

Retta di regressione. Esercizi

Per svolgere i calcoli richiesti negli esercizi è utile una calcolatrice tascabile.

1. Una pallina viene lanciata verso il basso in un tubo da vuoto. Misurando la velocità v della pallina al passare del tempo t , si ottengono i dati seguenti (il tempo è misurato in secondi e la velocità in metri al secondo):

tempo t	0	0,05	0,1	0,15	0,2	0,25
velocità v	1,9	2,25	2,80	3,35	3,85	4,20

Rappresentare i dati su un piano cartesiano e calcolare, con il metodo dei minimi quadrati, la retta di regressione.

In base alla retta trovata, scrivere la legge che lega la velocità v al tempo t .

Quale significato ha il coefficiente angolare m della retta di regressione?

Quale significato ha il termine noto p della retta di regressione?

Di quanto aumenta la velocità ogni secondo?

Quale velocità si prevede dopo mezzo secondo?

2. In un laboratorio si è organizzato il seguente esperimento per studiare la dilatazione termica dei gas: il gas da studiare riempie una provetta che contiene un pistone a tenuta perfetta, ma con attrito trascurabile; la provetta è immersa in una bacinella piena d'acqua.

L'acqua viene riscaldata a varie temperature comprese fra quella ambiente e 100° ; così, quando la temperatura aumenta, il gas si espande, mantenendo costante la sua pressione.

Si misura la temperatura T in gradi centigradi con un termometro immerso nell'acqua; si misura in cm^3 il corrispondente volume V occupato dal gas per mezzo di una scala graduata collegata con la provetta.

Durante un esperimento di questo tipo il gas racchiuso nella provetta era l'aria e si sono ottenuti i seguenti dati:

temperatura T	25,1	27,4	32,7	37,9	42,9	48,1	53,3	57,6	62,3	67,1	72,5
volume V	64,2	65,0	65,4	66,6	67,4	69,0	69,8	70,7	71,4	73,0	74,2

Rappresentare i dati su un piano cartesiano e calcolare, con il metodo dei minimi quadrati, la retta di regressione.

In base alla retta trovata, scrivere la legge che lega il volume V alla temperatura T .

Quale significato ha il termine noto p della retta di regressione?

Di quanto aumenta il volume, quando la temperatura aumenta di 1° ?

Quale volume si prevede ad una temperatura di 150° ?

3. Si ripete l'esperimento descritto nell'esercizio precedente, racchiudendo nella provetta prima anidride carbonica e poi propano. Così si ottengono i dati seguenti:

Anidride carbonica

temperatura T	25,1	30,3	35,0	40,1	45,0	50,1	54,8	59,9	64,5
volume V	64,2	65,4	66,2	67,0	68,2	69,4	70,2	71,4	72,4

Propano

temperatura T	25,1	30,1	35,3	40,2	45,1	50,0	54,9	60,2	65,0	70,0
volume V	64,2	64,6	65,8	67,0	68,2	69,0	70,2	71,4	72,6	73,4

Rappresentare ciascuna serie di dati su un piano cartesiano e calcolare, con il metodo dei minimi quadrati, la retta di regressione.

In base alla retta trovata, scrivere le leggi che legano il volume V alla temperatura T nei due casi.

Che cosa si osserva?

Quale significato assume il punto d'intersezione della retta di regressione con l'asse delle ascisse?

4. Per studiare la caratteristica di un diodo si realizza il circuito di fig. 3. L'amperometro A misura in milliampère l'intensità I della corrente; il voltmetro B misura in volt la tensione V .

I dati ottenuti sono riuniti nella tabella seguente:

I	0	0	0,5	1,5	6	11	20	30	50	70	120
V	0	0,4	0,5	0,6	0,65	0,7	0,73	0,76	0,78	0,80	0,85

Rappresentare graficamente i dati, riportando I sull'asse delle ascisse e V sull'asse delle ordinate.

Raccordare "a mano" i punti con una curva: si ottiene la caratteristica del diodo.

La parte di curva che più "somiglia" ad una retta è quella corrispondente ai valori di I che variano nell'intervallo $40 \leq I \leq 120$; calcolare la retta di regressione che meglio raccorda questi dati.

In base alla retta calcolata, quale tensione si prevede in corrispondenza ad una corrente $I=130$?

