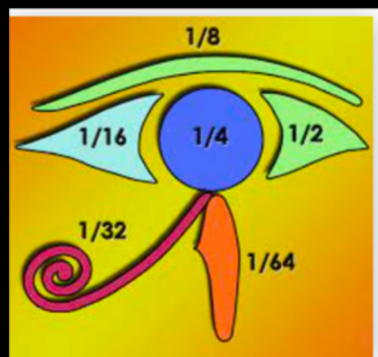
Calcoli con numeri reali

Naturali



Razionali

Irrazionali

L ALGEBRA
PARTE MAGGIORE
DELL'ARIMETICA
DIVISA IN TRE LIBRI
DI RAFAEL BOMBELLI
DA BOLOGNA.

Nouamente posta in luce.

IN BOLOGNA

Nella stamperia di Giouanni Rossi

MDLXXII.

Con Licentia delli RR. VV. del Vesc. & Inquisit.

Negativi

Operazioni con numeri reali

Arrivo a considerare solo 3 operazioni:

1.Elevazione a potenza

perché l'estrazione di radice diventa potenza ad esponente frazionario:

$$\sqrt{3} = 3^{\frac{1}{2}}$$

2.Moltiplicazione

perché la divisione diventa moltiplicazione per l'inverso:

$$3:2 = 3 \cdot \frac{1}{2}$$

3.Addizione

perché la sottrazione diventa addizione con l'opposto.

$$3-2 = 3+(-2)$$

Daniela Valenti, 2021

Calcolare espressioni con numeri reali

Estendo ai numeri reali priorità e ordine delle operazioni valide per i numeri razionali

A. Espressioni con una sola operazione

In espressioni con una sola operazione applicata a tre o più numeri, eseguo i calcoli nell'ordine in cui sono scritti, da sinistra verso destra.

B. Priorità delle operazioni

In espressioni con addizioni, moltiplicazioni e potenze eseguo le operazioni in questo ordine:

1. **Elevazioni a potenza;**
2. **Moltiplicazioni;**
3. **Addizioni.**

C. Uso le parentesi per cambiare l'ordine stabilito.

Daniela Valenti, 2021

Proprietà delle operazioni

Estendo ai numeri reali le proprietà di addizione e moltiplicazione valide per i numeri razionali.

Proprietà	Addizione	Moltiplicazione
Commutativa	$a + b = b + a$	$a \cdot b = b \cdot a$
Associativa	$a + (b + c) = (a + b) + c$	$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
Elemento neutro	*0 è l'elemento neutro* $a + 0 = a$	*1 è l'elemento neutro* $a \cdot 1 = a$
Elemento assorbente	*L'addizione **non** ha elemento assorbente*	*0 è l'elemento assorbente* $a \cdot 0 = 0$
Opposto	*Dato **a**, si trova **−a** tale che* $-a + a = 0$	
Inverso (o reciproco)		*Dato **a diverso da 0**, si trova* $\frac{1}{a}$ *tale che* $\frac{1}{a} \cdot a = 1$
Distributiva	$a\,(b + c) = ab + ac$	

Domanda: rimangono delle operazioni che non posso eseguire con i numeri reali?

Non posso dividere per 0 perché nei numeri reali non trovo il reciproco di 0

Numero reale a	3	$\sqrt{2}$	$-\sqrt[3]{4}$	π	0
Reciproco $\frac{1}{a}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$	$\frac{1}{\pi}$	*NON ESISTE* *x tale che* $0 \cdot x = 1$

Daniela Valenti, 2021

E rimangono altre operazioni che non posso eseguire con i numeri reali?

Radici quadrate e numeri negativi

Problema storico

Già gli antichi babilonesi calcolano radici quadrate, ma solo durante il 1600 i matematici europei lavorano stabilmente con i numeri negativi.

Come accordare le ‘antiche’ radici quadrate con i ‘nuovi’ numeri negativi?

