

Equazioni di primo grado con coefficienti letterali

Riprendo un problema che conduce a un'equazione di primo grado

Bilancio annuale di una fabbrica di moto (in migliaia di euro)

Entrate		Uscite	
Finanziamento europeo	4000	Salari	10 000
Capitale iniziale	2000	Macchinari	1000
Ricavo per ogni moto	6	Costi per produrre una moto	1,5
		Collaudo e trasporto di una moto	0,2
		Percentuale al venditore per ogni moto	0,3



Stabilire quante moto bisogna vendere nell'anno per avere il pareggio di bilancio, cioè

$$\text{Entrate} = \text{Uscite}$$

Il problema tradotto in un'equazione

Incognita x è il numero di moto da vendere nell'anno.

$$4000 + 2000 + 6x = 10000 + 1000 + 1,5x + 0,2x + 0,3x$$

**Totale
Entrate fisse**

**Totale
Uscite fisse**

$$1,5x + 0,2x + 0,3x = 2x$$

$$6000 + 6x = 11000 + 2x$$

**Prezzo di vendita
di una moto**

**Costo di produzione
di una moto**

La soluzione dell'equazione

$$6000 + 6x = 11000 + 2x$$

- Sottraggo $2x$ ai due membri
- Sottraggo 6000 ai due membri

$$4x = 5000$$

- Divido per 4 i due membri

$$x = 1250$$

**La soluzione vale per l'anno in corso.
L'anno successivo cambia solo qualche
numero, ad esempio il prezzo di vendita, ...
e debbo ripetere l'intero procedimento!**

Un procedimento più efficiente

$$6000 + px = 11000 + 2x$$

Prezzo p di vendita
di una moto

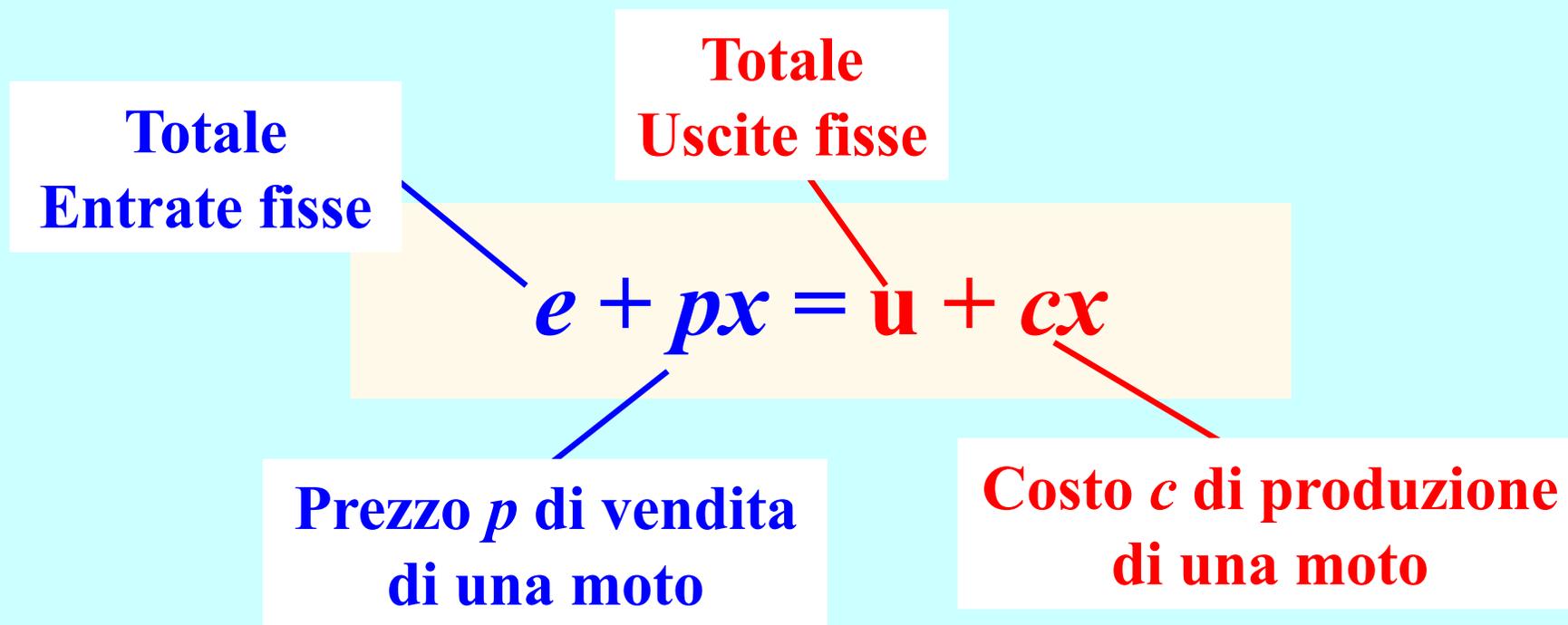
Indico il prezzo di vendita con una lettera, ad esempio p .