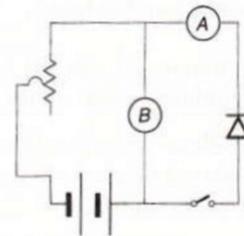


Fig. 3

5. La tabella seguente è un estratto delle registrazioni fornite dal calcolatore che ha seguito il lancio del missile Ariane, avvenuto il 21 dicembre 1981: è riportato il tempo t (misurato in secondi a partire dal lancio) e la corrispondente quota h a cui si trova il missile; h è misurata in metri.

tempo t	23	23,5	24	24,5	25	25,5	26	26,5	27	27,5	28	28,5	29	29,5	30
quota h	430	455	480	506	533	561	589	619	649	680	712	745	779	813	849

Rappresentare i dati su un piano cartesiano, scegliendo l'origine dei tempi in corrispondenza a $t=23$ secondi. Calcolare, con il metodo dei minimi quadrati, la retta di regressione.

In base alla retta trovata, scrivere la legge che lega la quota h al tempo t .

Quale significato ha il coefficiente angolare della retta di regressione?

Quale significato ha il coefficiente p della retta di regressione?

Di quanto aumenta la quota in un secondo?

Quale quota si prevede, dopo 40 secondi dal lancio?

6. Esaminiamo i dati, forniti dall'ISTAT, riguardo al numero di abbonamenti alla televisione, registrati a partire dal 1954 (anno in cui "arrivò" la televisione in Italia). Nella tabella seguente abbiamo scelto il 1954 come "anno zero" ed abbiamo indicato con NT il numero di abbonamenti alla televisione, espressi in migliaia.

tempo	0	5	10	15	20
NT	88	1573	5215	9016	11.816

Rappresentare i dati su un piano cartesiano, riportando il tempo sull'asse delle ascisse ed il numero NT sull'asse delle ordinate; calcolare, con il metodo dei minimi quadrati, la retta di regressione.

Quale significato ha il coefficiente p della retta di regressione?

Di quanto è aumentato il numero di abbonamenti alla televisione ogni anno?

Calcolare il numero di abbonamenti che si prevedono con la retta di regressione per l'anno 1975 (Tempo=21) e confrontare il risultato con il numero rilevato dall'Istat ($NT=12\ 102\ 654$).

7. Ripetere l'esercizio 6. a partire dai dati relativi al numero NR di abbonamenti alla sola radio, espressi sempre in migliaia; i dati sono esposti nella tabella seguente:

tempo	0	5	10	15	20
NR	5391	6014	4886	2197	825

Calcolare, anche in questo caso, il numero di abbonamenti, che si prevedono con la retta di regressione per l'anno 1975 (Tempo=21) e confrontare il risultato con il numero rilevato dall'Istat ($NR=715$).

Che significato ha il punto d'intersezione della retta di regressione con l'asse delle ascisse?

Gli esercizi da 8 a 14 conducono a riflettere sull'equazione della retta di regressione.

8. Sono assegnati i tre punti seguenti $A(2,5)$, $B(3,6)$, $C(8,11)$.
Rappresentare i punti sul piano cartesiano e determinare l'equazione della retta di regressione, valendosi del metodo dei minimi quadrati.
9. Dimostrare che la retta di regressione calcolata a partire dai punti $A(x_1, x_1+k)$, $B(x_2, x_2+k)$, $C(x_3, x_3+k)$ ha pendenza $m=1$ e coefficiente $p=k$.
10. Rappresentare sul piano cartesiano i tre punti seguenti $(1,4)$, $(5,4)$, $(8,4)$; calcolare con il metodo dei minimi quadrati la retta di regressione che li raccorda. Che cosa si osserva?
11. Indicare una regola generale per calcolare la retta di regressione per l'origine, a partire dai punti seguenti: $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_1)$, $C(x_3, y_1)$.
12. Rappresentare sul piano cartesiano i tre punti seguenti $(5,2)$, $(5,4)$, $(5,6)$; provare a calcolare con il metodo dei minimi quadrati la retta di regressione che li raccorda. Che cosa succede?
13. Spiegare perché non si riesce a calcolare la retta di regressione col metodo dei minimi quadrati se i punti sperimentali hanno tutti la stessa ascissa.
Si riesce a prevedere qualche altra situazione, in cui non è possibile determinare la retta di regressione con il metodo dei minimi quadrati?
14. Dimostrare che se risulta $M_x=0$, la retta di regressione e la retta di regressione per l'origine hanno la stessa pendenza.

Esercizi tratti dal testo

E. Castelnuovo, C. Gori Giorgi, D. Valenti

'La matematica nella realtà'