

# Da un problema dato all'Esame di Stato 2006

Un filo metallico di lunghezza  $L$  viene utilizzato per delimitare il perimetro di un'aiuola rettangolare.

Qual è l'aiuola di area massima che è possibile delimitare?

# Reazioni nelle scuole

## Commento di alcuni studenti:

***“Non provo neanche a risolvere questo problema: è proprio molto difficile!”***

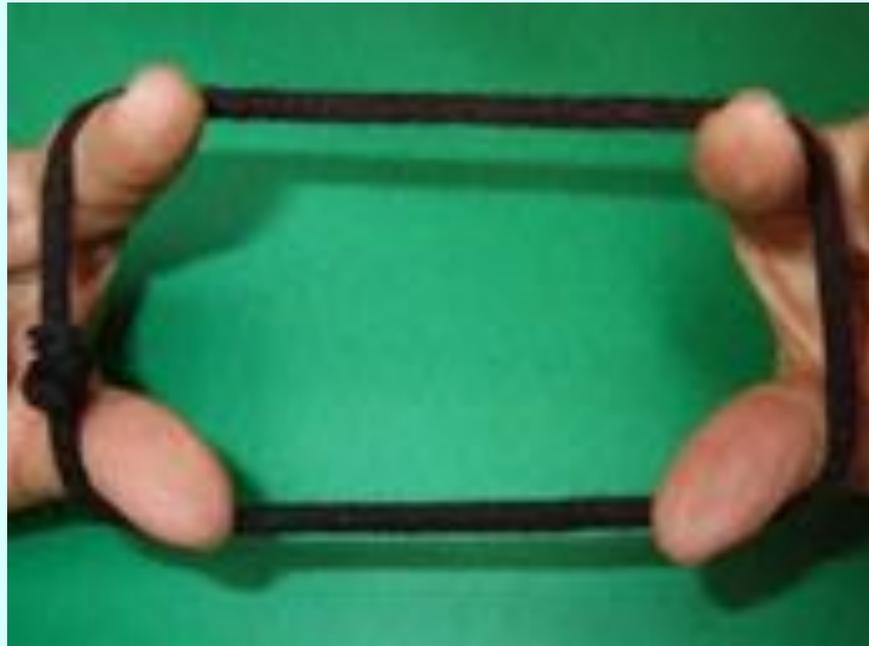
## Commento di altri studenti:

***Che fortuna! È facilissimo!  
È il problema dello spago!***



# Perché il problema dello spago?

**Lo spago è un semplice esperimento per 'vedere' il filo metallico che delimita tante aiuole rettangolari**



# Video: lo spago in movimento



Daniela Valenti, 2020

# L'area dei rettangoli varia



L'area parte da 0, quando l'altezza è 0, poi aumenta, ma arrivati a un certo punto comincia a diminuire, per tornare a 0, quando la base è 0.

Si intuisce che l'area è massima nel caso del quadrato.

**Come posso dimostrare questa congettura?**

# Come *dimostrare* che l'area massima è quella del quadrato?

***Dimostrare, ...*** Essere sicuri che l'area massima sia proprio quella del quadrato e non quella di un rettangolo con base e altezza 'quasi uguali' ...

# Attività

**Completa la scheda 1 di lavoro per  
determinare il rettangolo di area massima**

# Che cosa hai ottenuto

# Scheda 1

## Completa il seguente procedimento

- Ho indicato con  $x$  e  $y$  le dimensioni di tutti i 'rettangoli di spago'.

- L'area di tutti i rettangoli è  $S = xy$

- Il **semi**perimetro di tutti i rettangoli è 20, perciò risulta  $x + y = 20$  da cui  $y = -x + 20$

- Quali fra i seguenti numeri non puoi sostituire alla  $x$ ?

