Derivate di funzioni elementari

Enrico Pietropoli, 2022

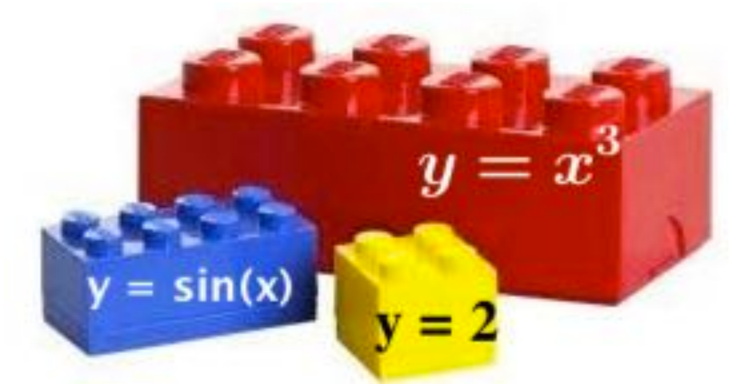
Come è organizzato il calcolo differenziale

Il calcolo differenziale studia le derivate.

Pensa alla tante funzioni che hai incontrato finora: calcolare il limite del rapporto incrementale per tutte queste funzioni sarebbe un lavoro lunghissimo!

Ecco invece il percorso molto più rapido che seguirai:

1. **Calcolo le derivate di poche funzioni elementari.**
2. **Studio le regole dell'Algebra delle derivate per calcolare le derivate di tutte le funzioni ottenute da quelle elementari con procedimenti noti.**



Esempi di funzioni ottenute con 3 funzioni elementari

$$y = \frac{2\sin(x)}{x^3} \qquad y = 2x^3 + \sin(x)$$

Procedimento

In questa lezione calcoli la funzione derivata di altre funzioni elementari.
Il procedimento di calcolo sarà sempre lo stesso:

1. **Calcolo del rapporto incrementale**

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

2. **Calcolo del limite del rapporto incrementale**

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x)$$

E ricorderai sempre di osservare la derivata come pendenza della retta tangente al grafico della funzione.

Derivata della funzione y = sin(x)

Ma i calcoli non sono così semplici per calcolare la derivata di y = sin(x)

Formula di addizione
$\sin(x+h) =$
$\sin(x)\cos(h) + \cos(x)\sin(h)$

1. Rapporto incrementale

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\boxed{\sin(x+h)} - \sin(x)}{h} = \frac{\boxed{\sin(x)\cdot\cos(h) + \cos(x)\cdot\sin(h)} - \sin x}{h} =$$

$$= \sin(x)\frac{\cos(h)-1}{h} + \cos(x)\frac{\sin(h)}{h}$$

2. Limite del rapporto incrementale

$$\lim_{h\to 0}\left[\sin(x)\underbrace{\frac{\cos(h)-1}{h}}_{0} + \cos(x)\underbrace{\frac{\sin(h)}{h}}_{1}\right] = \cos(x)$$

h	-0,1	-0,0001	→0←	0,0001	0,1
$\frac{\sin(h)}{h}$	0,998334	0,999999998	1	0,999999998	0,998334
$\frac{\cos(h)-1}{h}$	0,049968	0,00006	0	-0,00005	-0,060439

La derivata della funzione $y = \sin(x)$

Abbiamo ottenuto.

- data la funzione $y = \sin(x)$

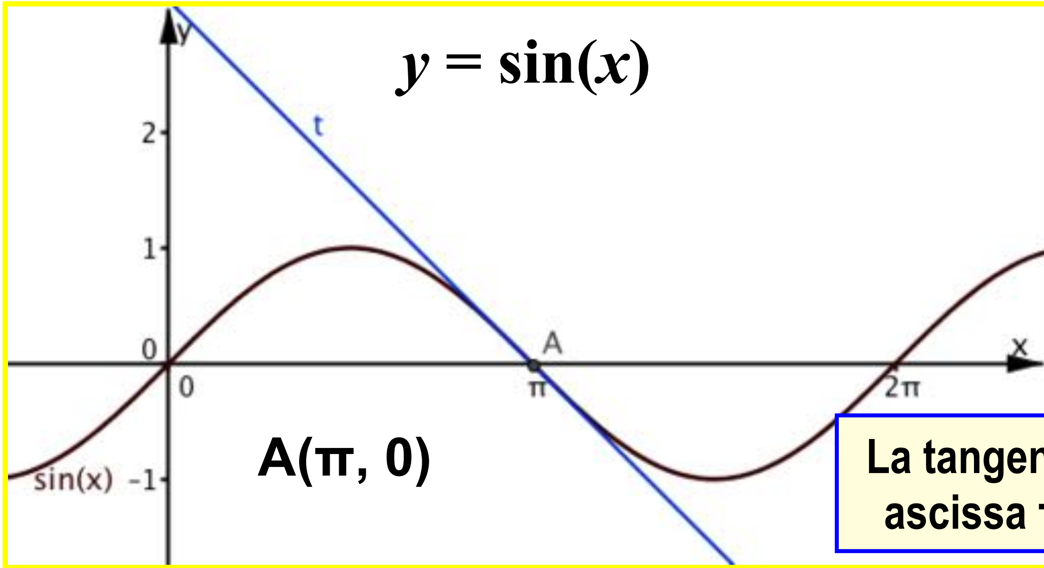
- la funzione derivata è $y' = \cos(x)$.

