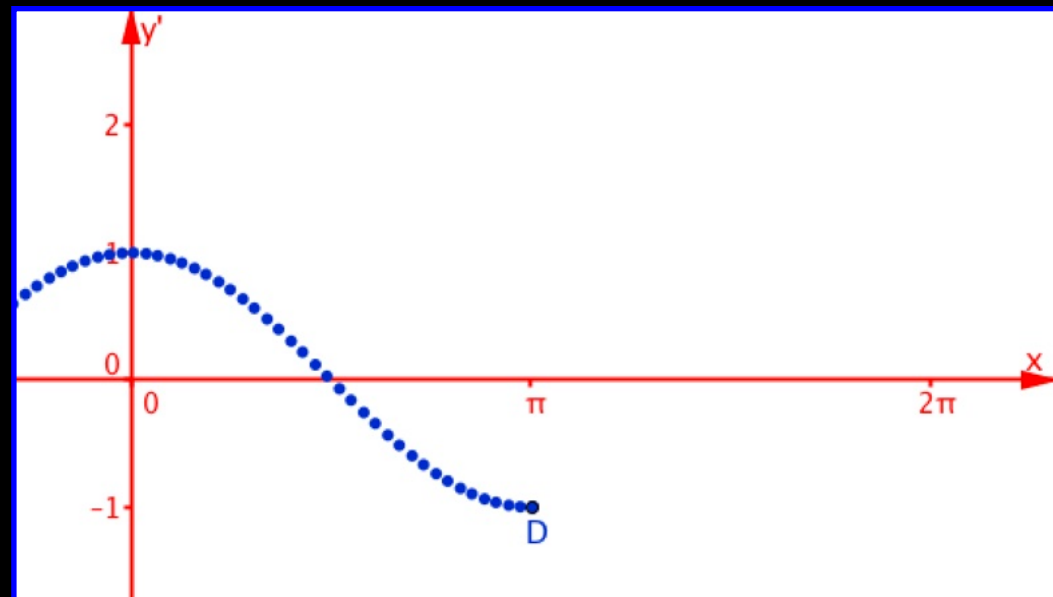
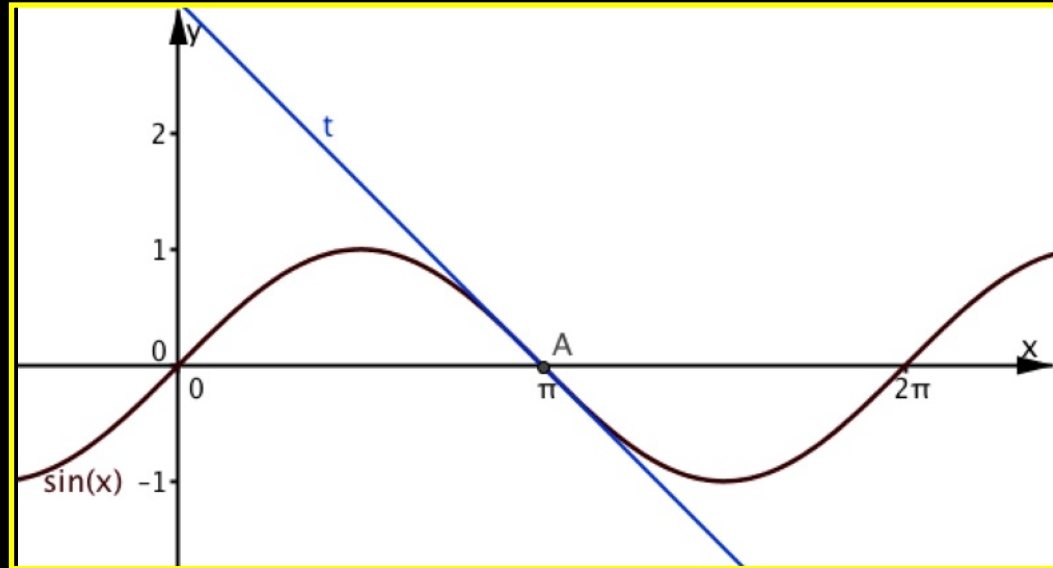


