Derivate di funzioni elementari I

Enrico Pietropoli, 2022

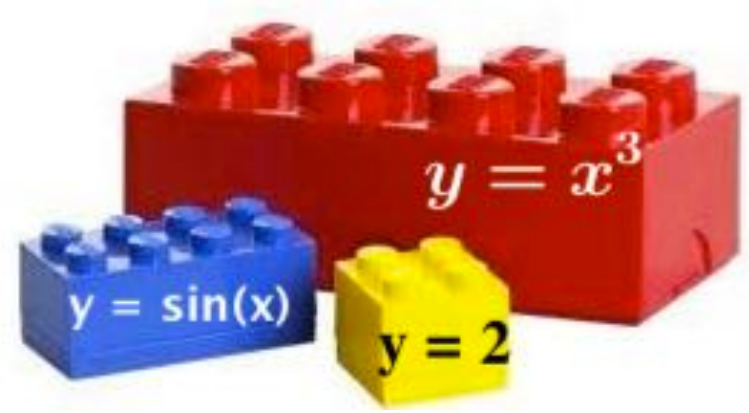
Come è organizzato il calcolo differenziale

Il calcolo differenziale studia le derivate.

Pensa alla tante funzioni che hai incontrato finora: calcolare il limite del rapporto incrementale per tutte queste funzioni sarebbe un lavoro lunghissimo!

Ecco invece il percorso molto più rapido che seguirai:

1. **Calcolo le derivate di poche funzioni elementari.**
2. **Studio le regole dell'Algebra delle derivate per calcolare le derivate di tutte le funzioni ottenute da quelle elementari con procedimenti noti.**



Esempi di funzioni ottenute con 3 funzioni elementari

$$y = \frac{2\sin(x)}{x^3} \qquad y = 2x^3 + \sin(x)$$

Procedimento

In questa lezione cominci a calcolare la funzione derivata di alcune funzioni elementari.

Il procedimento di calcolo sarà sempre lo stesso:

1.Calcolo del rapporto incrementale

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

2. Calcolo del limite del rapporto incrementale

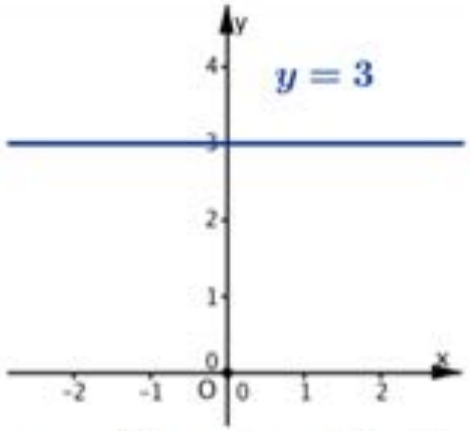
$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x)$$

Ma lo sviluppo dei calcoli varierà al variare della funzione.

E ricorderai sempre di osservare la derivata come pendenza della retta tangente al grafico della funzione.

