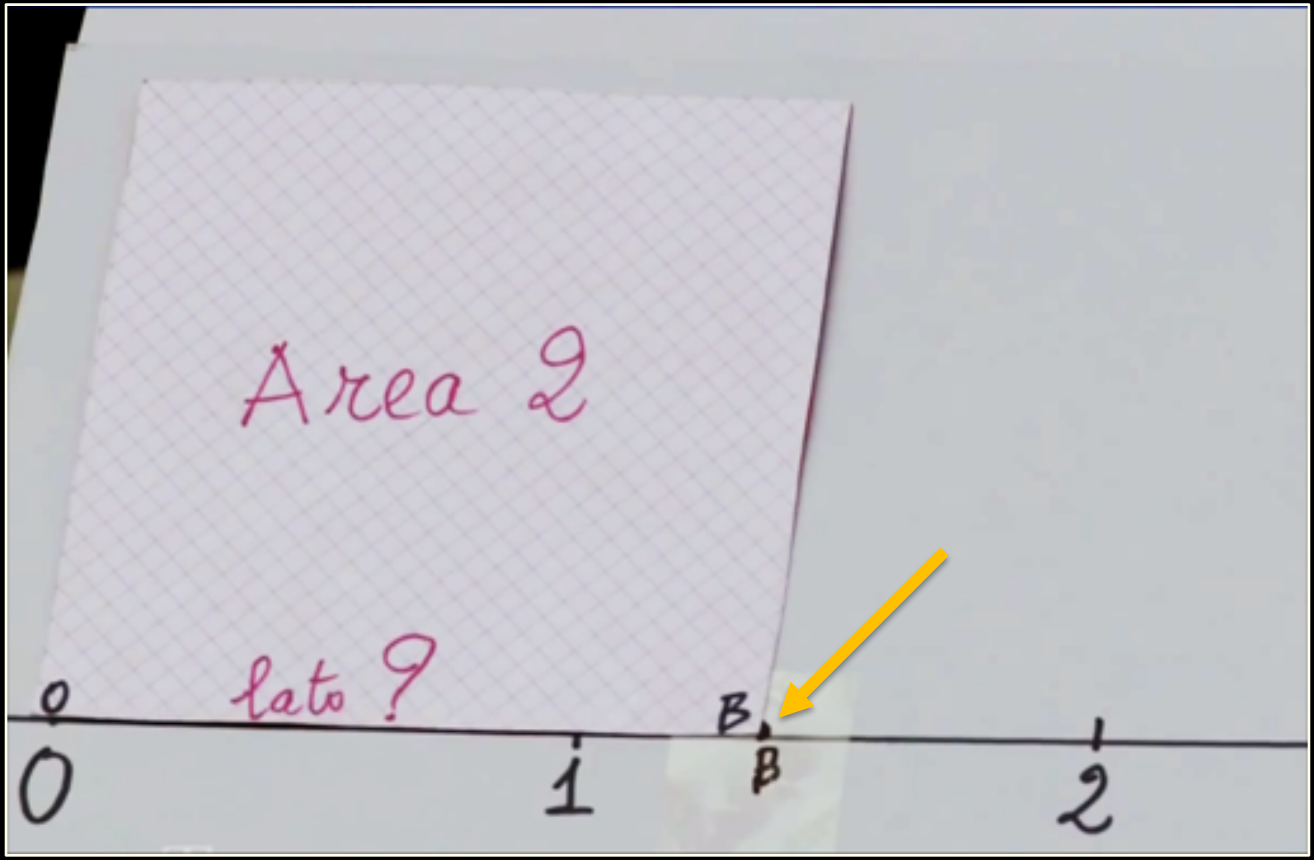
Numeri irrazionali e radicali



Numeri razionali, frazioni e numeri decimali

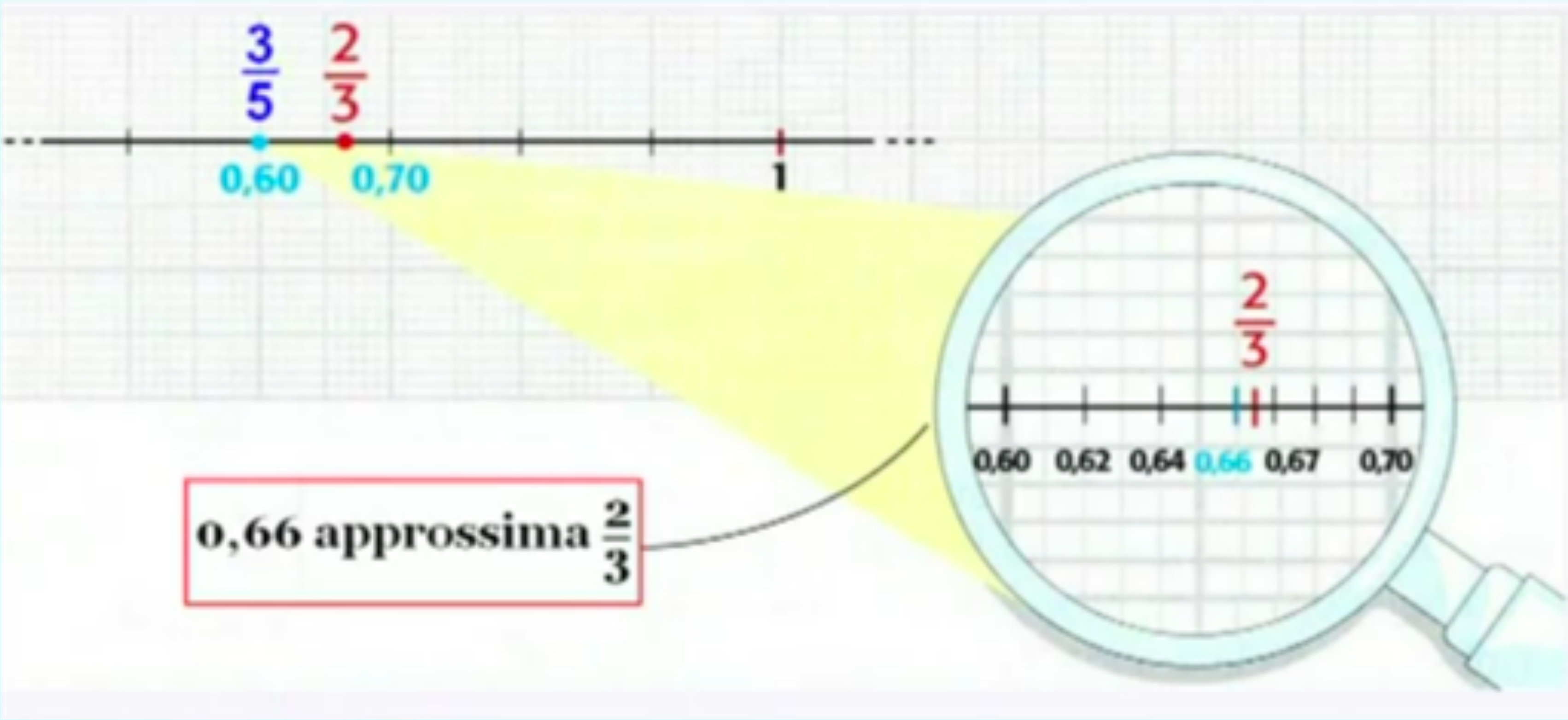
Sono razionali i numeri che scrivo con una frazione