Derivate di funzioni elementari I



Come è organizzato il calcolo differenziale

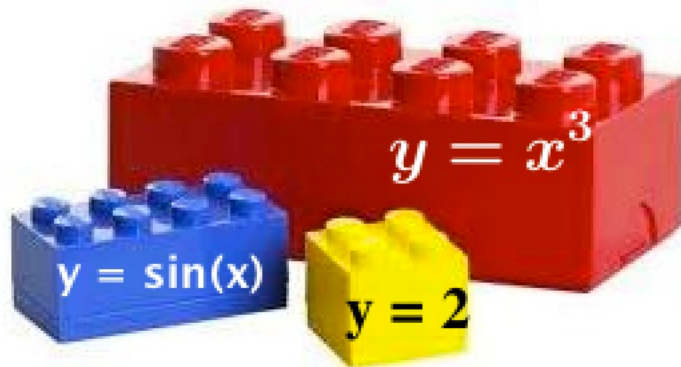
Il calcolo differenziale studia le derivate.

Pensa alla tante funzioni che hai incontrato finora: calcolare il limite del rapporto incrementale per tutte queste funzioni sarebbe un lavoro lunghissimo!

Ecco invece il percorso molto più rapido che seguirai:

1. Calcolo le derivate di poche funzioni elementari.
2. Studio le regole dell'Algebra delle derivate per calcolare le derivate di tutte le funzioni ottenute da quelle elementari con procedimenti noti.

**Esempi di funzioni ottenute
con 3 funzioni elementari**



$$y = \frac{2\sin(x)}{x^3} \quad y = 2x^3 + \sin(x)$$

Procedimento

In questa lezione cominci a calcolare la funzione derivata di alcune funzioni elementari.

Il procedimento di calcolo sarà sempre lo stesso:

1. Calcolo del rapporto incrementale

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

2. Calcolo del limite del rapporto incrementale

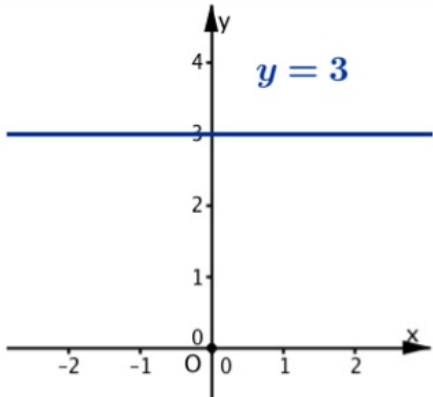
$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x)$$

Ma lo sviluppo dei calcoli varierà al variare della funzione.

E ricorderai sempre di osservare la derivata come pendenza della retta tangente al grafico della funzione.