5     $\frac{2}{3}$     **-2**    0    7,38    **30**    20     $\pi$

- A quali limitazioni è soggetta la  $x$ ?  $0 \leq x \leq 20$

- Scrivo l'area  $S$  nella forma  $S = x(-x + 20)$

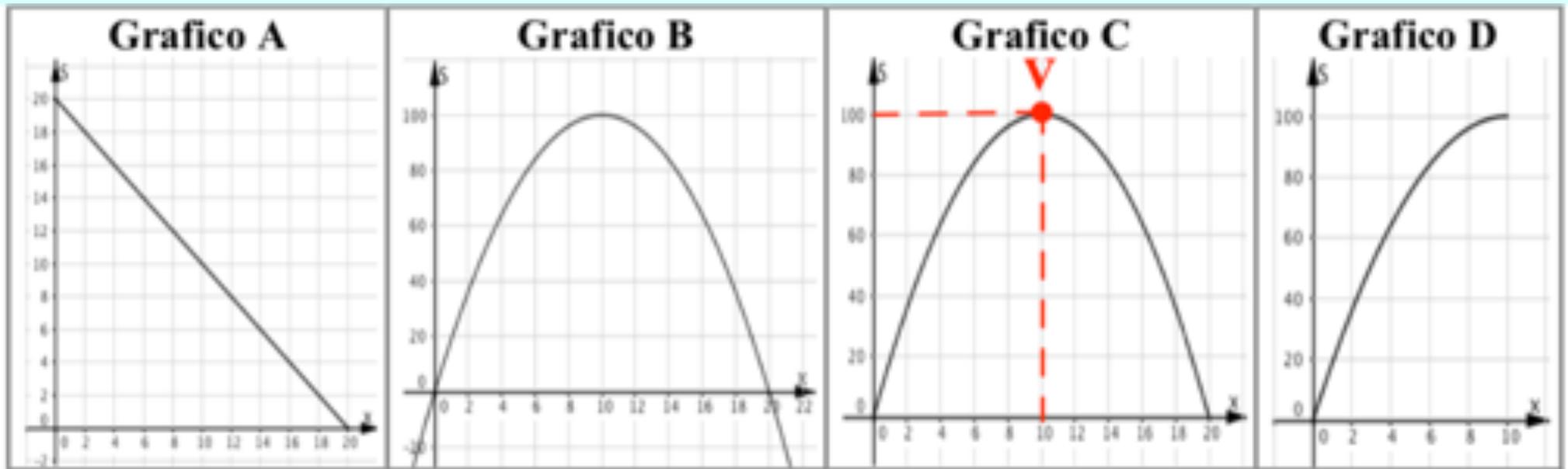
- Eseguo la moltiplicazione indicata e ottengo

$$S = -x^2 + 20x$$



# Scheda 1

- Quale fra i grafici qui sotto mostra come varia l'area  $S$  al variare della base  $x$ ? **C**
- Indica sul grafico scelto il massimo dell'area.



# Il perimetro deve essere 40?

Nel procedimento i rettangoli avevano il perimetro lungo 40cm.

Se il perimetro è lungo 16 o 30 o 80, ... cambia la dimostrazione? NO!

Infatti, nel problema d'Esame trovo:  
*‘Un filo metallico di lunghezza  $L$  ...’*

Il perimetro è indicato con una lettera ( $L$ ) per ricordare che può essere scelto a piacere, senza però cambiarlo mentre risolvo il problema.

# In conclusione

**Ho dimostrato che:**

*L'aiuola quadrata ha area massima fra tutte le aiuole rettangolari delimitate da un filo lungo  $L$ .*

**La conclusione con il linguaggio della geometria.**

*Il quadrato ha area massima fra tutti i rettangoli che hanno un dato perimetro.*

**La conclusione con il linguaggio dell'aritmetica.**

*Il prodotto di due numeri con somma costante è massimo quando due numeri sono uguali.*

# Problemi di ottimizzazione

Questo è un esempio di **problema di ottimizzazione** che posso sintetizzare così:

*Determinare la zona di area massima fra tutte le zone rettangolari che posso recintare con una rete lunga 40m*

**Oppure**

*Determinare il rettangolo di area massima fra tutti i rettangoli con perimetro lungo 40cm.*

# Ottimizzazione oggi

**Problemi di ottimizzazione sono oggi studiati nei più vari settori. Ecco qualche esempio:**

- massimizzare i guadagni e minimizzare i costi in economia, sia aziendale che nazionale e internazionale;**
- ottimizzare la distribuzione di ripetitori, antenne, centrali elettriche, pozzi petroliferi, ... in ingegneria;...**