Se ‘traduco’ una frazione in forma decimale, ho due casi

A. Le cifre del numero decimale finiscono

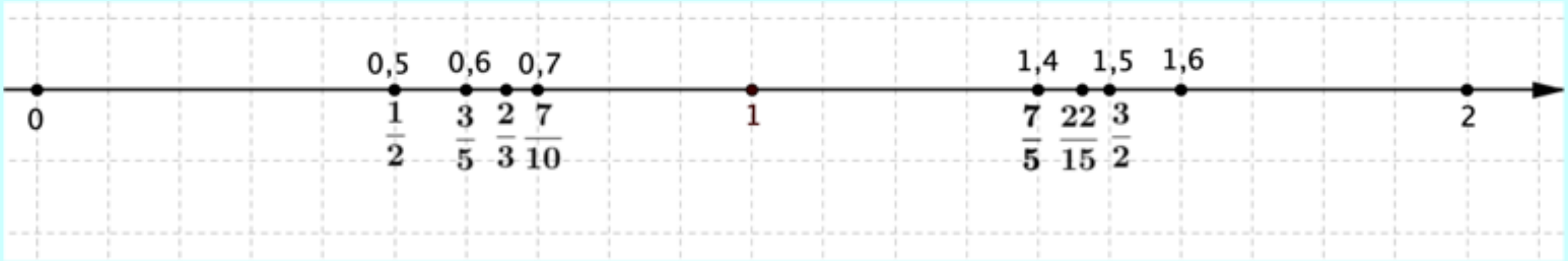
B. Le cifre del numero decimale sono infinite, ma si ripete un gruppo di cifre (periodo)