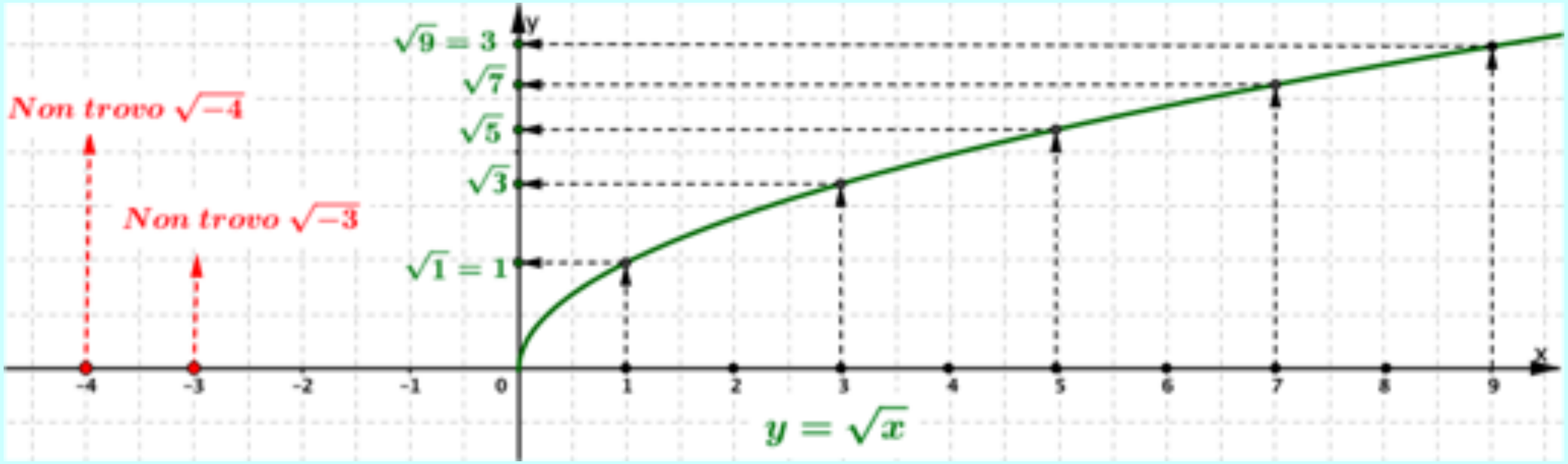
L ALGEBRA
PARTE MAGGIORE
DELL'ARIMETICA
DIVISA IN TRE LIBRI
DI RAFAEL BOMBELLI
DA BOLOGNA.

Nouamente posta in luce.

IN BOLOGNA
Nella stamperia di Giouanni Rossi
M D L X X I I.
Con Licentia delli RR. VV. del Vesc. & Inquisit.