La lettera p ha qui un particolare significato: è un 'contenitore' dove posso inserire all'inizio dell'anno il prezzo di vendita e lasciarlo fisso durante i calcoli.

Ma poi posso di nuovo modificare p quando è utile.

Un procedimento più efficiente

E così completo l'equazione



Le lettere e, p, u, c prendono il nome di *coefficienti letterali* o *parametri*.

Risolvere un'equazione con coefficienti letterali

Il procedimento non cambia

$$6000 + 6x = 11000 + 2x$$

- Sottraggo $2x$ ai due membri
- Sottraggo 6000 ai due membri

$$6x - 2x = 11000 - 6000$$

$$\underbrace{(6 - 2)}_4 x = \underbrace{11000 - 6000}_{5000}$$

$$e + px = u + cx$$

- Sottraggo cx ai due membri
- Sottraggo e ai due membri

$$px - cx = u - e$$

$$\underbrace{(p - c)}_a x = \underbrace{u - e}_b$$

Equazioni del tipo

$$ax = b$$

Risolvere un'equazione con coefficienti letterali

Il procedimento non cambia

$$\underbrace{(6 - 2)}_4 x = \underbrace{11000 - 6000}_{5000}$$

$$\underbrace{(p - c)}_a x = \underbrace{u - e}_b$$

Equazioni del tipo

$$ax = b$$

Moltiplico i due membri
per $1/a$, se $a \neq 0$

$$x = \frac{11000 - 6000}{6 - 2}$$

$$x = \frac{b}{a}$$

$$x = \frac{u - e}{p - c}$$

Risolvere un'equazione con coefficienti letterali

$$(p - c)x = u - e$$

Guadagni per la
vendita di x moto

Uscite da compensare
con la vendita di x moto

SOLO SE RISULTA

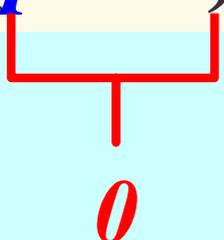
$$p - c \neq 0$$

$$x = \frac{u - e}{p - c}$$

soluzione

Risolvere un'equazione a coefficienti letterali

Che cosa succede se trovo $p - c = 0$?

$$(p - c)x = u - e$$


0

La vendita di ogni moto dà un guadagno 0.

Restano $u - e$ euro da compensare, anche se vendo moltissime moto.

È impossibile il pareggio di bilancio.

Risolvere un'equazione a coefficienti letterali

Che cosa succede se trovo $p - c = 0$?

Se poi trovo anche $u - e = 0$

$$\underbrace{(p - c)}_0 x = \underbrace{u - e}_0$$

La vendita di ogni moto dà un guadagno 0.
Valgono 0 euro anche le uscite da compensare.
Il bilancio resta sempre in pareggio.

