Forme indeterminate del tipo 0/0

Daniela Valenti, 2023

Calcolare la derivata di funzioni elementari

Il procedimento è sempre lo stesso:
calcolo il limite del rapporto incrementale

$$\lim_{h \to 0} \frac{\boxed{f(x+h) - f(x)}^{\to 0}}{\boxed{h}_{\to 0}}$$

Così trovo sempre un limite che si presenta nella forma indeterminata del tipo 0/0

Richiamo i limiti in forma indeterminata del tipo 0/0

Quozienti di due funzioni che tendono a 0

Primo esempio

$$\lim_{x\to 2}\frac{\overbrace{\boxed{(x-2)^3}}^{\to 0}}{\underbrace{\boxed{x-2}}_{\to 0}} = \lim_{x\to 2}\overbrace{\boxed{\frac{x-2}{x-2}}}^{\to 1}\overbrace{\boxed{(x-2)^2}}^{\to 0} = 0$$

Nel calcolo del limite rimane $x \neq 2$ e quindi $x - 2 \neq 0$.
Perciò posso dividere per $(x - 2)$

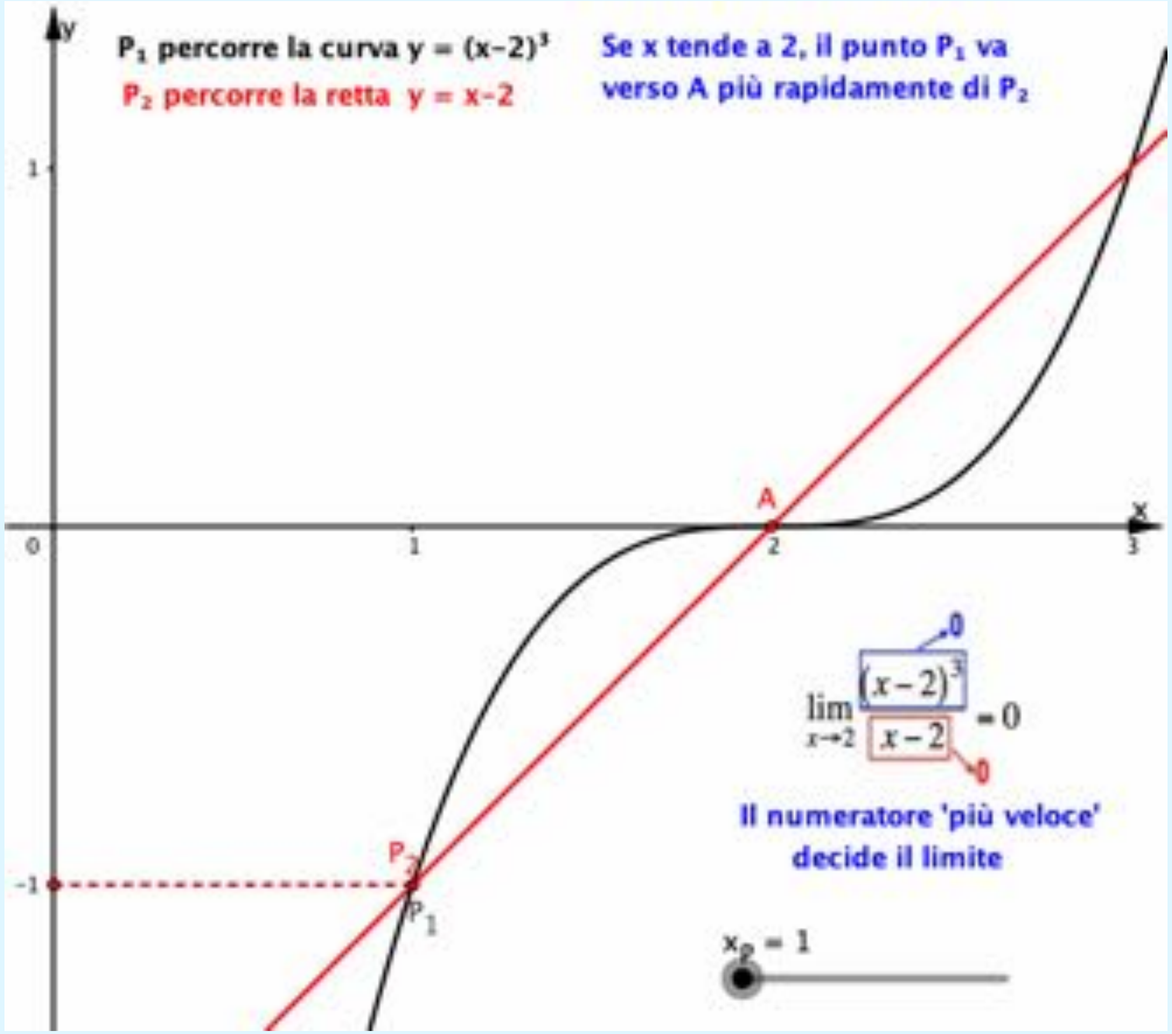
I grafici aiutano a capire

Quozienti di due funzioni che tendono a 0

Primo esempio

$$\lim_{x\to 2}\frac{\overset{\nearrow 0}{\boxed{(x-2)^3}}}{\underset{\searrow 0}{\boxed{x-2}}} = \lim_{x\to 2}(x-2)^2 = 0$$

Il numeratore più veloce 'decide' il limite.



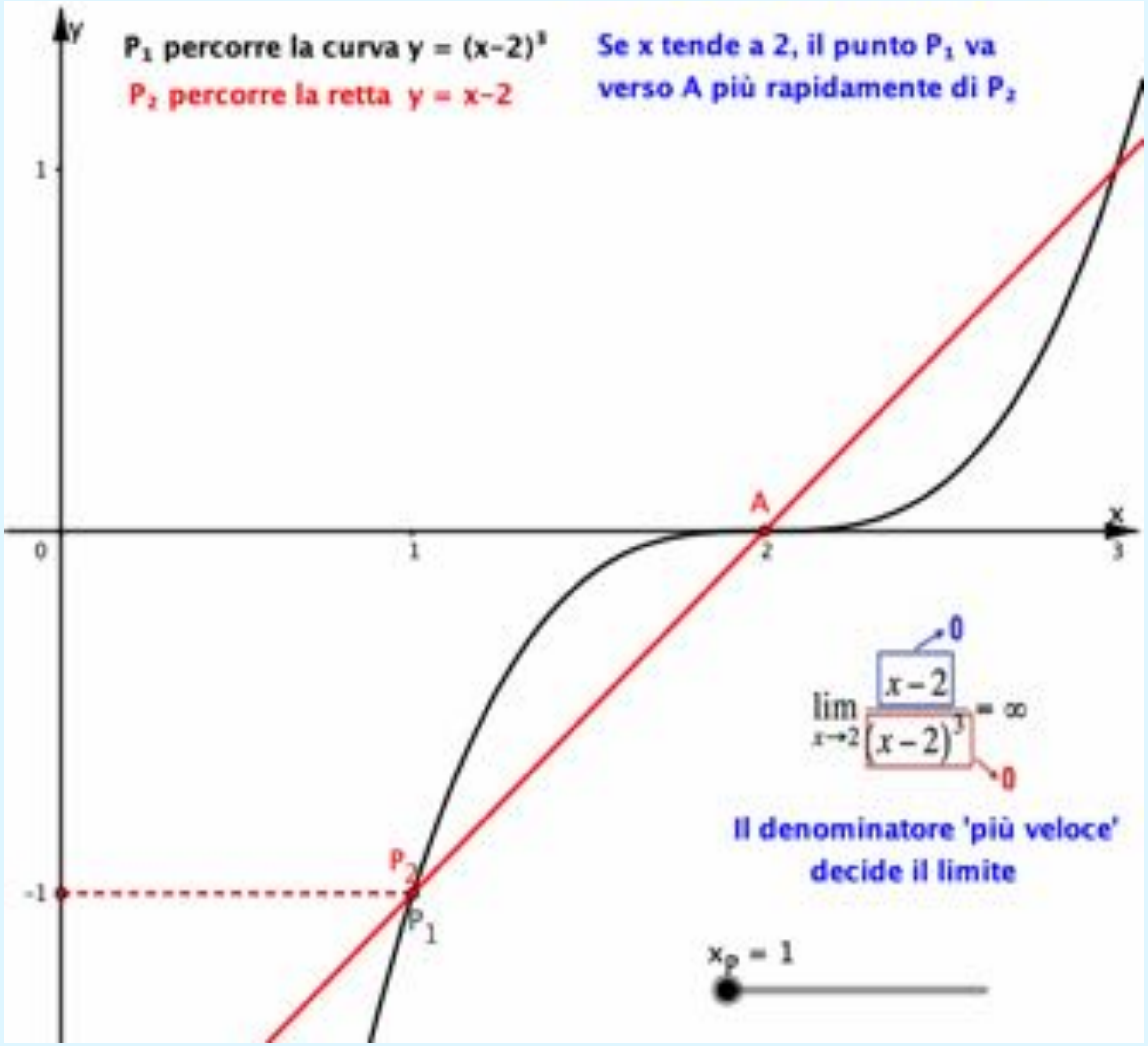
Quoziente di due funzioni che tendono a 0