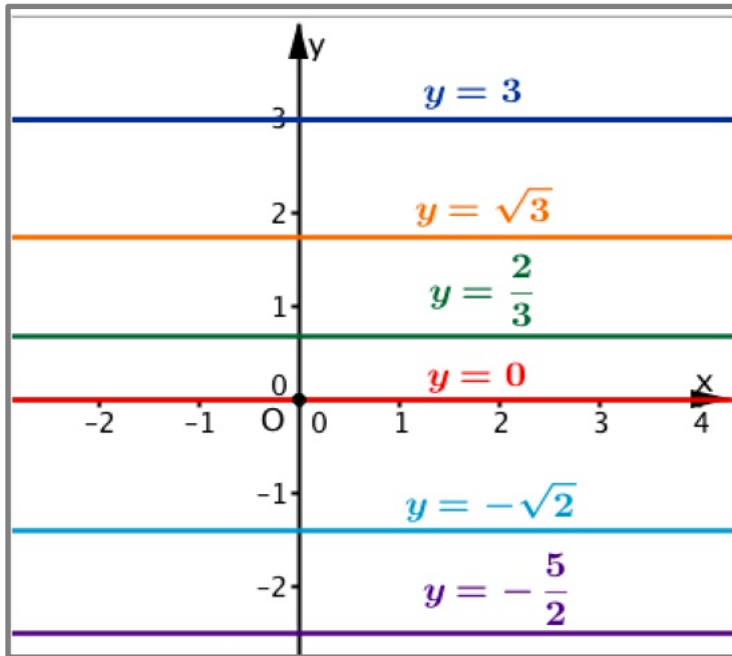
Derivata di $y = 3$

Cominciamo con una funzione molto semplice
ragioniamo con grafico e calcoli

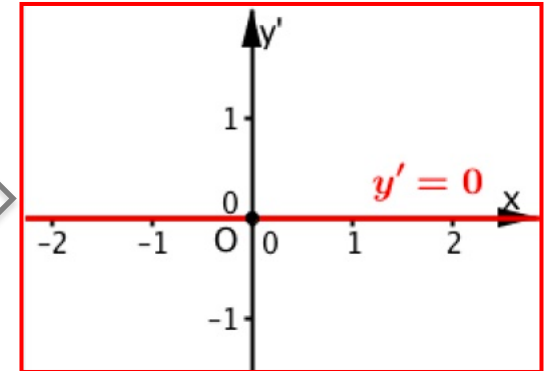
Grafico	Calcoli
 Il grafico è una retta r, che coincide, in ogni punto, con la retta tangente. La retta r ha pendenza 0. La derivata dà la pendenza della tangente. Concludo che la derivata vale 0 in ogni punto.	1. Rapporto incrementale $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3-3}{h} = 0 \quad \text{per } h \neq 0$ 2. Limite del rapporto incrementale $\lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0$ Quindi trovo $y' = 0$
La funzione $y = 3$ ha come derivata $y' = 0$	

Derivata di tutte le funzioni del tipo $y = k$

Posso ripetere gli stessi ragionamenti, a partire da tutte le altre funzioni che descrivono rette con pendenza 0. Ecco che cosa trovo.



Derivata



Le funzioni $y = -\frac{5}{2}$, $y = -\sqrt{2}$, $y = 0$, $y = \frac{2}{3}$, ..., $y = k$
hanno tutte derivata $y' = 0$

Derivata della funzione $y = \sin(x)$

Ma i calcoli non sono così semplici per calcolare la derivata di $y = \sin(x)$

Formula di addizione

$$\sin(x + h) = \sin(x)\cos(h) + \cos(x)\sin(h)$$

1. Rapporto incrementale

$$\begin{aligned}\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} = \frac{\sin(x) \cdot \cos(h) + \cos(x) \cdot \sin(h) - \sin(x)}{h} = \\ &= \sin(x) \frac{\cos(h) - 1}{h} + \cos(x) \frac{\sin(h)}{h}\end{aligned}$$

2. Limite del rapporto incrementale

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left[\sin(x) \frac{\cos(h) - 1}{h} + \cos(x) \frac{\sin(h)}{h} \right] = \cos(x)$$

Note: A blue circle highlights $\frac{\cos(h) - 1}{h}$ with a blue arrow pointing to a blue '0'. A red circle highlights $\frac{\sin(h)}{h}$ with a red arrow pointing to a red '1'.

h	-0,1	-0,0001	→0←	0,0001	0,1
$\frac{\sin(h)}{h}$	0,998334	0,999999998	1	0,999999998	0,998334
$\frac{\cos(h)-1}{h}$	0,049968	0,00006	0	-0,00005	-0,060439

La derivata della funzione $y = \sin(x)$

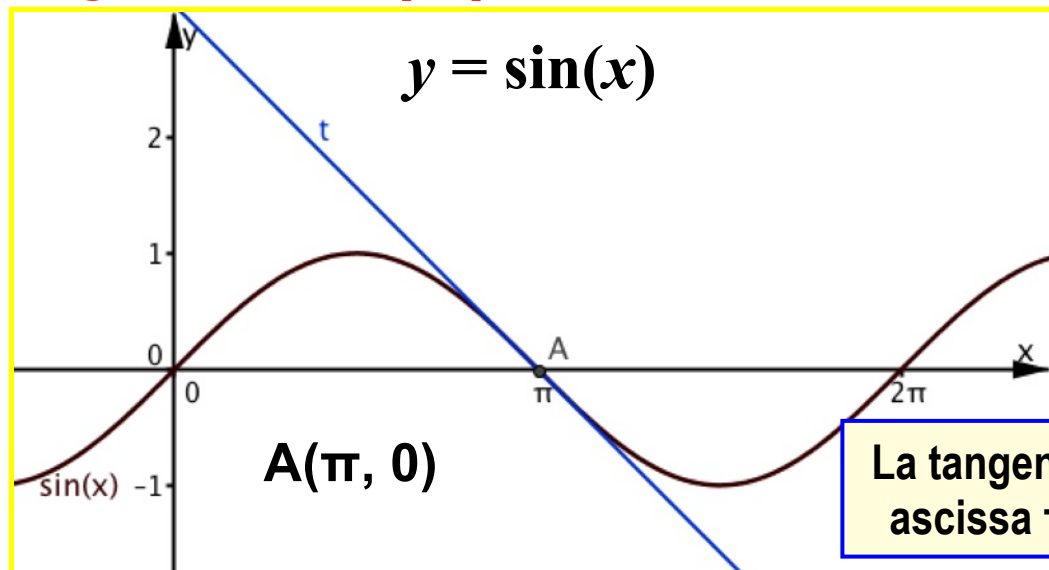
Abbiamo ottenuto.