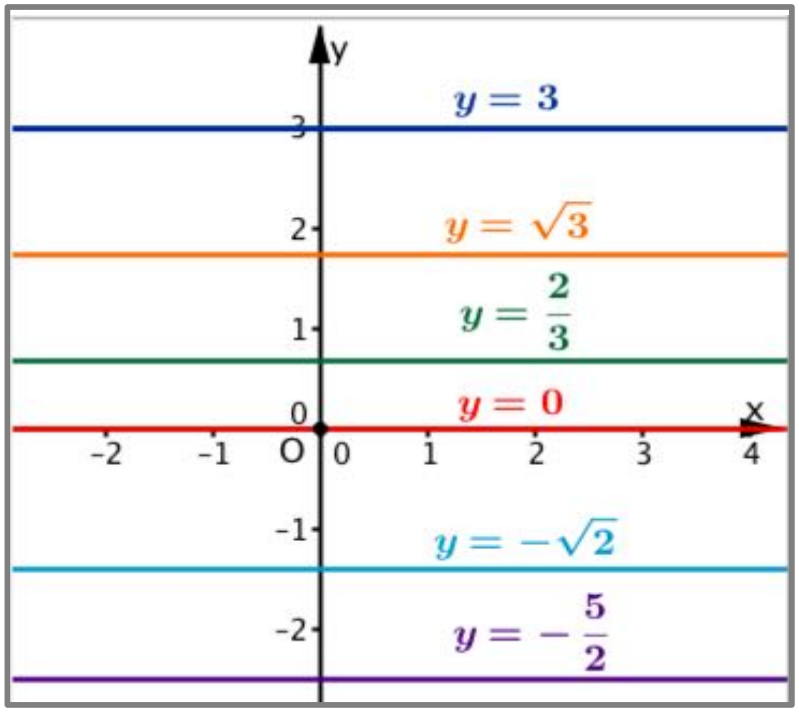
Derivata di $y = 3$

Cominciamo con una funzione molto semplice ragioniamo con grafico e calcoli

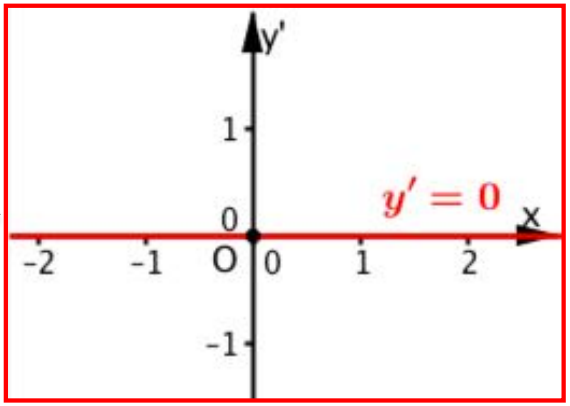
Grafico	Calcoli
	**1. Rapporto incrementale** $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3-3}{h} = 0 \quad \text{per } h \neq 0$ **2. Limite del rapporto incrementale** $\lim_{h \to 0} 0 = 0$ Quindi trovo $y' = 0$
Il grafico è una retta *r*, che coincide, in ogni punto, con la retta tangente. La retta *r* ha pendenza 0. La derivata dà la pendenza della tangente. Concludo che *la derivata vale 0* in ogni punto.	
La funzione y = 3 ha come derivata y' = 0	

Derivata di tutte le funzioni del tipo y = k

Posso ripetere gli stessi ragionamenti, a partire da tutte le altre funzioni che descrivono rette con pendenza 0. Ecco che cosa trovo.



Derivata



Le funzioni $y = -\frac{5}{2}$, $y = -\sqrt{2}$, $y = 0$, $y = \frac{2}{3}$, ..., $y = k$

hanno tutte derivata $y' = 0$

Derivata della funzione y = sin(x)

Ma i calcoli non sono così semplici per calcolare la derivata di y = sin(x)

Formula di addizione
$\sin(x+h) = \sin(x)\cos(h) + \cos(x)\sin(h)$

1. Rapporto incrementale

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} = \frac{\sin(x)\cdot\cos(h) + \cos(x)\cdot\sin(h) - \sin x}{h} =$$

$$= \sin(x)\frac{\cos(h)-1}{h} + \cos(x)\frac{\sin(h)}{h}$$

2. Limite del rapporto incrementale

$$\lim_{h\to 0}\left[\sin(x)\frac{\cos(h)-1}{h} + \cos(x)\frac{\sin(h)}{h}\right] = \cos(x)$$

0

1

h	-0,1	-0,0001	→0←	0,0001	0,1
$\frac{\sin(h)}{h}$	0,998334	0,999999998	1	0,999999998	0,998334
$\frac{\cos(h)-1}{h}$	0,049968	0,00006	0	-0,00005	-0,060439

La derivata della funzione y = sin(x)

Abbiamo ottenuto.

- data la funzione y = sin(x)

