I numeri reali nella storia

I segmenti incommensurabili e la nascita della matematica astratta

La scoperta dei segmenti incommensurabili ha segnato una crisi nella storia della matematica; una crisi che ha significato un avanzamento nella scienza.

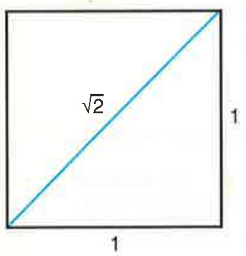
Riflettiamo: che cosa vuol dire, per esempio, che la diagonale ed il lato del quadrato sono due segmenti fra loro incommensurabili (fig. 1)?

Vuol dire che non si riesce a trovare una parte del lato, anche piccolissima, che, riportata più volte, riesca ad esaurire la diagonale.

Questo fatto porta ad una conseguenza: il lato e la diagonale del quadrato non sono formati con gli stessi punti «messi in fila», perché altrimenti sarebbe il punto la parte piccolissima necessaria per esaurire la diagonale. Perciò non esiste il «punto-granello», il «punto-atomo» con cui si può pensare di formare tutte le figure geometriche: il punto in matematica è qualcosa senza dimensioni.

È proprio questa conclusione che segna un distacco fra due concezioni della matematica: la matematica applicata, che si occupa di oggetti concreti, e la matematica astratta, per cui le figure non sono materiali. Secondo quest'ultima concezione, il punto non ha dimensioni, non è nemmeno un minuscolo granello di sabbia; e, non rappresentando nulla di concreto, si può immaginarlo infinitamente piccolo.

Figura 1
Diagonale e lato del quadrato sono fra loro incommensurabili



Proprio su queste considerazioni si era aperta una vera crisi matematico-filosofica nella scuola che Pitagora aveva fondato, intorno al 500 a.C., a Crotone, antica colonia greca. Una crisi determinata appunto dal teorema di Pitagora, che aveva fatto scoprire l'esistenza dei segmenti incommensurabili.

E la polemica, nel mondo greco, non fu solo di carattere matematico-filosofico, ma segnò addirittura una crisi religiosa. Ecco perché: il punto-atomo era considerato l'essenza di tutte le cose, una creazione divina che costituiva non solo le figure geometriche, ma anche tutte le cose. Il vedere «sbriciolarsi» l'atomo significava che non esisteva una creazione divina, voleva dire che gli dei non esistevano. La leggenda racconta che Ippaso di Metaponto, allievo di Pitagora, non seppe tener nascosto il fatto che non esisteva il punto-atomo e divulgò questa «verità scandalosa», sconvolgendo così gli uomini, che si sentirono privati dell'appoggio divino. Perciò Ippaso fu punito dagli dei che lo fecero naufragare nel mare di Crotone. La nascita della matematica astratta si confonde dunque con la leggenda.

I numeri irrazionali come «casi eccezionali»

Con la scoperta di $\sqrt{2}$ nasce dunque la matematica astratta e quel «rapporto infamante» non viene certamente considerato un numero, ma un modo di descrivere una particolare situazione geometrica. E così per Euclide (IV-III secolo a.C.) $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$ sono interpretati come rapporti di segmenti, come «simboli» che si possono costruire con riga e compasso.

I secoli scorrono e quei pochi simboli come $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ non sono mai considerati come numeri. Ancora nel 1544 il matematico tedesco Stifel scrive: «Da una parte saremmo portati ad asserire che sono dei numeri perché, quando non bastano i numeri razionali, questi "simboli" li sostituiscono; d'altra parte, però, ci sembra che non siano dei numeri perché non si possono scrivere con precisione in forma decimale, e sembrano nascondersi nelle nuvole dell'infinito».

Con queste vedute incerte e titubanti – gli irrazionali sono o non sono numeri? – si arriva a epoche relativamente recenti.

È solo nel secolo scorso che viene data chiarezza ai numeri irrazionali, vedendoli inseriti fra due successioni di numeri razionali.

Si rimane però con l'idea che i numeri irrazionali siano ben pochi, in confronto alla vastità dei numeri razionali. È proprio così? Gli irrazionali costituiscono davvero delle eccezioni?

I numeri irrazionali costituiscono la maggior parte dell'insieme dei reali

Per capire la situazione ci si può basare sul teorema di Talete e realizzare il disegno di fig. 2:

- sulla semiretta Or sono rappresentati solo i razionali; per esempio, a 1 corrisponde il punto U, a 2 corrisponde A, a $\frac{5}{2}$ corrisponde B e così via;
- sulla semiretta Os sono invece rappresentati solo i numeri irrazionali, in particolare è indicato il punto P, che corrisponde a $\sqrt{2}$;
- si congiunge il punto P con il punto U, ottenendo la retta a;
- si tracciano le rette parallele ad a, a partire dai punti come A e B, determinando su Os i corrispondenti punti A' e B'.

