

Problemi su esponenziali e logaritmi in base e

A. Completa la risoluzione dei seguenti problemi

1. Un gruppo di psicologi studiano la diffusione di un pettegolezzo all'interno di un gruppo circoscritto di persone, come ad esempio gli studenti di una scuola, e trovano la seguente legge:

$$F = 1 - e^{-kt}$$

dove

- t è il tempo misurato in giorni;
- k è una costante che dipende da vari fattori, fra i quali la verosimiglianza del pettegolezzo;
- F è la frazione di persone che conoscono il pettegolezzo dopo t giorni.

Rispondi ai seguenti quesiti e, quando esegui i calcoli con il tascabile, scrivi il risultato arrotondato con 2 cifre dopo la virgola.

- Uno psicologo mette circolazione un pettegolezzo in una scuola e rileva che, dopo 3 giorni, il 40% degli studenti conosce il pettegolezzo; quanto vale la costante k in questo esperimento?
- Applica la legge per prevedere la frazione F di studenti che conosce il pettegolezzo dopo 6 giorni.

a. Sostituisco i dati nella formula e ottengo:

$$0,4 = 1 - e^{-3k}$$

Sottraggo 1 ai due membri ed eseguo le operazioni indicate, così ottengo:

$$-0,6 = \dots\dots \text{ da cui } 0,6 = \dots\dots$$

Per esplicitare k applico la definizione di logaritmo naturale ed eseguo i calcoli col tascabile:

$$3k = \dots\dots \text{ da cui } k = \dots\dots \cong -0,17$$

b. Sostituisco i dati nella formula ed eseguo i calcoli col tascabile; così ottengo:

$$F = 1 - \dots\dots \cong \dots\dots = 64\%$$

2. Un test psicologico chiede di memorizzare una lista di parole prive di senso; alcuni psicologici hanno somministrato questo test a un numeroso gruppo di persone e hanno trovato la seguente legge:

$$F = 1 - k \ln(t + 1) \quad \text{con} \quad \ln(t + 1) = \log_e(t + 1)$$

dove

- t è il tempo misurato in ore;
- k è una costante che dipende da vari fattori, fra i quali la lunghezza della lista di parole;
- F è la frazione di persone che ricordano tutte le parole della lista dopo t ore.

Rispondi ai seguenti quesiti.

- Uno psicologo propone il test a un gruppo di persone e rileva che, dopo 3 ore, solo la metà ricorda l'intero elenco; quanto vale la costante k in questo esperimento?
- Basati sulla legge per prevedere la frazione F di persone che ricorderà l'intero elenco dopo 6 ore. Quando esegui i calcoli con il tascabile, scrivi il risultato arrotondato con 2 cifre dopo la virgola.

a. Sostituisco i dati nella formula e ottengo:

$$0,5 = \dots\dots$$

Sottraggo 1 ai due membri ed eseguo le operazioni indicate, così ottengo:

$$-0,5 = \dots\dots$$

Per esplicitare k divido i due membri per $-\ln 4$ ed eseguo i calcoli col tascabile:

$$k = \dots\dots \cong 0,36$$

b. Sostituisco i dati nella formula ed eseguo i calcoli col tascabile; così ottengo:

$$F = 1 - \dots\dots \cong \dots\dots = 30\%$$

B. Risolvi i seguenti problemi

1. Intorno alla metà del 1800, i fisici tedeschi G. Fechner e E. Weber hanno studiato le reazioni dell'organismo umano sottoposto ad uno stimolo fisico, come ad esempio un suono, una luce, Così hanno trovato che l'intensità S della sensazione aumenta all'aumentare dell'intensità P dello stimolo, ma S non è proporzionale a P ; vale invece, in prima approssimazione, la legge:

$$S = \ln \frac{P}{P_0}$$

dove P_0 è l'intensità di soglia dello stimolo fisico, cioè la massima intensità P che produce $S = 0$.

Il più piccolo peso che una persona riesce a percepire è $P_0 = 0,5$ grammi; calcola il rapporto fra le sensazioni S_1 ed S_2 , corrispondenti ai pesi $P_1 = 10g$ e $P_2 = 100g$.

2. In un'industria alimentare, un pezzo di carne, che si trova a temperatura ambiente, viene messo in frigorifero e gradualmente si raffredda, secondo la seguente legge:

$$T = T_1 + (T_0 - T_1)e^{kt}$$

dove

- T è la temperatura variabile della carne, misurata in gradi centigradi ($^{\circ}C$);
 - t è il tempo, misurato in ore;
 - T_0 è la temperatura ambiente e T_1 è la temperatura all'interno del frigorifero;
 - k è una costante che dipende anche dal tipo di carne.
- a. La temperatura ambiente è di 30° e la temperatura del frigorifero è 5° ; la temperatura della carne dopo 1 ora di permanenza nel frigorifero vale 20° ; quanto vale k ?
- b. Quale sarà la temperatura della carne dopo 2 ore?

3. Gli altimetri sono basati sul fatto che all'aumentare della quota h diminuisce la pressione atmosferica p , che dipende anche dalla temperatura T secondo la legge seguente:

$$h = (30T + 8000) \ln \frac{p_0}{p}$$

dove

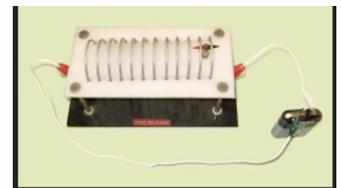
- la quota h è misurata in metri e T è la temperatura, misurata in gradi centigradi ($^{\circ}C$);
 - la pressione p è misurata in hPa e p_0 è la pressione al livello del mare ($p_0 \cong 100$ hPa);
- a. Durante una scalata del monte Everest, due alpinisti rilevano una temperatura $T = -13^{\circ}$ e una pressione $p = 35$ hPa. A quale quota si trovano i due scalatori?
- b. Una guida alpina rileva una quota $h = 8090$ e una temperatura $T = -30^{\circ}$; a quale pressione atmosferica si trova la guida?

4. Il passaggio di corrente in un solenoide è regolato dalla seguente legge:

$$i = E \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$$

dove

- E è la tensione applicata al solenoide, misurata in Volt;
 - i è l'intensità di corrente misurata in milliampère;
 - t è il tempo misurato in millisecondi.
- a. Quale corrente ottengo dopo un tempo $t = 4ms$, se applico una tensione $E = 8V$?
- b. Quale tensione bisogna applicare per avere una corrente $i = 10mA$, dopo un tempo $t = 2ms$?



5. La resistività r di un semiconduttore varia al variare della temperatura assoluta T secondo la legge:

$$r = Ae^{\frac{B}{T}}$$

dove r è misurata in ohm per metro e T è misurata in gradi Kelvin.

Le misure su un campione di silicio hanno dato i risultati qui a fianco.

T	r
273	1,8
293	0,6

- a. Calcola il valore dei coefficienti A e B .
- b. Basati sulla legge per prevedere la resistività r del silicio alla temperatura $T = 353$.