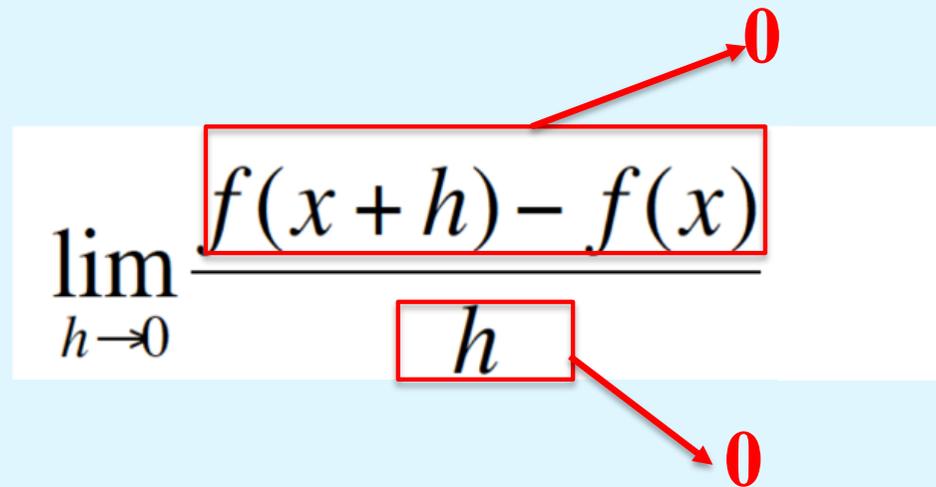


Forme indeterminate del tipo 0/0

Calcolare la derivata di funzioni elementari

Il procedimento è sempre lo stesso:
calcolo il limite del rapporto incrementale

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$
The diagram shows the limit expression $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$. A red box highlights the numerator $f(x+h) - f(x)$, and another red box highlights the denominator h . Two red arrows point from these boxes to the number '0', indicating that both the numerator and denominator approach zero as h approaches zero, resulting in an indeterminate form of $0/0$.

Così trovo sempre un limite che si presenta
nella forma indeterminata del tipo $0/0$

Richiamo i limiti in forma indeterminata del tipo $0/0$

Quozienti di due funzioni che tendono a 0

Primo esempio

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)^3}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x-2} (x-2)^2 = 0$$

Nel calcolo del limite rimane $x \neq 2$ e quindi $x - 2 \neq 0$.
Perciò posso dividere per $(x - 2)$