Daniela Valenti, 2021

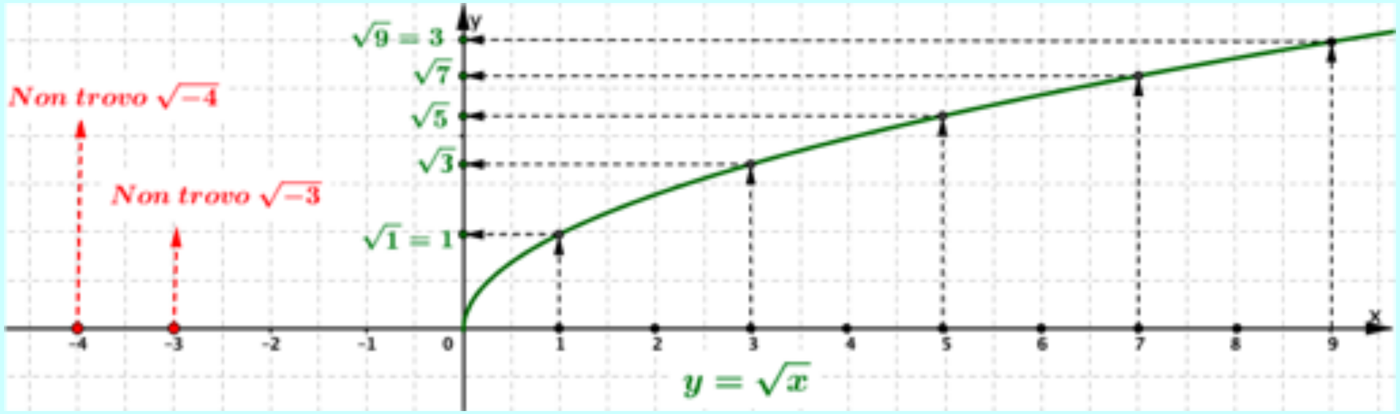
Radici quadrate di numeri negativi



Non trovo $\sqrt{-9}, \sqrt{-4}, \sqrt{-3}, \ldots$

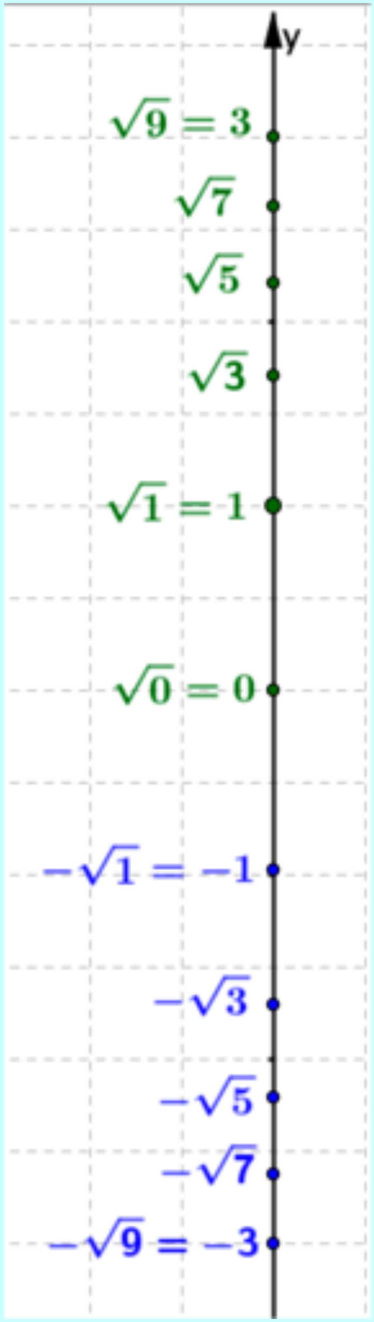
Non posso calcolare le radici quadrate di numeri negativi.

Radici quadrate e numeri negativi



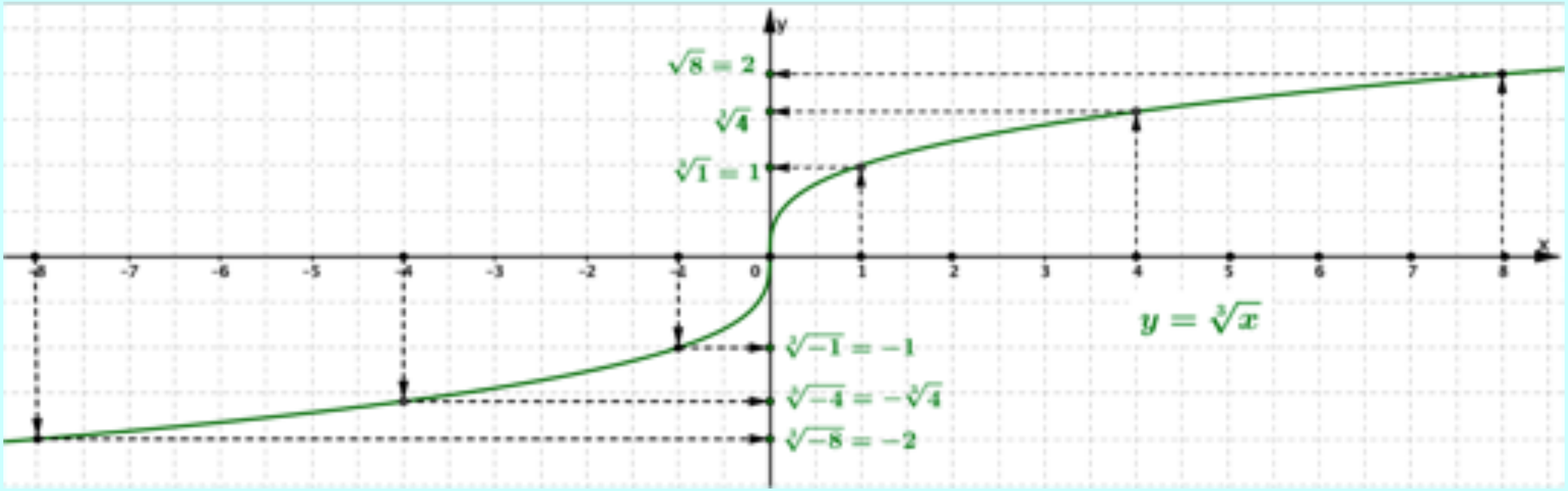
Non trovo $\sqrt{-3}, \sqrt{-9}$

Ma trovo $-\sqrt{3}, -\sqrt{9}$



Daniela Valenti, 2021

Radici cubiche anche di numeri negativi



Trovo sulla retta dei numeri reali le radici cubiche di tutti i numeri reali.

