Teoria ed esercizi tratti dal testo
E. Castelnuovo, C. Gori Giorgi, D.Valenti
'Matematica oggi' vol.1

6 Dal metodo di sostituzione alla regola di Cramer

Come si riconosce un sistema di 1° grado

Nel paragrafo precedente si è lavorato solo su qualche particolare sistema di equazioni; più in generale, si può dire che un sistema di 1° grado è costituito da più equazioni di 1° grado, in cui compaiono più incognite.

Fra i sistemi di 1° grado i più semplici da risolvere sono quelli in cui compaiono due equazioni e due incognite, abitualmente indicate con le lettere x e y. Questi sistemi possono essere sempre scritti nella forma seguente:

$$\begin{cases} ax+by=h \\ cx+dy=k \end{cases}$$

dove le lettere a, b, c, d indicano *i coefficienti delle incognite*, mentre le lettere h, k indicano *i termini noti*.

Ecco un esempio:

$$\begin{cases} 6x+9y=19 \\ 9x+3y=11 \end{cases}$$

Tuttavia, un sistema scritto in quest'ultima forma non mostra una rapida via di soluzione con il metodo di sostituzione. Conviene allora esaminare attentamente questo caso, affiancando i calcoli svolti con i coefficienti numerici agli analoghi calcoli basati sui coefficienti letterali (a, b, c, d, h, k).

Ecco come si procede.

1. Si ricava un'incognita (per esempio x) da una delle equazioni (per esempio dalla prima) e si scrive l'espressione ottenuta al posto di x nell'altra equazione; si ha:

sistema $\begin{cases} 6x+9y=19 \\ 9x+3y=11 \end{cases}$	sistema $\begin{cases} ax+by=h \\ cx+dy=k \end{cases}$
$\begin{cases} 6x=19-9y \\ 9x+3y=11 \end{cases}$	$\begin{cases} ax=h-by \\ cx+dy=k \end{cases}$
$\begin{cases} x=\frac{19}{6}-\frac{9}{6}y \\ 9x+3y=11 \end{cases}$	$\begin{cases} x=\frac{h}{a}-\frac{b}{a}y \\ cx+dy=k \end{cases}$
$\begin{cases} x=\frac{19}{6}-\frac{9}{6}y \\ 9\left(\frac{19}{6}-\frac{9}{6}y\right)+3y=11 \end{cases}$	$\begin{cases} x=\frac{h}{a}-\frac{b}{a}y \\ c\left(\frac{h}{a}-\frac{b}{a}y\right)+dy=k \end{cases}$

2. Si risolve la seconda equazione, che presenta la sola incognita y, e si ha:

$\begin{cases} x=\frac{19}{6}-\frac{9}{6}y \\ y=\frac{5}{3} \end{cases}$	$\begin{cases} x=\frac{h}{a}-\frac{b}{a}y \\ y=\frac{ak-ch}{ad-cb}=\frac{m}{n} \end{cases}$

3. Si sostituisce il valore di y nella prima equazione per ricavare anche il valore di x. Nei calcoli da svolgere con i coefficienti letterali conviene indicare con m e n i termini della frazione che dà il valore di y. Si ottiene quindi:

$$\begin{cases} x=\dfrac{19}{6}-\dfrac{9}{6}\cdot\dfrac{5}{3} \\ y=\dfrac{5}{3} \end{cases} \qquad \begin{cases} x=\dfrac{h}{a}-\dfrac{b}{a}\cdot\dfrac{m}{n} \\ y=\dfrac{ak-ch}{ad-cb}=\dfrac{m}{n} \end{cases}$$

4. Svolgendo i calcoli, si ottiene finalmente:

$$\begin{cases} x=\dfrac{2}{3} \\ y=\dfrac{5}{3} \end{cases} \qquad \begin{cases} x=\dfrac{dh-bk}{ad-cb} \\ y=\dfrac{ak-ch}{ad-cb} \end{cases}$$