Secondo esempio

$$\lim_{x\to 2}\frac{\overset{\nearrow 0}{\boxed{x-2}}}{\underset{\searrow 0}{\boxed{(x-2)^3}}}=\lim_{x\to 2}\frac{1}{\underset{\searrow 0}{\boxed{(x-2)^2}}}=\infty$$

Tende a infinito la reciproca di una funzione che tende a zero

Il denominatore più veloce 'decide' il limite.

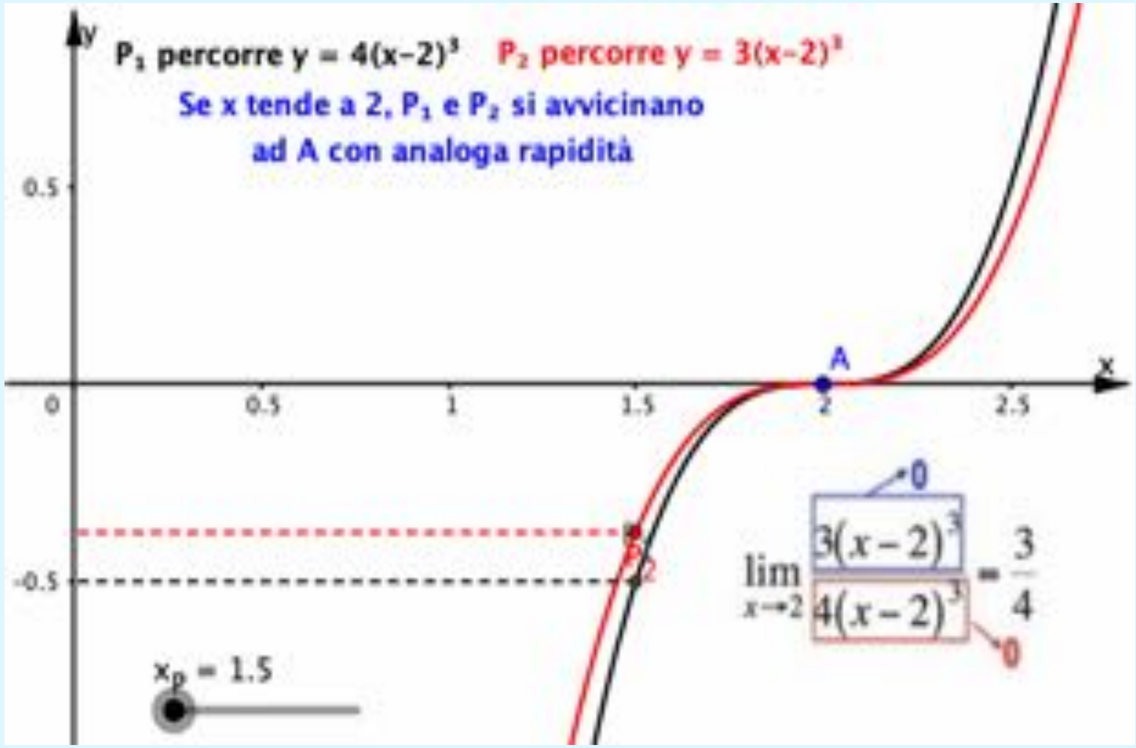


Quozienti di due funzioni che tendono a 0

Terzo esempio

$$\lim_{x\to 2}\frac{\overset{\to 0}{\boxed{3(x-2)^3}}}{\underset{\to 0}{\boxed{4(x-2)^3}}}=\frac{3}{4}$$

Nelle vicinanze di 2, numeratore e denominatore vanno verso 0 con analoga rapidità.