Così conosco la derivata di $y = \sin(x)$ in tutti i suoi punti, senza dover ripetere il limite del rapporto incrementale. Due esempi:

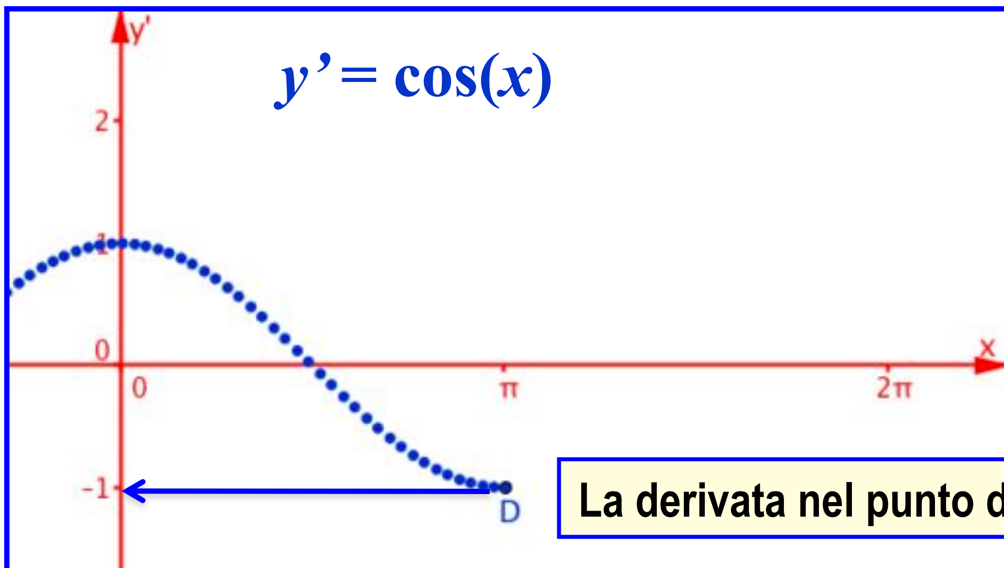
- la derivata di $y = \sin(x)$ nel punto $O(0, 0)$ è $\cos(0) = 1$;