I grafici aiutano a capire

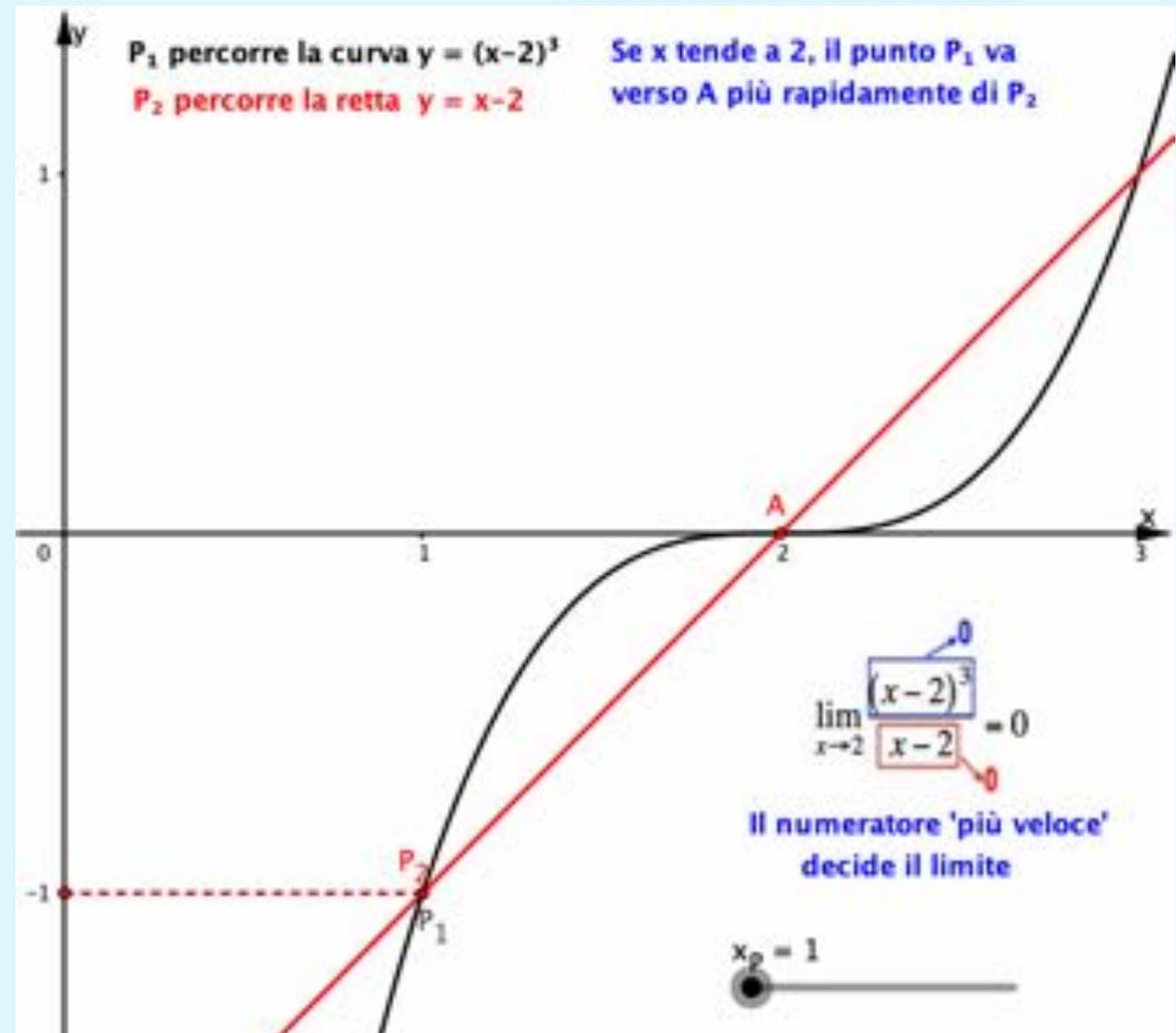
Quozienti di due funzioni che tendono a 0

Primo esempio

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)^3}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x-2)^2 = 0$$

The image shows the limit calculation with annotations: a blue box around the numerator $(x-2)^3$ has a blue arrow pointing to a '0' above it, and a red box around the denominator $x-2$ has a red arrow pointing to a '0' below it.

Il **numeratore** più veloce 'decide' il limite.



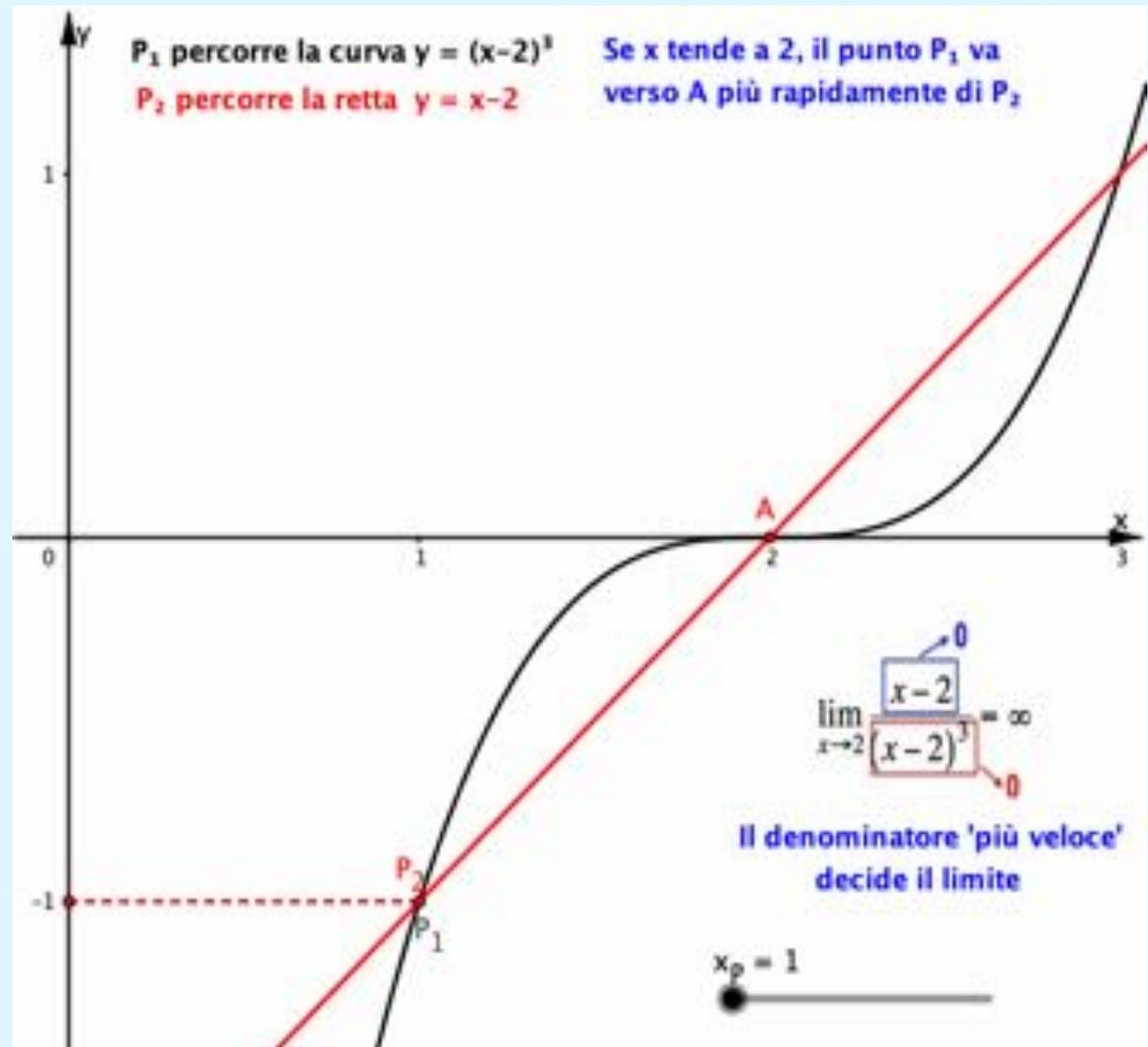
Quozienti di due funzioni che tendono a 0