I tre esempi suggeriscono delle conclusioni generali

Quoziente di due funzioni che tendono a 0

I tre esempi

$$\lim_{x\to 2}\frac{\boxed{(x-2)^3}^{\to 0}}{\boxed{x-2}_{\to 0}}=0 \qquad \lim_{x\to 2}\frac{\boxed{x-2}^{\to 0}}{\boxed{(x-2)^3}_{\to 0}}=\infty \qquad \lim_{x\to 2}\frac{\boxed{3(x-2)^3}^{\to 0}}{\boxed{4(x-2)^3}_{\to 0}}=\frac{3}{4}$$

Sapere che le due funzioni tendono a zero *non determina* il limite del quoziente con regole valide per tutte le coppie di funzioni.

Vocabolario matematico

Tutti i limiti del tipo $\lim_{x \to a} \frac{\boxed{f(x)} \to 0}{\boxed{g(x)} \to 0}$

prendono il nome di *'Forme indeterminate del tipo* 0/0'
[si legge *'forme indeterminate del tipo zero su zero*]

Il risultato di queste forme indeterminate dipende dalle funzioni che compaiono a numeratore e denominatore.

Perciò occorrono particolari procedimenti per arrivare ad applicare l'algebra dei limiti finiti e infiniti.

Daniela Valenti, 2023

Forme indeterminate del tipo 0/0 presenti nel calcolo delle derivate

Rivediamo come trovare, con grafici e tabelle, il limite di quattro forme indeterminate del tipo 0/0 , presenti nel calcolo delle derivate.

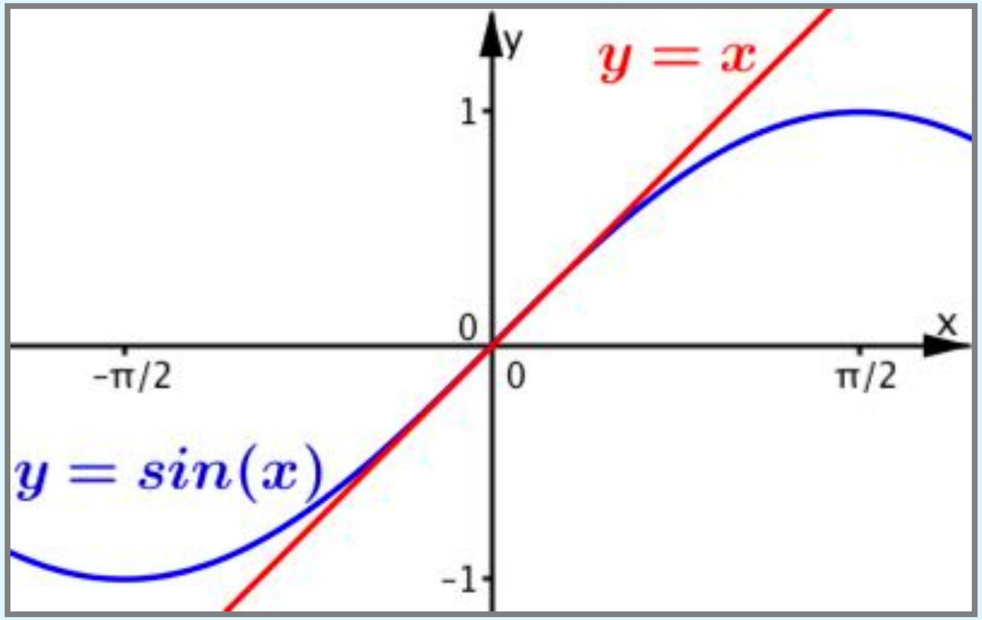
Grafici e tabelle per determinare il limite

x	$\sin(x)$	$\dfrac{\sin(x)}{x}$
−0,5	−0,479425	0,958851
−0,1	−0,099833	0,998334
−0,01 ↓ **0**	−0,009993 ↓ **0**	0,999998 ↓ **1**
0	**0**	**non esiste**
0 ↑ 0,01	**0** ↑ 0,009993	**1** ↑ 0,999998
0,1	0,099833	0,998334
0,5	0,479425	0,958851