- la derivata di $y = \sin(x)$ nel punto $A(\pi, 0)$ è $\cos(\pi) = -1$

Grafico di y = sin(x) e della sua derivata

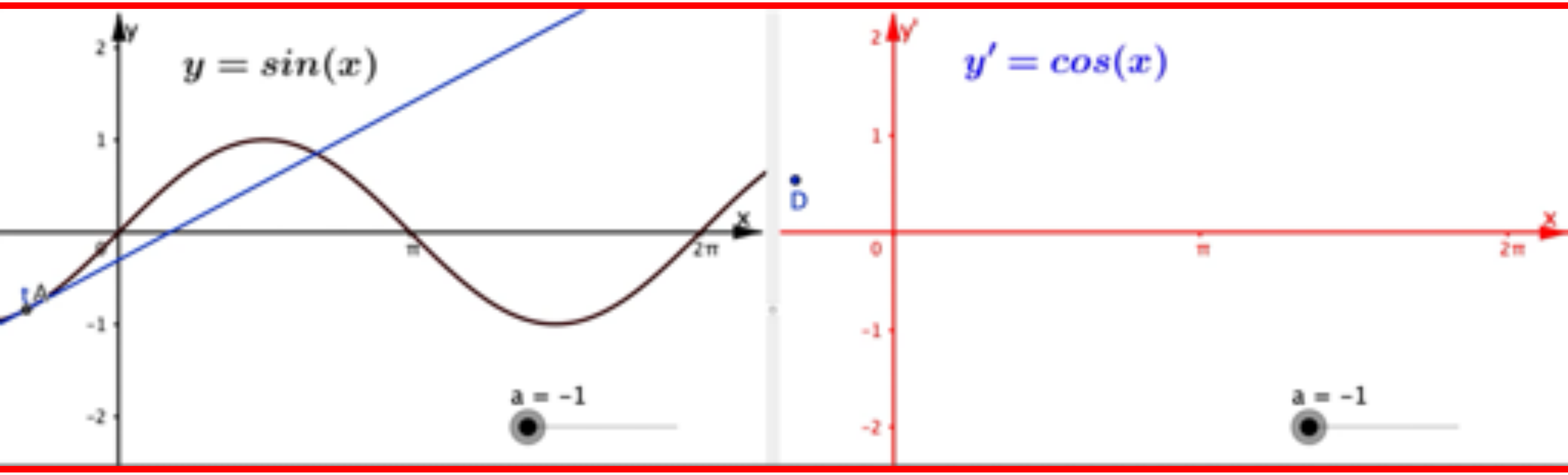


La tangente *t* nel punto A di ascissa π ha pendenza -1



La derivata nel punto d'ascissa π vale -1

Video: y = sin(x) e la sua derivata



La derivata di $y = \cos(x)$

Calcolo la derivata di y = cos(x)

Formula di addizione del coseno

$$\cos(x+h) = \cos(x)\cos(h) - \sin(x)\sin(h)$$

Rapporto incrementale

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\boxed{\cos(x+h)} - \cos(x)}{h} = \frac{\boxed{\cos(x)\cos(h) - \sin(x)\sin(h)} - \cos(x)}{h} =$$

$$= \cos(x)\frac{\cos(h)-1}{h} - \sin(x)\frac{\sin(h)}{h}$$

$$\boxed{\lim_{h\to 0}\frac{\sin(h)}{h} = 1}$$

Limite del rapporto incrementale

$$\lim_{h\to 0}\left[\cos(x)\underbrace{\frac{\cos(h)-1}{h}}_{0} - \sin(x)\underbrace{\frac{\sin(h)}{h}}_{1}\right] = -\sin(x)$$

$$\boxed{\lim_{h\to 0}\frac{\cos(h)-1}{h} = 0}$$

$y = \cos(x)$ **ha come derivata** $y' = -\sin(x)$

La derivata di $y = \cos(x)$

Calcolo la derivata di y = cos(x)

Formula di addizione del coseno

$$\cos(x+h) = \cos(x)\cos(h) - \sin(x)\sin(h)$$

Rapporto incrementale

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\boxed{\cos(x+h)} - \cos(x)}{h} = \frac{\boxed{\cos(x)\cos(h) - \sin(x)\sin(h)} - \cos(x)}{h} =$$

$$= \cos(x)\frac{\cos(h)-1}{h} - \sin(x)\frac{\sin(h)}{h}$$

$$\boxed{\lim_{h\to 0}\frac{\sin(h)}{h} = 1}$$

Limite del rapporto incrementale

$$\lim_{h\to 0}\left[\cos(x)\underbrace{\frac{\cos(h)-1}{h}}_{0} - \sin(x)\underbrace{\frac{\sin(h)}{h}}_{1}\right] = -\sin(x)$$