Un risultato più generale

Non trovo sulla retta dei numeri reali solo le radici con indice pari di numeri negativi .

Esempi

Non trovo sulla retta dei numeri reali
$\sqrt{-100}$, $\sqrt[4]{-16}$, $\sqrt[6]{-64}$, $\sqrt[8]{-25}$

Trovo sulla retta dei numeri reali
$\sqrt[3]{-27}$, $\sqrt[5]{-32}$, $\sqrt[7]{-10}$

Estendo le proprietà dei radicali ad espressioni con numeri negativi?

Le proprietà dei radicali erano importanti per i calcoli con carta e penna, soprattutto quando si lavorava solo con numeri positivi.

Perciò richiedono particolare attenzione in espressioni con numeri negativi.

Ragioniamo su qualche caso significativo

Prodotto di radicali con lo stesso indice pari

$$\sqrt{4} \cdot \sqrt{25} = 2 \cdot 5 = 10$$

$$\sqrt{4 \cdot 25} = \sqrt{100} = 10$$

$$\boxed{\sqrt{4} \cdot \sqrt{25} = \sqrt{4 \cdot 25}}$$

È VERA

$\sqrt{-4} \cdot \sqrt{-25}$ non ha risultato nei numeri reali

$$\sqrt{(-4) \cdot (-25)} = \sqrt{100} = 10$$

$$\boxed{\sqrt{-4} \cdot \sqrt{-25} = \sqrt{(-4) \cdot (-25)}}$$

È FALSA

Analoghe conclusioni per il quoziente di radicali con lo stesso indice pari, dato che la divisione diventa moltiplicazione per il reciproco.
Rimane impossibile la divisione per 0.

Potenze di radicali con indice pari

$$\sqrt{3^2} = \sqrt{9} = 3$$

$$\left(\sqrt{3}\right)^2 = 3$$

$$\boxed{\left(\sqrt{3}\right)^2 = \sqrt{3^2}}$$

È VERA

$$\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3$$

$$\boxed{\sqrt{(-3)^2} = \left(\sqrt{-3}\right)^2}$$

È FALSA

$\left(\sqrt{-3}\right)^2$ **non ha risultato nei numeri reali**

Proprietà dei radicali estese a numeri negativi

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$$

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^p = \sqrt[n]{a^p}$$

Indice n dei radicali dispari

Tutte le proprietà sono valide anche se al posto di a, b inserisco numeri negativi.

Indice n dei radicali pari

Le proprietà non sono valide se al posto di a, b inserisco numeri negativi.

Attività. Calcoli con numeri reali

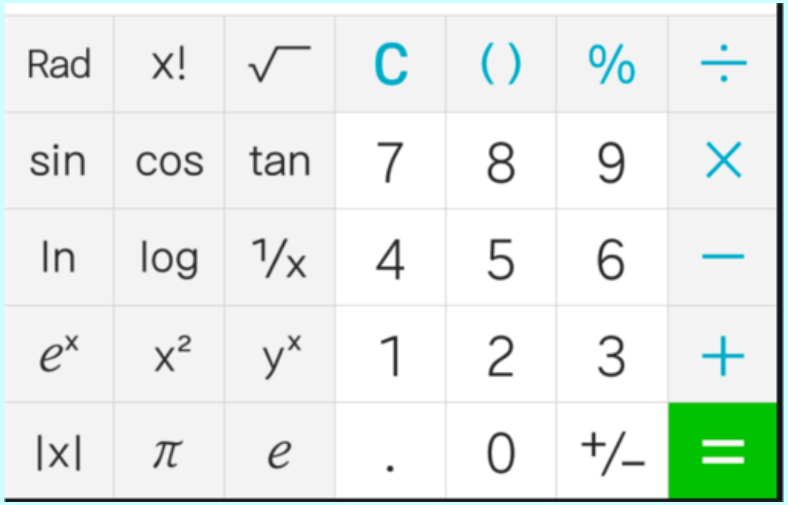
Completa l'attività per consolidare quello che hai imparato.