$$\lim_{x\to 0}\frac{\boxed{\sin(x)}\rightarrow 0}{\boxed{x}\rightarrow 0}$$

La tabella suggerisce che il risultato è 1

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1$$

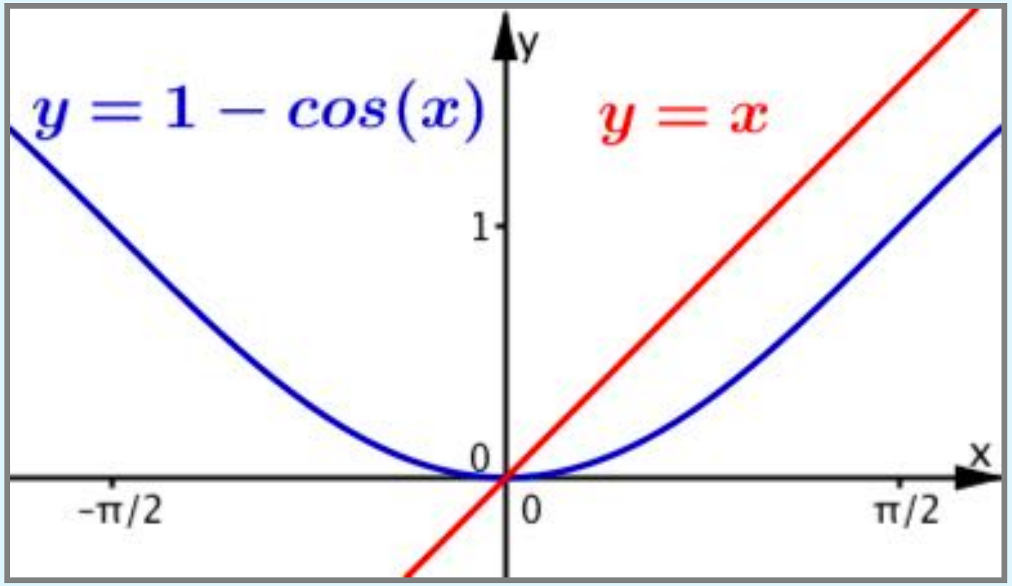


Il grafico mostra che numeratore e denominatore tendono a 0 con analoga rapidità: prevedo che il limite sia un numero diverso da 0.

Grafici e tabelle per determinare il limite

x	$1-\cos(x)$	$\dfrac{1-\cos(x)}{x}$
$-0{,}5$	$0{,}122417$	$-0{,}244838$
$-0{,}1$	$0{,}004996$	$-0{,}049958$
$-0{,}01$ ↓ **0**	$0{,}000049$ ↓ **0**	$-0{,}004999$ ↓ **0**
0	**0**	**non esiste**
0 ↑ $0{,}01$	**0** ↑ $0{,}000049$	**0** ↑ $0{,}004999$
$0{,}1$	$0{,}004996$	$0{,}049958$
$0{,}5$	$0{,}122417$	$0{,}244838$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\boxed{1-\cos(x)}\rightarrow 0}{\boxed{x}\rightarrow 0}$$



La tabella conferma che il risultato è 0.

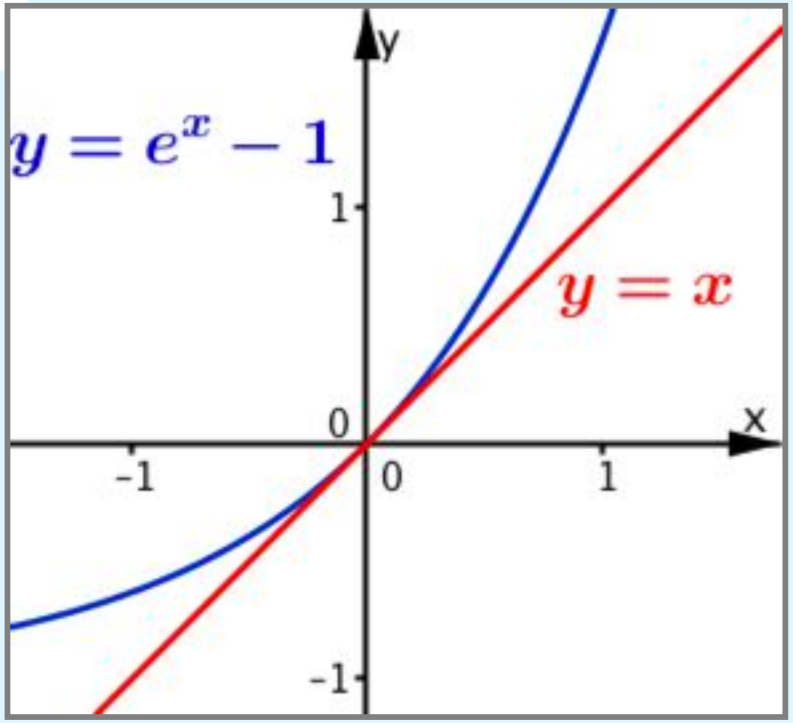
$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x}=0$$