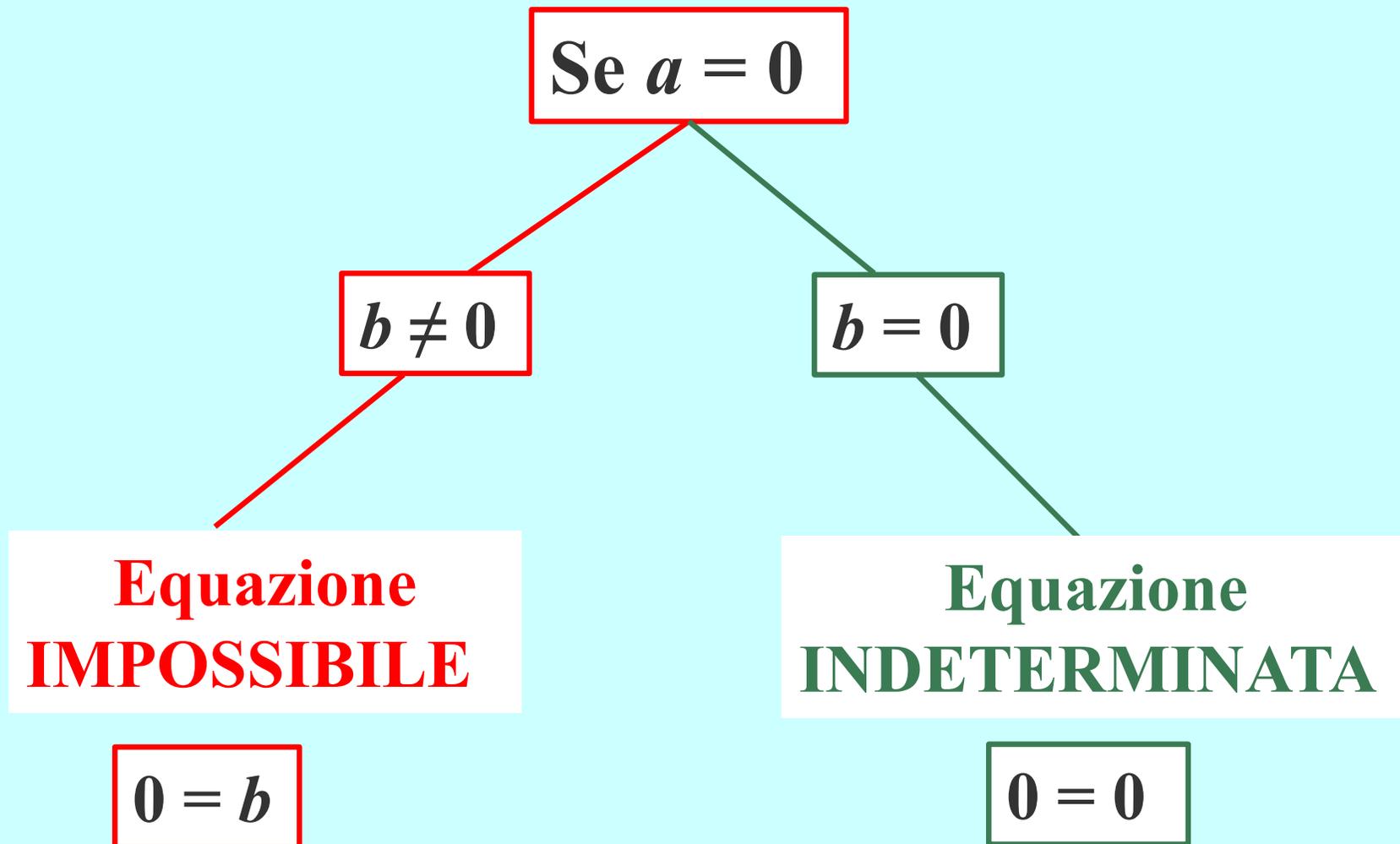
Ritrovo una situazione già esaminata

Se risolvo un'equazione del tipo

$$ax + b = 0$$

posso trovare equazioni impossibili o indeterminate.

Equazioni impossibili e indeterminate



Prevedere problemi impossibili o indeterminati

Un'equazione a coefficienti letterali porta ad una certezza

Osservo i coefficienti dell'equazione

$$\underbrace{(p - c)}_a x = \underbrace{u - e}_b$$

Se trovo il coefficiente $a = 0$, non posso trovare una sola soluzione.

Riconoscere l'incognita

In un'equazione con coefficienti numerici compare una sola lettera, perciò non è necessario indicare con x l'incognita.

$$2x + 6 = 3 \quad 2y + 6 = 3 \quad 2z + 6 = 3$$

Ma, nell'equazione qui sotto, qual è l'incognita?

$$mk + h = 0$$

L'incognita in un'equazione con coefficienti letterali

Nell'equazione qui sotto, qual è l'incognita?

$$mk + h = 0$$

In questo caso, per indicare l'incognita, aggiungo una precisazione; dico, ad esempio:

'Risolvi l'equazione rispetto all'incognita k '.