Frazioni e numeri decimali sulla retta



Daniela Valenti, 2021

I numeri razionali sulla retta

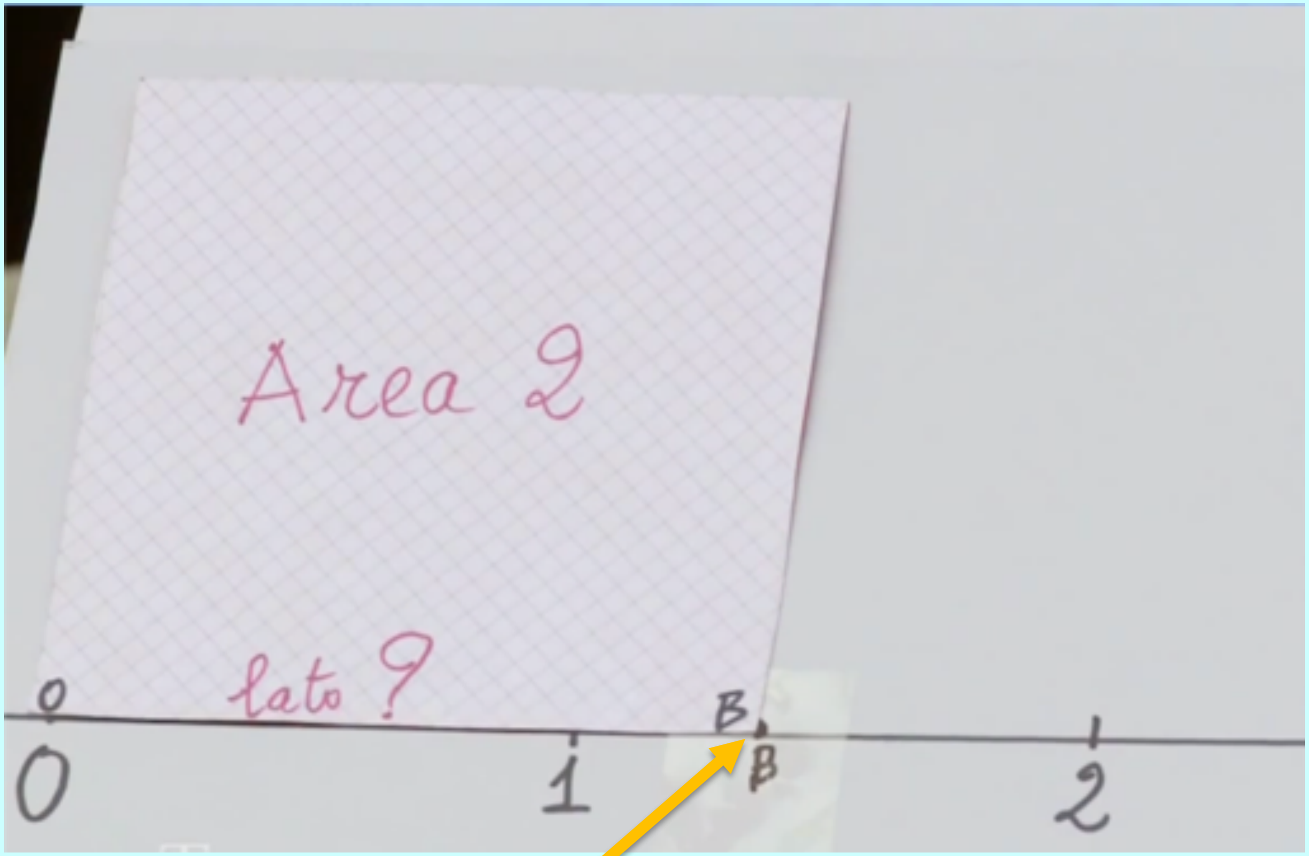


Sulla retta 'riempita' dai numeri razionali rimangono dei punti 'liberi' per inserire altri numeri?

Un video risponde alla domanda

Video

La costruzione geometrica



Quale numero corrisponde al punto B?

Può essere $\frac{3}{2} = 1,5$?

Daniela Valenti, 2021

Un primo tentativo

Per ottenere $\sqrt{2} = \frac{3}{2}$ debbo trovare

$$\sqrt{2}^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 \text{ ossia } 2 = \frac{9}{4}$$

E invece trovo

$$\frac{9}{4} = 2{,}25$$

Allora provo con un'altra frazione: $\mathbf{\frac{14}{10} = 1,4}$

Un altro tentativo per capire

Verifico se può essere $\sqrt{2}=1{,}4$ cioè $\sqrt{2}=\frac{14}{10}$

Per rendere la verifica più agevole semplifico la frazione

$$\frac{14}{10}=\frac{\cancel{2}\cdot 7}{\cancel{2}\cdot 5}=\frac{7}{5}$$

Così i termini della frazione (7 e 5) non hanno fattori comuni.

