Algebra delle derivate per calcolare le derivate di tutte le funzioni ottenute da quelle elementari con procedimenti noti.

Esempi di funzioni ottenute con 3 funzioni elementari



$$y = \frac{2 \sin(x)}{x^3} \quad y = 2x^3 + \sin(x)$$

Procedimento

In questa lezione calcoli la funzione derivata di altre funzioni elementari.

Il procedimento di calcolo sarà sempre lo stesso:

1. Calcolo del rapporto incrementale

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

2. Calcolo del limite del rapporto incrementale

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x)$$

Ma lo sviluppo dei calcoli varierà al variare della funzione.

E ricorderai sempre di osservare la derivata come pendenza della retta tangente al grafico della funzione.

Attività: derivare altre funzioni elementari

Completa la scheda di lavoro per calcolare la derivata di funzioni del tipo $y = x^n$.

Riflessioni sui risultati ottenuti

Quesito 1

La derivata di $y = x^2$

La derivata di $y = x^2$
Rapporto incrementale

Quadrato del binomio

$$(x + h)^2 = x^2 + 2hx + h^2$$

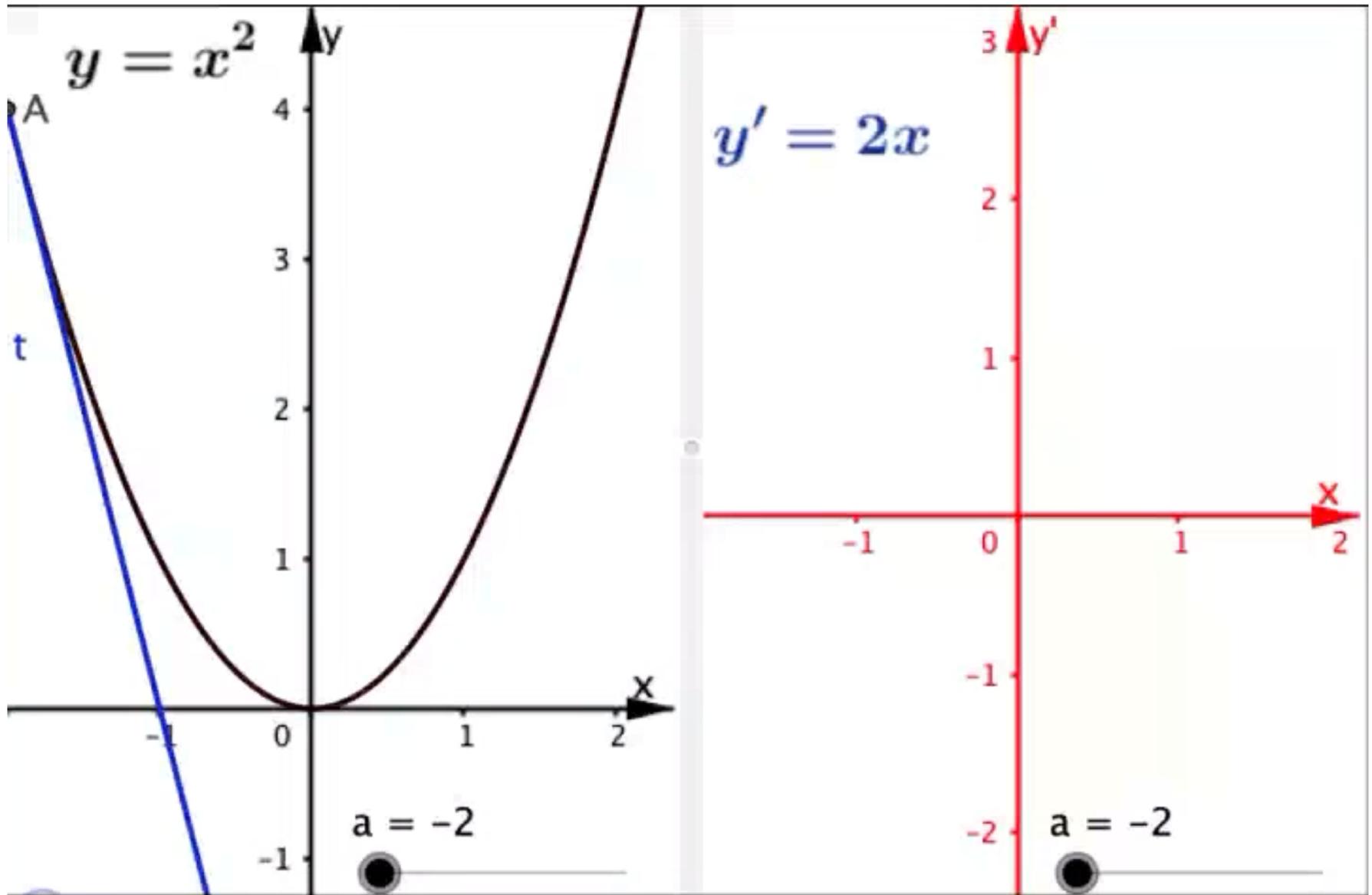
$$\begin{aligned}\frac{\Delta f}{\Delta x} &= \frac{(x + h)^2 - x^2}{h} = \frac{x^2 + 2hx + h^2 - x^2}{h} = \\ &= \frac{2hx + h^2}{h} = 2x + h \quad \text{per } h \neq 0\end{aligned}$$