$$\boxed{\lim_{h\to 0}\frac{\cos(h)-1}{h} = 0}$$

$y = \cos(x)$ ha come derivata $y' = -\sin(x)$

Video: y = cos(x) e la sua derivata

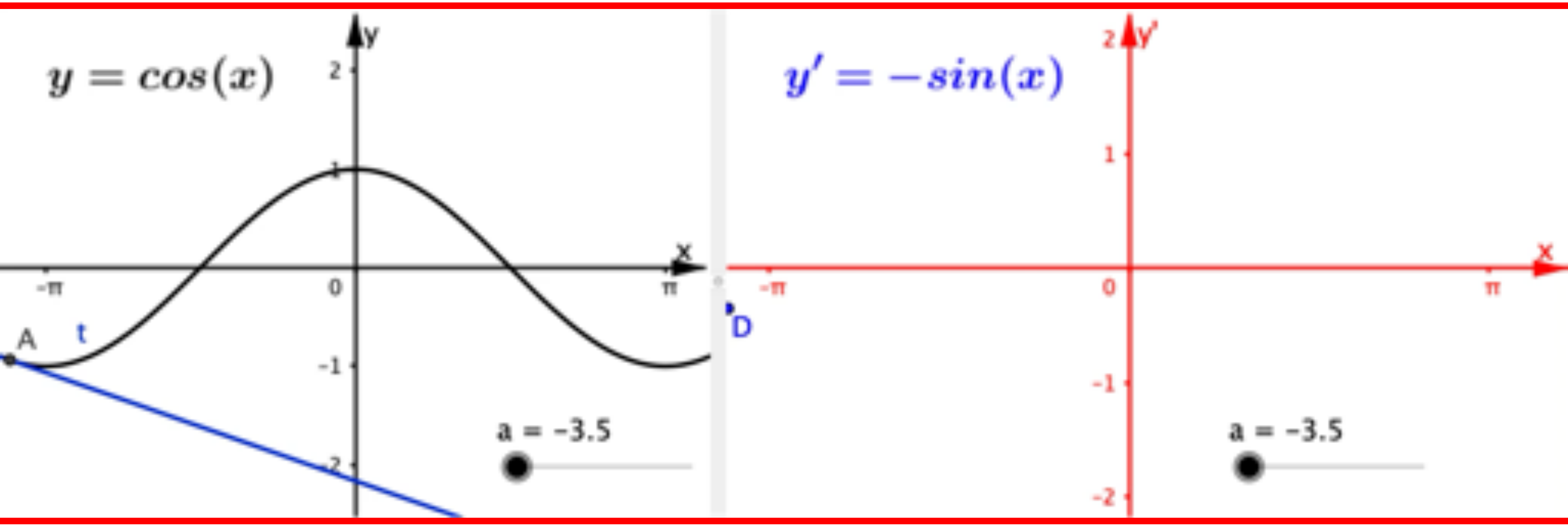
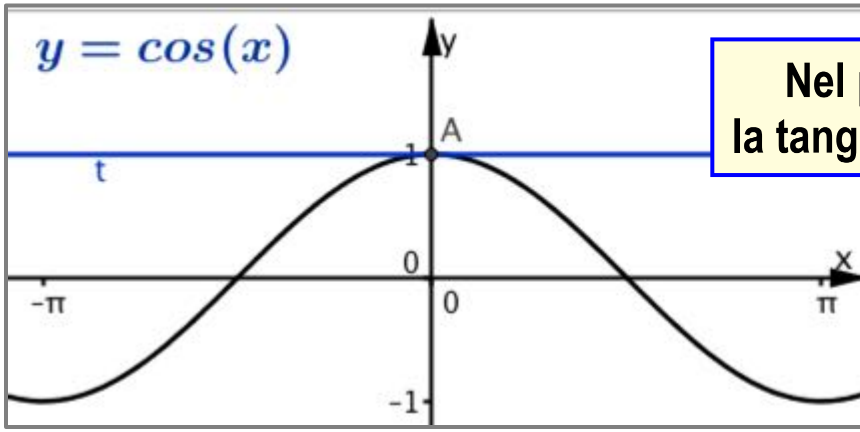
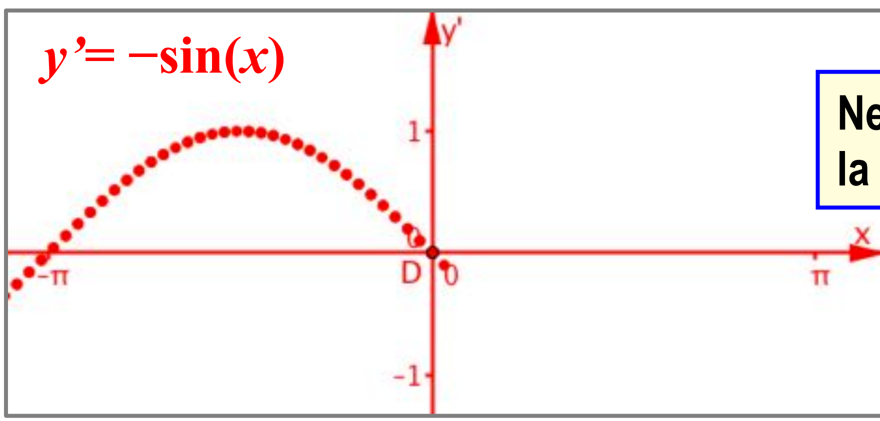


Grafico di y = cos(x) e della sua derivata

Osserviamo affiancati il grafico della funzione cos(x) e della sua derivata y’ = −sin(x)