Per l’uso della calcolatrice

Ricordo i due tipi più comuni di calcolatrice scientifica

A. Per calcolare $\sqrt{2}$ digito
prima **2** e poi il tasto √

B. Per calcolare $\sqrt{2}$ digito
prima il tasto √ e poi **2**



Che cosa hai trovato

Quesito 1

1. Scegli l'unica affermazione **vera.**

A. Trovo $-\sqrt{6}$ nell'insieme dei numeri razionali

B. $\left(\sqrt{-6}\right)^2 = -6$

C. Non trovo $\sqrt{-16}$ nell'insieme dei numeri reali

D. $\sqrt{-6} \cdot \sqrt{-3} = \sqrt{18}$

E. Non trovo $-\sqrt{6}$ nell'insieme dei numeri reali

Attenzione alle risposte B e D false.
Non trovo fra i numeri reali $\sqrt{-6}$ e $\sqrt{-3}$,
perciò non posso applicare le proprietà dei radicali

Quesito 2

2. Quale dei seguenti numeri è esattamente l'inverso di $\sqrt{2}$?

A. $-\sqrt{2}$ **B.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **C.** $\frac{1}{1{,}41}$ **D.** 0,70710678 **E.** $\frac{2}{\sqrt{2}}$

B. L'inverso di $\sqrt{2}$ è $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

A. $-\sqrt{2}$ è l'opposto di $\sqrt{2}$.

C e D sono approssimazioni decimali dell'inverso.

E. $\frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

Quesito 3

3. Scegli l'unica affermazione **vera**

A. $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=0$ **B.** $\frac{\sqrt{5}}{0}=0$ **C.** $\frac{0}{\sqrt{5}}$ non ha risultato **D.** $\frac{-\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=1$ **E.** $\frac{0}{\sqrt{5}}=0$

$$\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=0$$

Falsa perché è falsa

$$\mathbf{\sqrt{5}=0\cdot\sqrt{5}}$$

$$\frac{\sqrt{5}}{0}=0$$

Falsa perché è falsa

$$\mathbf{\sqrt{5}=0\cdot 0}$$

$$\frac{-\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=1$$

Falsa perché è falsa

$$\mathbf{-\sqrt{5}=1\cdot\sqrt{5}}$$

$$\frac{0}{\sqrt{5}}=0$$

VERA perché è VERA

$$\mathbf{0=0\cdot\sqrt{5}}$$

Prova della divisione. Esempio

$$\mathbf{\frac{12}{4}=3}\ \boldsymbol{vero\ perch}\text{è}\ \mathbf{12=3\cdot 4}\ \text{è}\ \boldsymbol{vera}$$

Quesito 4

. Completa la seguente tabella come mostra la prima riga, per eseguire moltiplicazioni fra numeri reali.

Prodotti di numeri reali	Osservazioni
$(-3)\cdot\sqrt{2}=-3\sqrt{2}$	Per indicare il prodotto scrivo affiancati numero intero e radicale
$\frac{5}{4}\cdot\sqrt{3}=\frac{5}{4}\sqrt{3}=\frac{5\sqrt{3}}{4}$	Per indicare il prodotto scrivo affiancati frazione e radicale, oppure scrivo il prodotto del radicale per il numeratore
$-\frac{3}{5}\cdot\sqrt{7}=-\frac{3}{5}\sqrt{7}=-\frac{3\sqrt{7}}{5}$	Per indicare il prodotto scrivo affiancati frazione e radicale, oppure scrivo il prodotto del radicale per il numeratore
$\frac{1}{2}\cdot\pi=\frac{1}{2}\pi=\frac{\pi}{2}$	Per indicare il prodotto scrivo affiancati frazione e simbolo π, oppure scrivo il prodotto di π per il numeratore.