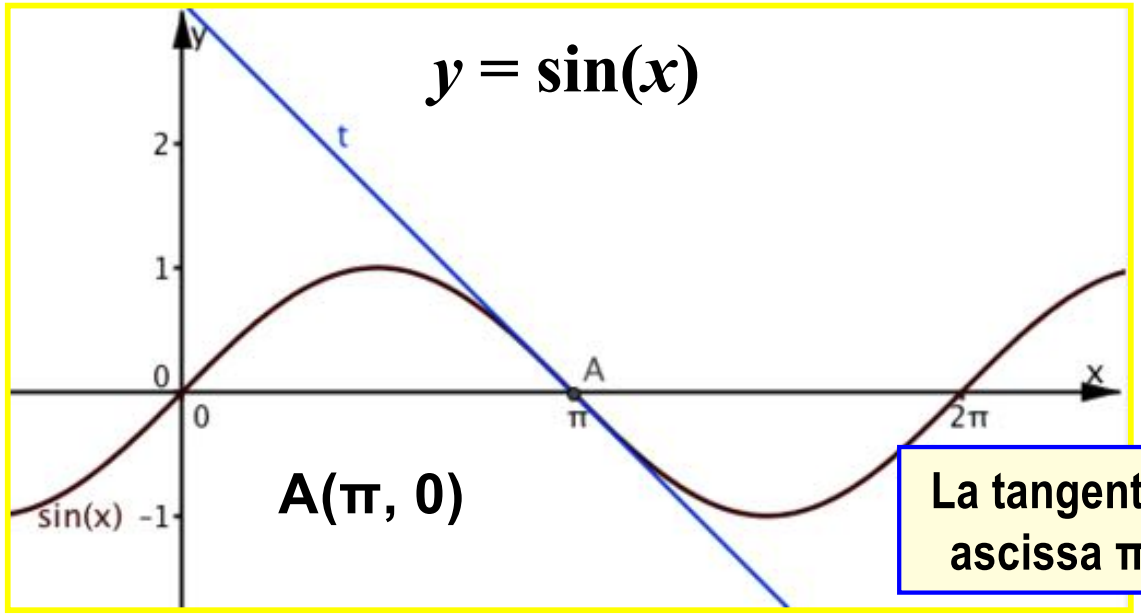
- la funzione derivata è y' = cos(x).

Così conosco la derivata di y = sin(x) in tutti i suoi punti, senza dover ripetere il limite del rapporto incrementale. Due esempi:

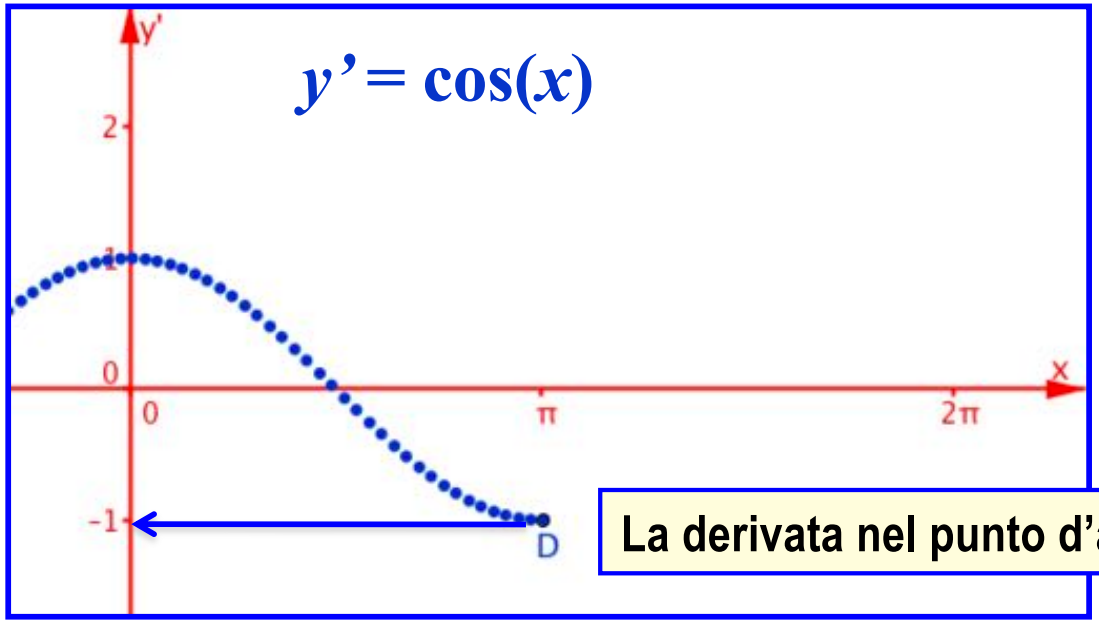
- la derivata di y = sin(x) nel punto O(0, 0) è cos(0) = 1;