Nel punto d’ascissa 0
la tangente t ha pendenza 0



Nel punto d’ascissa 0
la derivata vale 0

Derivata della funzione $y = e^x$

Ecco il procedimento da seguire

Proprietà delle potenze
$e^{x+h} = e^x e^h$

1. Rapporto incrementale

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\boxed{e^{x+h}} - e^x}{h} = \frac{\boxed{e^x \cdot e^h} - e^x}{h} = e^x \frac{e^h - 1}{h}$$

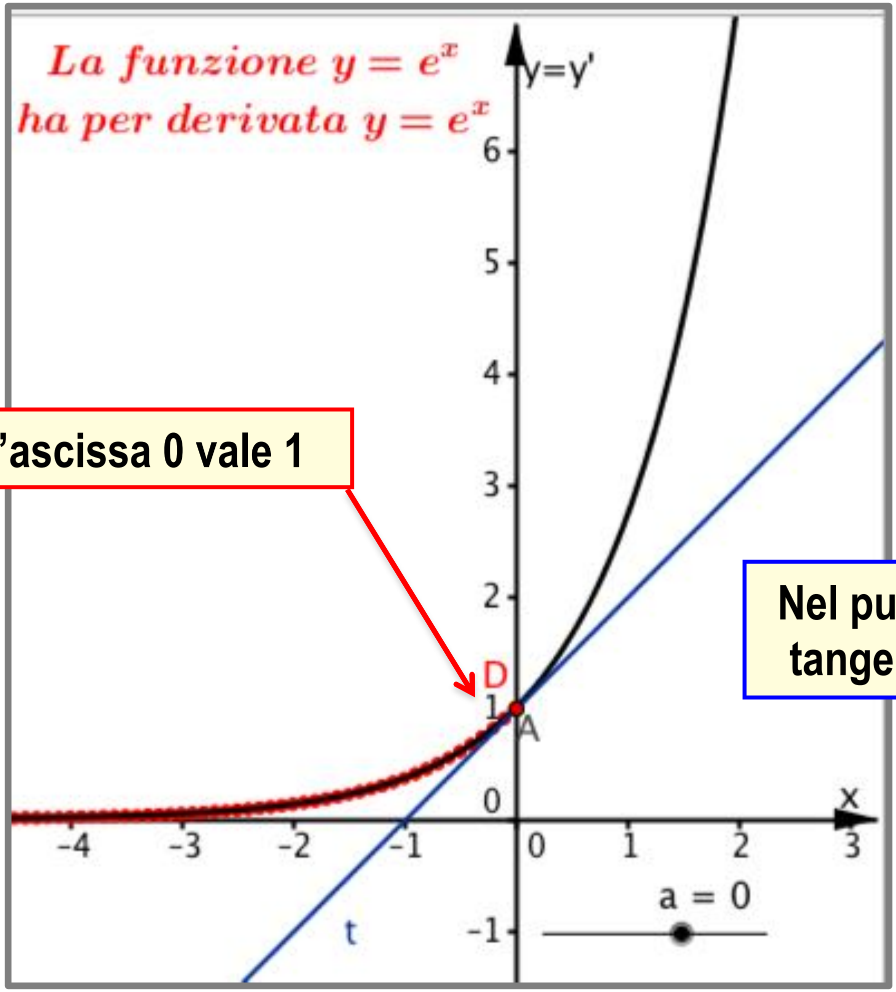
2. Limite del rapporto incrementale

$$\lim_{h \to 0}\left[e^x \frac{e^h - 1}{h}\right] = e^x$$

1

h	-0,1	-0,0001	$\rightarrow 0 \leftarrow$	0,0001	0,1
$\frac{e^h - 1}{h}$	0,951626	0,999950	1	1,000050	1,051709