La regola di Cramer

Alla fine dei calcoli, si osserva che il procedimento non offre difficoltà concettuali, ma risulta alquanto lungo e pesante.
Converrebbe allora ricordare i risultati ottenuti nel caso dei coefficienti letterali, in modo da non dover ripetere ogni volta gli stessi calcoli.
Per questo Gabriel Cramer, matematico svizzero del Settecento, ha proposto una scrittura che rende facilmente memorizzabili i risultati ottenuti nel caso letterale. Ecco di che si tratta.
Si scrivono i coefficienti delle incognite in una tabella come la seguente:

$$\begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix}$$

Questa tabella prende il nome di *matrice dei coefficienti.*
A questa matrice si associa un numero, chiamato *determinante della matrice*, definito nel modo seguente:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad-bc$$

Il determinante si trova dunque nel modo seguente (fig. 1):

- si calcola il prodotto ad, moltiplicando termini che si trovano sulla *diagonale principale*;
- si calcola il prodotto bc, moltiplicando termini che si trovano sulla *diagonale secondaria*;
- si calcola la differenza $ad-bc$.

Analogamente, si può scrivere:

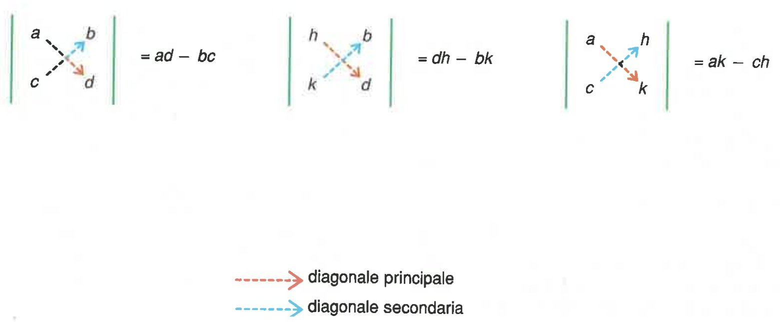
$$\begin{vmatrix} h & b \\ k & d \end{vmatrix} = dh-bk$$

$$\begin{vmatrix} a & h \\ c & k \end{vmatrix} = ak-ch$$

In questo modo, *la soluzione del sistema:*

$$\begin{cases} ax+by=h \\ cx+dy=k \end{cases}$$

Figura 1
Come si calcola il determinante di una matrice



si può scrivere nella forma seguente:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} h & b \\ k & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} \qquad y=\frac{\begin{vmatrix} a & h \\ c & k \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$$

Questa soluzione si può ricordare facilmente con le seguenti osservazioni (fig. 2):

- in entrambe le espressioni il denominatore è il determinante della matrice dei coefficienti;
- nell'espressione che fornisce x, il numeratore è il determinante della matrice ottenuta, a partire da quella dei coefficienti, scrivendo i termini noti al posto della prima colonna;
- nell'espressione che fornisce y, il numeratore è il determinante della matrice ottenuta, a partire da quella dei coefficienti, scrivendo i termini noti al posto della seconda colonna.

Questa regola prende appunto il nome di *regola di Cramer.*

Un esempio di applicazione della regola di Cramer

Ecco un esempio che conduce ad impadronirsi della regola di Cramer per risolvere rapidamente dei sistemi di 1° grado di due equazioni in due incognite.

Risolvere il sistema:

$$\begin{cases} 10x+4y=3 \\ 5x-20y=-4 \end{cases}$$

- Si calcola il determinante dei coefficienti, che vale:

$$\begin{vmatrix} 10 & 4 \\ 5 & -20 \end{vmatrix} =10(-20)-5\cdot4=-200-20=-220$$

- Per ottenere il valore di x, si calcola il seguente determinante:

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -4 & -20 \end{vmatrix} =3(-20)-(-4)\cdot4=-60+16=-44$$