- la derivata di y = sin(x) nel punto A(π, 0) è cos(π) = -1

Grafico di y = sin(x) e della sua derivata

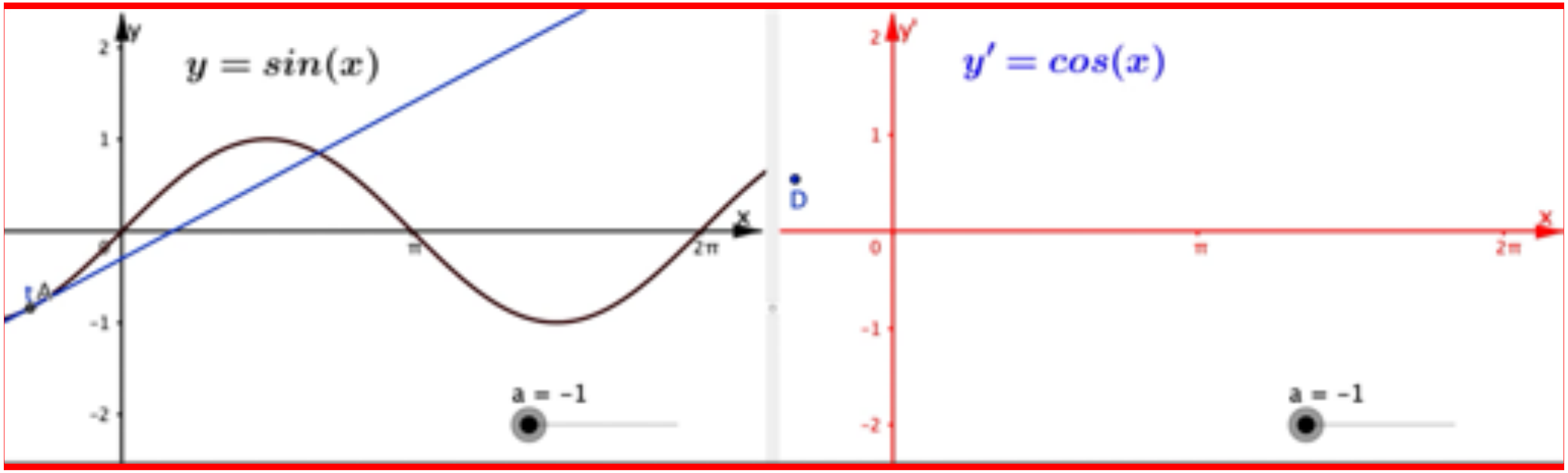


La tangente *t* nel punto A di ascissa π ha pendenza -1



La derivata nel punto d'ascissa π vale -1

Video: y = sin(x) e la sua derivata



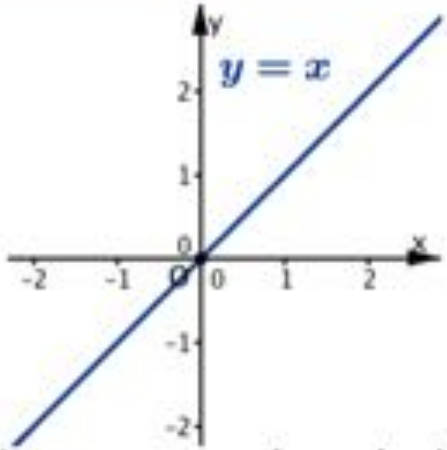
Attività: derivare altre due funzioni elementari

Completa la scheda di lavoro per calcolare la derivata di:

- $y = x$.
- $y = \cos(x)$.

Riflessioni sui risultati ottenuti

Quesito 1
La derivata di $y = x$

Grafico	Calcoli
 Il grafico è una retta s, che coincide, in ogni punto, con la retta tangente. La retta s ha pendenza 1 La derivata dà la pendenza della tangente. Perciò *la derivata vale* 1 in ogni punto.	**1. Rapporto incrementale** $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x+h-x}{h} = \frac{h}{h} = 1 \quad \text{per } h \neq 0$ **2. Limite del rapporto incrementale** $\lim_{h \to 0} 1 = 1$ Quindi trovo $y' = 1$
La funzione $y = x$ ha come derivata $y' = 1$	

$y = x$ ha come derivata $y' = 1$

Quesito 2
La derivata di $y = \cos(x)$

Calcolo la derivata di y = cos(x)

Formula di addizione del coseno

$$\cos(x+h) = \cos(x)\cos(h) - \sin(x)\sin(h)$$

Rapporto incrementale

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\cos(x+h) - \cos(x)}{h} = \frac{\cos(x)\cos(h) - \sin(x)\sin(h) - \cos(x)}{h} =$$

$$= \cos(x)\frac{\cos(h)-1}{h} - \sin(x)\frac{\sin(h)}{h}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin(h)}{h} = 1$$

Limite del rapporto incrementale

$$\lim_{h\to 0}\left[\cos(x)\frac{\cos(h)-1}{h} - \sin(x)\frac{\sin(h)}{h}\right] = -\sin(x)$$

$\frac{\cos(h)-1}{h} \to 0$ $\quad \frac{\sin(h)}{h} \to 1$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\cos(h)-1}{h} = 0$$