Trovo analoghe convenzioni di scrittura nel calcolo letterale:

$$4\cdot x=4x \qquad (-3)\cdot y=-3y \qquad \frac{5}{4}\cdot a=\frac{5}{4}a=\frac{5a}{4}$$

Quesito 6

Con la calcolatrice A

. Completa la seguente tabella, dove la scrittura con esponenti frazionari guida l'uso delle parentesi. Scrivi la tua sequenza di tasti e arrotonda i risultati della calcolatrice con tre cifre dopo la virgola.

Espressioni con frazioni e radicali	Esponenti frazionari	Sequenza di tasti	Risultato di calcolatrice
$4\sqrt{3}+2\sqrt{3}=(4+2)\sqrt{3}=6\sqrt{3}$	$4\cdot 3^{\frac{1}{2}}+2\cdot 3^{\frac{1}{2}}$	A. $4 \times 3 \boxed{\sqrt{}} + 2 \times 3 \boxed{\sqrt{}} =$	10,392
$4\sqrt{2}+\frac{3}{5}\sqrt{2}=\left(4+\frac{3}{5}\right)\sqrt{2}=\frac{23}{5}\sqrt{2}$	$4\cdot 2^{\frac{1}{2}}+(3:5)\cdot 2^{\frac{1}{2}}$	A. $4 \times 2 \boxed{\sqrt{}} + (3 \div 5) \times 2 \boxed{\sqrt{}} =$	6,505

Con la calcolatrice B

Completa la seguente tabella, dove la scrittura con esponenti frazionari guida l'uso delle parentesi. Scrivi la tua sequenza di tasti e arrotonda i risultati della calcolatrice con tre cifre dopo la virgola.

Espressioni con frazioni e radicali	Esponenti frazionari	Sequenza di tasti	Risultato di calcolatrice
$4\sqrt{3}+2\sqrt{3}=(4+2)\sqrt{3}=6\sqrt{3}$	$4\cdot 3^{\frac{1}{2}}+2\cdot 3^{\frac{1}{2}}$	B. $4 \times \boxed{\sqrt{}}\,(3) + 2 \times \boxed{\sqrt{}}\,(3) =$	10,392
$4\sqrt{2}+\frac{3}{5}\sqrt{2}=\left(4+\frac{3}{5}\right)\sqrt{2}=\frac{23}{5}\sqrt{2}$	$4\cdot 2^{\frac{1}{2}}+(3:5)\cdot 2^{\frac{1}{2}}$	B. $4\times\boxed{\sqrt{}}(2)+(3\div 5)\times\boxed{\sqrt{}}(2)=$	6,505

Proprietà di addizione e moltiplicazione nell'insieme dei numeri reali

Una riflessione

Ho applicato la proprietà distributiva

$$ac + bc = (a + b)\ c$$

Per scrivere

$$4\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = \left(4 + 2\right)\sqrt{3}$$

Quesito 6

Con la calcolatrice A

Espressioni con frazioni e radicali	Esponenti frazionari	Sequenza di tasti	Risultato di calcolatrice
$\sqrt{\frac{4+5}{9}}=\sqrt{\frac{9}{9}}=\sqrt{1}=1$	$[(4+5):9]^{\frac{1}{2}}$	**A.** $((4+5)\div 9)\ \boxed{\sqrt{}}\ =$	1
$\frac{\sqrt{4+5}}{9}=\frac{\sqrt{9}}{9}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$	$(4+5)^{\frac{1}{2}}:9$	**A.** $(4+5)\ \boxed{\sqrt{}}\ \div 9 =$	0,333
$\frac{\sqrt{4}+5}{9}=\frac{2+5}{9}=\frac{7}{9}$	$\left(4^{\frac{1}{2}}+5\right):9$	**A.** $(4\ \boxed{\sqrt{}}+5)\div 9 =$	0,778
$4+\frac{5}{\sqrt{9}}=4+\frac{5}{3}=\frac{17}{3}$	$4+5:9^{\frac{1}{2}}$	**A.** $4+5\div 9\ \boxed{\sqrt{}}\ =$	5,667

Attenzione alle parentesi!