Secondo esempio

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\boxed{x-2} \xrightarrow{0}}{\boxed{(x-2)^3} \xrightarrow{0}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{\boxed{(x-2)^2} \xrightarrow{0}} = \infty$$

Tende a infinito la
reciproca di una funzione
che tende a zero

Il **denominatore** più
veloce 'decide' il limite.



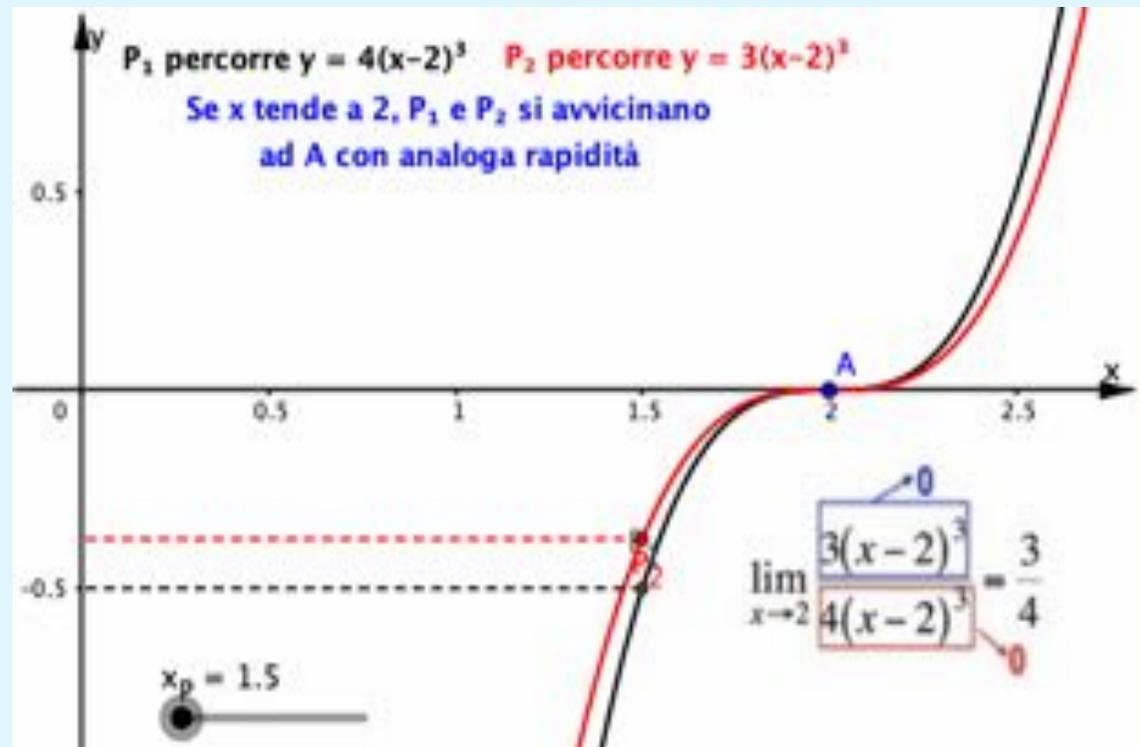
Quozienti di due funzioni che tendono a 0