- data la funzione $y = \sin(x)$
- la funzione derivata è $y' = \cos(x)$.

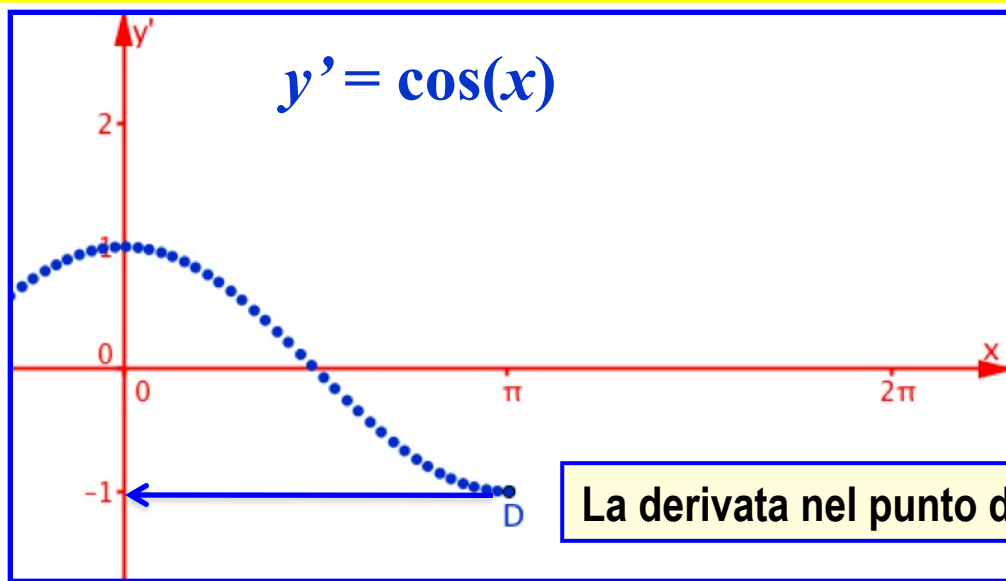
Così conosco la derivata di $y = \sin(x)$ in tutti i suoi punti, senza dover ripetere il limite del rapporto incrementale. Due esempi:

- la derivata di $y = \sin(x)$ nel punto $O(0, 0)$ è $\cos(0) = 1$;
- la derivata di $y = \sin(x)$ nel punto $A(\pi, 0)$ è $\cos(\pi) = -1$