Oppure

'Esplicita la lettera k nella formula'.

Oppure

'Ricava la lettera k dalla formula'

Riconoscere l'incognita

Nell'equazione qui sotto, qual è l'incognita?

$$mk + h = 0$$

In alternativa, indico l'incognita con x e indico i coefficienti con altre lettere dell'alfabeto o numeri. Ad esempio scrivo:

$$mx + h = 0 \quad \text{oppure} \quad kx + 3 = 0$$

Attività

Completa la scheda 1 di lavoro per consolidare quello che hai richiamato

Che cosa hai ottenuto

Quesito 1

Equazione	Procedimento
	Riscrivo l'equazione nella forma $ax = b$
$kx - k = -x + 2$	Aggiungo ai due membri x
$kx + x - k = 2$	Aggiungo ai due membri k
$kx + x = k + 2$	Al primo membro raccolgo il fattore x
$(k + 1)x = k + 2$	Equazione nella forma $ax = b$, con $a = k + 1$
<ul style="list-style-type: none">In quale caso l'equazione è impossibile?	
Se $a = 0$, cioè se $k + 1 = 0$	Ricavo $k = -1$
<ul style="list-style-type: none">Qual è la soluzione dell'equazione?	
$x = \frac{k + 2}{k + 1}$	Divido i due membri per $k + 1$
<ul style="list-style-type: none">Qual è la soluzione per $k = 1$?	
$x = \frac{1 + 2}{1 + 1} = \frac{3}{2}$	Nella formula ricavata prima sostituisco 1 al posto di k .

Quesiti 2 e 3

2. Completa il procedimento per risolvere il seguente quesito. È data l'equazione

$$3mx + 1 = 4x - m;$$

per quale valore di m l'equazione ha la soluzione $x = 2$?

Sostituisco 2 ad x e ottengo la seguente equazione nell'incognita m .

$$6m + 1 = 8 - m. \quad \text{da cui} \quad 7m = 7 \quad \text{e quindi} \quad m = 1$$

3. Una grande compagnia aerea deve pianificare il rifornimento di carburante dei vari aerei della sua flotta. Ecco come indica i dati di un aereo: a litri per l'atterraggio e $2a$ litri per il decollo, v litri per ogni minuto di volo, m la durata del volo in minuti, S i litri di carburante contenuti nel serbatoio. Qui sotto trovi tre problemi e quattro equazioni; associa ad ogni problema l'equazione che porta a risolvere il problema.

I. Quanti litri di carburante debbo caricare nel serbatoio?	A. $a = S - vm - 2a$
II. Quanto tempo può volare l'aereo?	B. $S = 3a + vm$
III. Quanto carburante rimane per l'atterraggio?	C. $m = \frac{S - 3a}{v}$
I B II D III. A	D. $m = \frac{S - 3a}{v}$

Pareggio di bilancio con foglio di calcolo

Per studiare il pareggio di bilancio i manager usano il computer con un software chiamato *foglio di calcolo*, nato proprio per studiare i bilanci delle aziende.



Attività

Completa la scheda 2 di lavoro per esplorare un foglio di calcolo e risolvere problemi di pareggio di bilancio.

Che cosa hai ottenuto

Quesiti 1 - 4

Trovi nel foglio: $e = 6000$, $u = 11000$, $p = 6$, $c = 2$

Esplora il foglio di calcolo e rispondi alle seguenti domande

I. Puoi modificare solo il prezzo p di vendita di una moto;

1. muovi lo slider p per aumentare il prezzo; come cambia il numero x di moto da vendere per pareggiare il bilancio?

x diminuisce

2. quante moto devi vendere, se scegli $p = 7$? **1000**

3. muovi lo slider p per diminuire il prezzo; come cambia il numero x di moto?

x aumenta

4. quante moto devi vendere, se scegli $p = 4$? **2500**

Quesiti 5 e 6

5. che cosa risponde il software nella casella E2, se scegli $p = 2$? ∞

Pareggio di bilancio

Nella casella E2 compare x, che è dato da:

Numero E2
 $(A2 - B2) / (C2 - D2)$

$$x = \frac{u - e}{p - c} = \frac{5000}{0}$$

	A	B	C	D	E
1	u	e	p	c	x
2	11000	6000	2	2	∞
3					
4					
5					
6					
7					
8					
9					
10					

6. come spieghi la risposta del software?