Per ottenere $\sqrt{2}=\frac{7}{5}$ debbo trovare

$$\left(\sqrt{2}\right)^2=\left(\frac{7}{5}\right)^2 \quad \text{ossia} \quad 2=\frac{7^2}{5^2}$$

e quindi

$$2\cdot 5^2=7^2$$ **FALSA**

Perché

-in $2\cdot 5^2$ trovo il fattore 2;

-in 7^2 **non** trovo il fattore 2.

Concludo che **non** può essere $\sqrt{2}=1{,}4$ cioè $\sqrt{2}=\frac{14}{10}$

Ripeto questo ragionamento con altre frazioni, … e arriva l'idea di una dimostrazione generale, che trovi negli approfondimenti.

La scoperta di un nuovo numero

Già gli antichi greci hanno dimostrato che la radice quadrata di 2 non può essere un numero razionale.

Perciò il risultato della radice quadrata di 2:

- **non può essere scritto con una frazione;**
- **non può essere scritto con un numero decimale finito;**
- **non può essere scritto con un decimale periodico.**

Come scrivo la radice quadrata di 2?

In matematica trovo:

A. Un numero decimale con infinite cifre dopo la virgola, senza periodo.

$$\sqrt{2} = 1{,}414213562373 \ldots.$$

Per eseguire i calcoli, posso scrivere solo un’approssimazione di questo numero decimale, con le cifre adeguate al problema da risolvere.

$$\sqrt{2} \cong 1{,}4 \qquad \sqrt{2} \cong 1{,}41 \qquad \sqrt{2} \cong 1{,}414 \qquad \sqrt{2} \cong 1{,}4142$$

B. Un simbolo scelto dai matematici per indicare il risultato esatto: il radicale $\sqrt{2}$

$\sqrt{2}$ indica il numero che, elevato al quadrato dà come potenza 2.

Daniela Valenti, 2021

Simboli e linguaggio

$\sqrt{2}$ **indica il numero che, elevato al quadrato, dà come potenza 2.**

Perciò si scrive:

$$\left(\sqrt{2}\right)^2 = 2 \qquad \sqrt{2} \cong 1,41$$

Uguale **Circa uguale**

$$1,41^2 = 1,9881$$

Daniela Valenti, 2021

Difficoltà dei radicali

La scrittura dei radicali pone varie difficoltà; ecco la prima, più evidente difficoltà.

In matematica, il simbolo $\sqrt{}$ viene usato con due significati diversi da distinguere

$$\sqrt{9} = 3$$

Operazione da eseguire

Risultato esatto

$$\sqrt{2}$$

Risultato esatto dell'estrazione di radice, quando il risultato è un numero irrazionale.

Radice di 2 nella storia del pensiero

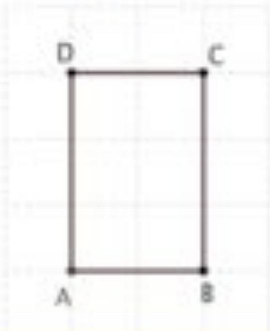
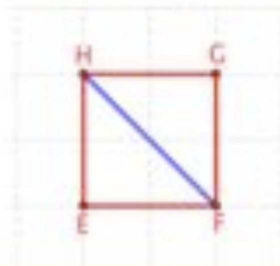
Le difficoltà di scrittura rispecchiano le difficoltà concettuali e la lunga, faticosa storia di radice di 2.

I babilonesi (≈ 1800 a.C), gli ***indiani*** (V a.C) lasciano traccia di procedimenti per calcolare la diagonale del quadrato.

E' 'scandalosa' la scoperta attribuita alla scuola pitagorica (VI a.C.) e riportata in opere di Platone (V a.C) e Aristotele (IV a.C.): non si può trovare un segmento, anche piccolissimo, che sia contenuto un numero intero di volte sia nel lato che nella diagonale del quadrato, cioè *lato e diagonale del quadrato sono incommensurabili*.

Nel III secolo (d.C.) si trova la prima dimostrazione scritta di questa incommensurabilità, strettamente legata all'irrazionalità di radice di 2: nella dimostrazione già si parla di numeri e non di segmenti.

Il lato e la diagonale del quadrato sono incommensurabili

Segmenti commensurabili	Segmenti incommensurabili
$\frac{BC}{AB} = \frac{3}{2}$ Questo vuol dire che ***trovo*** un segmento contenuto 3 volte nell'altezza BC e 2 volte nella base AB. 	$\frac{FH}{EF} = \sqrt{2}$ e **non** può essere $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$ Questo vuol dire che ***non posso trovare*** un segmento, neanche piccolissimo, contenuto ***m*** volte nella diagonale FH ed ***n*** volte nel lato EF. 