Grafico di $y = e^x$ con la sua derivata

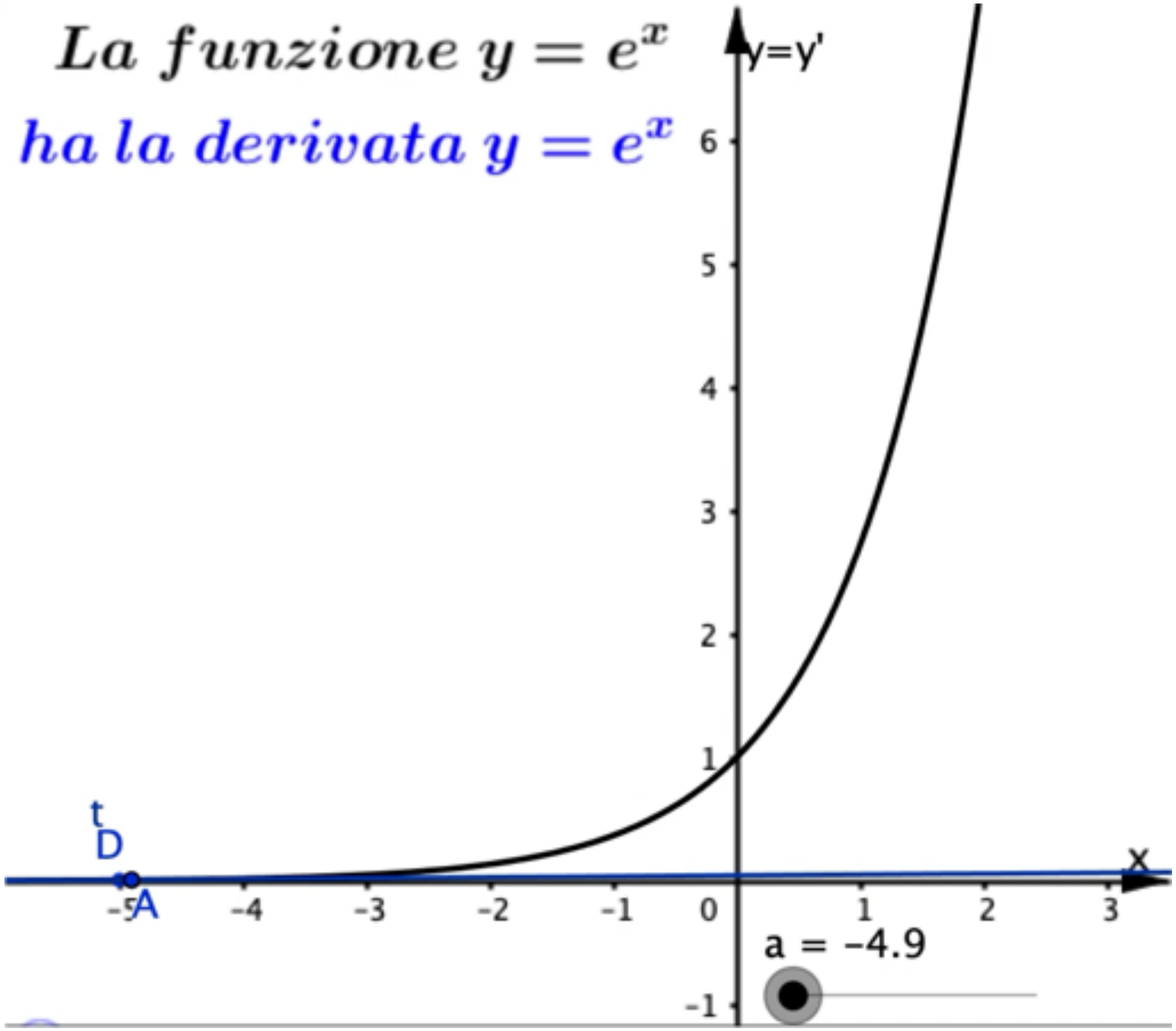


La derivata nel punto d'ascissa 0 vale 1

A(0, 1)

Nel punto A di ascissa 0 la tangente t ha pendenza 1

Video: funzione $y = e^x$ e sua derivata



Riflessioni sui risultati ottenuti

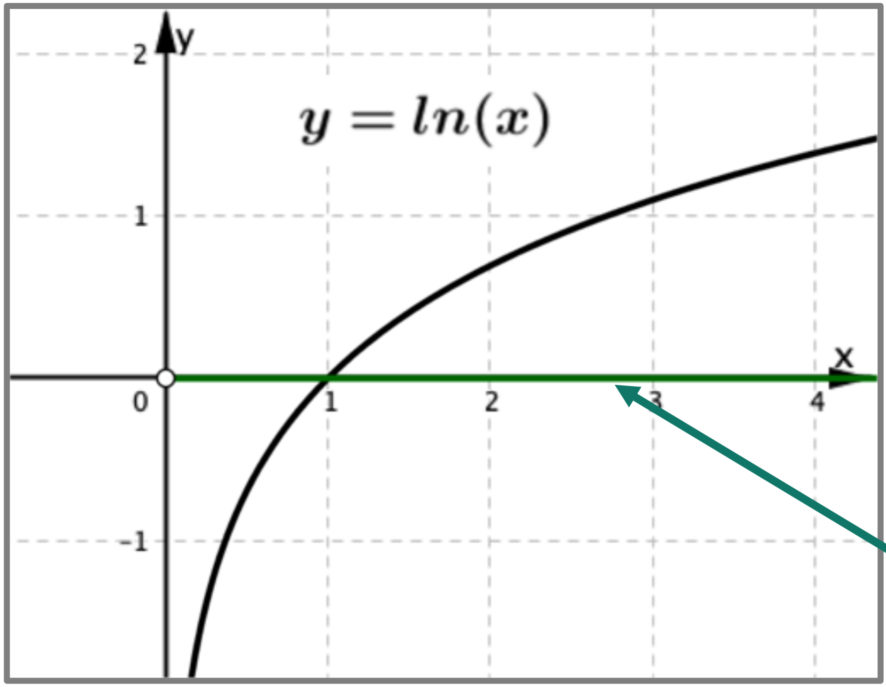
Ecco tutte le derivate di funzioni elementari che hai calcolato