Terzo esempio

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3(x-2)^3}{4(x-2)^3} = \frac{3}{4}$$

The image shows the limit calculation with annotations. A blue box highlights the numerator $3(x-2)^3$ and a red box highlights the denominator $4(x-2)^3$. A blue arrow points to the 0 in the numerator's box, and a red arrow points to the 0 in the denominator's box.

Nelle vicinanze di 2, numeratore e denominatore vanno verso 0 con analogia rapidità.



I tre esempi suggeriscono delle conclusioni generali

Quoziente di due funzioni che tendono a 0

I tre esempi

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)^3}{x-2} = 0$$

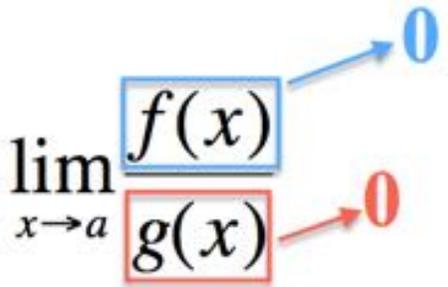
$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{(x-2)^3} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3(x-2)^3}{4(x-2)^3} = \frac{3}{4}$$

Sapere che le due funzioni tendono a zero ***non determina*** il limite del quoziente con regole valide per tutte le coppie di funzioni.

Vocabolario matematico

Tutti i limiti del tipo $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$

The diagram shows the limit expression $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$. The numerator $f(x)$ is enclosed in a blue box, and the denominator $g(x)$ is enclosed in a red box. A blue arrow points from the blue box to a blue '0', and a red arrow points from the red box to a red '0', illustrating the 0/0 indeterminate form.

prendono il nome di *'Forme indeterminate del tipo 0/0'*
[si legge *'forme indeterminate del tipo zero su zero'*]

Il risultato di queste forme indeterminate dipende dalle funzioni che compaiono a numeratore e denominatore.

Perciò occorrono particolari procedimenti per arrivare ad applicare l'algebra dei limiti finiti e infiniti.

Forme indeterminate del tipo $0/0$ presenti nel calcolo delle derivate

Rivediamo come trovare, con grafici e tabelle, il limite di quattro forme indeterminate del tipo $0/0$, presenti nel calcolo delle derivate.

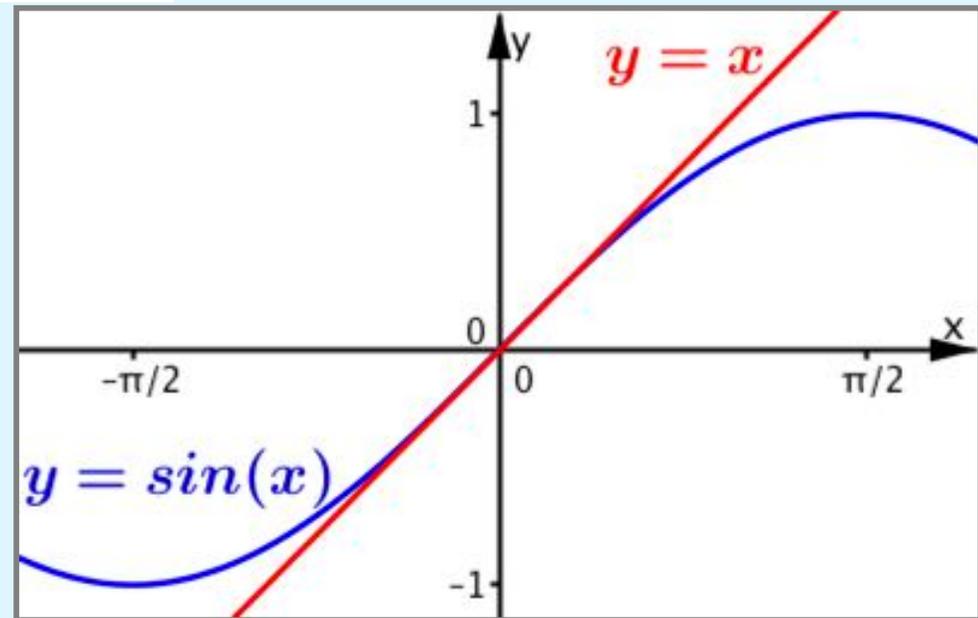
Grafici e tabelle per determinare il limite