Limite del rapporto incrementale

$$\lim_{h \rightarrow 0} (2x + h) = 2x$$

La derivata di $y = x^2$ è $y' = 2x$.

Video: $y = x^2$ e la sua derivata



Quesito 2. La derivata di $y = x^3$

La derivata di $y = x^3$

Rapporto incrementale

$$\begin{aligned}\frac{\Delta f}{\Delta x} &= \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \frac{x^3 + 3hx^2 + 3h^2x + h^3 - x^3}{h} = \\ &= \frac{3hx^2 + 3h^2x + h^3}{h} = 3x^2 + 3hx + h^2\end{aligned}$$

Cubo del binomio

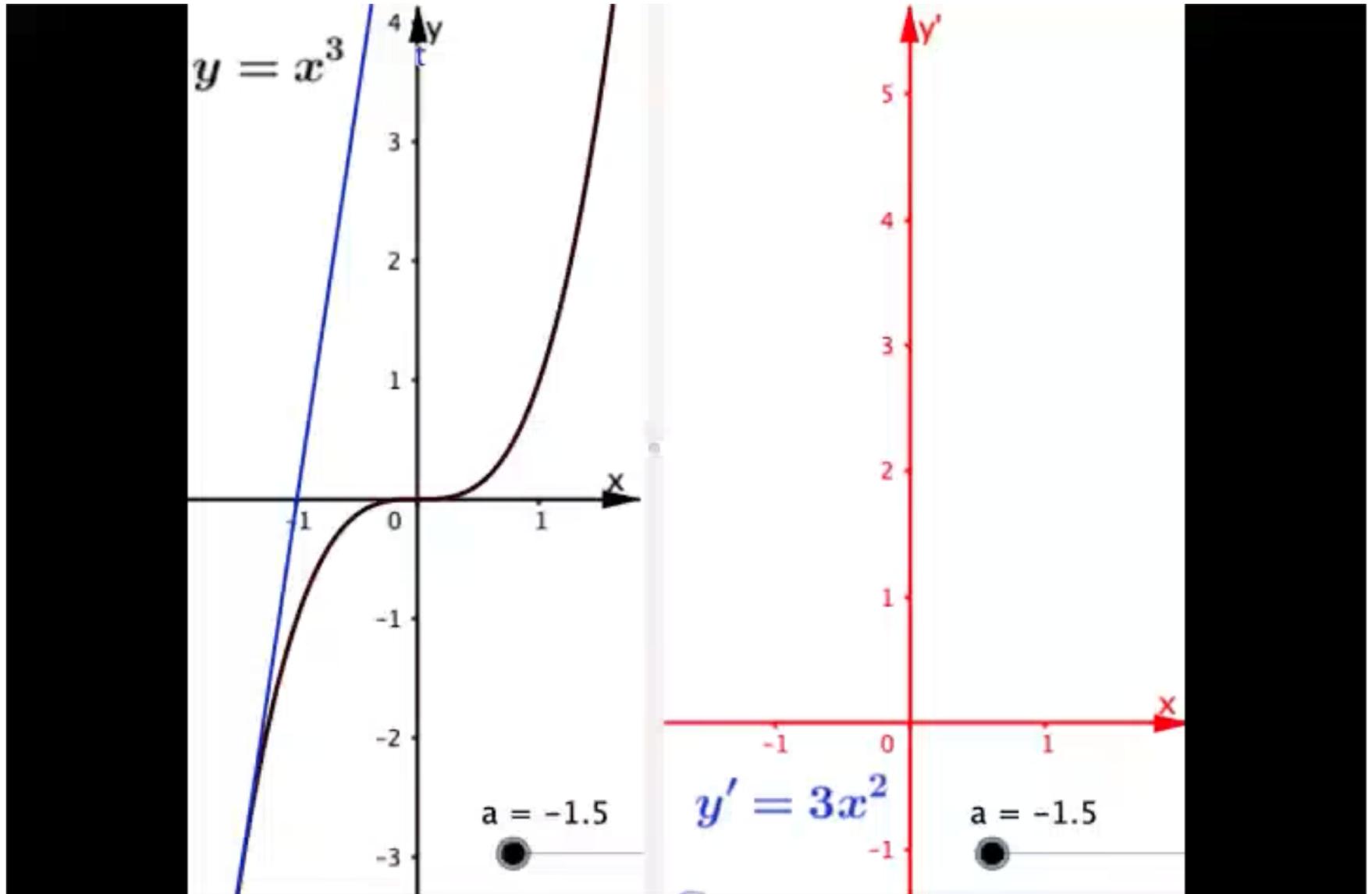
$$(x+h)^3 = x^3 + 3hx^2 + 3h^2x + h^3$$

Limite del rapporto incrementale

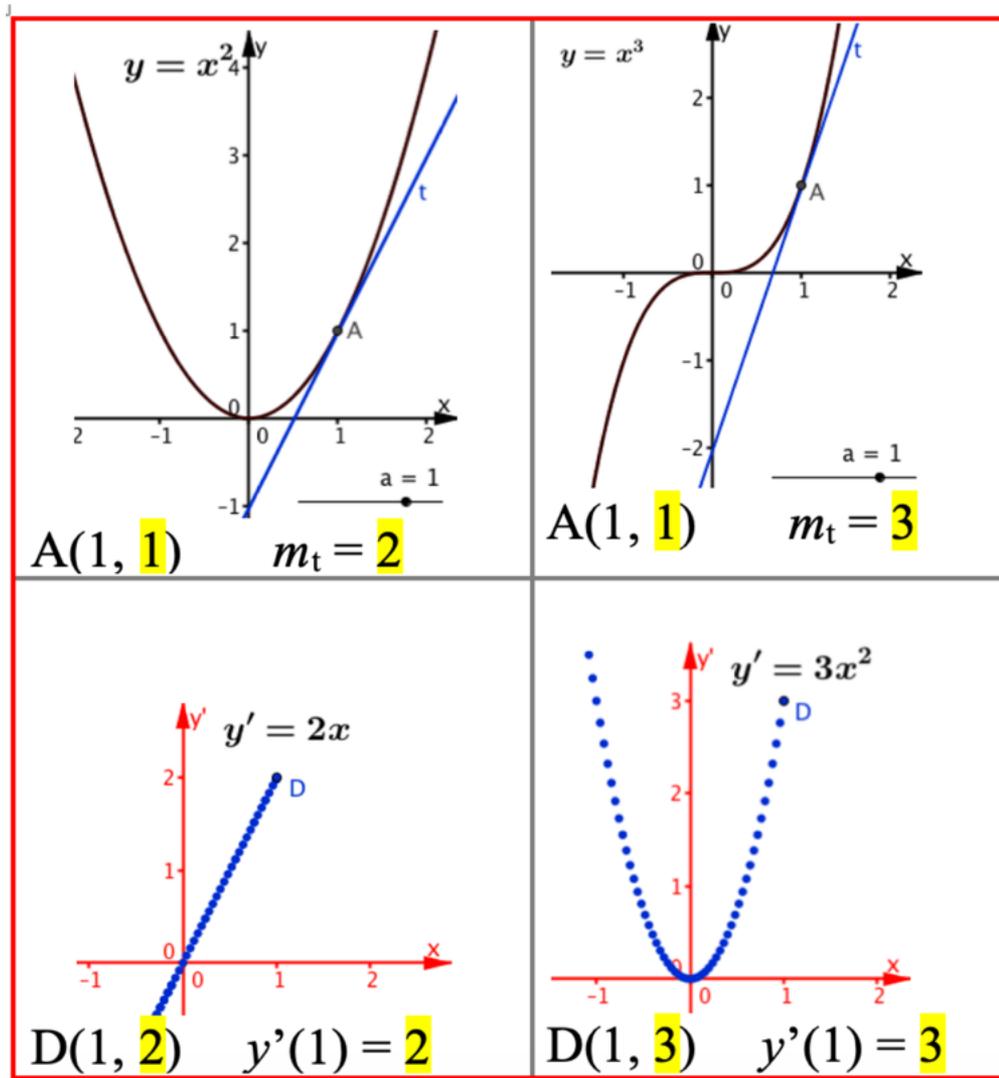
$$\lim_{h \rightarrow 0} (3x^2 + 3hx + h^2) = 3x^2$$

La derivata di $y = x^3$ è $y' = 3x^2$.