Grafico di $y = \sin(x)$ e della sua derivata

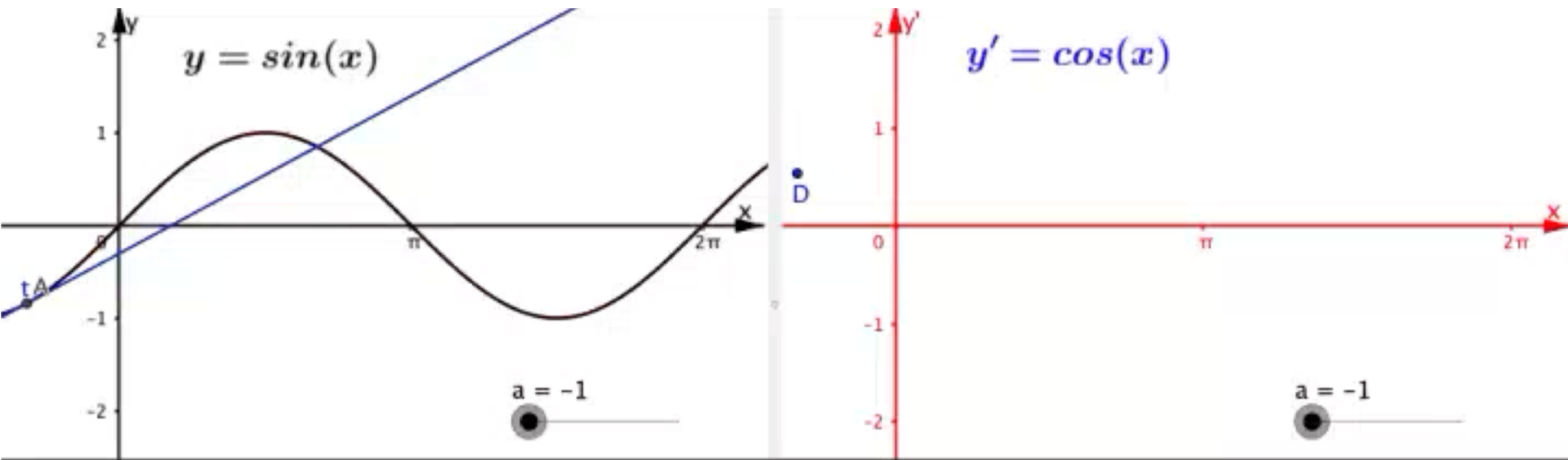


La tangente t nel punto A di ascissa π ha pendenza -1



La derivata nel punto d'ascissa π vale -1

Video: $y = \sin(x)$ e la sua derivata



Attività: derivare altre due funzioni elementari

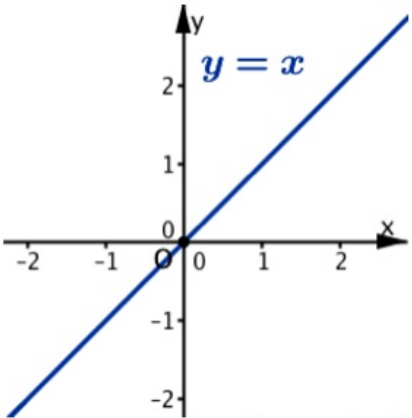
Completa la scheda di lavoro per calcolare la derivata di:

- **$y = x$.**
- **$y = \cos(x)$.**

Riflessioni sui risultati ottenuti

Quesito 1

La derivata di $y = x$

Grafico	Calcoli
 Il grafico è una retta s, che coincide, in ogni punto, con la retta tangente. La retta s ha pendenza 1 La derivata dà la pendenza della tangente. Perciò <i>la derivata vale</i> 1 in ogni punto.	1. Rapporto incrementale $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x + h - x}{h} = \frac{h}{h} = 1 \text{ per } h \neq 0$ 2. Limite del rapporto incrementale $\lim_{h \rightarrow 0} 1 = 1$ Quindi trovo $y' = \mathbf{1}$
La funzione $y = x$ ha come derivata $y' = \mathbf{1}$	

$y = x$ ha come derivata $y' = \mathbf{1}$

Quesito 2

La derivata di $y = \cos(x)$

Calcolo la derivata di $y = \cos(x)$

Rapporto incrementale

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\cos(x+h) - \cos(x)}{h} = \frac{\cos(x)\cos(h) - \sin(x)\sin(h) - \cos(x)}{h} =$$
$$= \cos(x) \frac{\cos(h) - 1}{h} - \sin(x) \frac{\sin(h)}{h}$$

Formula di addizione del coseno
 $\cos(x+h) = \cos(x)\cos(h) - \sin(x)\sin(h)$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(h)}{h} = 1$$

Limite del rapporto incrementale

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left[\cos(x) \frac{\cos(h) - 1}{h} - \sin(x) \frac{\sin(h)}{h} \right] = -\sin(x)$$