La scienza pitagorica era basata sull'idea di figura geometrica formata di piccolissimi elementi-unità, ossia di punti estesi. Perciò la scoperta degli incommensurabili determinò una profonda crisi nella scuola pitagorica.

Radici quadrate di altri numeri razionali

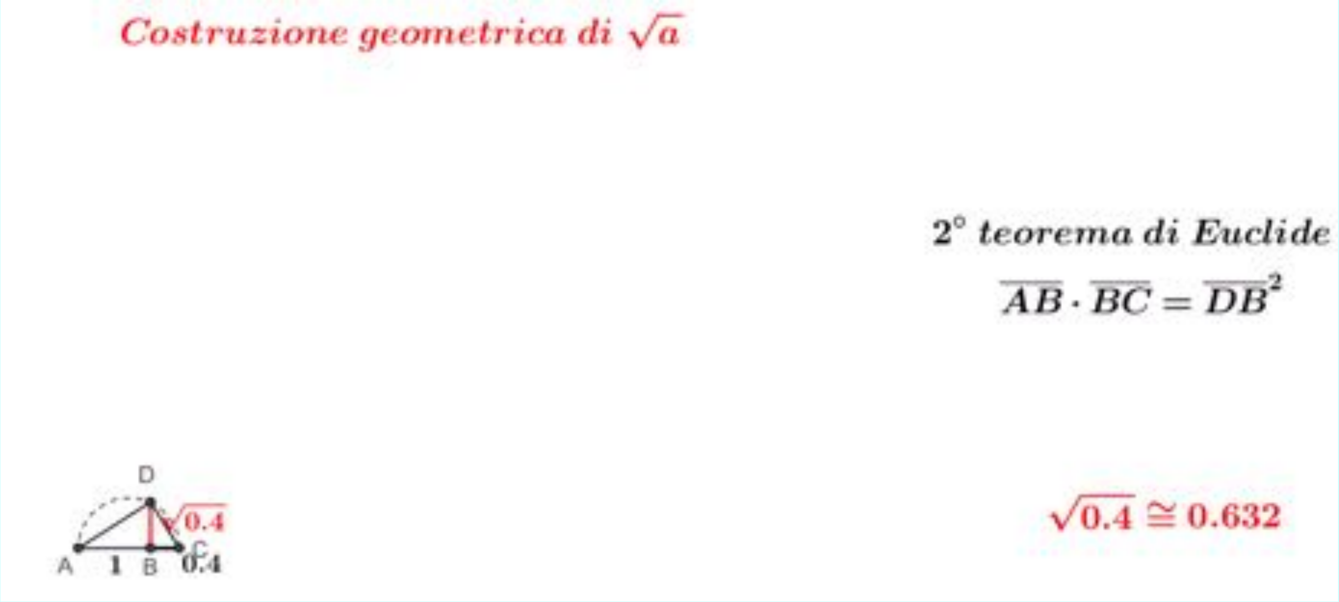
La radice di 2 non è l’unico numero irrazionale scoperto con l’estrazione di radice.
Ecco delle costruzioni geometriche che portano a scoprire altri numeri irrazionali.
Costruzioni e ragionamenti in questa lezione portano a lavorare solo con numeri positivi.

Costruzioni geometriche di $\sqrt{a}$

Con la geometria posso costruire un segmento che sia lungo *esattamente* $\sqrt{a}$