Ecco alcune risposte possibili

Quesito 6

6. come spieghi la risposta del software?

Pareggio di bilancio

$p = 2$ $c = 2$

Nella casella E2 compare x, che è dato da:

Numero E2
(A2 - B2) / (C2 - D2)

$$x = \frac{u - e}{p - c} = \frac{5000}{0}$$

	A	B	C	D	E
1	u	e	p	c	x
2	11000	6000	2	2	∞
3					
4					
5					
6					

??

La risposta 'aziendale'

Se $p = 2$, risulta $p - c = 0$, cioè ho un guadagno 0 nella vendita di ogni moto: non posso compensare 5000 euro, anche se vendo moltissime moto.

Quesito 6

6. come spieghi la risposta del software?

Pareggio di bilancio

$p = 2$ $c = 2$

Nella casella E2 compare x, che è dato da:

Numero E2
(A2 - B2) / (C2 - D2)

$$x = \frac{u - e}{p - c} = \frac{5000}{0}$$

	A	B	C	D	E
1	u	e	p	c	x
2	11000	6000	2	2	∞
3					
4					
5					
6					

??

La risposta matematica

Se $p = 2$, risulta $p - c = 0$, perciò, per avere x, dovrei calcolare $5000 : 0$, operazione che non ha risultato.

Quesito 6

6. come spieghi la risposta del software?

Pareggio di bilancio

$p = 2$ $c = 2$

Nella casella E2 compare x, che è dato da:

Numero E2
(A2 - B2) / (C2 - D2)

$$x = \frac{u - e}{p - c} = \frac{5000}{0}$$

	A	B	C	D	E
1	u	e	p	c	x
2	11000	6000	2	2	∞
3					
4					
5					
6					

??

La risposta del programmatore di software

Necessario inserire qualcosa nella casella E2.

Osservo che x aumenta se p si avvicina a 2; con il simbolo ∞ intendo dire che 'x diventa grandissimo se p è vicinissimo a 2'.

Quesiti 7 e 8

7. cosa risponde il software nella casella E2, se scegli $p = 1$? **-5000**

8. come spieghi la risposta del software?

Pareggio di bilancio

$p = 1$ $c = 2$

Nella casella E2 compare x, che è dato da:

Numero E2
(A2 - B2) / (C2 - D2)

$$x = \frac{u - e}{p - c} = \frac{5000}{-1}$$

	A	B	C	D	E
1	u	e	p	c	x
2	11000	6000	1	2	-5000
3					
4					
5					
6					
7					

La risposta matematica al quesito 8 è immediata

Se $p = 1$, risulta $p - c = -1$, perciò, per avere x,
calcolo **$5000 : (-1) = -5000$**

E il software dà la stessa risposta

Quesito 8

7. cosa risponde il software nella casella E2, se scegli $p = 1$? **-5000**

8. come spieghi la risposta del software?

Pareggio di bilancio

$p = 1$ $c = 2$

Nella casella E2 compare x, che è dato da:

Numero E2
(A2 - B2) / (C2 - D2)

$$x = \frac{u - e}{p - c} = \frac{5000}{-1}$$

	A	B	C	D	E
1	u	e	p	c	x
2	11000	6000	1	2	-5000
3					
4					
5					
6					
7					

La risposta 'aziendale' al quesito 8

Se $p - c = -1$, ho un guadagno negativo, cioè una perdita, per ogni moto venduta. Per pareggiare il bilancio debbo pagare quello che perderei con la vendita di 5000 moto.

Quesiti 9 e 10

II. Torna con lo slider p alla situazione iniziale ($p = 6$). Sai che nel prossimo anno le entrate fisse diminuiscono e diventano 5000€.

9. Se non cambi prezzo, quante moto devi vendere per pareggiare il bilancio? **1500**

10. Come modifichi il prezzo per avere il pareggio vendendo 1250 moto? $p =$ **6.8**

Hai scoperto il ruolo del foglio di calcolo; risponde rapidamente alle domande del tipo: «*Che cosa succede se cambio qualcosa nel bilancio?*».

In inglese «What if...?»

	A	B	C	D	E
1	u	e	p	c	x
2	11000	6000	1	2	-5000
3					
4					
5					
6					
7					