x	$\sin(x)$	$\frac{\sin(x)}{x}$
-0,5	-0,479425	0,958851
-0,1	-0,099833	0,998334
-0,01	-0,009993	0,999998
↓	↓	↓
0	0	1
0	0	non esiste
0	0	1
↑	↑	↑
0,01	0,009993	0,999998
0,1	0,099833	0,998334
0,5	0,479425	0,958851

La tabella suggerisce che il risultato è 1

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} \rightarrow 0$$

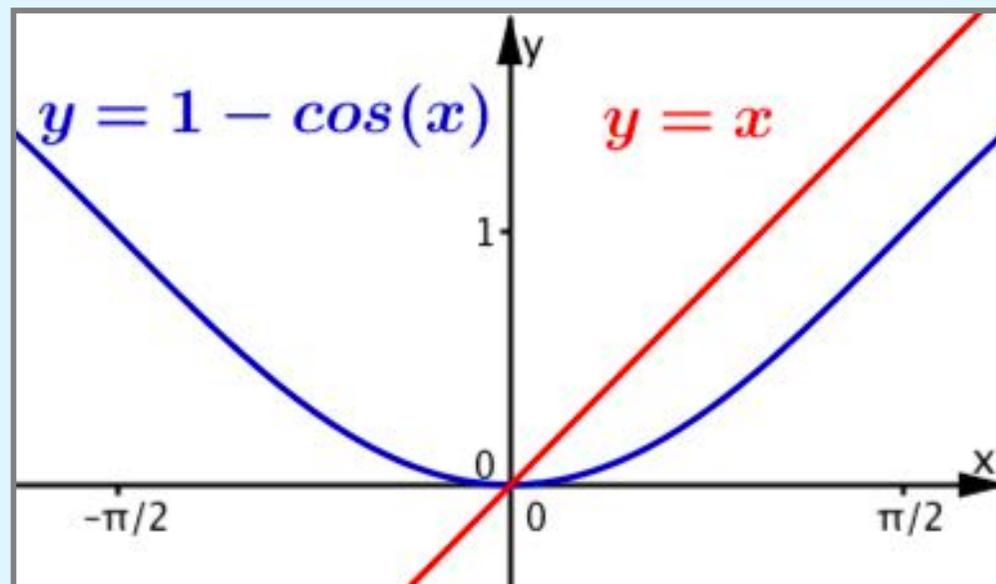


Il grafico mostra che numeratore e denominatore tendono a 0 con analoga rapidità: prevedo che il limite sia un numero diverso da 0.

Grafici e tabelle per determinare il limite

x	$1 - \cos(x)$	$\frac{1 - \cos(x)}{x}$
-0,5	0,122417	-0,244838
-0,1	0,004996	-0,049958
-0,01	0,000049	-0,004999
↓	↓	↓
0	0	0
0	0	non esiste
↑	↑	↑
0,01	0,000049	0,004999
0,1	0,004996	0,049958
0,5	0,122417	0,244838

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x} \rightarrow 0$$



La tabella conferma che il risultato è 0.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x} = 0$$

Il grafico mostra che il numeratore tende a 0 con rapidità maggiore del denominatore: prevedo il limite 0.