Funzione	Derivata
$y = k$	$y' = 0$
$y = x$	$y' = 1$
$y = x^n$	$y' = nx^{n-1}$
$y = \sin(x)$	$y' = \cos(x)$
$y = \cos(x)$	$y' = -\sin(x)$
$y = e^x$	$y' = e^x$

Le funzioni e le loro derivate sono definite per tutti i valori reali di x

La funzione y = ln(x)

Ecco un'ultima funzione da derivare



$y = ln(x)$ è definita solo per valori positivi di x, escluso zero.

La derivata di y = ln(x)

Ed ecco il video che mostra la funzione, insieme alla sua derivata

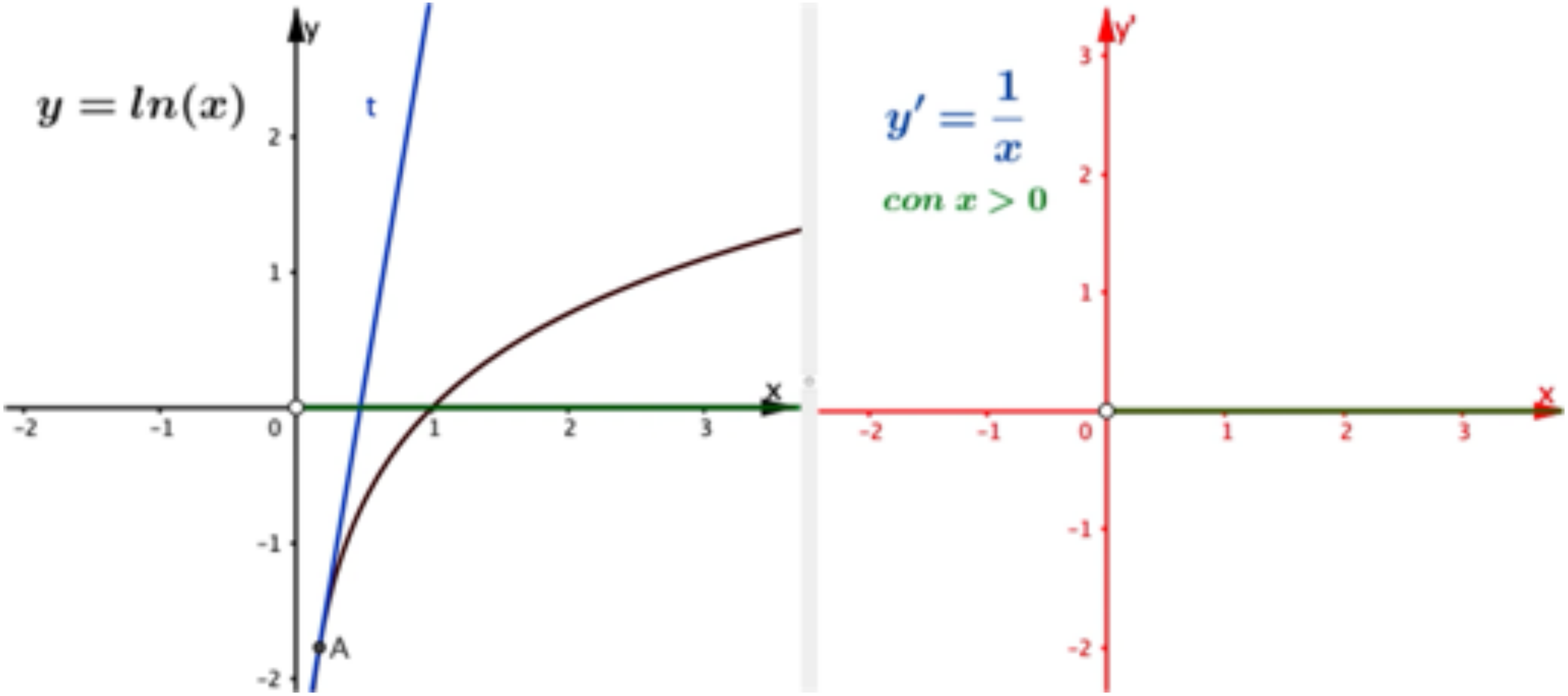
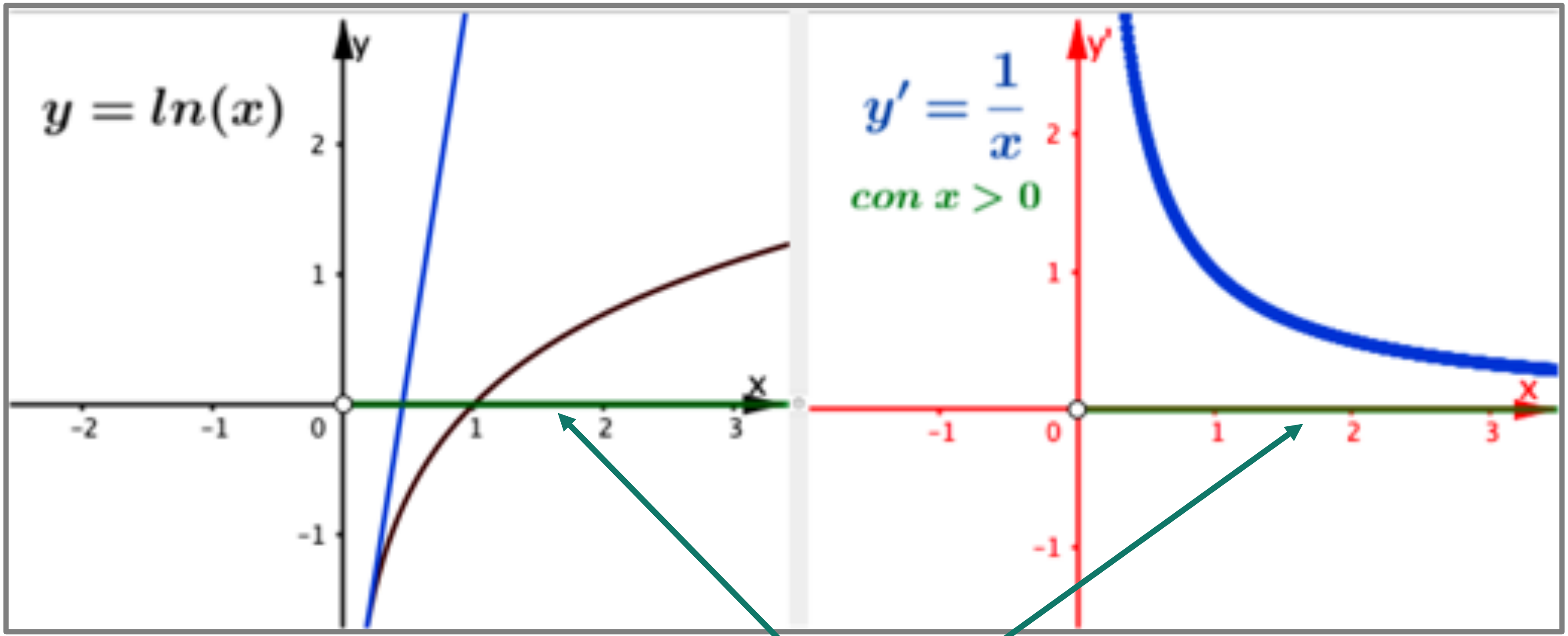


Grafico di y = ln(x) e della sua derivata



Numeri reali positivi, escluso zero

Riflessioni sulle derivate ottenute

Funzione	Derivata
$y = k$	$y' = 0$
$y = x$	$y' = 1$
$y = x^{n}$	$y' = nx^{n-1}$
$y = \sin(x)$	$y' = \cos(x)$
$y = \cos(x)$	$y' = -\sin(x)$
$y = e^{x}$	$y' = e^{x}$
$y = \ln(x)$	$y' = \dfrac{1}{x}$

Potenze di x hanno come derivate potenze di x

Funzioni goniometriche hanno come derivate funzioni goniometriche

La funzione esponenziale ha per derivata se stessa

La 'complicata' funzione logaritmo ha per derivata la 'semplice' funzione $\frac{1}{x}$