Il grafico mostra che il numeratore tende a 0 con rapidità maggiore del denominatore: prevedo il limite 0.

Grafici e tabelle per determinare il limite

x	$e^x - 1$	$\dfrac{e^x - 1}{x}$
–0,5	–0,393469	0,786939
–0,1	–0,095162	0,951626
–0,01 ↓ **0**	–0,009950 ↓ **0**	0,995017 ↓ **1**
0	**0**	**non esiste**
0 ↑ 0,01	**0** ↑ 0,010050	**1** ↑ 1,005017
0,1	0,105170	1,051709
0,5	0,648721	1,297442

$$\lim_{x\to 0}\frac{\boxed{e^x-1}\to 0}{\boxed{x}\to 0}$$



La tabella suggerisce che il risultato è 1.

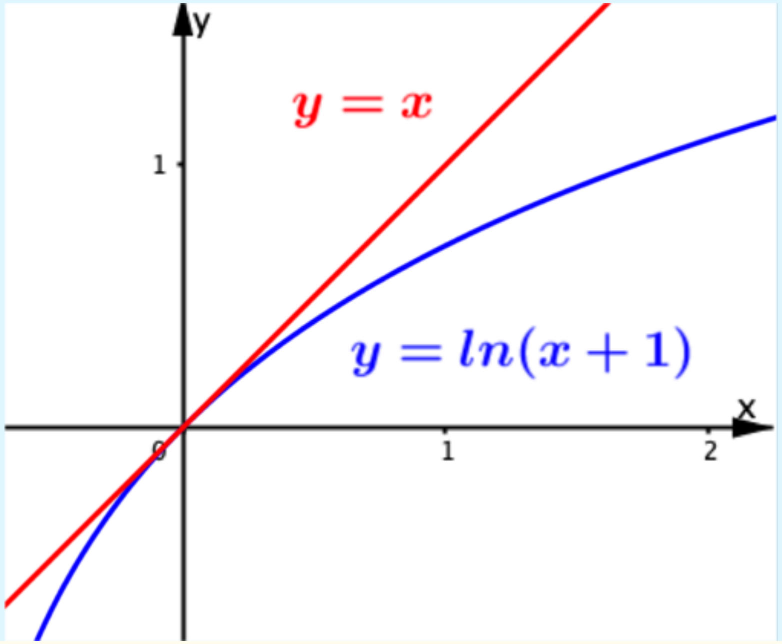
$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1$$

Il grafico mostra che numeratore e denominatore tendono a 0 con analoga rapidità: prevedo che il limite sia un numero diverso da 0.

Grafici e tabelle per determinare il limite

x	$\ln(x+1)$	$\dfrac{\ln(x+1)}{x}$
–0,1	–0,105360	1,053605
–0,01	–0,010050	1,005033
–0,001 ↓ 0	–0,001000 ↓ 0	1,000500 ↓ 1
0	0	non esiste
0 ↑ 0,001	0 ↑ 0,000999	1 ↑ 0,999500
0,01	0,009950	0,995033
0,1	0,095310	0,953101

$$\lim_{x\to 0} \frac{\boxed{\ln(x+1)} \to 0}{\boxed{x} \to 0}$$



La tabella suggerisce che il risultato è 1.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$$

Il grafico mostra che numeratore e denominatore tendono a 0 con analoga rapidità: prevedo che il limite sia un numero diverso da 0.

Sintesi dei risultati ottenuti

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(x)}{x} = 0$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$$