Video: $y = x^3$ e la sua derivata



Quesito 3



Quesiti 4 e 5.

Derivate di funzioni del tipo $y = x^n$

Funzione	Esponente	Derivata	Esponente
$y = x^2$	2	$y' = 2x = 2x^1$	$1 = 2 - 1$
$y = x^3$	3	$y' = 3x^2$	$2 = 3 - 1$
$y = x^4$	4	$y' = 4x^3$	$3 = 4 - 1$
$y = x^n$	n	$y' = n x^{n-1}$	$n - 1$

Una funzione del tipo $y = x^n$ (con n numero naturale) ha come derivata $y' = nx^{n-1}$

L'ultima derivata di funzione elementare

Calcolo la derivata di $y = e^x$

Derivata della funzione $y = e^x$

Ecco il procedimento da seguire

1. Rapporto incrementale

Proprietà delle potenze

$$e^{x+h} = e^x e^h$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \frac{e^x \cdot e^h - e^x}{h} = e^x \frac{e^h - 1}{h}$$

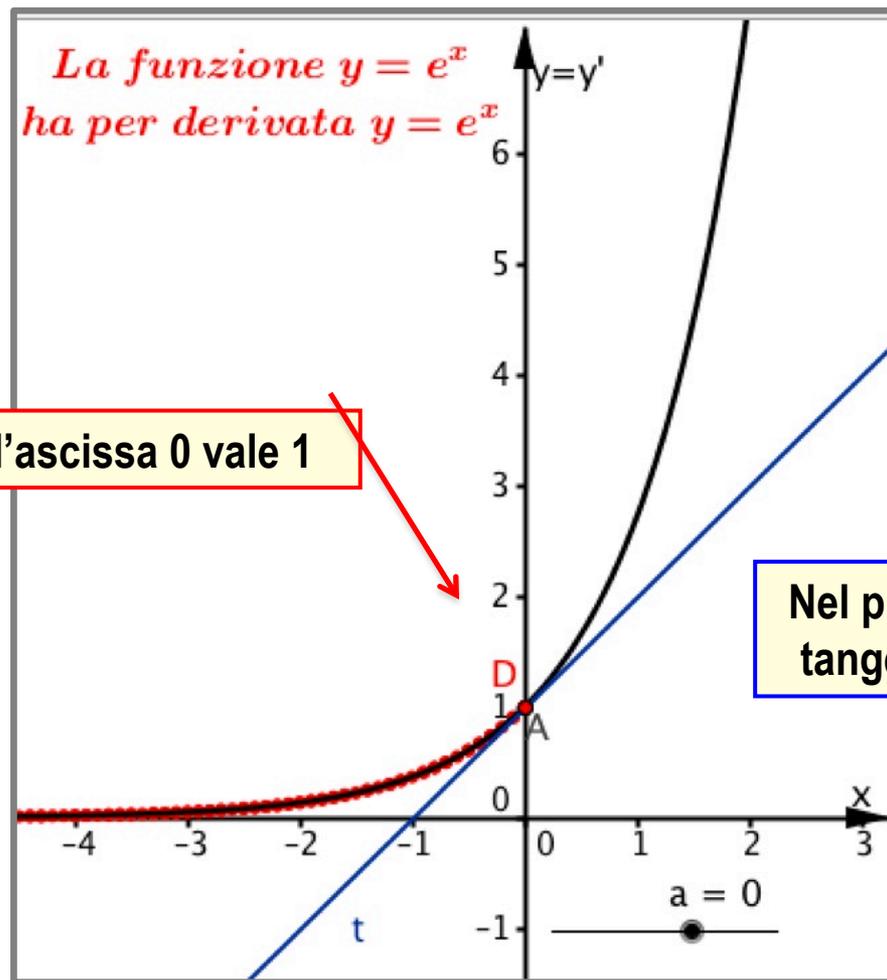
2. Limite del rapporto incrementale

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left[e^x \frac{e^h - 1}{h} \right] = e^x$$

1

h	-0,1	-0,0001	$\rightarrow 0 \leftarrow$	0,0001	0,1
$\frac{e^h - 1}{h}$	0,951626	0,999950	1	1,000050	1,051709