$y = \cos(x)$ ha come derivata $y' = -\sin(x)$

Video: y = cos(x) e la sua derivata

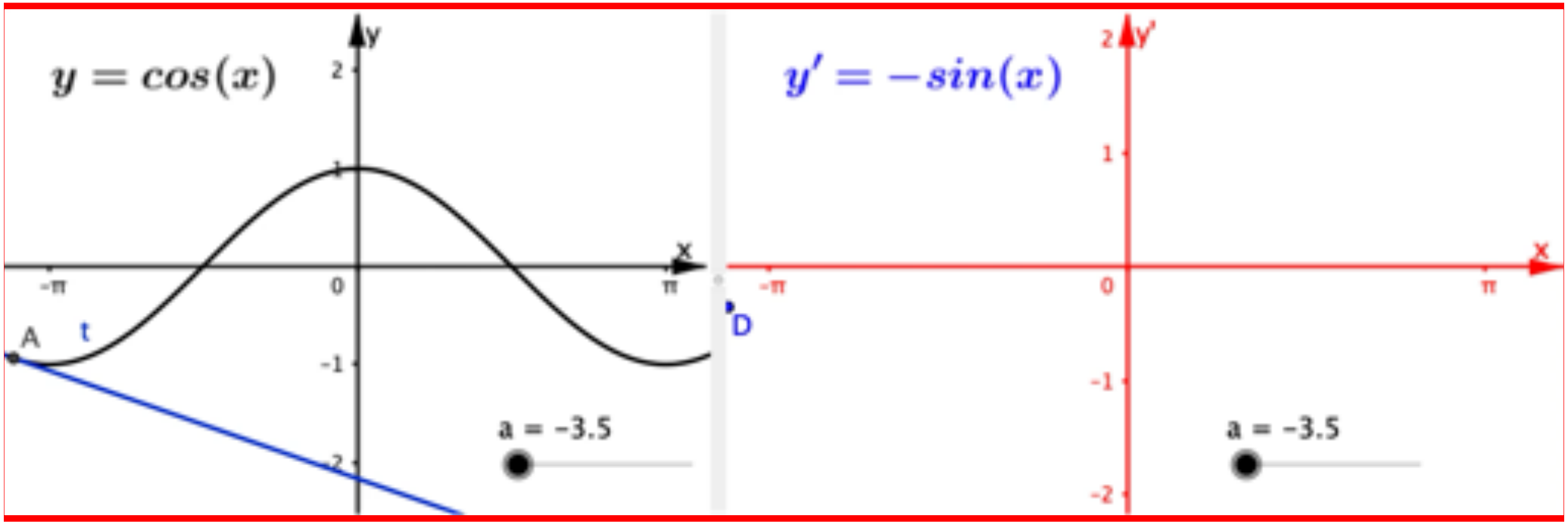
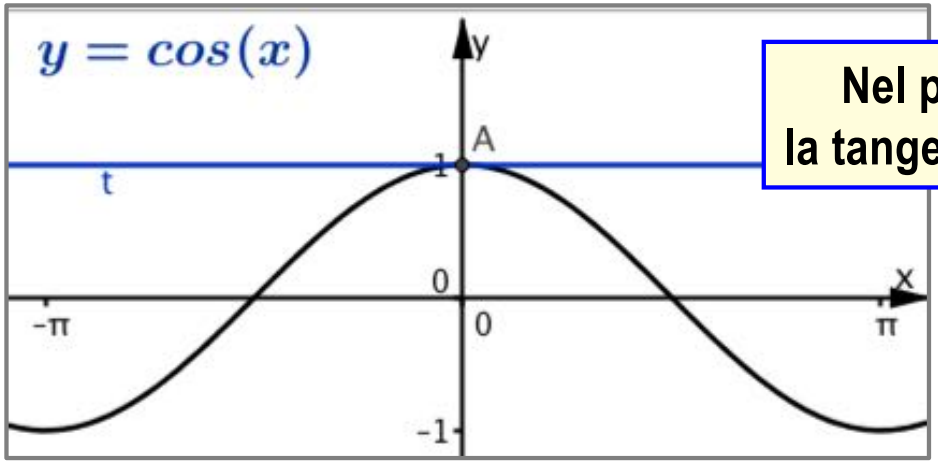
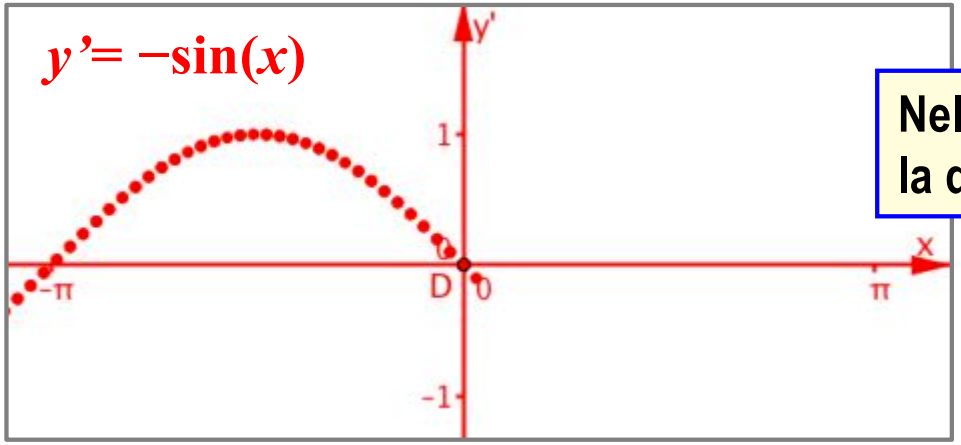