Si trova quindi:

$$x=\frac{-44}{-220}=\frac{1}{5}=0{,}2$$

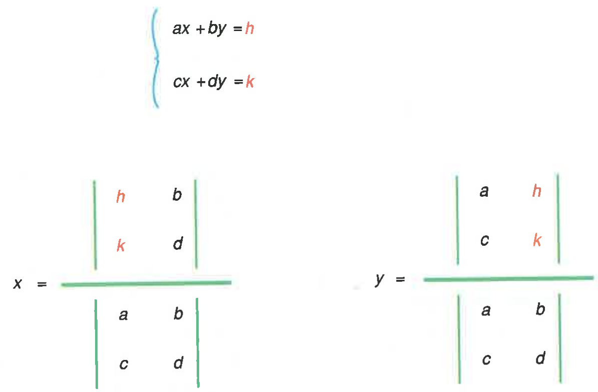
- Per calcolare il valore di y, si calcola invece il seguente determinante:

$$\begin{vmatrix} 10 & 3 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} =10\cdot(-4)-3\cdot5=-40-15=-55$$

Così si trova:

$$y=\frac{-55}{-220}=\frac{1}{4}=0{,}25$$

Figura 2
La soluzione di un sistema



In definitiva la soluzione del sistema è

$$\left(\frac{1}{5};\ \frac{1}{4}\right) \quad \text{ossia} \quad (0{,}2;\ 0{,}25)$$

La regola di Cramer e i sistemi indeterminati

Ecco un secondo esempio di sistema da risolvere:

$$\begin{cases} 2x+3y=4 \\ 4x+6y=8 \end{cases}$$

Si osserva subito che la seconda equazione è ottenuta dalla prima moltiplicandone i due membri per 2, perciò le due equazioni sono fra loro equivalenti; questo vuol dire che il sistema è in realtà costituito dalla sola equazione:

$$2x+3y=4$$

riscritta due volte.
Si tratta allora di *un sistema indeterminato*, dato che una sola equazione in due incognite non determina una soluzione.
Che cosa succede ora applicando la regola di Cramer?

- Calcolando il determinante dei coefficienti, si trova:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 2\cdot 6 - 4\cdot 3 = 12 - 12 = 0$$

- Calcolando poi gli altri due determinanti, si trova:

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 8 & 6 \end{vmatrix} = 4\cdot 6 - 3\cdot 8 = 24 - 24 = 0$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = 2\cdot 8 - 4\cdot 4 = 16 - 16 = 0$$

Si trova dunque che tutti e tre i determinanti valgono 0.
Questo stesso risultato caratterizza, più in generale, i sistemi formati da due equazioni equivalenti.

La regola di Cramer e i sistemi impossibili

Ecco un ultimo esempio di sistema su cui riflettere:

$$\begin{cases} 2x+3y=4 \\ 4x+6y=12 \end{cases}$$

Le due equazioni non sono equivalenti, perché la seconda equazione è ottenuta dalla prima, in questo modo:

- il primo membro è stato moltiplicato per 2;
- il secondo membro è stato moltiplicato per 3.

Tuttavia, calcolando il determinante dei coefficienti, si trova ancora:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 2\cdot 6 - 4\cdot 3 = 12 - 12 = 0$$

Però, calcolando gli altri due determinanti, si trova:

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 12 & 6 \end{vmatrix} = 4\cdot 6 - 3\cdot 12 = 24 - 36 = -12$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 12 \end{vmatrix} = 2\cdot 12 - 4\cdot 4 = 24 - 16 = 8$$

In questo caso allora, per calcolare il valore di x e y, si dovrebbero eseguire le operazioni seguenti:

$$x = \frac{-12}{0} \qquad y = \frac{8}{0}$$

operazioni prive di significato, dato che non si può eseguire la divisione per 0.
Non si può dunque trovare la soluzione del sistema, cioè *il sistema è impossibile*.

Sistemi risolubili

Le considerazioni precedenti possono essere sintetizzate nel modo seguente:

- *Un sistema indeterminato* non riesce a determinare una sola soluzione, perché è formato da una sola equazione ripetuta due volte; in questo caso *i tre determinanti presenti nella regola di Cramer valgono tutti 0*.
- Se poi *il solo determinante dei coefficienti è 0*, le due espressioni che forniscono x e y perdono significato, dato che non si può eseguire la divisione per 0; in questo caso non si può trovare la soluzione del sistema, cioè il *sistema è impossibile*.
- Se invece *il determinante dei coefficienti non vale 0*, si trova una sola soluzione, fornita rapidamente dalla regola di Cramer; in questo caso il sistema si dice *risolubile*.