Grafico di $y = e^x$ con la sua derivata

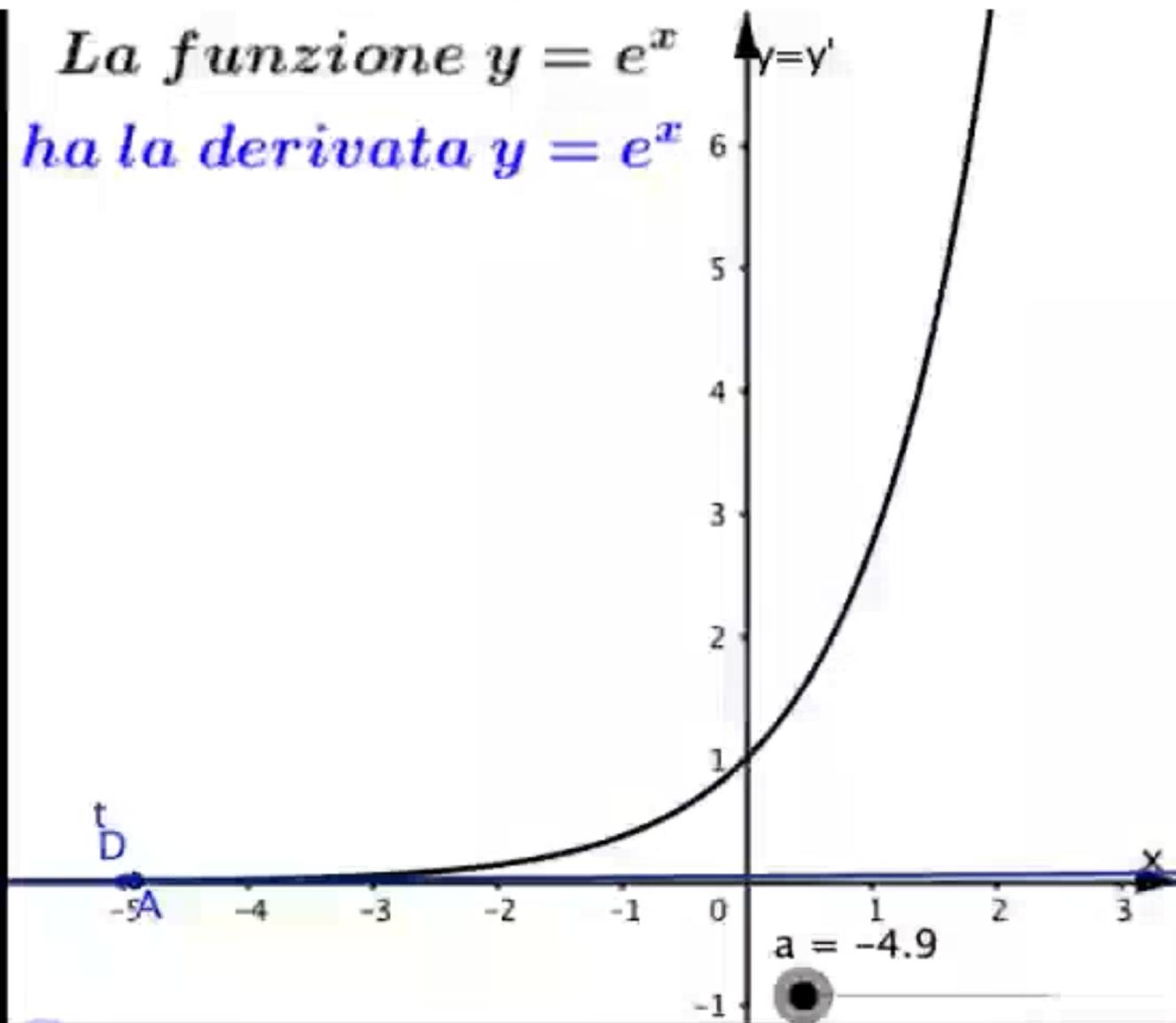


La derivata nel punto d'ascissa 0 vale 1

Nel punto A di ascissa 0 la tangente t ha pendenza 1

Video: funzione $y = e^x$ e sua derivata

La funzione $y = e^x$
ha la derivata $y = e^x$



Sintesi complessiva

Ecco tutte le derivate di funzioni elementari che hai calcolato

Funzione	Derivata
$y = k$	$y' = 0$
$y = x$	$y' = 1$
$y = \sin(x)$	$y' = \cos(x)$
$y = \cos(x)$	$y' = -\sin(x)$
$y = x^n$	$y' = nx^{n-1}$
$y = e^x$	$y' = e^x$