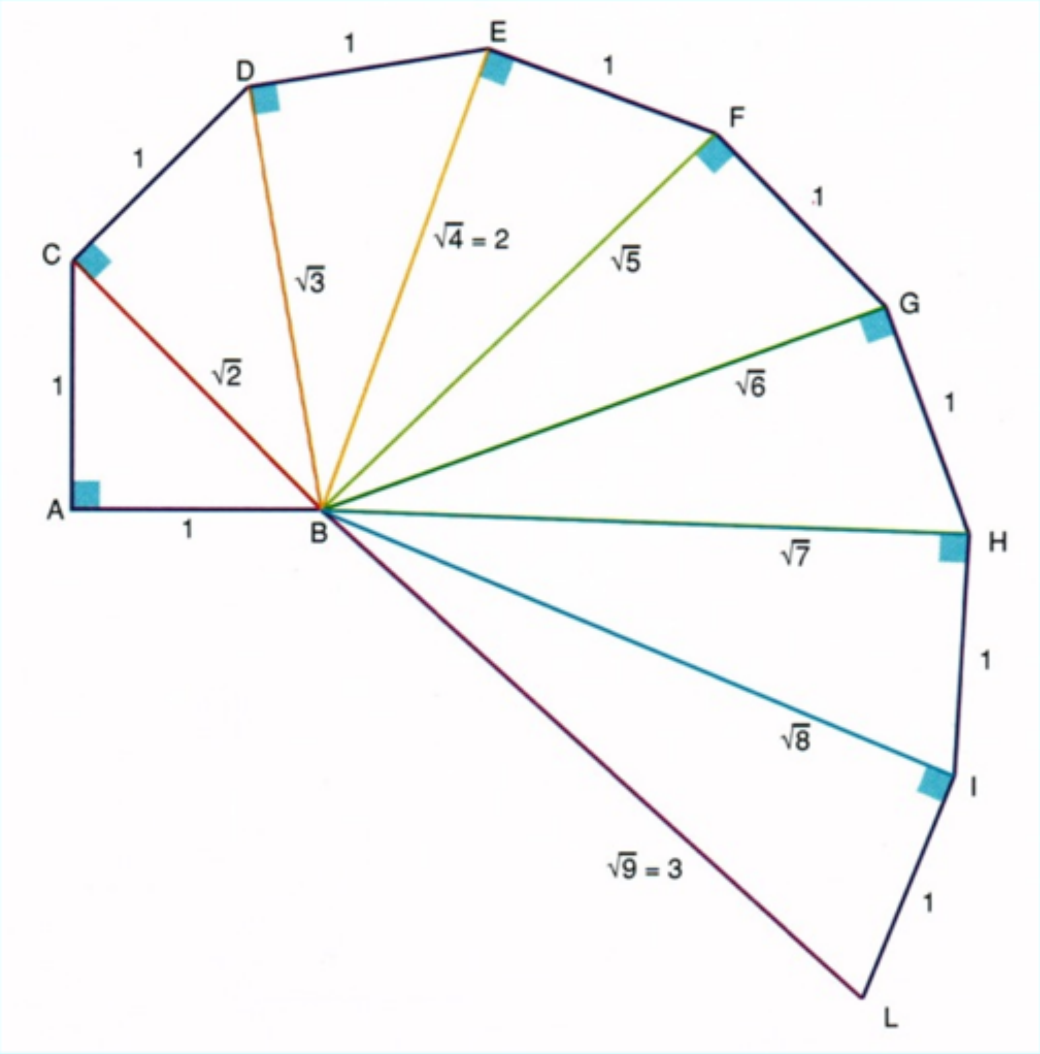
Una costruzione semplice e versatile è basata sul 2° teorema di Euclide.

Osserva la costruzione qui sotto



Costruzioni geometriche di $\sqrt{a}$

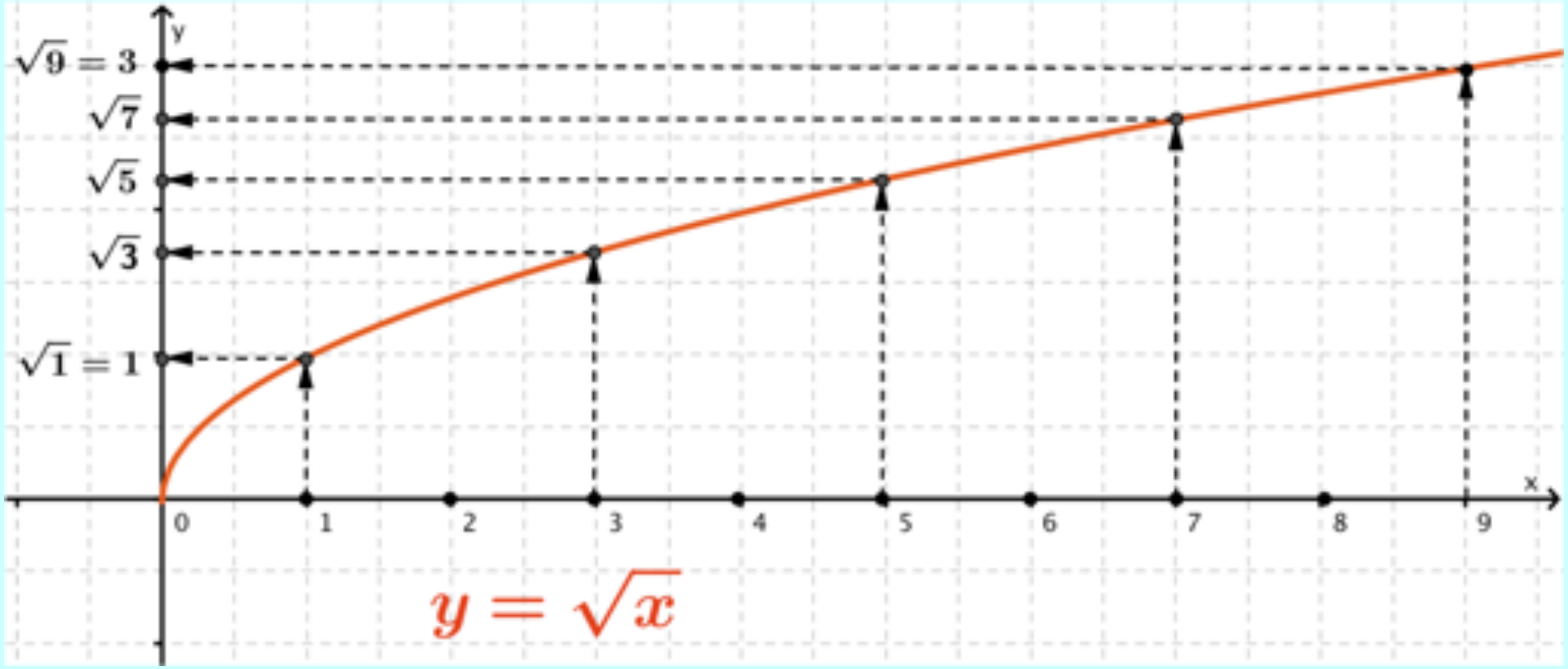
Costruzione basata sul teorema di Pitagora.
È facile, ma per costruire $\sqrt{20}$ ….