Converrà allora controllare la risolubilità di un sistema prima di iniziare a risolverlo, tenendo presente che *un sistema è risolubile solo se risulta*:

$$ad - bc \neq 0$$

Verifiche

Conoscenze

① In che modo si riconosce un sistema di 1° grado?

② In quale forma si scrive abitualmente un sistema di 1° grado in due equazioni e due incognite?

③ Illustrare la regola di Cramer per risolvere un sistema di 1° grado in due equazioni e due incognite.

④ Che cosa significa il termine «sistema indeterminato»? Quali risultati dà la regola di Cramer nel caso dei sistemi indeterminati?

⑤ Che cosa si conclude se il determinante dei coefficienti vale 0?

⑥ Come si verifica se un sistema è o non è risolubile?

Comprensione

① Si può risolvere un sistema senza ricordare la regola di Cramer?

② Come si può verificare se la soluzione di un sistema è esatta?

③ Esaminare il seguente sistema:

$$\begin{cases} x=y \\ x+y=4 \end{cases}$$

e trovare l'errore nella seguente affermazione:
Il sistema non è risolubile, perché determinante dei coefficienti è:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 1 = 0$$

④ Risolvere il sistema precedente in due modi:
- applicando correttamente la regola di Cramer;
- con il metodo di sostituzione.

Con quale metodo i calcoli sono più rapidi?

⑤ È dato il seguente sistema, formato da due equazioni equivalenti:

$$\begin{cases} ax+by=h \\ max+mby=mh \end{cases}$$

Verificare che i tre determinanti presenti nella regola di Cramer valgono tutti zero.

⑥ Del sistema:

$$\begin{cases} ax+by=h \\ cx+dy=k \end{cases}$$

si sa soltanto che i tre determinanti della regola di Cramer valgono zero; verificare che il sistema è indeterminato completando il ragionamento impostato qui sotto.

- Se il determinante dei coefficienti vale 0, si ha:

  $ad-bc=0$ cioè $ad=bc$

  Questo vuol dire che risulta:

  $$\frac{c}{a} = \frac{d}{b} = m$$

  cioè:

  $c=ma$ e $d=mb$

- Se vale 0 anche un secondo determinante si ha, per esempio:

  $dh-bk=0$ cioè ....

  Questo vuol dire che risulta:

  $$\frac{\dots\dots}{\dots\dots} = \frac{d}{b} = m$$

  cioè anche:

  $k=mh$

  Perciò le due equazioni del sistema assegnato sono ....

Applicazioni

① Risolvere il seguente sistema con il metodo che si ritiene più opportuno.

$$\begin{cases} x-4y=4 \\ x=5y \end{cases}$$

Verificare che la soluzione ottenuta è esatta.

② Risolvere il seguente sistema con il metodo che si ritiene più opportuno.

$$\begin{cases} 20x-13y=-11 \\ 4x+3y=9 \end{cases}$$

Verificare che la soluzione ottenuta è esatta.

③ Fra i sistemi seguenti individuare quello risolubile, motivando la scelta.

$$\begin{cases} 12x-8y=4 \\ 3x-2y=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 12x-8y=0 \\ 3x-2y=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-2y=0 \\ 3x-2y=1 \end{cases}$$

Risolvere sistemi lineari in due incognite con la regola di Cramer

Esamina i sistemi assegnati negli esercizi da 1 a 4 e risolvi i seguenti quesiti:

- **a.** individua i sistemi impossibili o indeterminati;
- **b.** risolvi gli altri sistemi con la regola di Cramer

1. $\begin{cases}3x+5y=24\\2x-4y=-28\end{cases}$ $\qquad$ $\begin{cases}x-2y=3\\2x-4y=-28\end{cases}$ $\qquad$ [(–2; 6); imp.]