Quesito 6

Con la calcolatrice B

Espressioni con frazioni e radicali	Esponenti frazionari	Sequenza di tasti	Risultato di calcolatrice
$\sqrt{\frac{4+5}{9}}=\sqrt{\frac{9}{9}}=\sqrt{1}=1$	$[(4+5):9]^{\frac{1}{2}}$	B. $\boxed{\sqrt{}}$ ((4 + 5) ÷ 9) =	1
$\frac{\sqrt{4+5}}{9}=\frac{\sqrt{9}}{9}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$	$(4+5)^{\frac{1}{2}}:9$	B. $\boxed{\sqrt{}}$ (4 + 5) ÷ 9 =	0,333
$\frac{\sqrt{4}+5}{9}=\frac{2+5}{9}=\frac{7}{9}$	$\left(4^{\frac{1}{2}}+5\right):9$	B. ($\boxed{\sqrt{}}$ (4) + 5) ÷ 9 =	0,778
$4+\frac{5}{\sqrt{9}}=4+\frac{5}{3}=\frac{17}{3}$	$4+5:9^{\frac{1}{2}}$	B. 4 + 5 ÷ $\boxed{\sqrt{}}$ (9) =	5,667

Attenzione alle parentesi!

Daniela Valenti, 2021

Ordine delle operazioni e parentesi

Esempio: Espressione senza parentesi

II. Moltiplicazione/Divisione

$$4+\frac{5}{\sqrt{9}} = 4+5:9^{\frac{1}{2}} = 4+5:3 = 4+\frac{5}{3} = \frac{17}{3}$$

I. Potenza/Radice

III. Addizione/Sottrazione

Ordine delle operazioni e parentesi

Esempio: Espressione con parentesi

II. Divisione fra parentesi quadre

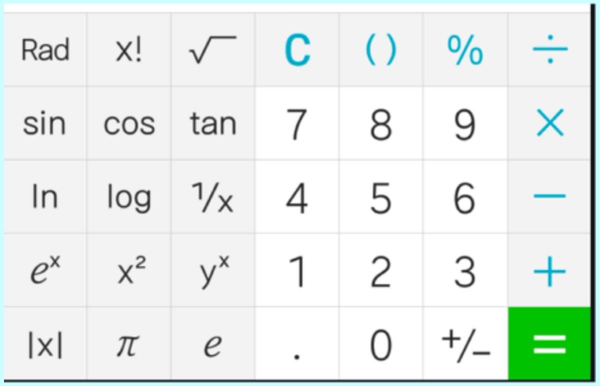
$$\sqrt{\frac{4+5}{9}} = \left[\left(4+5\right):9\right]^{\frac{1}{2}} = \left[9:9\right]^{\frac{1}{2}} = 1^{\frac{1}{2}} = 1$$

I. Addizione fra parentesi tonde

III. Radice

Ordine delle operazioni e parentesi nelle calcolatrici scientifiche

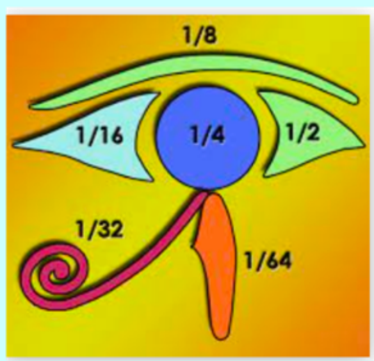
Ordine delle operazioni e significato delle parentesi come in matematica con un'unica diversità: nelle calcolatrici trovi solo le parentesi tonde.



Un lungo cammino nella storia

Così si conclude una parte importante dell'evoluzione dei numeri

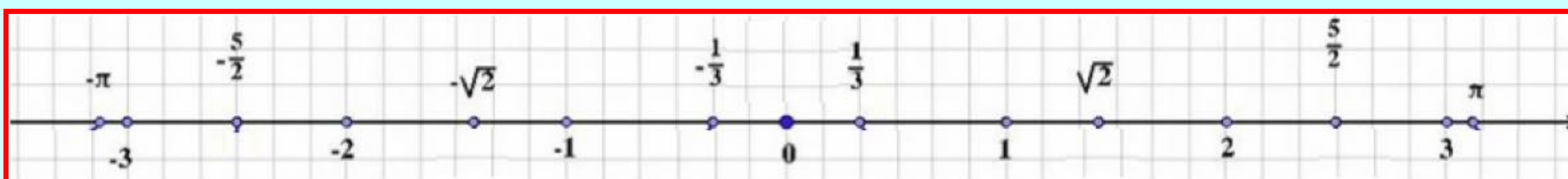
Naturali



Razionali

Irrazionali

Negativi



Reali