L'estrazione di radice nella storia della matematica

La storia dell'estrazione di radice si dipana lungo molti secoli: nel 1525 viene introdotto il simbolo $\sqrt{\ }$, arriva l'algebra e la geometria analitica, …. Troviamo i radicali anche nei grafici.

Radici quadrate in un grafico



Daniela Valenti, 2021

Numeri irrazionali scoperti con l'estrazione di radice

Se estraggo la radice quadrata di un numero razionale *x* trovo solo due casi possibili

- ***x è il quadrato di un numero razionale* e la sua radice quadrata è un numero razionale.**

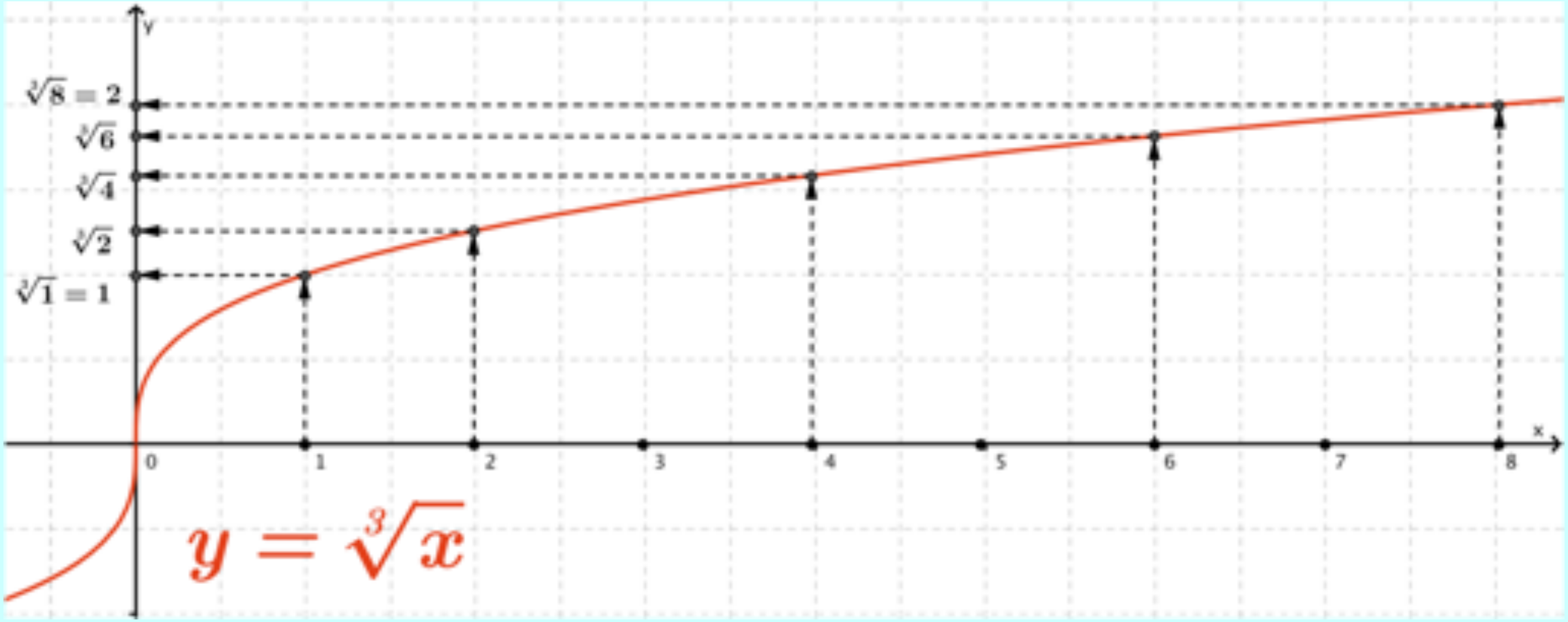
$$9 = 3^2 \Rightarrow \sqrt{9} = 3 \qquad 0{,}09 = 0{,}3^2 \Rightarrow \sqrt{0{,}09} = 0{,}3$$