0 1

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(h) - 1}{h} = 0$$

$y = \cos(x)$ ha come derivata $y' = -\sin(x)$

Video: $y = \cos(x)$ e la sua derivata

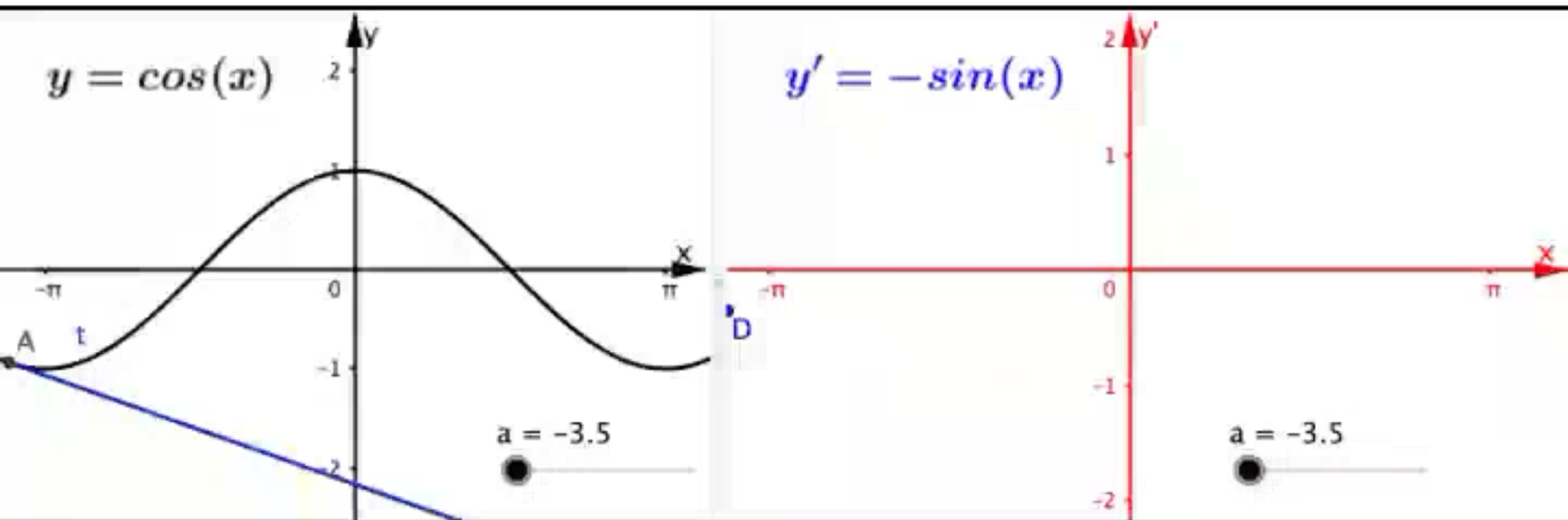
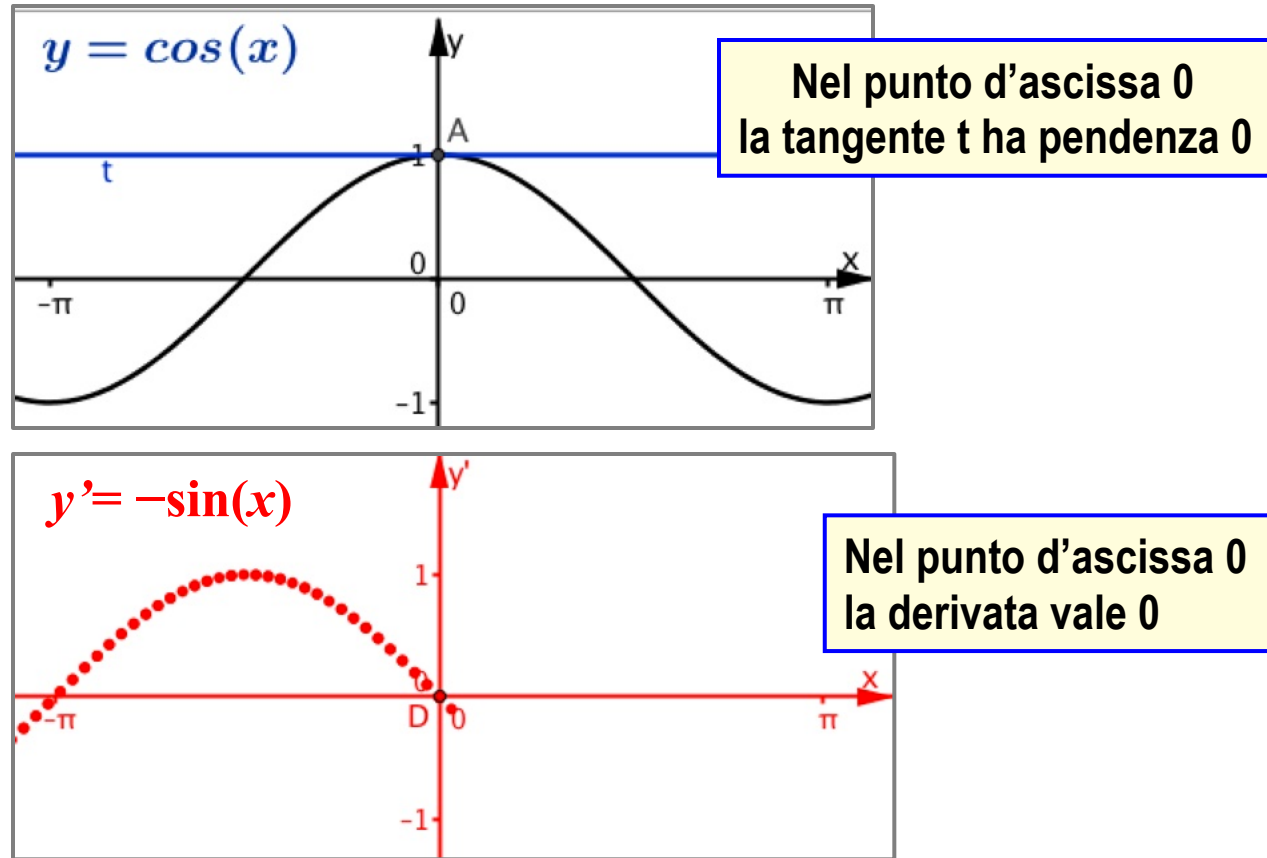