2 $\begin{cases}4x+10y=-2\\2x+5y=-1\end{cases}$ $\qquad$ $\begin{cases}8x+3y=13\\2x+5y=-1\end{cases}$ $\qquad$ [ind.; (2; –1)]

3. $\begin{cases}-2x+3y=4\\7x-8y=-9\end{cases}$ $\qquad$ $\begin{cases}2x-3y=2\\4x-6y=4\end{cases}$ $\qquad$ [(1; 2); ind.]

4. $\begin{cases}3x-4y=-31\\5x+6y=-1\end{cases}$ $\qquad$ $\begin{cases}2x-3y=2\\4x-6y=0\end{cases}$ $\qquad$ [(–5; 4); imp.]

Esamina i sistemi assegnati negli esercizi da 5 a 14 e risolvi i seguenti quesiti:

- **a.** riscrivi ogni sistema nella forma adatta ad applicare la regola di Cramer
- **b.** individua i sistemi impossibili o indeterminati;
- **c.** risolvi gli altri sistemi con la regola di Cramer

5. $\begin{cases}5y-4x+8=0\\10-5x-3y=0\end{cases}$ $\qquad$ $\begin{cases}40+8y-4x=0\\2y-x+5=0\end{cases}$ $\qquad$ [(2; 0); imp.]

6. $\begin{cases}3y-7x+9=0\\6+2y+3x=0\end{cases}$ $\qquad$ $\begin{cases}2y-x+5=0\\30+8y-4x=0\end{cases}$ $\qquad$ [(0; –3); imp.]

7. $\begin{cases}3+y-2x=0\\3y-6x+9=0\end{cases}$ $\qquad$ $\begin{cases}1+5x-6y=0\\9y-10x=0\end{cases}$ $\qquad$ [ind.; ($\frac{3}{5}$; $\frac{2}{3}$)]

8. $\begin{cases}1+y-2x=0\\9+3y-6x=0\end{cases}$ $\qquad$ $\begin{cases}3-5y-6x=0\\5-9x-7y=0\end{cases}$ $\qquad$ [imp.; ($\frac{4}{3}$; –1)]

9. $\begin{cases}3-3y-\frac{1}{2}x=0\\4y+\frac{1}{6}x-3=0\end{cases}$ $\qquad$ $\begin{cases}y+x-2=0\\4-2x-2y=0\end{cases}$ $\qquad$ [(2; – $\frac{2}{3}$); ind.]

10. $\begin{cases}\frac{1}{3}y-4x+1=0\\3-\frac{2}{3}y-2x=0\end{cases}$ $\qquad$ $\begin{cases}2-x-y=0\\1-3x-3y=0\end{cases}$ $\qquad$ [($\frac{1}{2}$; 3); imp.]

11. $\begin{cases}\frac{2}{3}x-1-y=0\\2x-3-3y=0\end{cases}$ $\qquad$ $\begin{cases}9y+8x=0\\\frac{1}{2}-2x-3y=0\end{cases}$ $\qquad$ [ind.; (– $\frac{3}{4}$; $\frac{2}{3}$)]

12. $\begin{cases}y-1-\frac{2}{3}x=0\\y-4-\frac{2}{3}x=0\end{cases}$ $\qquad$ $\begin{cases}\frac{3}{5}y-1-3x=0\\y-1-\frac{5}{3}x=0\end{cases}$ $\qquad$ [imp.; (– $\frac{1}{5}$; $\frac{2}{3}$)]

13. $\begin{cases}1{,}2y-0{,}6-x=0\\x-0{,}6-0{,}6y=0\end{cases}$ $\qquad$ $\begin{cases}1{,}2y+0{,}6x-1=0\\0{,}3x+0{,}6y-0{,}5=0\end{cases}$ $\qquad$ [(1,8; 2); ind.]

14. $\begin{cases}5{,}25y+1{,}75-x=0\\1{,}4y+3{,}5-0{,}4x=0\end{cases}$ $\qquad$ $\begin{cases}1{,}4y+1-0{,}4x=0\\0{,}7y-0{,}2x=0\end{cases}$ $\qquad$ [(22,75; 4); imp.]