**Medaglia Fields per  
la matematica 2018**

**Studi per ottimizzare  
i trasporti**

**Alessio Figalli  
Roma 1984**



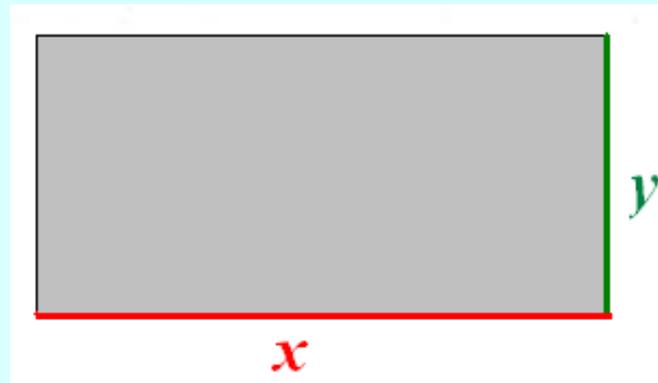
**Premio Abel 2019**

**Studi su calcolo  
delle variazioni e  
superfici minime**

**Karen Uhlenbeck  
USA 1942**

# Riflessioni sul procedimento

# Riprendo il procedimento



$$0 \leq x \leq 20$$

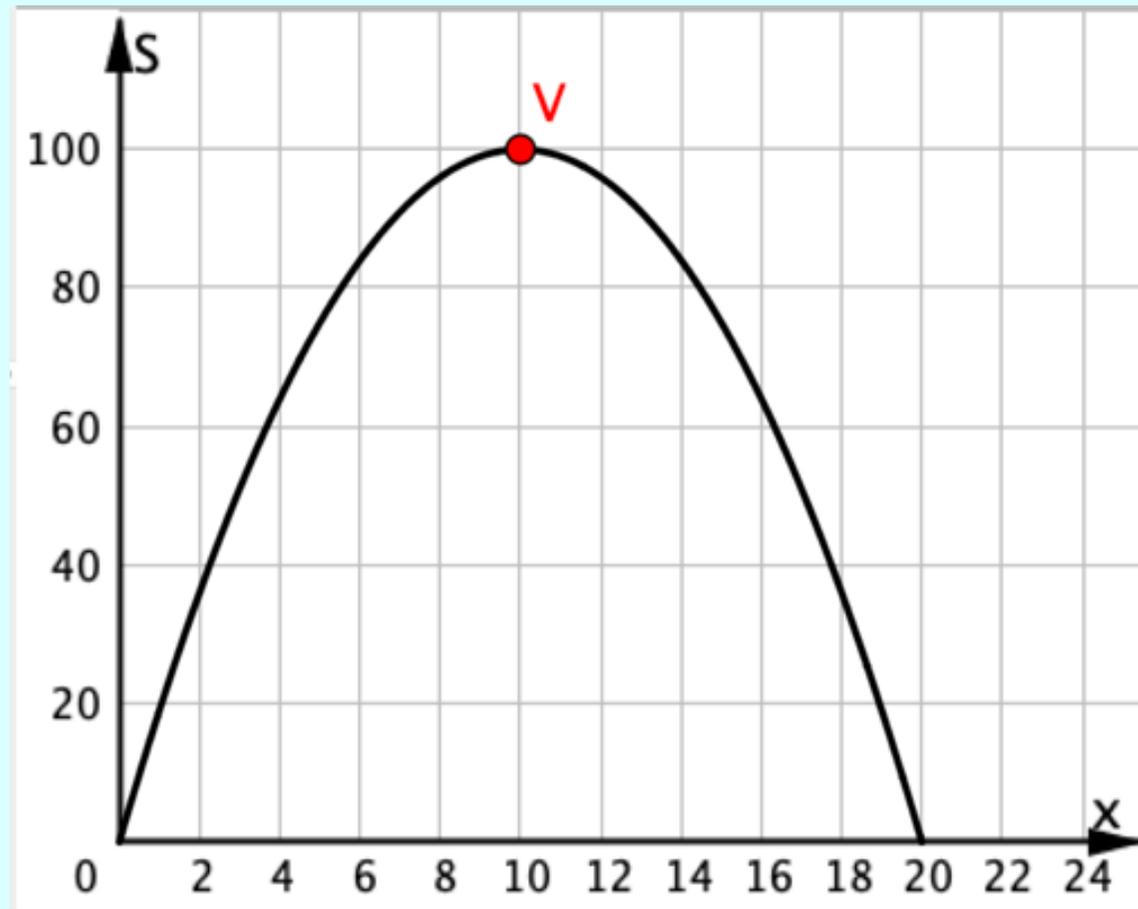
## Due passi importanti

1. Abbiamo scritto la funzione ‘area  $S$  variabile al variare di  $x$ ’.

$$S = -x^2 + 20x \quad \text{con} \quad 0 \leq x \leq 20$$

2. Di questa funzione abbiamo scelto il grafico e trovato il massimo.

# Grafico e massimo



**Il massimo dell'area  $S$  è 100, raggiunto per  $x = 10$ .**

# Attività

**Il grafico è stato tracciato con il computer. Come?**

**Completa la scheda 2 di lavoro per rispondere alla domanda**

**Che cosa hai scoperto?**

# **Che cosa hai scoperto**

**Come utilizzare un software che ci  
sostituisce nel disegnare il grafico di  
una funzione e trovarne il massimo.**

**Ma resta il lavoro di ‘traduzione’ del  
problema dal linguaggio naturale al  
linguaggio matematico!**

# Per concludere

**Competenze scientifiche oggi importanti:**

- **saper tradurre un problema in linguaggio matematico;**
- **saper trovare varie strategie risolutive;**
- **saper scegliere la strategia più opportuna;**
- **saper usare il computer per eseguire calcoli, tracciare grafici, ...**