$$\frac{25}{9} = \frac{5^2}{3^2} = \left(\frac{5}{3}\right)^2 \Rightarrow \sqrt{\frac{25}{9}} = \frac{5}{3}$$

- **In tutti gli altri casi la sua radice quadrata è un numero irrazionale. Così ottengo tanti radicali.**

$$\sqrt{5} \qquad \sqrt{0{,}3} \qquad \sqrt{4{,}9} \qquad \sqrt{\frac{3}{5}} \qquad \sqrt{\frac{4}{3}}$$

Radici cubiche in un grafico



Daniela Valenti, 2021

Numeri irrazionali dati da altre estrazioni di radice

Se estraggo la radice cubica di un numero razionale *x* trovo solo due casi possibili

- ***x* è *il cubo di un numero razionale* e la sua radice cubica è un numero razionale.**

$$8 = 2^3 \Longrightarrow \sqrt[3]{8} = 2 \qquad 0{,}008 = 0{,}2^3 \Longrightarrow \sqrt[3]{0{,}008} = 0{,}2$$

$$\frac{125}{8} = \frac{5^3}{2^3} = \left(\frac{5}{2}\right)^3 \Longrightarrow \sqrt[3]{\frac{125}{8}} = \frac{5}{2}$$

- **In tutti gli altri casi la sua radice cubica è un numero irrazionale. Altri radicali.**

$$\sqrt[3]{9} \qquad \sqrt[3]{0{,}08} \qquad \sqrt[3]{1{,}8} \qquad \sqrt[3]{\frac{7}{5}} \qquad \sqrt[3]{\frac{8}{9}}$$

Generare numeri irrazionali

L'estrazione di radice è un potente strumento per generare numeri irrazionali

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\sqrt{x}$	0	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	2	$\sqrt{5}$	$\sqrt{6}$	$\sqrt{7}$	$\sqrt{8}=\sqrt{2^3}$	3	$\sqrt{10}$
$\sqrt[3]{x}$	0	1	$\sqrt[3]{2}$	$\sqrt[3]{3}$	$\sqrt[3]{4}=\sqrt[3]{2^2}$	$\sqrt[3]{5}$	$\sqrt[3]{6}$	$\sqrt[3]{7}$	2	$\sqrt[3]{9}=\sqrt[3]{3^2}$	$\sqrt[3]{10}$

Trovi scritti in rosso i numerosi numeri irrazionali ottenuti con estrazione di radice quadrata e cubica dei numeri naturali da 1 a 10.

Numeri irrazionali generati da estrazione di radice

Ma posso avere anche $\sqrt[4]{x}$, $\sqrt[5]{x}$, ... $\sqrt[n]{x}$ e arrivare a un risultato generale.

Ho un numero razionale positivo x e calcolo $\sqrt[n]{x}$.

Il risultato è razionale solo se $x = a^n$, dove a è un numero razionale.

Negli altri casi il risultato è irrazionale e si esprime con un radicale.

E così trovo, ad esempio i seguenti radicali che descrivono numeri irrazionali

$\sqrt[7]{5^3}$ $\sqrt[5]{1{,}2^4}$ .....

I radicali: simboli e linguaggio

In generale, un radicale si scrive nella forma

$$\sqrt[n]{\boxed{a^p}}$$

radicando

p **è l'esponente del radicando**

n **è l'indice del radicale**

Esempio: **radicale** $\sqrt[3]{5^2}$

Radicando: **5^2**
Esponente del radicando: **2**
Indice del radicale: **3**

Esempio: **radicale** $\sqrt{3}$

Radicando: **3**
Esponente del radicando: **1**
Indice del radicale: **2**

Daniela Valenti, 2021