In base al teorema di Talete, si trova che i punti A' e B' rappresentano i seguenti numeri irrazionali:

$$2\sqrt{2} \qquad \frac{5}{2}\sqrt{2}$$

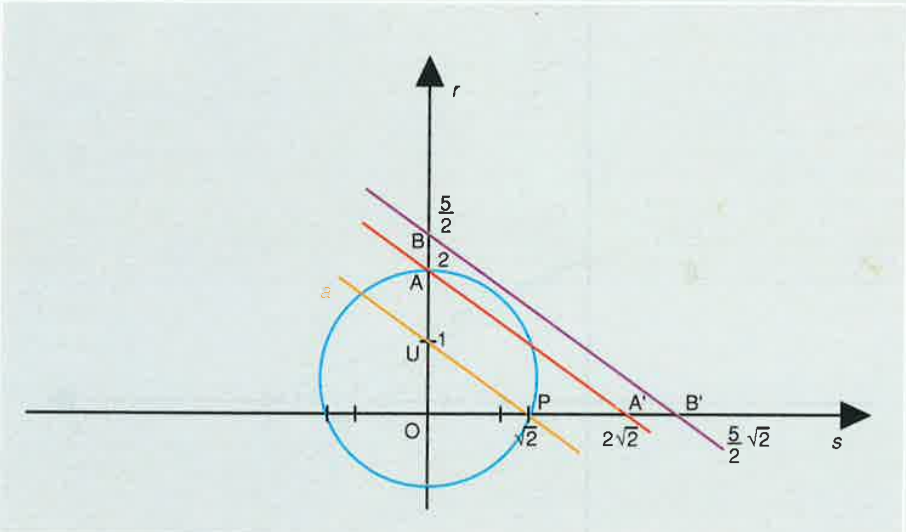


Figura 2
Una costruzione geometrica per indagare sul rapporto fra i razionali e gli irrazionali

Possiamo ripetere la costruzione a partire dal punto Q che, su O*s*, rappresenta $\sqrt{3}$ (fig. 3); sulla semiretta O*s* si trovano allora i punti A'' e B'' che rappresentano i seguenti numeri irrazionali:

$$2\sqrt{3} \qquad \frac{5}{2}\sqrt{3}$$

Così, continuando, ci si rende conto che ad ognuno dei punti della semiretta *r*, punti che rappresentavano i razionali, corrisponde, sulla semiretta O*s*, un'infinità di numeri irrazionali (fig. 4).

Si capisce allora che sono i numeri razionali a costituire un insieme «povero» e che ancora più «povero» è l'insieme degli interi. La maggior parte dei numeri reali è invece costituita da numeri irrazionali.

Si arriva così ad una conclusione sorprendente: per secoli i numeri irrazionali non riuscirono ad imporsi perché non erano considerati numeri; poi diventarono dei numeri, ma casi eccezionali; infine, si è scoperto che sono proprio loro, gli irrazionali, che costituiscono il caso più frequente fra i numeri reali.

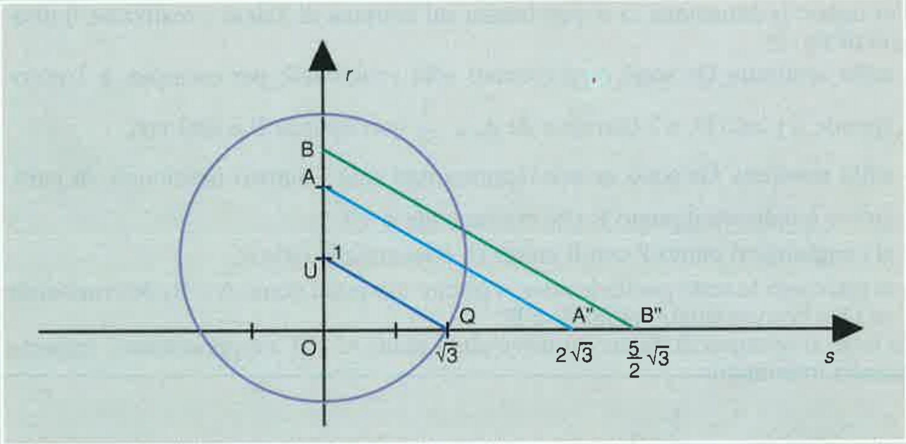


Figura 3
La costruzione ripetuta: agli stessi punti A e B corrispondono ora due irrazionali diversi

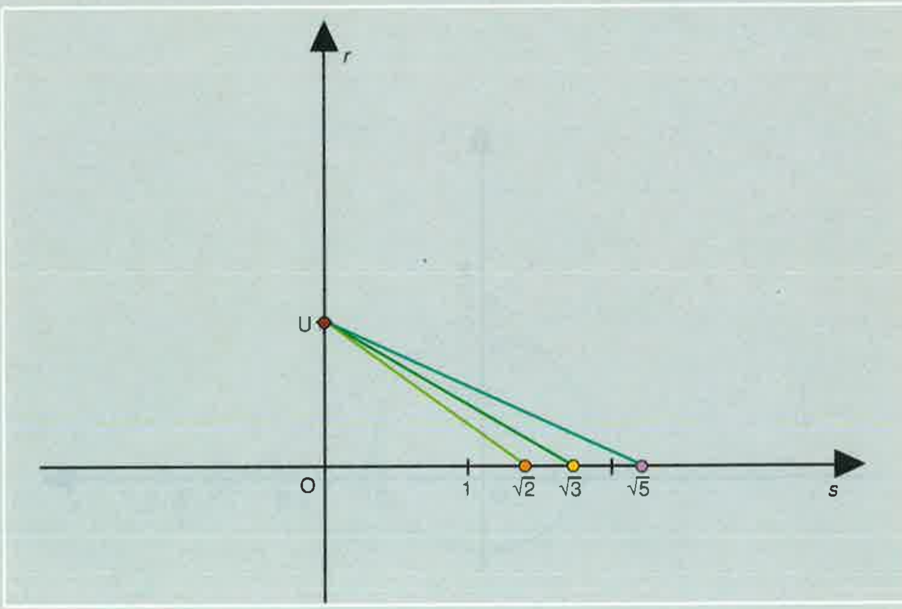


Figura 4
A ogni razionale corrispondono infiniti irrazionali

Lettura tratta dal testo fuori catalogo
E. Castelnuovo, C. Gori Giorgi, D. Valenti
Matematica oggi, volume 2