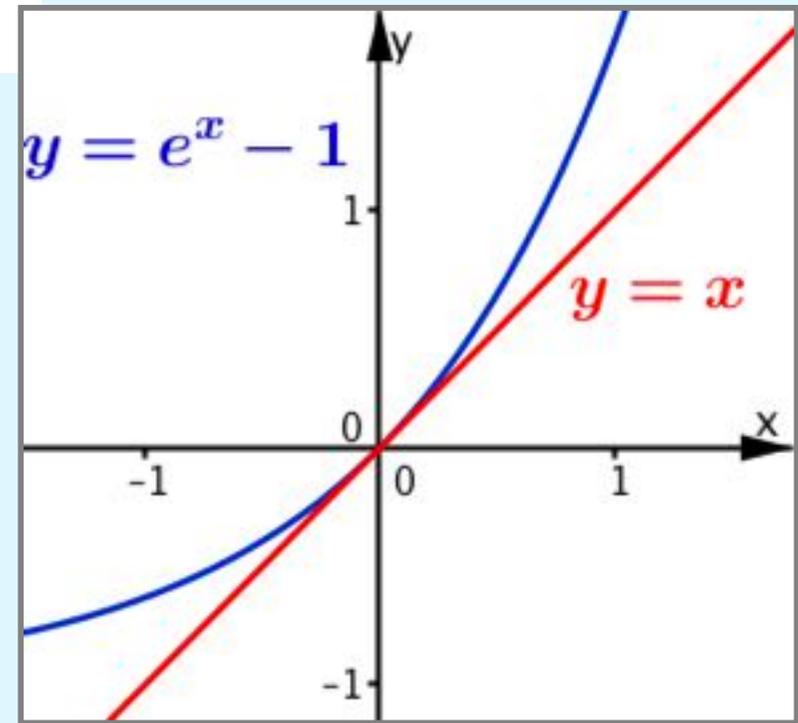
Grafici e tabelle per determinare il limite

x	$e^x - 1$	$\frac{e^x - 1}{x}$
-0,5	-0,393469	0,786939
-0,1	-0,095162	0,951626
-0,01	-0,009950	0,995017
↓	↓	↓
0	0	1
0	0	non esiste
↑	↑	↑
0,01	0,010050	1,005017
0,1	0,105170	1,051709
0,5	0,648721	1,297442

La tabella suggerisce che il risultato è 1.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} \rightarrow 0$$



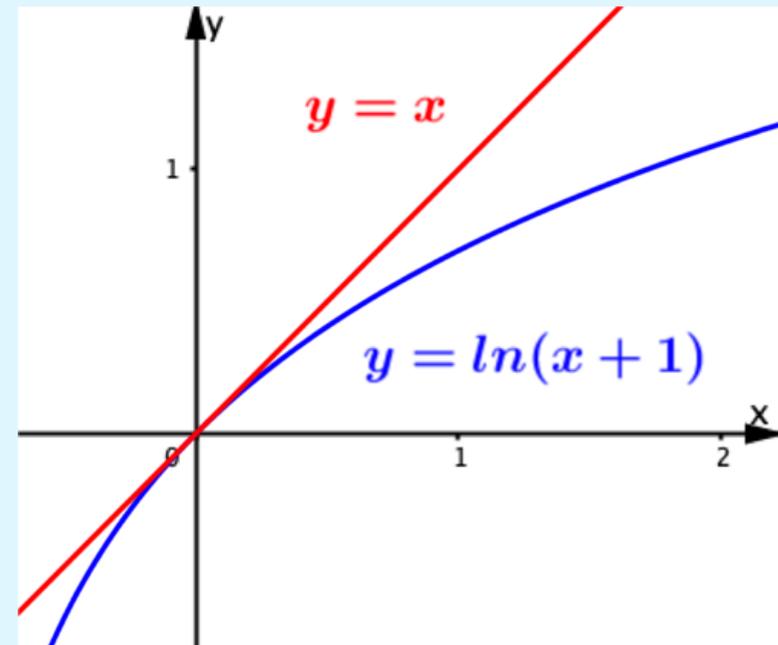
Il grafico mostra che numeratore e denominatore tendono a 0 con analogia rapidità: prevedo che il limite sia un numero diverso da 0.

Grafici e tabelle per determinare il limite

x	$\ln(x + 1)$	$\frac{\ln(x + 1)}{x}$
-0,1	-0,105360	1,053605
-0,01	-0,010050	1,005033
-0,001	-0,001000	1,000500
↓	↓	↓
0	0	1
0	0	non esiste
0	0	1
↑	↑	↑
0,001	0,000999	0,999500
0,01	0,009950	0,995033
0,1	0,095310	0,953101

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x + 1)}{x}$$

$\ln(x + 1)$ $\rightarrow 0$
 x $\rightarrow 0$



La tabella suggerisce che il risultato è 1.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x + 1)}{x} = 1$$

Il grafico mostra che numeratore e denominatore tendono a 0 con analoga rapidità: prevedo che il limite sia un numero diverso da 0.

Sintesi dei risultati ottenuti

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x + 1)}{x} = 1$$