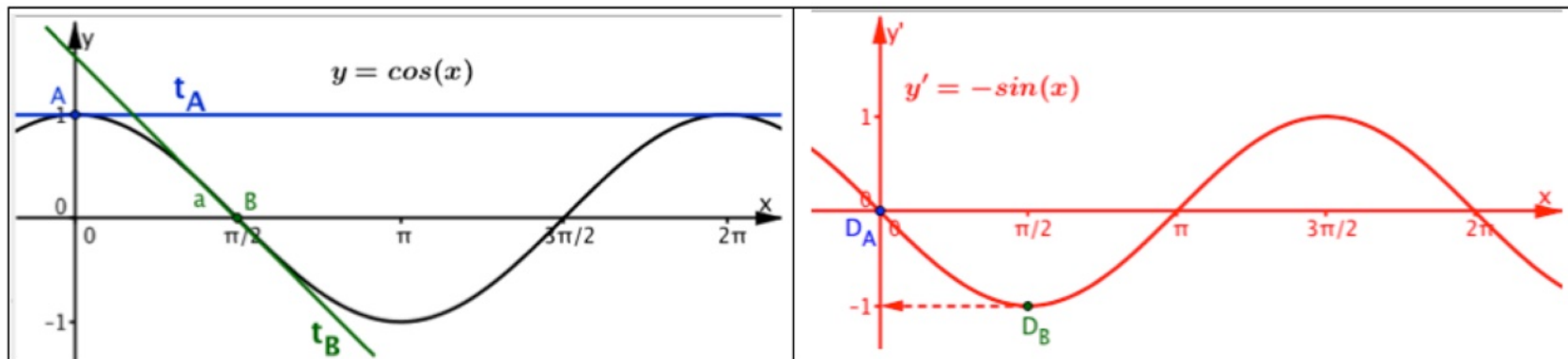
Grafico di $y = \cos(x)$ e della sua derivata

Osserviamo affiancati il grafico della funzione $\cos(x)$ e della sua derivata $y' = -\sin(x)$



Quesito 3

3. Sono disegnati i grafici di $y = \cos(x)$ e di $y' = -\sin(x)$; rispondi ai seguenti quesiti:
- Indica con A il punto della cosinusoide di ascissa 0 e completa le seguenti frasi:
 - L'ordinata del punto A è data da $\cos(0) = 1$;
 - La pendenza m_A della tangente t_A alla cosinusoide in A è $m_A = -\sin(0) = 0$
 - traccia il grafico della retta t_A .
 - Indica con B il punto della cosinusoide di ascissa $\pi/2$ e completa le seguenti frasi:
 - L'ordinata del punto B è data da $\cos(\pi/2) = 0$;
 - la pendenza m_B della tangente t_B alla cosinusoide in B è $m_B = -\sin(\pi/2) = -1$
 - traccia il grafico della retta t_B .



Sintesi

Ecco le derivate di funzioni elementari calcolate finora

Funzione	Derivata
$y = k$	$y' = 0$
$y = x$	$y' = 1$
$y = \sin(x)$	$y' = \cos(x)$
$y = \cos(x)$	$y' = -\sin(x)$