Grafico di y = cos(x) e della sua derivata

Osserviamo affiancati il grafico della funzione cos(x) e della sua derivata y' = −sin(x)



Nel punto d'ascissa 0
la tangente t ha pendenza 0



Nel punto d'ascissa 0
la derivata vale 0

Quesito 3

3. Sono disegnati i grafici di $y = \cos(x)$ e di $y' = -\sin(x)$; rispondi ai seguenti quesiti:

a. Indica con A il punto della cosinusoide di ascissa 0 e completa le seguenti frasi:

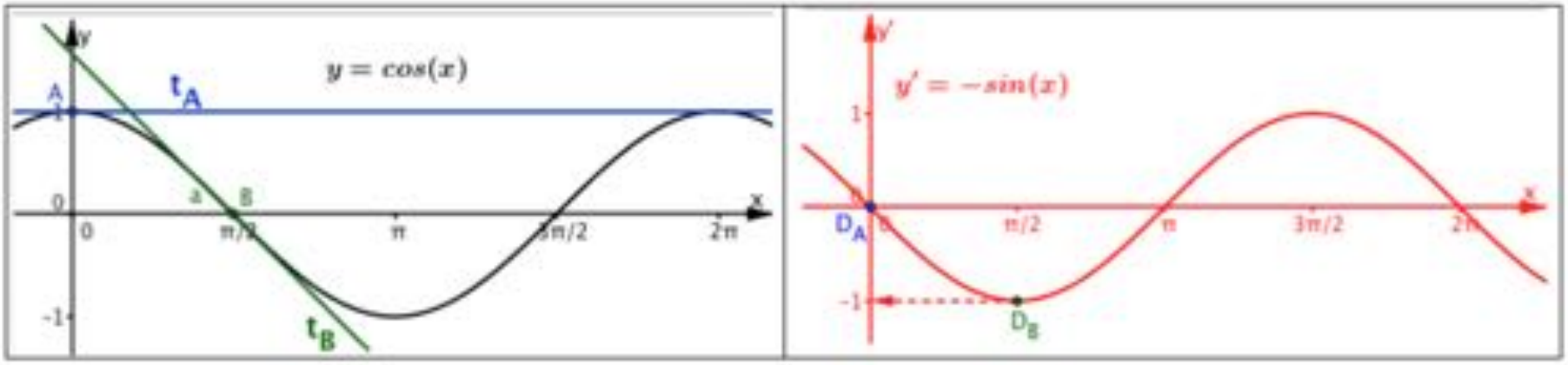
- L'ordinata del punto A è data da $\cos(0) = 1$;
- La pendenza m_A della tangente t_A alla cosinusoide in A è $m_A = -\sin(0) = 0$

b. traccia il grafico della retta t_A.

c. Indica con B il punto della cosinusoide di ascissa $\pi/2$ e completa le seguenti frasi:

- L'ordinata del punto B è data da $\cos(\pi/2) = 0$;
- la pendenza m_B della tangente t_B alla cosinusoide in B è $m_B = -\sin(\pi/2) = -1$

d. traccia il grafico della retta t_B.



Sintesi

Ecco le derivate di funzioni elementari calcolate finora

Funzione	Derivata
$y = k$	$y' = 0$
$y = x$	$y' = 1$
$y = \sin(x)$	$y' = \cos(x)$
$y = \cos(x)$	$y' = -\sin(x)$